Algoritmos e Estruturas de Dados I

Prof. Tiago Eugenio de Melo
tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

- O conteúdo dessa aula é parcialmente proveniente do Capítulo 11 do livro “Fundamentals of Python – From First Programs Through Data Structures”.
- As palavras com a fonte `Courier` indicam uma palavra-reservada da linguagem de programação.
- Basta clicar na imagem para acessar as fontes das animações e figuras usadas nesse material.

Objetivos

- Após o término dessa aula você deverá ser capaz de:
  - Medir a performance de um algoritmo através do tempo e do número de instruções executadas com diferentes tamanhos de dados.
  - Analisar a performance de um algoritmo e determinar a sua ordem de complexidade utilizando a notação big-O.
  - Diferenciar as ordens de complexidade de algoritmos.

Medindo a Eficiência de Algoritmos

- Na escolha de algoritmos, nós frequentemente temos que optar entre espaço e tempo (*tradeoff*).
  - Um algoritmo pode ser projetado para ter ganhos de veloacidade ao custo de usar espaço extra de memória.
- Memória tem, atualmente, um preço aceitável para computadores, mas isso ainda não é o mesmo para dispositivos menores.
  - Exemplo: memória de celular.

Medindo o tempo de execução de um algoritmo

- Uma maneira de medir o custo de tempo de um algoritmo é usar o clock do computador para obter o tempo real de execução.
  - ***Benchmarking*** ou ***profiling***.
- Nós podemos usar a função `time ( )` do módulo **`time`** de Python.
  - Essa função retorna o número de segundos transcorridos entre a hora do computador e a data de 1º de janeiro de 1970.

Medindo o tempo de execução de um algoritmo (cont.)

```
1  import time
2
3  problemSize = 10000000
4  print "%12s%16s" % ("Problem Size", "Seconds")
5  for count in xrange(5):
6
7      start = time.time()
8      # The start of the algorithm
9      work = 1
10     for x in xrange(problemSize):
11         work += 1
12         work -= 1
13     # The end of the algorithm
14     elapsed = time.time() - start
15
16     print "%12d%16.3f" % (problemSize, elapsed)
17     problemSize *= 2
```

Medindo o tempo de execução de um algoritmo (cont.)

- Saída do programa anterior:

Problem Size	Seconds
10000000	0.917
20000000	1.828
40000000	3.663
80000000	7.325
160000000	14.642

Medindo o tempo de execução de um algoritmo (cont.)

- Versão modificada do programa anterior:

```
for j in xrange(problemSize):
    for k in xrange(problemSize):
        work += 1
        work -= 1
```

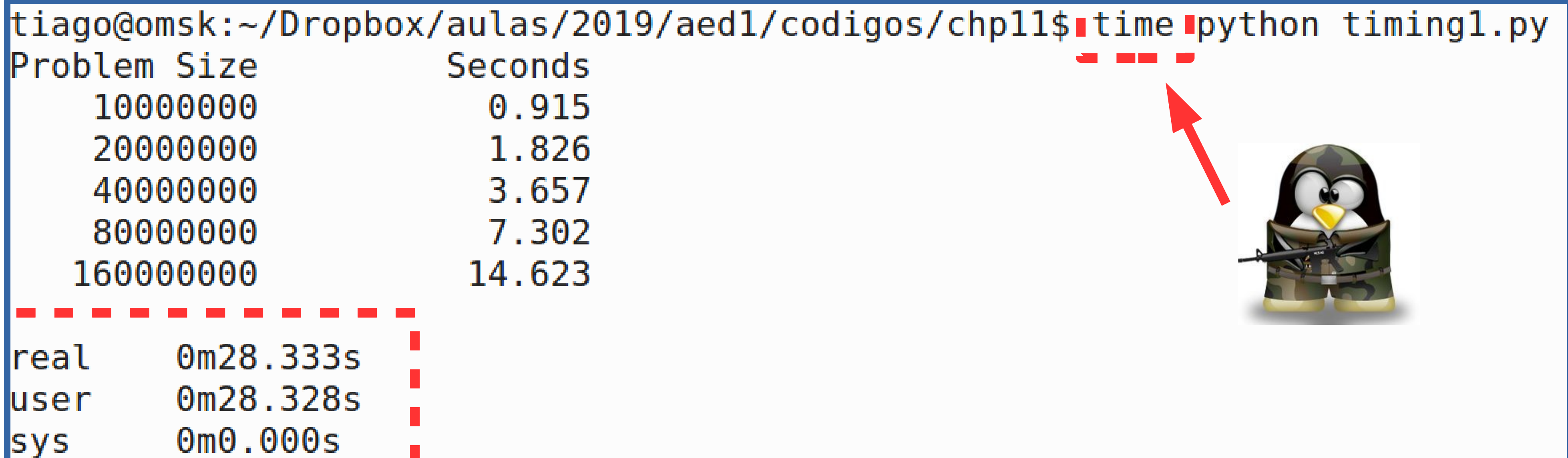
- Resultado:

Problem Size	Seconds
1000	0.387
2000	1.581
4000	6.463
8000	25.702
16000	102.666

[FIGURE 11.2] The output of the second tester program with a nested loop and initial problem size of 1000

Medindo o tempo de execução de um algoritmo (cont.)

- Medição de tempo no Linux



```
tiago@omsk:~/Dropbox/aulas/2019/aed1/codigos/chp11$ time python timing1.py
Problem Size          Seconds
    10000000            0.915
    20000000            1.826
    40000000            3.657
    80000000            7.302
   160000000           14.623

real    0m28.333s
user    0m28.328s
sys     0m0.000s
```

Medindo o tempo de execução de um algoritmo (cont.)

- Este método permite predição precisa do tempo de execução de muitos algoritmos.
- Problemas:
  - Diferentes plataformas de hardware têm diferentes velocidades. Portanto, o tempo de execução de um algoritmo pode variar de acordo com a máquina.
    - O tempo de execução varia também de acordo com o sistema operacional e a linguagem de programação.
  - É impraticável determinar o tempo de execução para alguns algoritmos com um conjunto de dados (*dataset*) muito grande.

Quantidade de instruções

- Outra técnica é contar o número de instruções executadas com diferentes tamanhos de dados.
  - Nós contamos as instruções em código de alto-nível em que o algoritmo é escrito. A contagem não é feita das instruções do programa na sua linguagem de máquina executável.
- Distinção entre:
  - Instruções que executam o mesmo número de vezes independentemente do tamanho do problema.
  - Instruções cuja quantidade varia de acordo com o tamanho do problema.

Quantidade de instruções (cont.)

```
 1 problemSize = 1000
 2 print "%12s%15s" % ("Problem Size", "Iterations")
 3 for count in xrange(5):
 4     number = 0
 5 
 6     # The start of the algorithm
 7     work = 1
 8     for j in xrange(problemSize):
 9         for k in xrange(problemSize):
10             number += 1
11             work += 1
12             work -= 1
13    # The end of the algorithm
14 
15     print "%12d%15d" % (problemSize, number)
16     problemSize *= 2
```

Quantidade de instruções (cont.)

- Saída do programa anterior:

Problem Size	Iterations
1000	1000000
2000	4000000
4000	16000000
8000	64000000
16000	256000000

Quantidade de instruções (cont.)

```
1 class Counter(object):
2     """Tracks a count."""
3 
4     def __init__(self):
5         self._number = 0
6 
7     def increment(self):
8         self._number += 1
9 
10    def __str__(self):
11        return str(self._number)
12
13 def fib(n, counter):
14     """Count the number of calls of the Fibonacci
15     function."""
16     counter.increment()
17     if n < 3:
18         return 1
19     else:
20         return fib(n - 1, counter) + fib(n - 2, counter)
21
22 problemSize = 2
23 print "%12s%15s" % ("Problem Size", "Calls")
24 for count in xrange(5):
25     counter = Counter()
26
27     # The start of the algorithm
28     fib(problemSize, counter)
29     # The end of the algorithm
30
31     print "%12d%15s" % (problemSize, counter)
32     problemSize *= 2
```

Quantidade de instruções (cont.)

- Saída do programa anterior:

Problem Size	Calls
2	1
4	5
8	41
16	1973
32	4356617

Medir a memória usada por um algoritmo

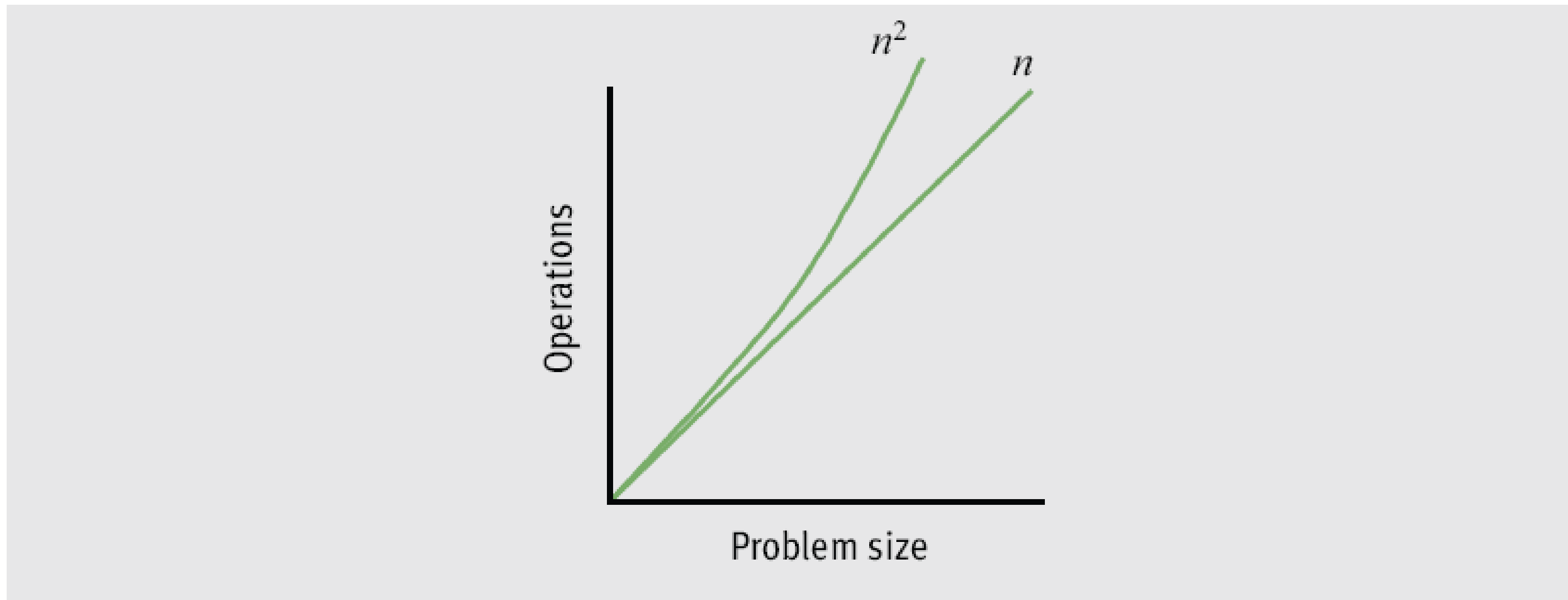
- Uma análise completa de recursos usados por um algoritmo inclui a quantidade de memória exigida para execução do algoritmo.
- Nós focamos nas taxas potenciais de crescimento.
- Alguns algoritmos requerem a mesma quantidade de memória para resolver qualquer problema.
- Outros algoritmos requerem mais memória conforme o crescimento do tamanho do problema.

Análise de complexidade

- Análise de complexidade implica ler o algoritmo e usar lápis e papel para manipular algumas análise algébricas.
  - É usada para determinar a eficiência de algoritmos.
  - Nos permite medir a eficiência dos algoritmos independentemente da plataforma ou da quantidade de instruções.

Ordens de complexidade

- Considere os dois resultados abaixo:



[FIGURE 11.5] A graph of the amounts of work done in the tester programs

Ordens de complexidade (cont.)

PROBLEM SIZE	WORK OF THE FIRST ALGORITHM	WORK OF THE SECOND ALGORITHM
2	2	4
10	10	100
1000	1000	1,000,000

[TABLE 11.1] The amounts of work in the tester programs

- As performances desses algoritmos variam pelo que costumamos chamar de **ordem de complexidade**:
  - O primeiro algoritmo é **linear**.
  - O segundo algoritmo é **quadrático**.

Ordens de complexidade (cont.)

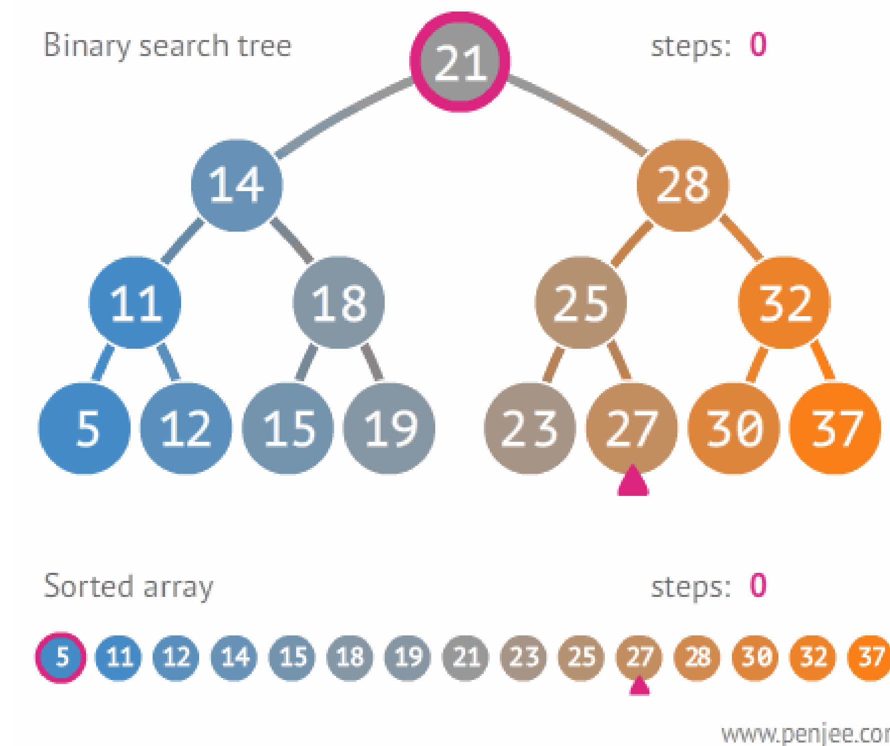
- Ordens de complexidade
  - Constante
    - Requer o mesmo número de operações independentemente do tamanho do problema.
    - É o caso, por exemplo, do acesso direto a um elemento de uma matriz.
    - Representamos: O (1)

Ordens de complexidade (cont.)

- Ordens de complexidade
  - Logaritmo
    - O volume de operações cresce na proporção ao log n do tamanho do problema.
    - O crescimento do número de operações é menor do que o do número de itens.
    - É o caso, por exemplo, de algoritmos de busca em árvores binárias ordenadas (*Binary Search Trees*).
    - Representamos: O (log n)

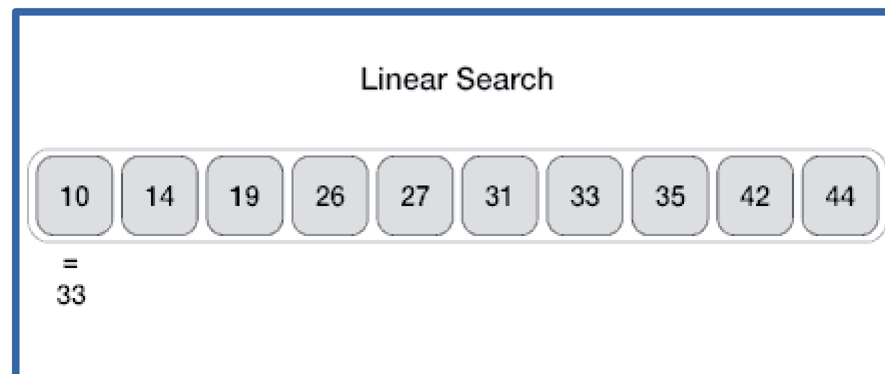
Ordens de complexidade (cont.)

- Ordens de complexidade
  - Logaritmo
    - Árvores binárias ordenadas (*Binary Search Trees*).



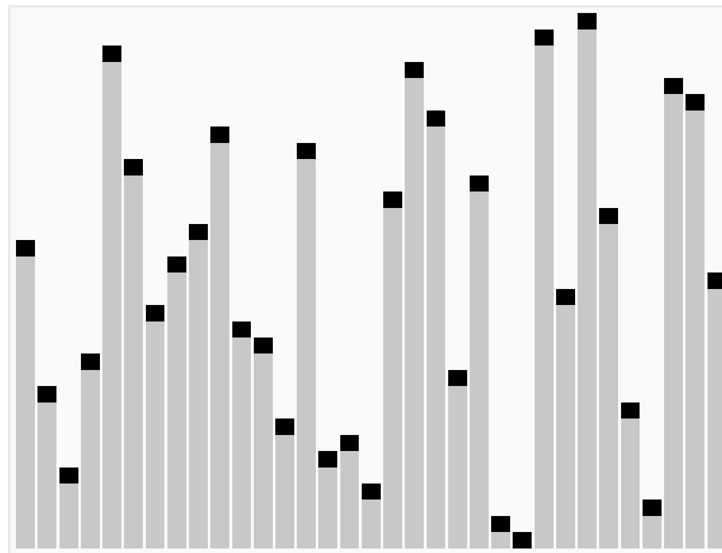
Ordens de complexidade (cont.)

- Ordens de complexidade
  - Linear
    - O crescimento do número de operações cresce na proporção direta do crescimento do tamanho do problema.
    - É o caso de algoritmos de busca em um vetor não ordenado.
    - Representamos: O (n)



Ordens de complexidade (cont.)

- Ordens de complexidade
  - Sub-quadrático (ou super-linear)
    - É o caso, por exemplo, do algoritmo de ordenação Quicksort. Ele tem essa complexidade no caso médio.
    - Representamos: O (n log n)

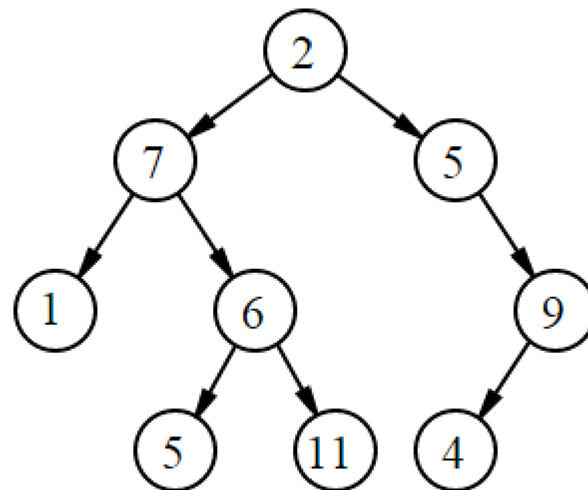


Ordens de complexidade (cont.)

- Ordens de complexidade
  - Polinomial
    - O tempo de execução do algoritmo cresce a uma taxa de n^k, onde k é uma constante maior do que 1. Exemplos: n^2, n^3 etc.
    - n^2 e n^3 são pertencem à mesma ordem de complexidade.
    - São algoritmos factíveis, mas tendem a se tornar muito ruins quando a quantidade de dados é suficientemente grande.
    - É o caso de algoritmos que têm dois laços encadeados. Exemplo: processamento de uma matriz bidimensional.
    - Representamos: $O(n^k)$

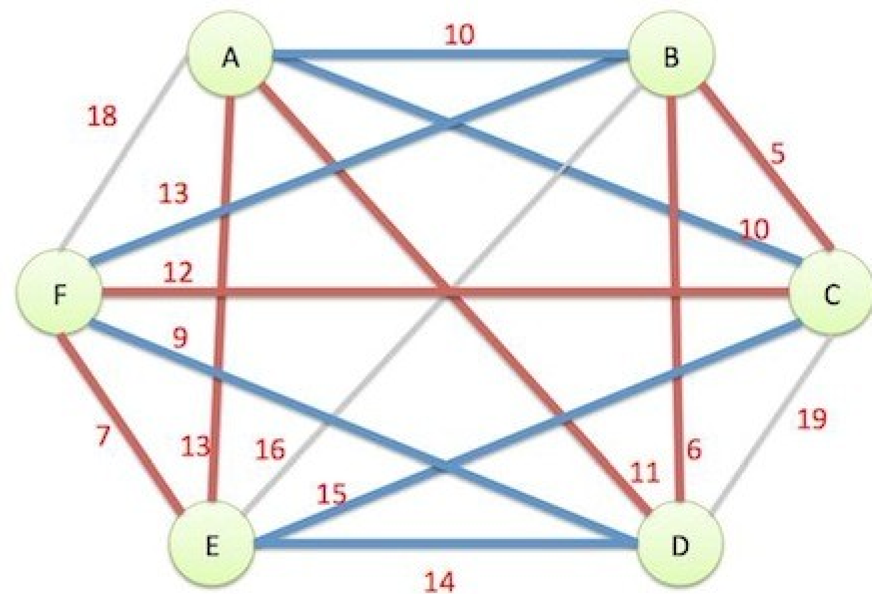
Ordens de complexidade (cont.)

- Ordens de complexidade
  - Exponencial
    - É o tipo de algoritmo que não consegue executar problemas grandes.
    - É o caso de algoritmos que fazem busca em árvores binárias não ordenadas.
    - Representamos: $O(2^n)$

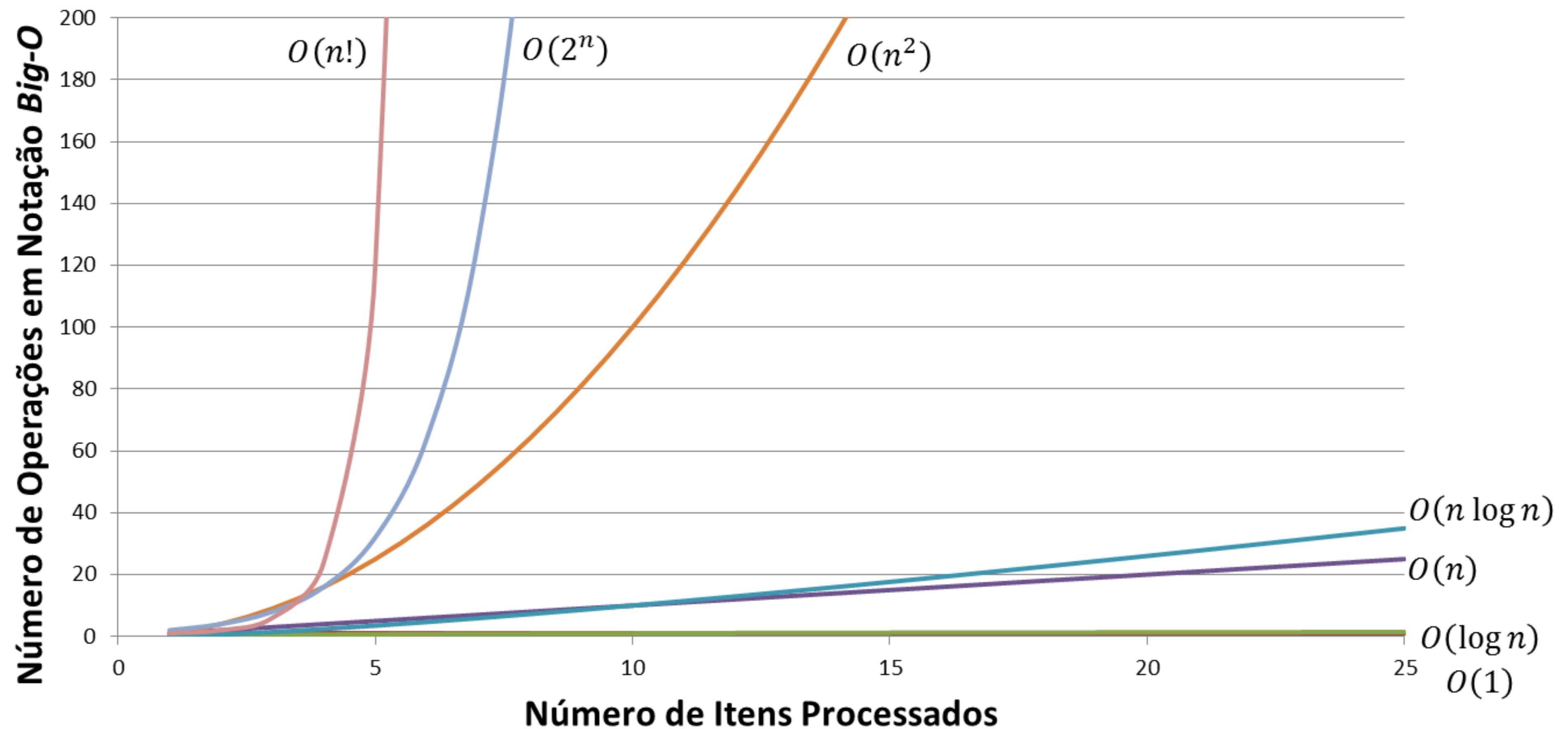


Ordens de complexidade (cont.)

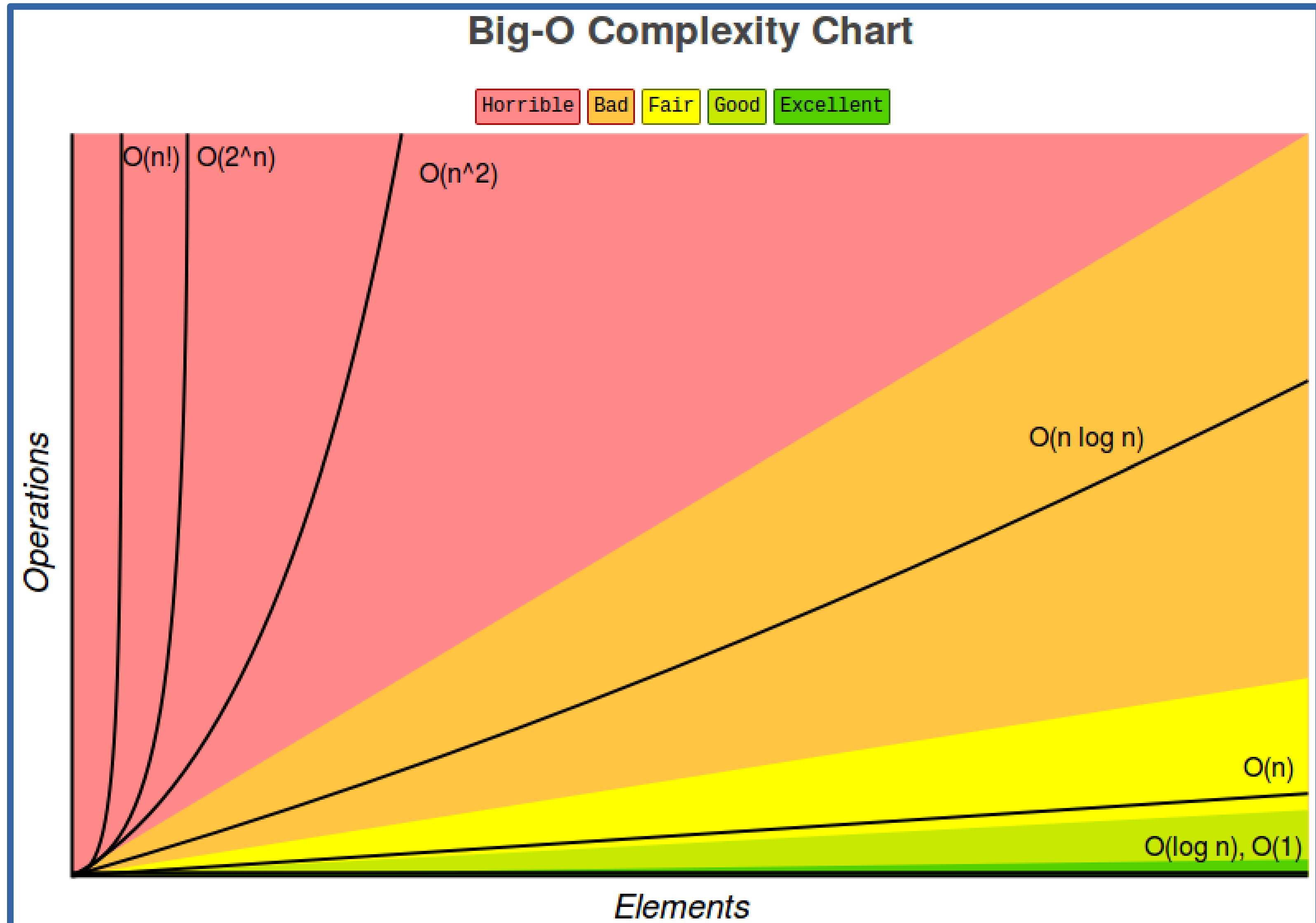
- Ordens de complexidade
  - Fatorial
    - O número de instruções executadas cresce muito rapidamente para um pequeno número de itens processados.
    - Exemplo: problema do caixeiro viajante.
    - Representamos: O (n!)



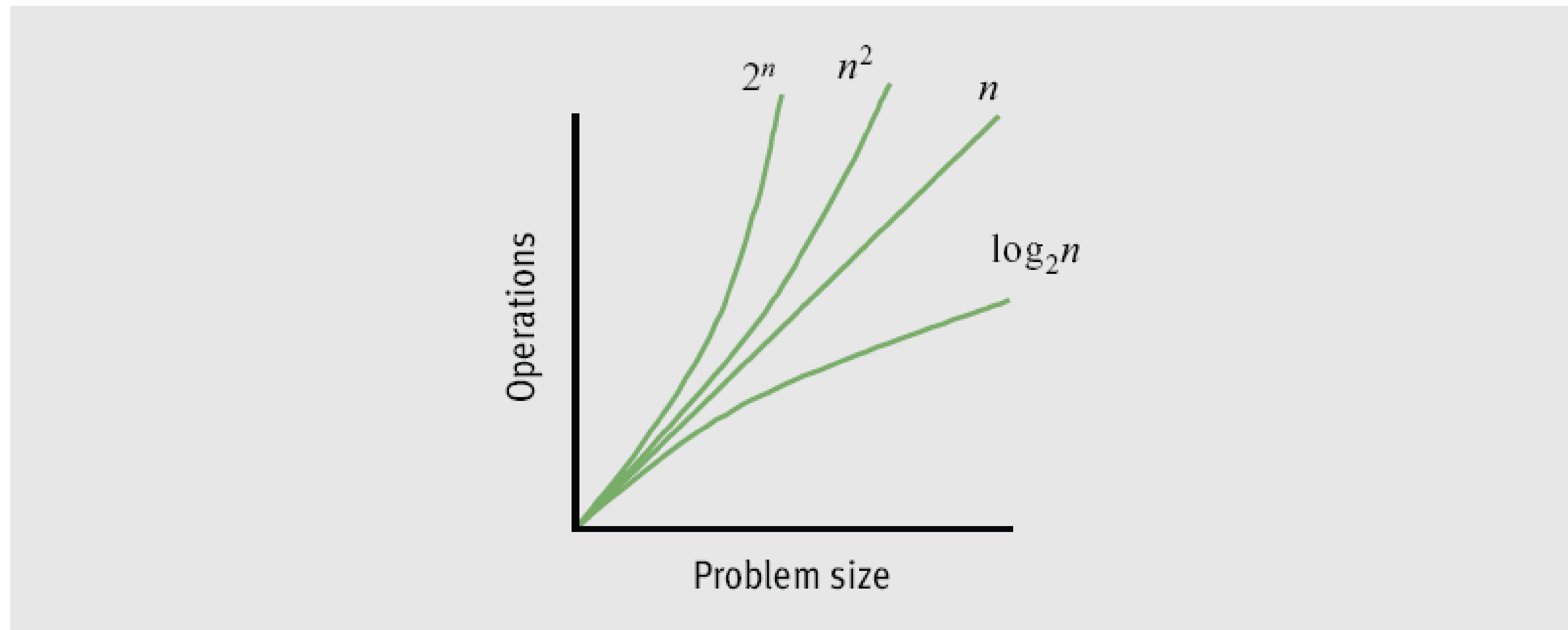
Ordens de complexidade (cont.)



Ordens de complexidade (cont.)



Ordens de complexidade (cont.)



[FIGURE 11.6] A graph of some sample orders of complexity

n	LOGARITHMIC ($\log_2 n$)	LINEAR (n)	QUADRATIC (n^2)	EXPONENTIAL (2^n)
100	7	100	10,000	Off the charts
1000	10	1000	1,000,000	Off the charts
1,000,000	20	1,000,000	1,000,000,000,000	Really off the charts

[TABLE 11.2] Some sample orders of complexity

Notação Big-O

- A quantidade de trabalho ("*work*", "*job*") em um algoritmo tipicamente é a soma de vários termos em um polinômio.
  - Nós focamos o termo chamado de **dominante**.
- Como n se torna grande, o termo dominante se torna tão grande que a quantidade de trabalho representada pelos demais termo pode ser ignorada.
  - Chamamos isso de **análise assintótica**.
- **Notação Big-O**: utilizada para expressar a eficiência ou complexidade computacional de um algoritmo.

O papel da constante de proporcionalidade

- A **constante de proporcionalidade** envolve os termos e coeficientes que são geralmente ignorados durante a análise de complexidade (Big-O).
  - Porém, quando esses itens são grandes, eles podem ter um impacto no algoritmo, especialmente quando lidamos com conjunto de dados de tamanho pequeno ou médio.

Algoritmos de Busca

- Nós agora apresentamos alguns algoritmos que podem ser usados para busca e ordenação de listas (ou vetores).
  - Nós iniciaremos com a discussão sobre projeto de um algoritmo.
  - Então nós mostraremos a sua implementação como uma função de Python.
  - Finalmente, nós faremos uma análise da complexidade computacional dos algoritmos.
- Por questão de organização da aula, cada função processará uma lista de inteiros.

Busca pelo Mínimo

- A função `min( )` de Python retorna o menor item de uma lista.

```
def ourMin(lyst):
    """Returns the position of the minimum item."""
    minpos = 0
    current = 1
    while current < len(lyst):
        if lyst[current] < lyst[minpos]:
            minpos = current
        current += 1
    return minpos
```

- n - 1 comparações para uma lista de tamanho n
- O (n)

Melhor caso, pior caso e caso médio

- A busca sequencial (linear) considera três casos:
  - Pior caso. O item está no final da lista ou não está na lista.
    - O(n)
  - Melhor caso. O item é o primeiro da lista.
    - O(1)
  - Caso médio.
    - O(n)

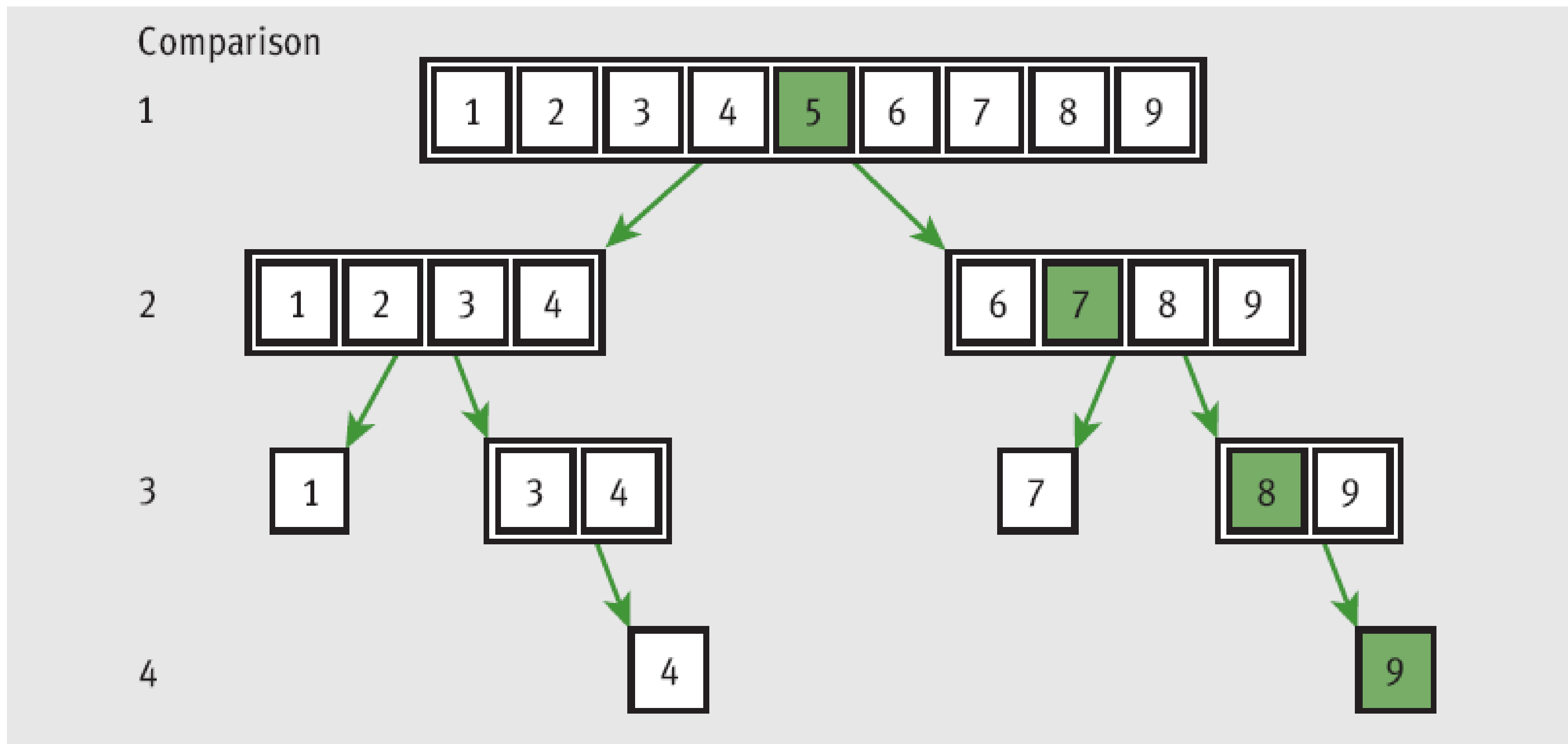
Busca binária em uma lista

- Uma busca linear (sequencial) é necessária se os dados já estão ordenados.
- Quando os dados já estão ordenados, podemos usar a busca binária.

```
def binarySearch(target, lyst):
    left = 0
    right = len(lyst) - 1
    while left <= right:
        midpoint = (left + right) / 2
        if target == lyst[midpoint]:
            return midpoint
        elif target < lyst[midpoint]:
            right = midpoint - 1
        else:
            left = midpoint + 1
    return -1
```

Busca binária em uma lista (cont.)

- Mais eficiente do que a busca linear.
  - Custo adicional para manter a lista ordenada.



[FIGURE 11.7] The items of a list visited during a binary search for 10

Algoritmos de Ordenação

- A função de ordenação que desenvolvemos aqui opera sobre uma lista de inteiros e utiliza uma função swap para trocar as posições de dois elementos da lista.

```
def swap(lyst, i, j):
    """Exchanges the items at positions i and j."""
    # You could say lyst[i], lyst[j] = lyst[j], lyst[i]
    # but the following code shows what is really going on
    temp = lyst[i]
    lyst[i] = lyst[j]
    lyst[j] = temp
```

Algoritmo de Seleção (ordenação)

- Talvez a mais simples estratégia é pesquisar na lista pela posição do menor item.
  - Se a posição não for igual à primeira posição, o algoritmo troca (*swap*) os itens nessas posições.

UNSORTED LIST	AFTER 1st PASS	AFTER 2nd PASS	AFTER 3rd PASS	AFTER 4th PASS
5	1*	1	1	1
3	3	2*	2	2
1	5*	5	3*	3
2	2	3*	5*	4*
4	4	4	4	5*

[TABLE 11.3] A trace of the data during a selection sort

Algoritmo de Seleção (cont.)

- O algoritmo de seleção é $O(n^2)$ em todos os casos.
- Para grandes conjuntos de dados, o custo de trocar os elementos pode também ser significativo.

```
def selectionSort(lyst):
    i = 0
    while i < len(lyst) - 1:          # Do n - 1 searches
        minIndex = i                  # for the smallest
        j = i + 1
        while j < len(lyst):          # Start a search
            if lyst[j] < lyst[minIndex]:
                minIndex = j
            j += 1
        if minIndex != i:             # Exchange if needed
            swap(lyst, minIndex, i)
        i += 1
```

Algoritmo da Bolha

- Começa no início da lista e compara pares de itens conforme percorre a lista.
  - Quando pares de itens estão fora de ordem, ele faz a troca dos itens.

UNSORTED LIST	AFTER 1st PASS	AFTER 2nd PASS	AFTER 3rd PASS	AFTER 4th PASS
5	4*	4	4	4
4	5*	2*	2	2
2	2	5*	1*	1
1	1	1	5*	3*
3	3	3	3	5*

[TABLE 11.4] A trace of the data during a bubble sort

Algoritmo da Bolha (cont.)

- Algoritmo como uma função:

```
def bubbleSort(lyst):
    n = len(lyst)
    while n > 1:                         # Do n - 1 bubbles
        i = 1                            # Start each bubble
        while i < n:
            if lyst[i] < lyst[i - 1]:    # Exchange if needed
                swap(lyst, i, i - 1)
            i += 1
        n -= 1
```

Algoritmo da Bolha (cont.)

- Algoritmo da Bolha é $O(n^2)$.
- Ele não fará trocas se a lista já estiver ordenado.
- O comportamento para o pior caso para as trocas (swap) é muito maior que linear.
- Pode ser melhorado, mas o caso médio ainda será $O(n^2)$.

Algoritmo de Inserção

```
def insertionSort(lyst):
    i = 1
    while i < len(lyst):
        itemToInsert = lyst[i]
        j = i - 1
        while j >= 0:
            if itemToInsert < lyst[j]:
                lyst[j + 1] = lyst[j]
                j -= 1
            else:
                break
        lyst[j + 1] = itemToInsert
        i += 1
```

- O pior caso do algoritmo é $O(n^2)$.

Algoritmo de Inserção (cont.)

UNSORTED LIST	AFTER 1st PASS	AFTER 2nd PASS	AFTER 3rd PASS	AFTER 4th PASS
2	2	1*	1	1
5 ←	5 (no insertion)	2	2	2
1	1←	5	4*	3*
4	4	4 ←	5	4
3	3	3	3 ←	5

[TABLE 11.5] A trace of the data during an insertion sort

Algoritmo de Inserção (cont.)

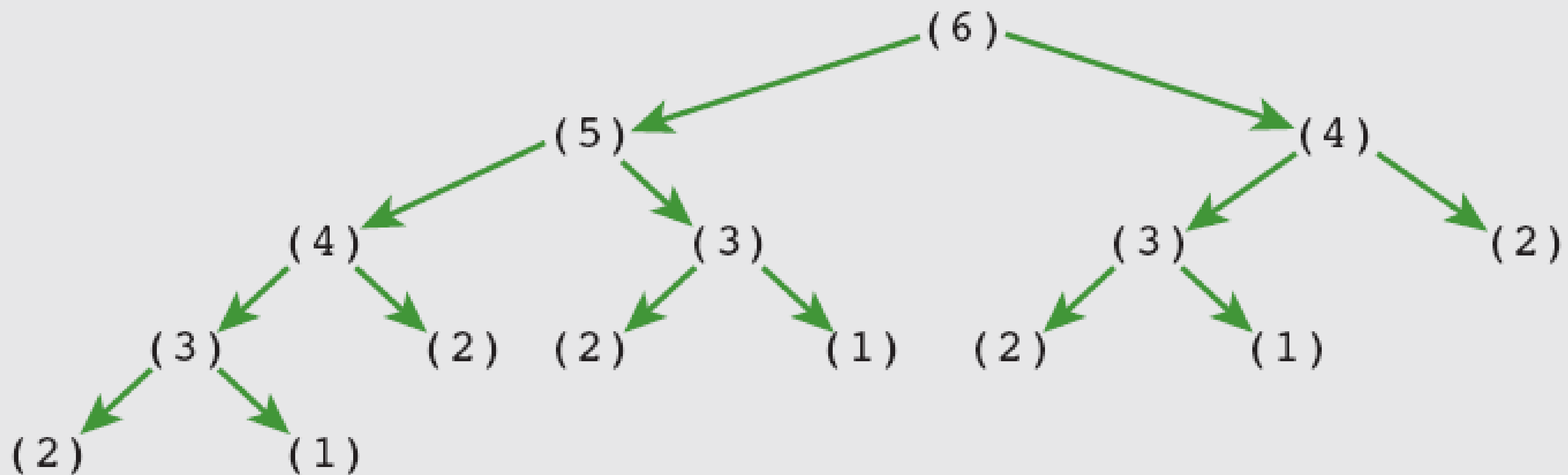
- Quanto mais ordenada estiver a lista de entrada, mais eficiente será o algoritmo.
- No melhor caso, quando a lista está ordenada, o algoritmo de ordenação tem complexidade linear.
- No caso médio, o algoritmo de inserção ainda é quadrático.

Melhor caso, pior caso e caso médio

- Através da análise de complexidade de um algoritmo, o seu comportamento pode ser analisado como:
  - Melhor caso.
  - Pior caso.
  - Caso médio.
- Existem algoritmos que a performace do melhor caso e caso médio sejam similares, mas a eficiência pode cair significativamente no pior caso.
- Quando nós desenvolvemos algoritmos, é importante estarmos cientes dessas distinções.

Fibonacci Recursivo: um algoritmo exponencial

```
def fib(n):
    """The recursive Fibonacci function."""
    if n < 3:
        return 1
    else:
        return fib(n - 1) + fib(n - 2)
```



[FIGURE 11.8] A call tree for **fib(6)**

Fibonacci Recursivo: um algoritmo exponencial (cont.)

- Algoritmos exponenciais são geralmente impraticáveis de serem usados, mesmo com pequeno conjunto de dados de entrada.
- Funções recursivas que são chamadas repetidamente com os mesmos argumentos podem ser mais eficientemente utilizadas através de uma técnica chamada de ***memoization***.

Fibonacci Recursivo: um algoritmo exponencial (cont.)

- Técnica de ***memoization***:
  - O programa mantém uma tabela de valores para cada argumento usado com a função.
  - Antes da função recursivamente processar um valor para um dado argumento, ele checa a tabela para ver se o argumento já tem um valor.

Convertendo o Fibonnaci para um algoritmo linear

Pseudocode:

```
Set sum to 1
Set first to 1
Set second to 1
Set count to 3
While count <= N
    Set sum to first + second
    Set first to second
    Set second to sum
    Increment count
```

Convertendo o Fibonnaci para um algoritmo linear (cont.)

```
def fib(n, counter):
    """Count the number of iterations in the Fibonacci
    function."""
    sum = 1
    first = 1
    second = 1
    count = 3
    while count <= n:
        counter.increment()
        sum = first + second
        first = second
        second = sum
        count += 1
    return sum

Problem Size     Iterations
           2              0
           4              2
           8              6
          16             14
          32             30
```

Resumo

- Diferentes algoritmos podem ser ranqueados de acordo com os recursos de tempo e memória que eles exigem para rodar.
- Tempo de execução de um algoritmo pode ser medido empiricamente utilizando o *clock* do computador.
- A contagem das instruções de um algoritmo fornece uma medida da quantidade de trabalho que o algoritmo faz.
- A taxa de crescimento de trabalho de um algoritmo pode ser representada como uma função do tamanho das instâncias do problema (tamanho da entrada).
- A notação Big-O é uma forma comum de expressar um comportamento do tempo de execução de um algoritmo.

Resumo (cont.)

- Classes comuns do tempo de execução de algoritmos são: $O(\log_2 n)$, $O(n)$, $O(n^2)$, and $O(k^n)$.
- Um algoritmo pode ter diferenças de eficiência no melhor, pior e caso médio.
- A busca binária é muito mais rápida do que a busca linear. Porém, os dados devem estar ordenados.
- Algoritmos exponenciais são impraticáveis de serem usados para grandes conjuntos de dados.