Algoritmos e Estruturas de Dados I

Árvores

Prof. Tiago Eugenio de Melo
tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

- O conteúdo dessa aula é parcialmente proveniente do Capítulo 13 do livro “*Data Structure and Algorithms Using Python*”.
- As palavras com a fonte `Courier` indicam uma palavra-reservada da linguagem de programação.

Árvores

Introdução

Introdução

- São exemplos de estruturas que organizam os dados de maneira linear (sequencial):

Introdução

- São exemplos de estruturas que organizam os dados de maneira linear (sequencial):
  - Array.

Introdução

- São exemplos de estruturas que organizam os dados de maneira linear (sequencial):
  - Array.
  - Lista.

Introdução

- São exemplos de estruturas que organizam os dados de maneira linear (sequencial):
  - Array.
  - Lista.
  - Lista ligada.

Introdução

- São exemplos de estruturas que organizam os dados de maneira linear (sequencial):
  - Array.
  - Lista.
  - Lista ligada.
  - Pilhas.

Introdução

- São exemplos de estruturas que organizam os dados de maneira linear (sequencial):
  - Array.
  - Lista.
  - Lista ligada.
  - Pilhas.
  - Filas.

Introdução

- São exemplos de estruturas que organizam os dados de maneira linear (sequencial):
  - Array.
  - Lista.
  - Lista ligada.
  - Pilhas.
  - Filas.
- Todas têm uma noção de *anterior* e *posterior*.

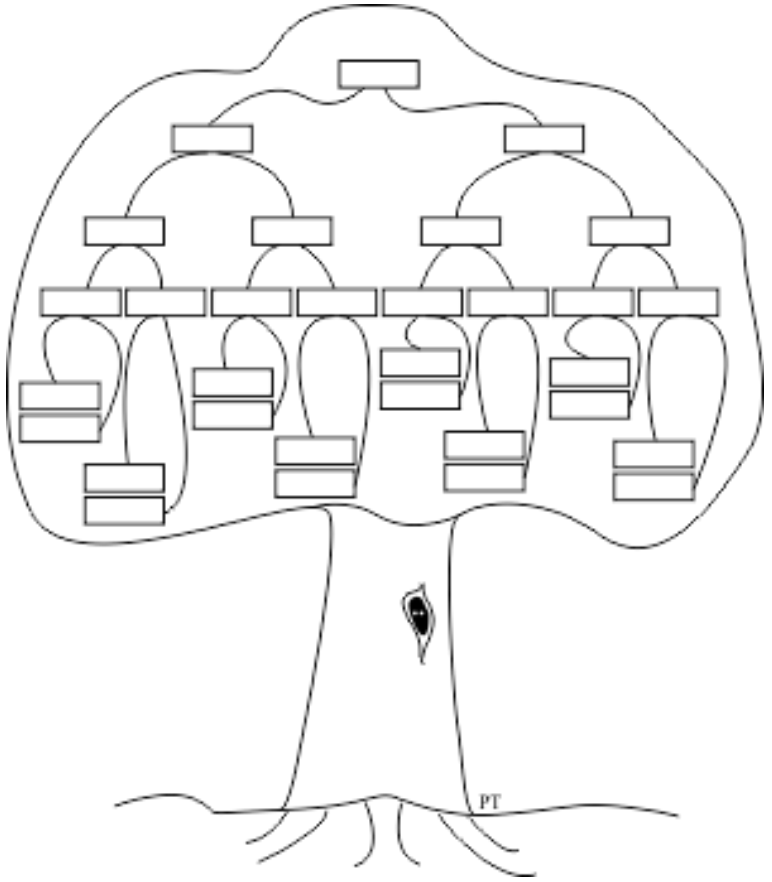
Introdução

Introdução

- A estrutura de dados do tipo árvore permite organizar os dados de maneira **hierárquica.**

Introdução

- A estrutura de dados do tipo árvore permite organizar os dados de maneira **hierárquica.**



Introdução

Introdução

- A estrutura de dados do tipo árvore permite organizar os dados em maneira **hierárquica**

Introdução

- A estrutura de dados do tipo árvore permite organizar os dados em maneira **hierárquica**
- Útil para uma série de problemas:

Introdução

- A estrutura de dados do tipo árvore permite organizar os dados em maneira **hierárquica**
- Útil para uma série de problemas:
  - Mineração de dados.

Introdução

- A estrutura de dados do tipo árvore permite organizar os dados em maneira **hierárquica**
- Útil para uma série de problemas:
  - Mineração de dados.
  - Sistemas de banco de dados.

Introdução

- A estrutura de dados do tipo árvore permite organizar os dados em maneira **hierárquica**
- Útil para uma série de problemas:
  - Mineração de dados.
  - Sistemas de banco de dados.
  - Inteligência artificial.

Introdução

- A estrutura de dados do tipo árvore permite organizar os dados em maneira **hierárquica**
- Útil para uma série de problemas:
  - Mineração de dados.
  - Sistemas de banco de dados.
  - Inteligência artificial.
  - Sistemas operacionais.

Introdução

- A estrutura de dados do tipo árvore permite organizar os dados em maneira **hierárquica**
- Útil para uma série de problemas:
  - Mineração de dados.
  - Sistemas de banco de dados.
  - Inteligência artificial.
  - Sistemas operacionais.
  - Etc.

Introdução

Introdução

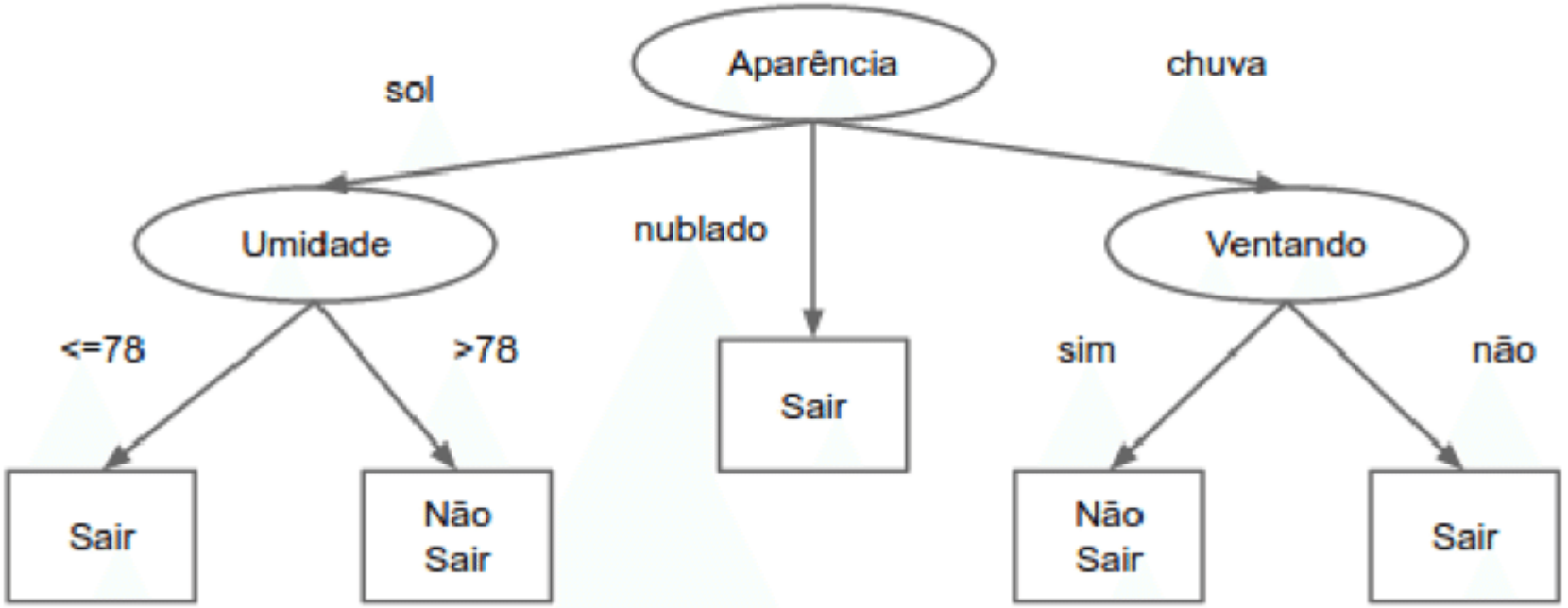
- Inteligência artificial

Introdução

- Inteligência artificial
  - Árvores de decisão

Introdução

- Inteligência artificial
  - Árvores de decisão



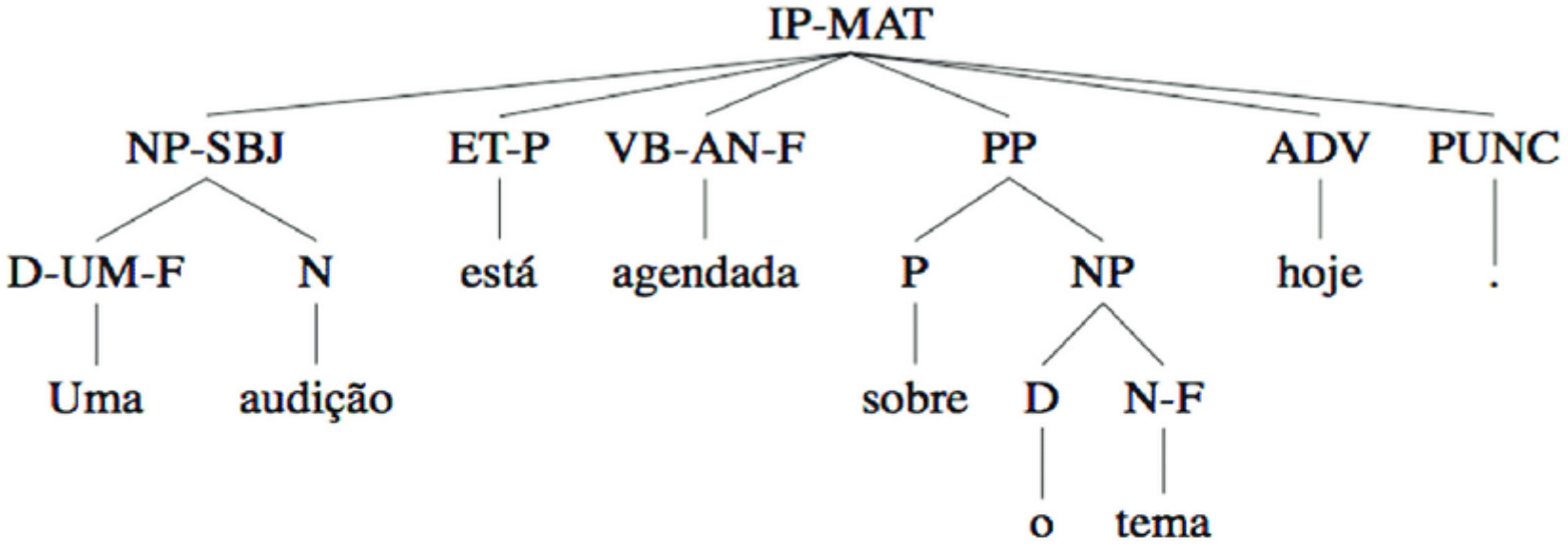
Introdução

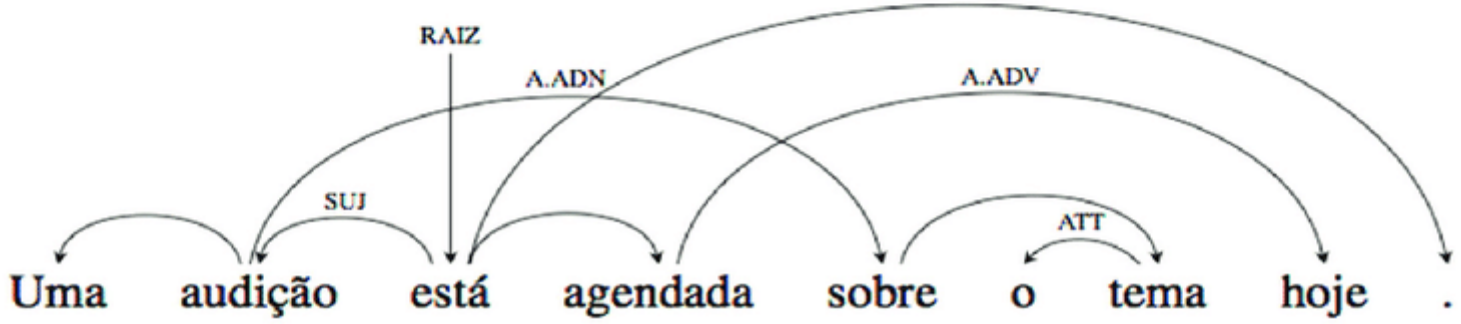
Introdução

- Processamento de Linguagem Natural

Introdução

- Processamento de Linguagem Natural





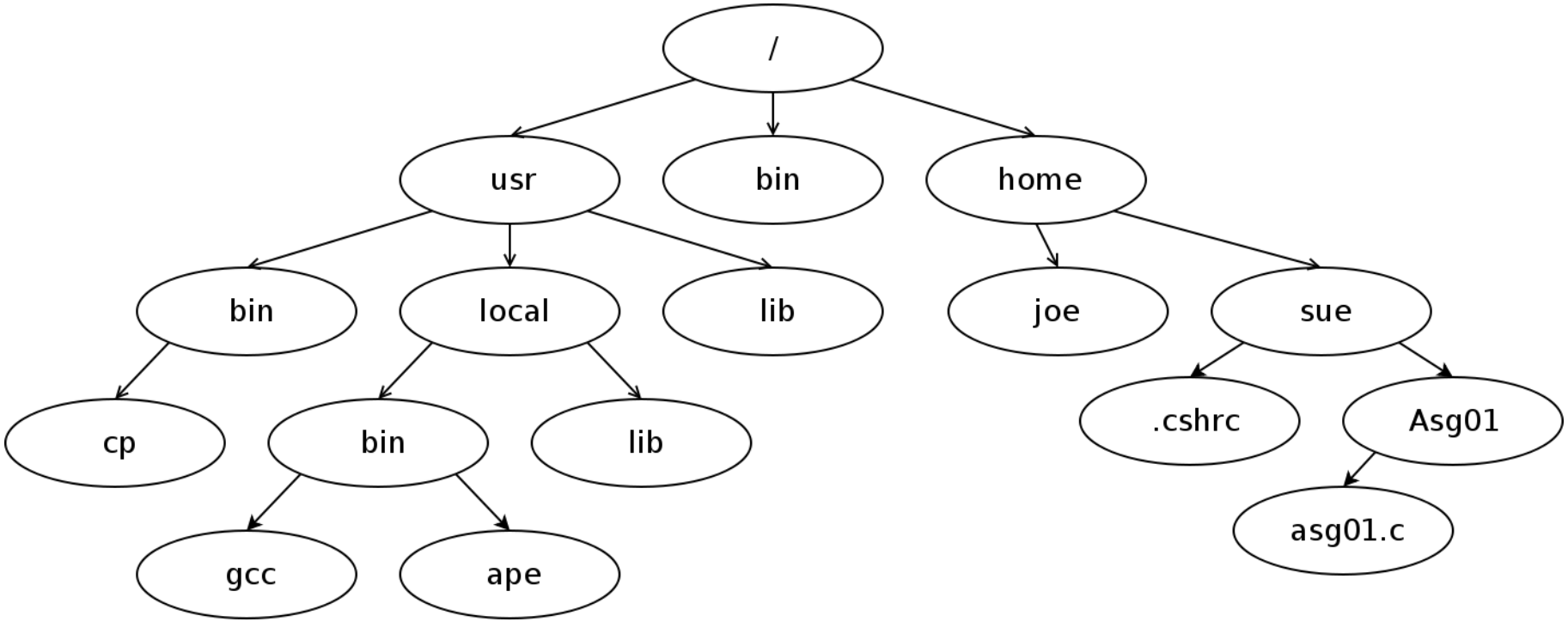
Introdução

Introdução

- A estrutura de diretórios e arquivos de um sistema de arquivos é um exemplo de árvore:

Introdução

- A estrutura de diretórios e arquivos de um sistema de arquivos é um exemplo de árvore:



Estrutura de Dados

Estrutura de Dados

- Uma árvore é formada por:

Estrutura de Dados

- Uma árvore é formada por:
  - Nós (*nodes*)

Estrutura de Dados

- Uma árvore é formada por:
  - Nós (*nodes*)
    - Armazenam os dados.

Estrutura de Dados

- Uma árvore é formada por:
  - Nós (*nodes*)
    - Armazenam os dados.
  - Vértices (*edges*)

Estrutura de Dados

- Uma árvore é formada por:
  - Nós (*nodes*)
    - Armazenam os dados.
  - Vértices (*edges*)
    - Par de nós são ligados por vértices.

Estrutura de Dados

Estrutura de Dados

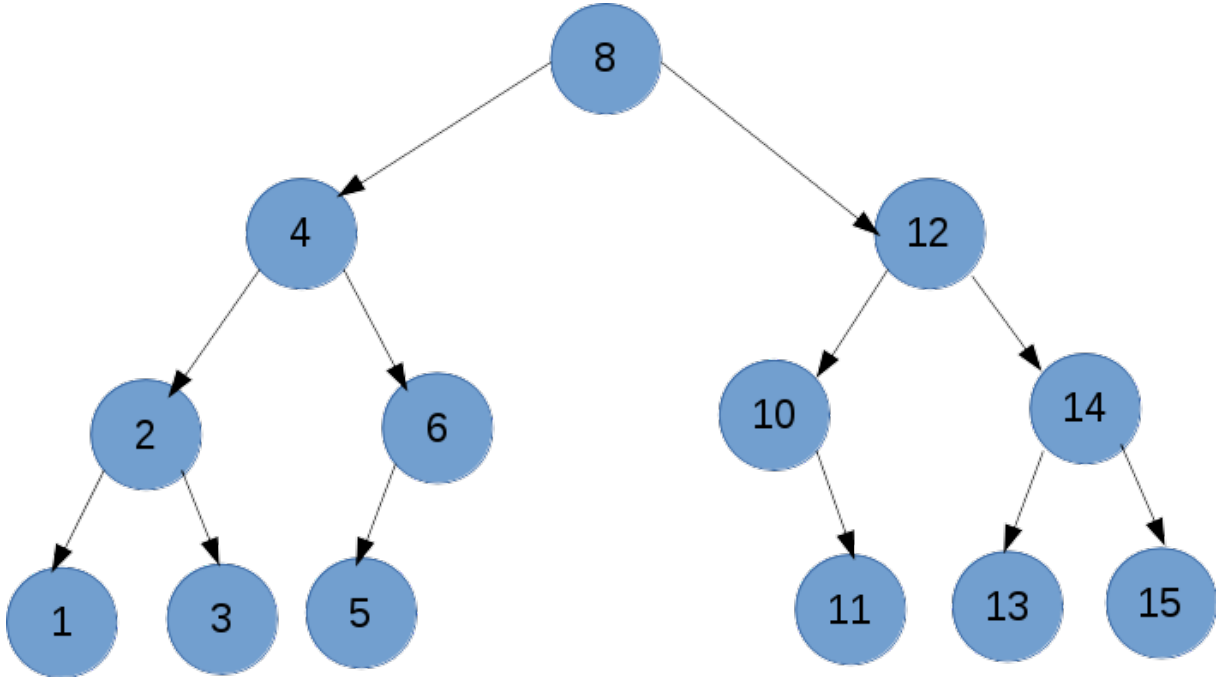
- Definição formal:

Estrutura de Dados

- Definição formal:
  - Um conjunto de nós que pode ser vazio ou ter um nó raiz que está conectado por vértices a zero ou mais subárvores para formar uma estrutura hierárquica.

Estrutura de Dados

- Definição formal:
  - Um conjunto de nós que pode ser vazio ou ter um nó raiz que está conectado por vértices a zero ou mais subárvores para formar uma estrutura hierárquica.



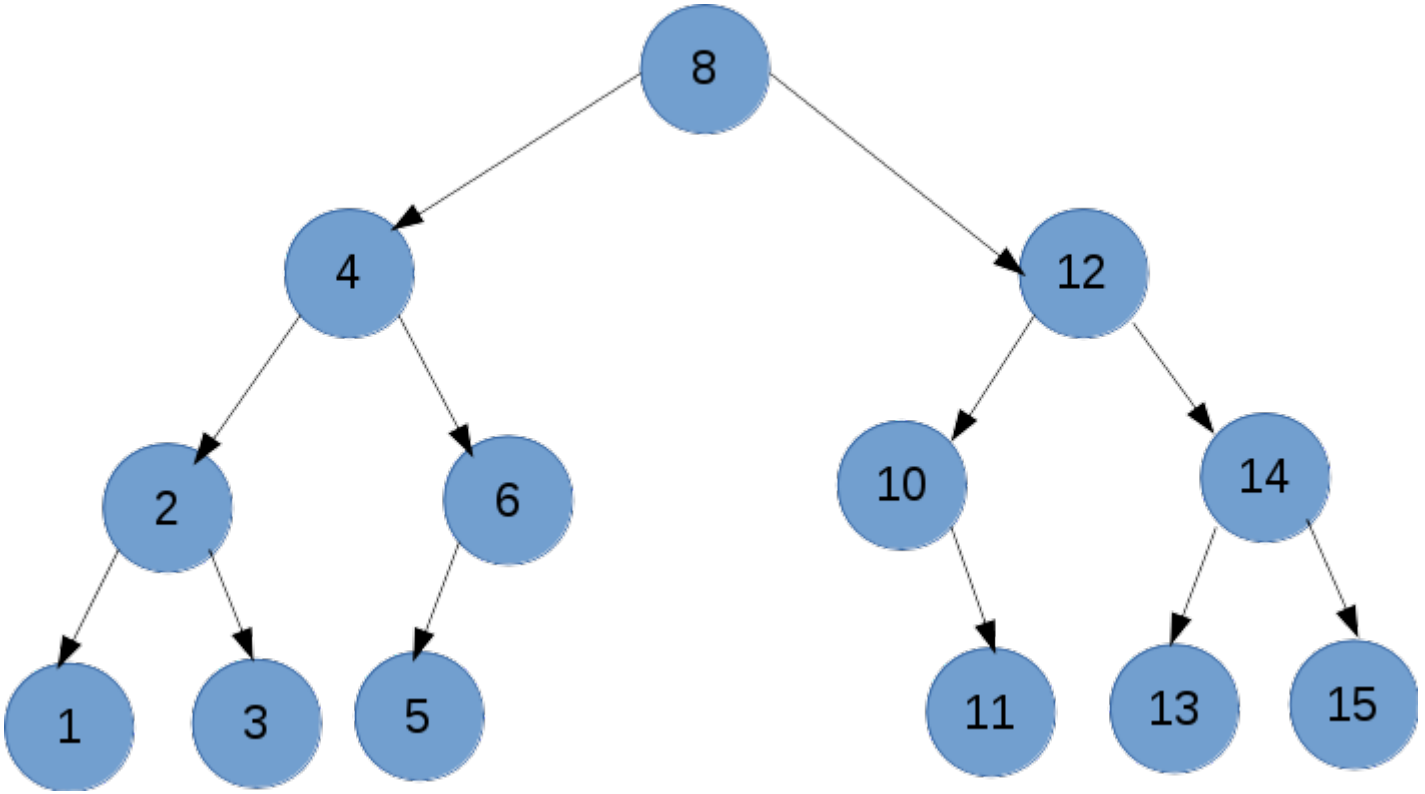
Estrutura de Dados

Estrutura de Dados

- Cada subárvore é também considerada como uma árvore.

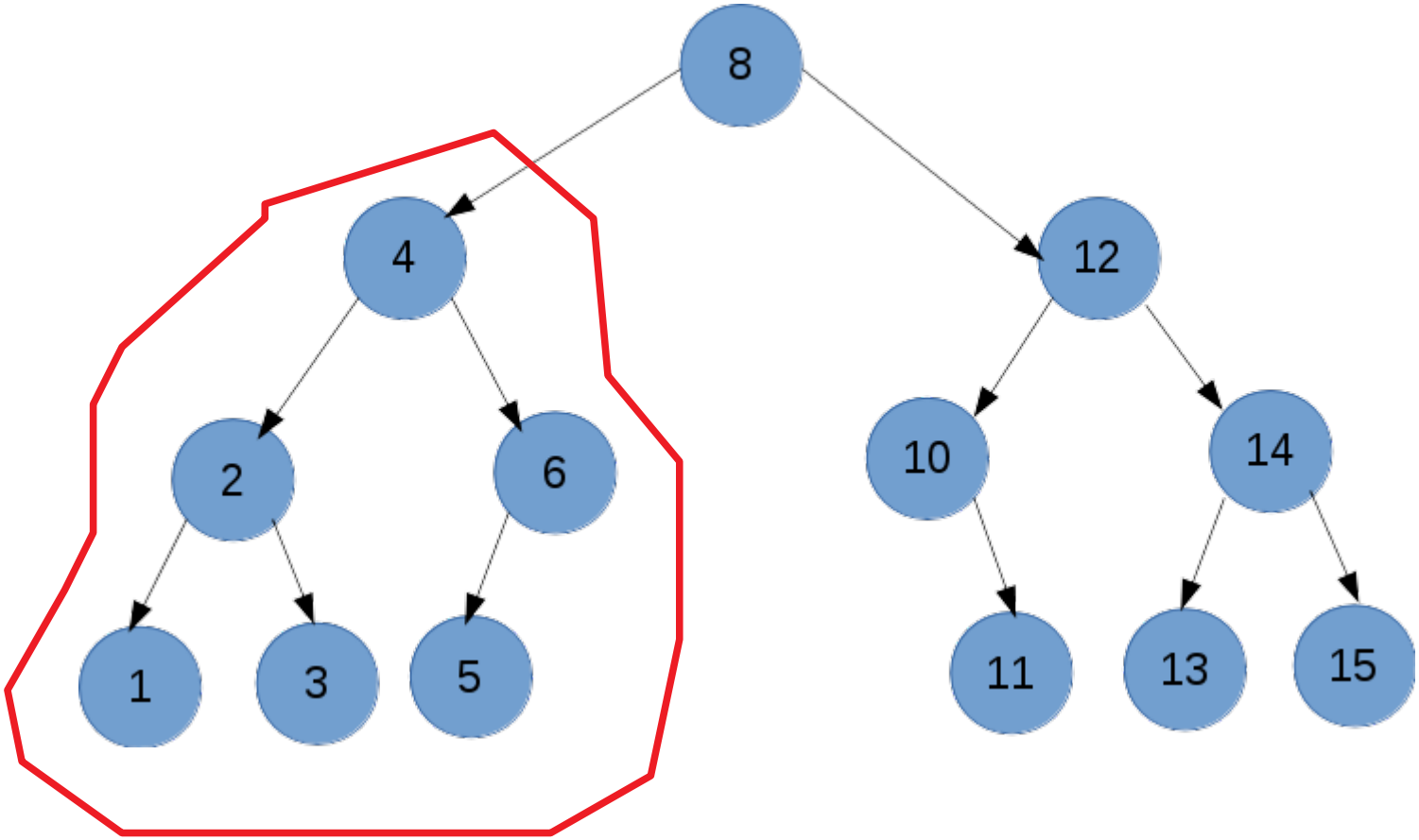
Estrutura de Dados

- Cada subárvore é também considerada como uma árvore.



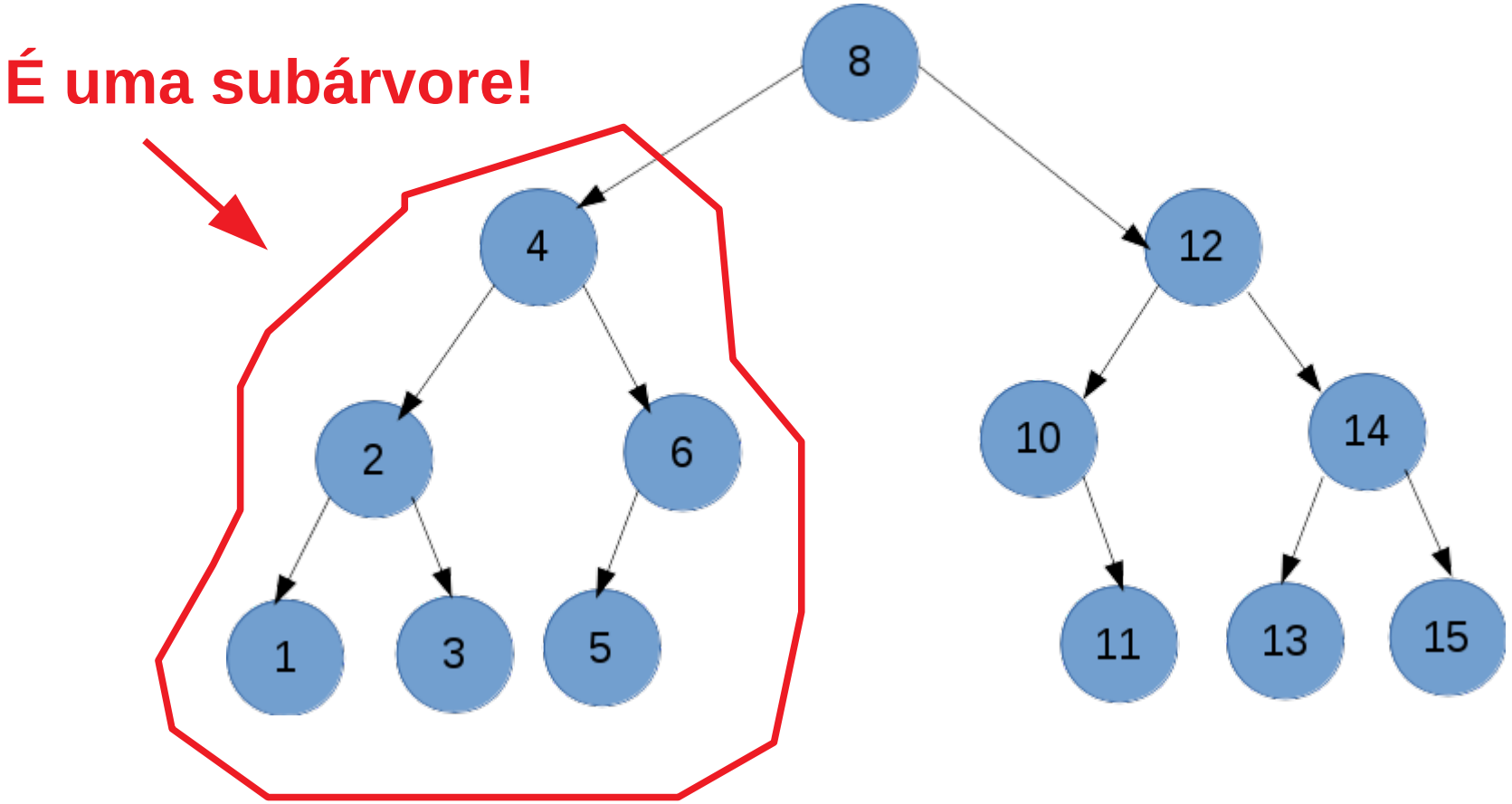
Estrutura de Dados

- Cada subárvore é também considerada como uma árvore.



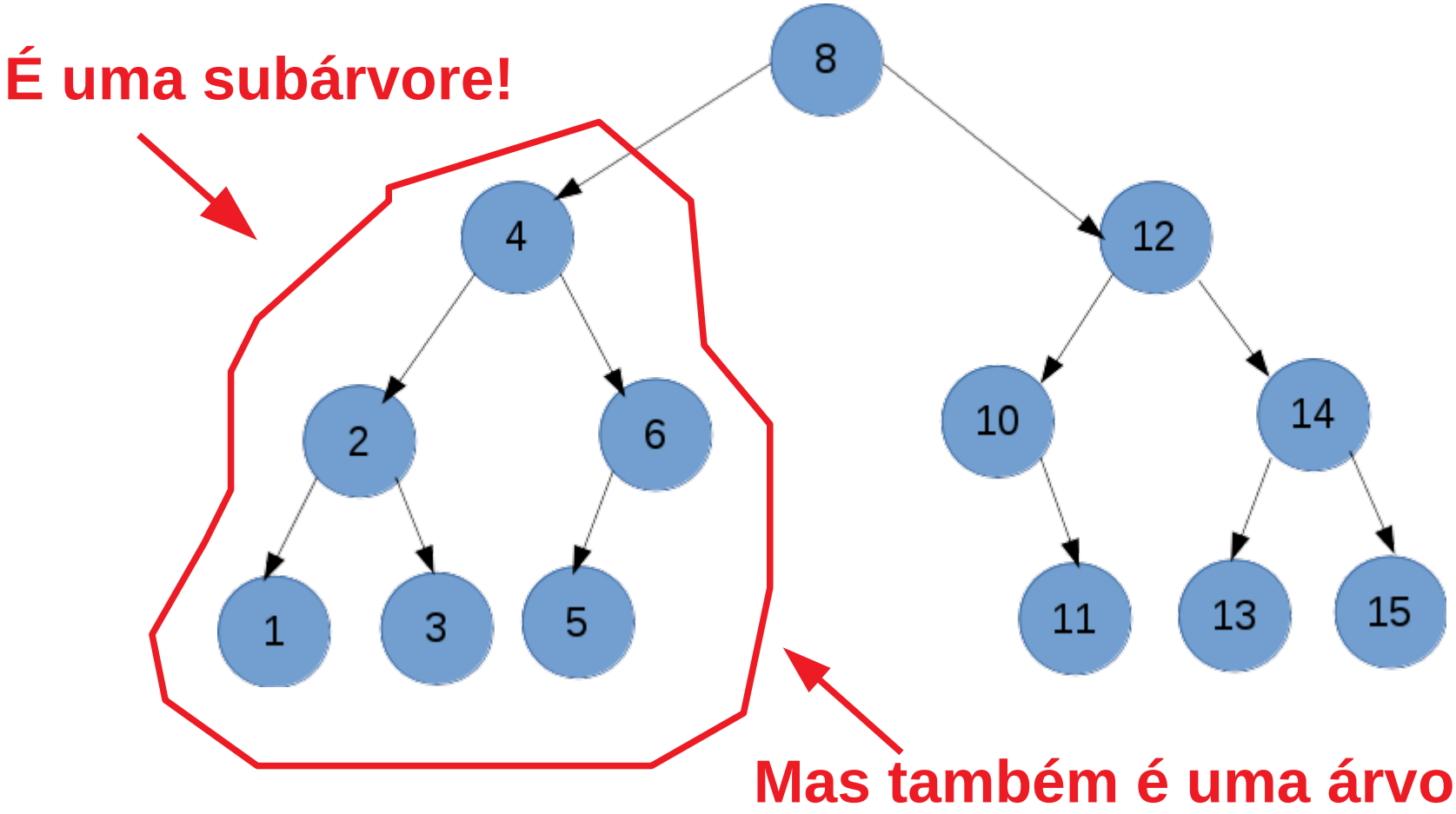
Estrutura de Dados

- Cada subárvore é também considerada como uma árvore.



Estrutura de Dados

- Cada subárvore é também considerada como uma árvore.



Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)

Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)
  - O nó no nível mais alto é chamado de **nó raiz** (*root node*).

Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)
  - O nó no nível mais alto é chamado de **nó raiz** (*root node*).
  - Ele fornece o ponto de acesso para a estrutura.

Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)
  - O nó no nível mais alto é chamado de **nó raiz** (*root node*).
  - Ele fornece o ponto de acesso para a estrutura.
  - É o único nó na árvore que não tem uma aresta de entrada.

Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)
  - O nó no nível mais alto é chamado de **nó raiz** (*root node*).
  - Ele fornece o ponto de acesso para a estrutura.
  - É o único nó na árvore que não tem uma aresta de entrada.
  - Toda árvore não-vazia deve conter um nó raiz.

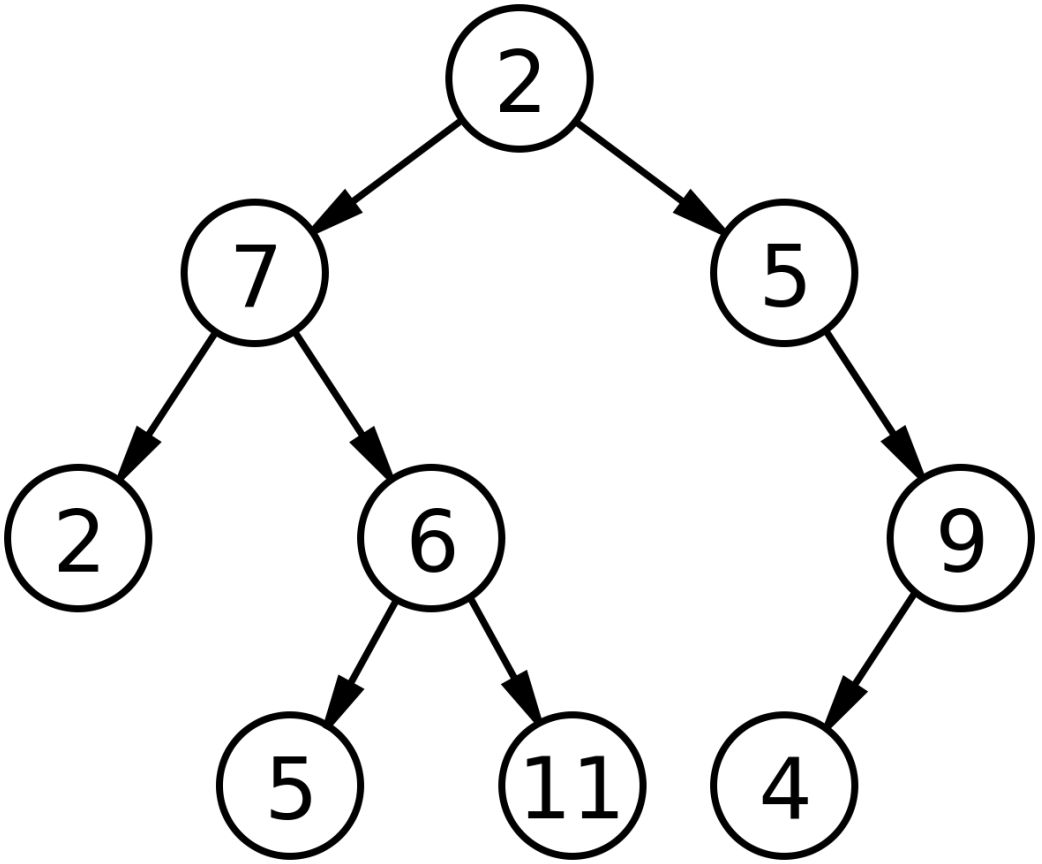
Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)

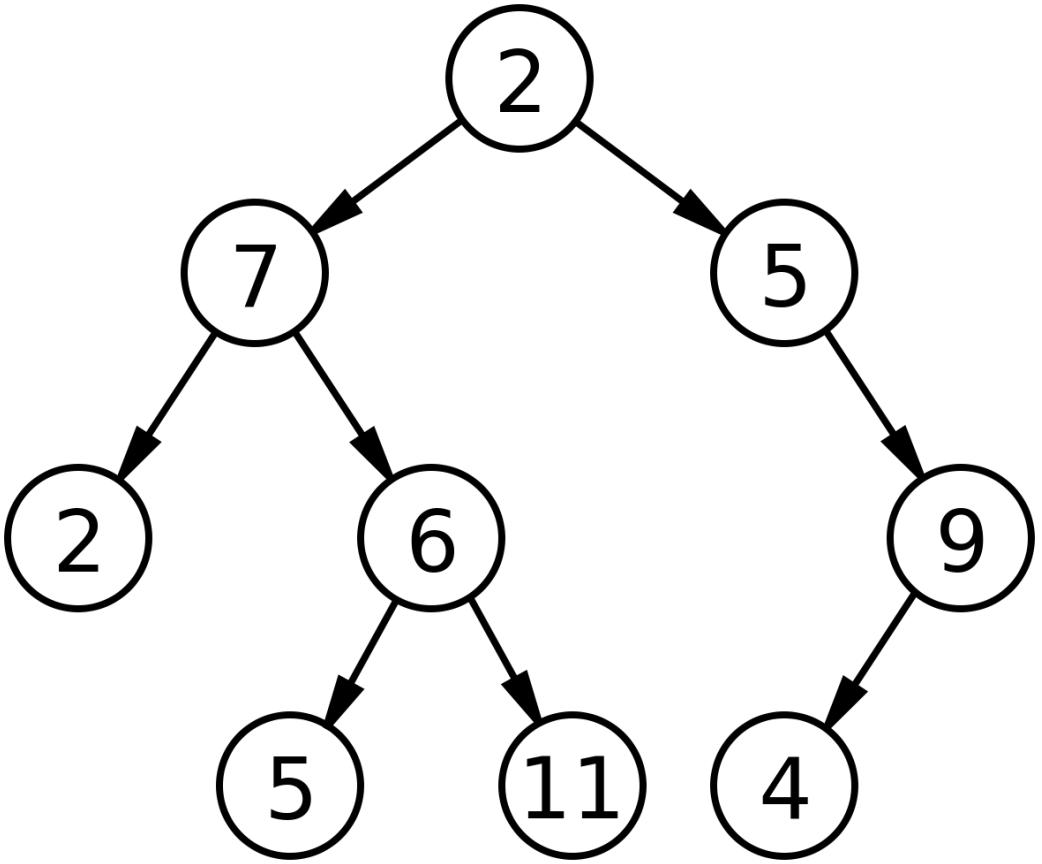
Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)



Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)
  - 2 é o nó raiz.



Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Caminho (*path*)

Elementos da Estrutura Árvore

- Caminho (*path*)
  - Os demais nós da árvores são acessados através dos vértices.

Elementos da Estrutura Árvore

- Caminho (*path*)
  - Os demais nós da árvores são acessados através dos vértices.
  - Os nós encontrados quando seguindo os vértices a partir do nó raiz formam o caminho (*path*).

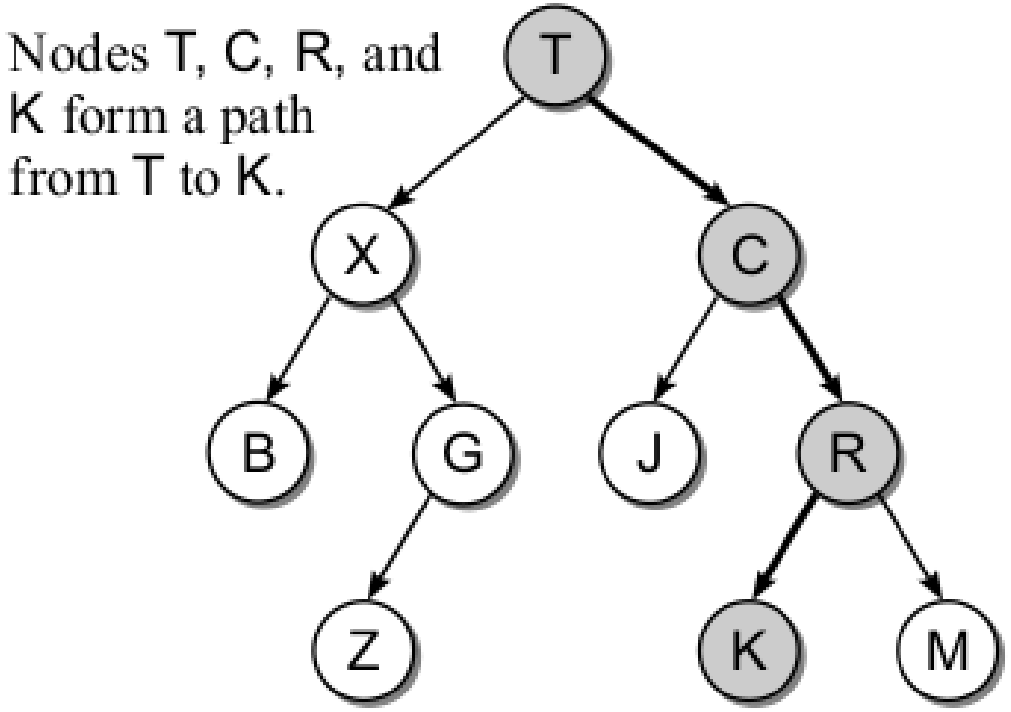
Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Caminho (*path*)

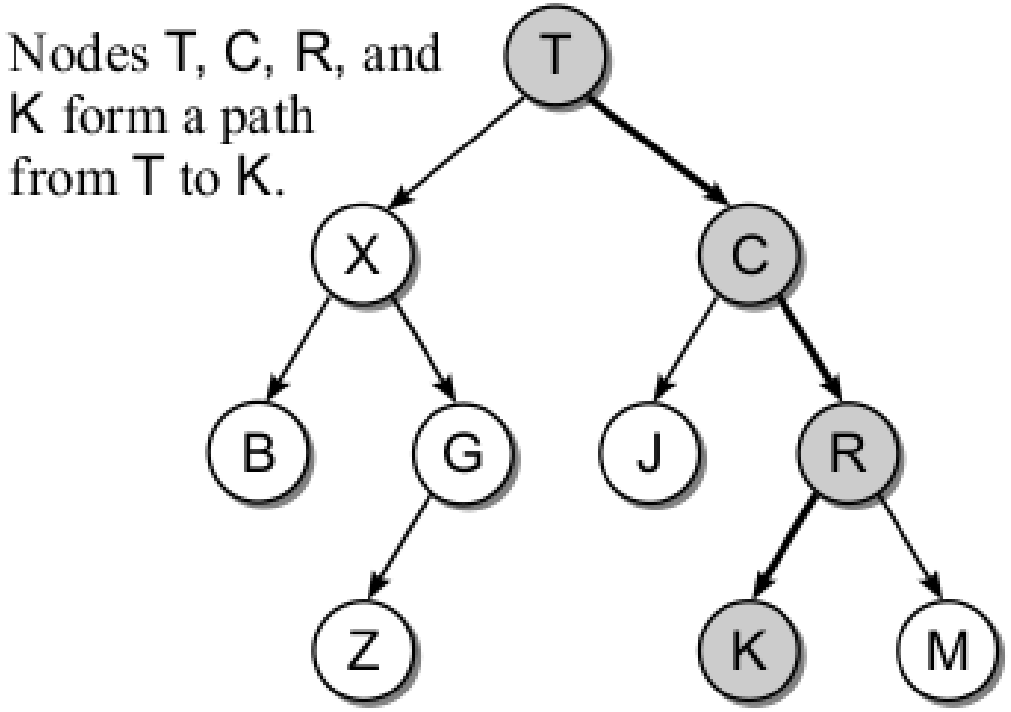
Elementos da Estrutura Árvore

- Caminho (*path*)



Elementos da Estrutura Árvore

- Caminho (*path*)
  - Caminho do nó T até K: T → C → R → K



Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Pais (*parent*)

Elementos da Estrutura Árvore

- Pais (*parent*)
  - Cada nó, com exceção da raiz, tem um nó pai.

Elementos da Estrutura Árvore

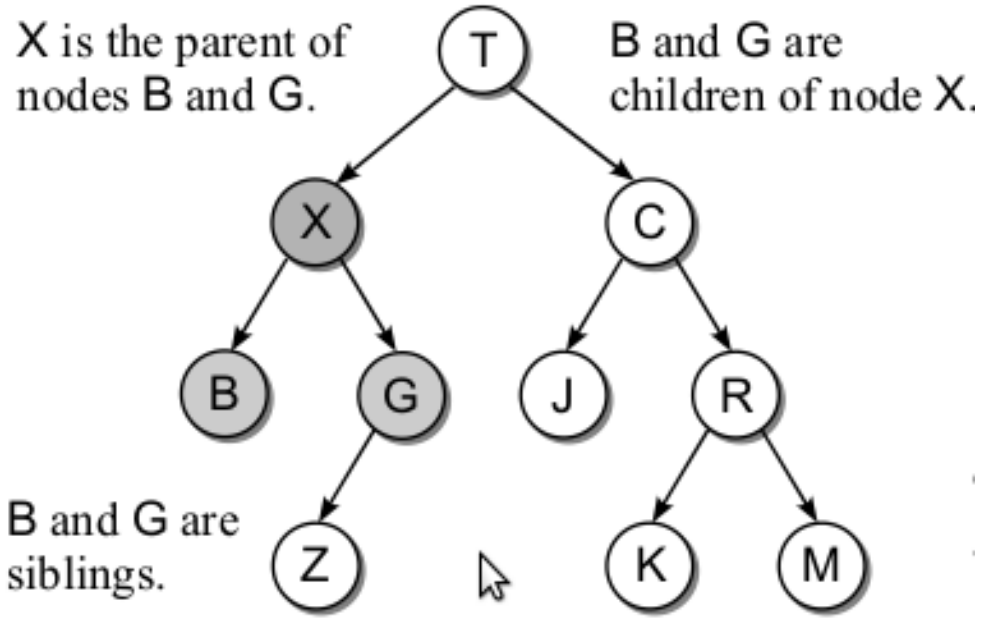
- Pais (*parent*)
  - Cada nó, com exceção da raiz, tem um nó pai.
  - Um nó pode ter apenas um nó pai.

Elementos da Estrutura Árvore

- Pais (*parent*)
  - Cada nó, com exceção da raiz, tem um nó pai.
  - Um nó pode ter apenas um nó pai.
  - Exemplo:

Elementos da Estrutura Árvore

- Pais (*parent*)
  - Cada nó, com exceção da raiz, tem um nó pai.
  - Um nó pode ter apenas um nó pai.
  - Exemplo:



Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Filho (*children*)

Elementos da Estrutura Árvore

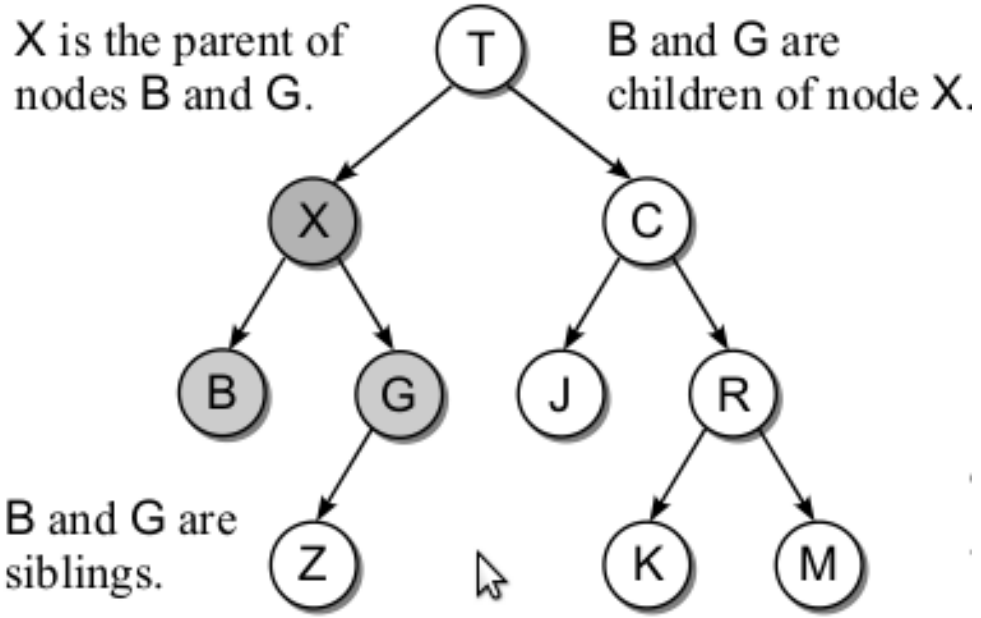
- Filho (*children*)
  - Cada nó pode ter um ou mais filhos.

Elementos da Estrutura Árvore

- Filho (*children*)
  - Cada nó pode ter um ou mais filhos.
  - Exemplo:

Elementos da Estrutura Árvore

- Filho (*children*)
  - Cada nó pode ter um ou mais filhos.
  - Exemplo:



Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Nós

Elementos da Estrutura Árvore

- Nós
  - Nó que tem pelo menos 1 filho é chamado de **nó interior**.

Elementos da Estrutura Árvore

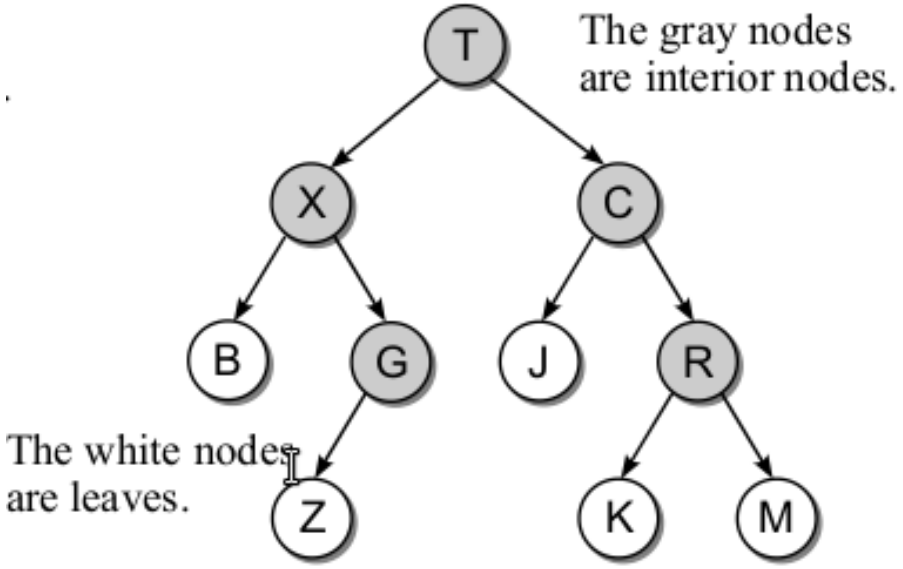
- Nós
  - Nó que tem pelo menos 1 filho é chamado de **nó interior**.
  - Nó que não tem filho é chamado de **nó folha** (*leaf*).

Elementos da Estrutura Árvore

- Nós
  - Nó que tem pelo menos 1 filho é chamado de **nó interior**.
  - Nó que não tem filho é chamado de **nó folha** (*leaf*).
  - Exemplo:

Elementos da Estrutura Árvore

- Nós
  - Nó que tem pelo menos 1 filho é chamado de **nó interior**.
  - Nó que não tem filho é chamado de **nó folha** (*leaf*).
  - Exemplo:



Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Subárvores

Elementos da Estrutura Árvore

- Subárvores
  - Por definição, uma árvore é uma estrutura recursiva.

Elementos da Estrutura Árvore

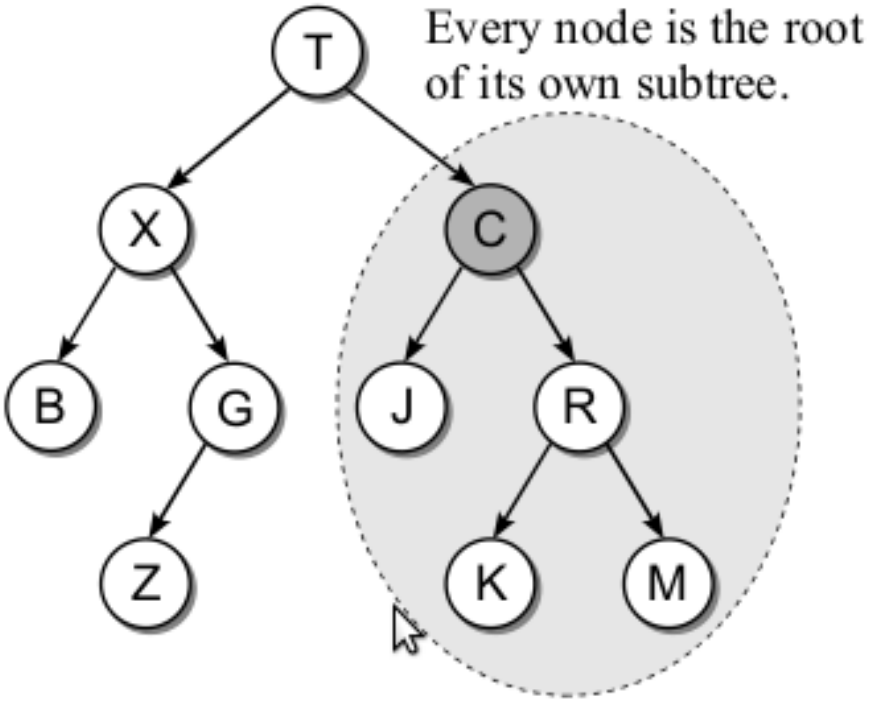
- Subárvores
  - Por definição, uma árvore é uma estrutura recursiva.
  - Todo nó pode ser raiz da sua própria subárvore.

Elementos da Estrutura Árvore

- Subárvores
  - Por definição, uma árvore é uma estrutura recursiva.
  - Todo nó pode ser raiz da sua própria subárvore.
  - Exemplo:

Elementos da Estrutura Árvore

- Subárvores
  - Por definição, uma árvore é uma estrutura recursiva.
  - Todo nó pode ser raiz da sua própria subárvore.
  - Exemplo:



Elementos da Estrutura Árvore

- Grau
  - Representa o número de subárvores de um nó.
- Grau de uma árvore
  - É definido como sendo igual ao máximo dos graus de todos os seus nós.

Árvores Binárias

Árvores Binárias

Árvores Binárias

- As árvores podem aparecer em vários formatos.

Árvores Binárias

- As árvores podem aparecer em vários formatos.
- Elas podem variar o número de filhos permitidos por nó.

Árvores Binárias

- As árvores podem aparecer em vários formatos.
- Elas podem variar o número de filhos permitidos por nó.
- Uma árvore bastante usada é a **árvore binária**, em que cada nó pode ter apenas dois filhos por nó.

Árvores Binárias

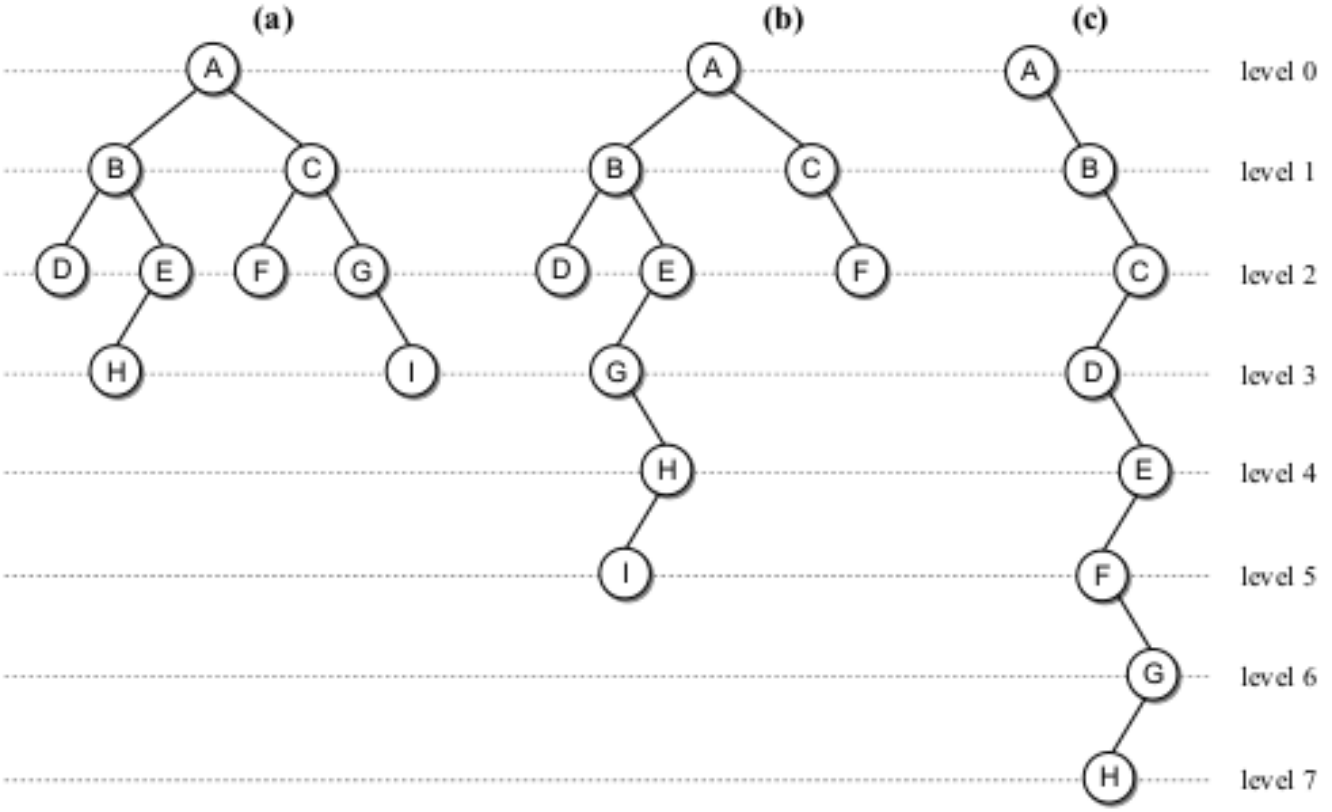
- As árvores podem aparecer em vários formatos.
- Elas podem variar o número de filhos permitidos por nó.
- Uma árvore bastante usada é a **árvore binária**, em que cada nó pode ter apenas dois filhos por nó.
- Os filhos podem ficar à esquerda ou à direita.

Árvores Binárias

- Propriedades
  - Árvores binárias podem aparecer em diferentes formatos e tamanhos.

Árvores Binárias

- Propriedades
  - Exemplo de três formatos distintos para uma árvores binária com 9 nós:



Árvores Binárias

Árvores Binárias

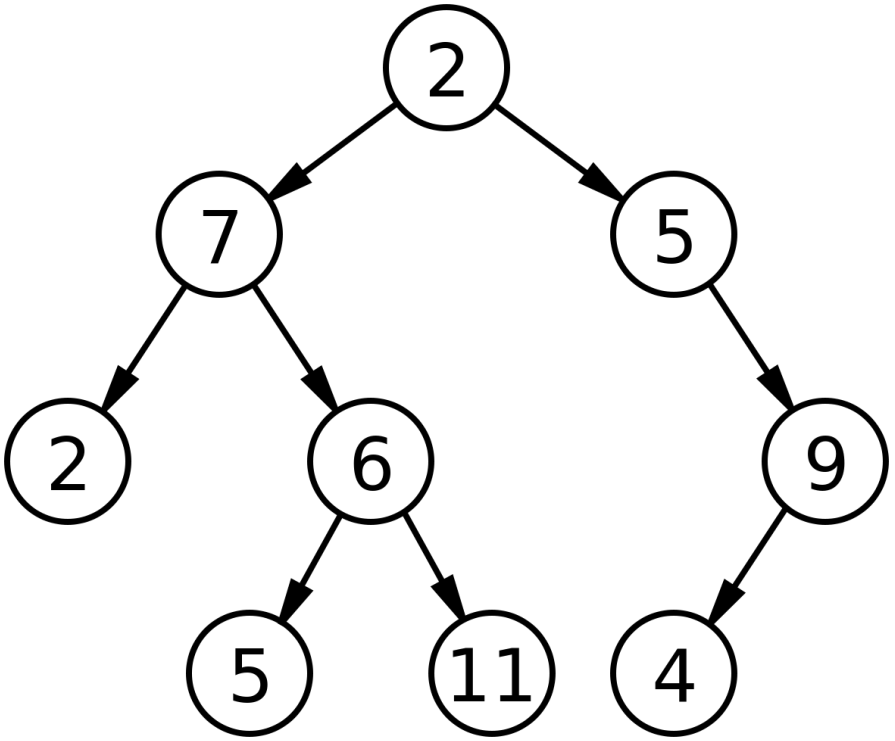
- Tamanho da árvore

Árvores Binárias

- Tamanho da árvore
  - Os nós em uma árvore binária são organizados em níveis (*levels*), onde o nó raiz está no nível 0, os seus filhos no nível 1, etc.

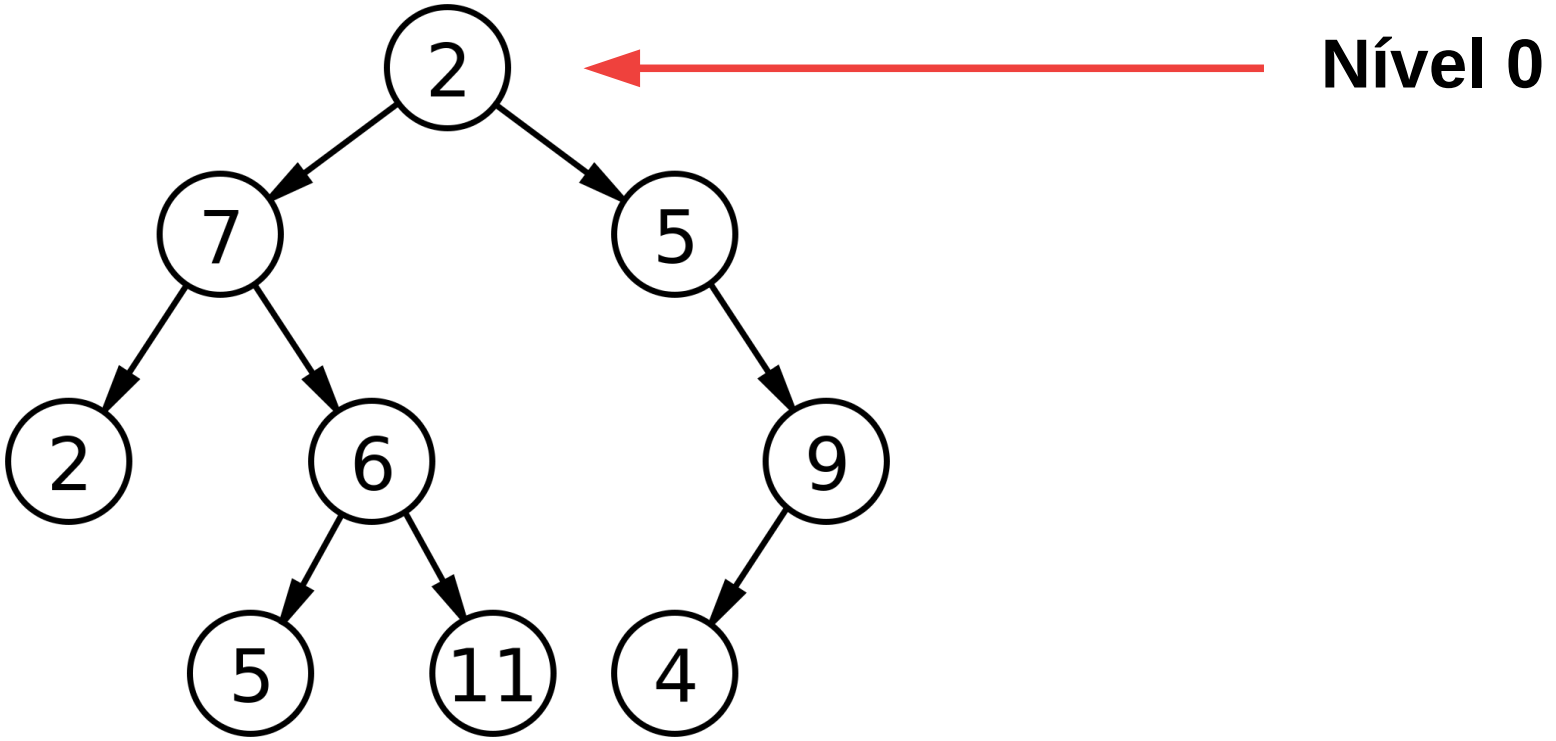
Árvores Binárias

- Tamanho da árvore
  - Os nós em uma árvore binária são organizados em níveis (*levels*), onde o nó raiz está no nível 0, os seus filhos no nível 1, etc.



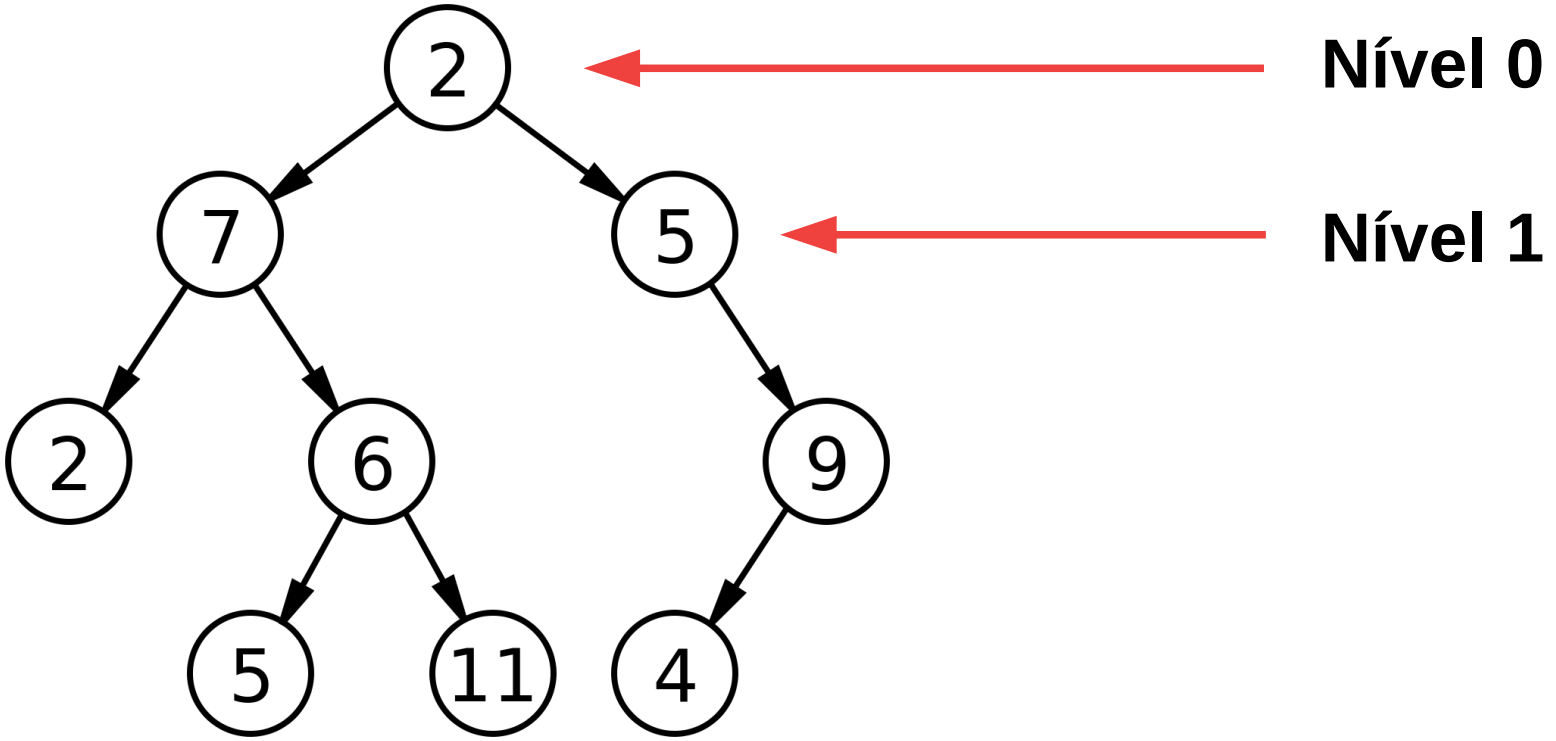
Árvores Binárias

- Tamanho da árvore
  - Os nós em uma árvore binária são organizados em níveis (*levels*), onde o nó raiz está no nível 0, os seus filhos no nível 1, etc.



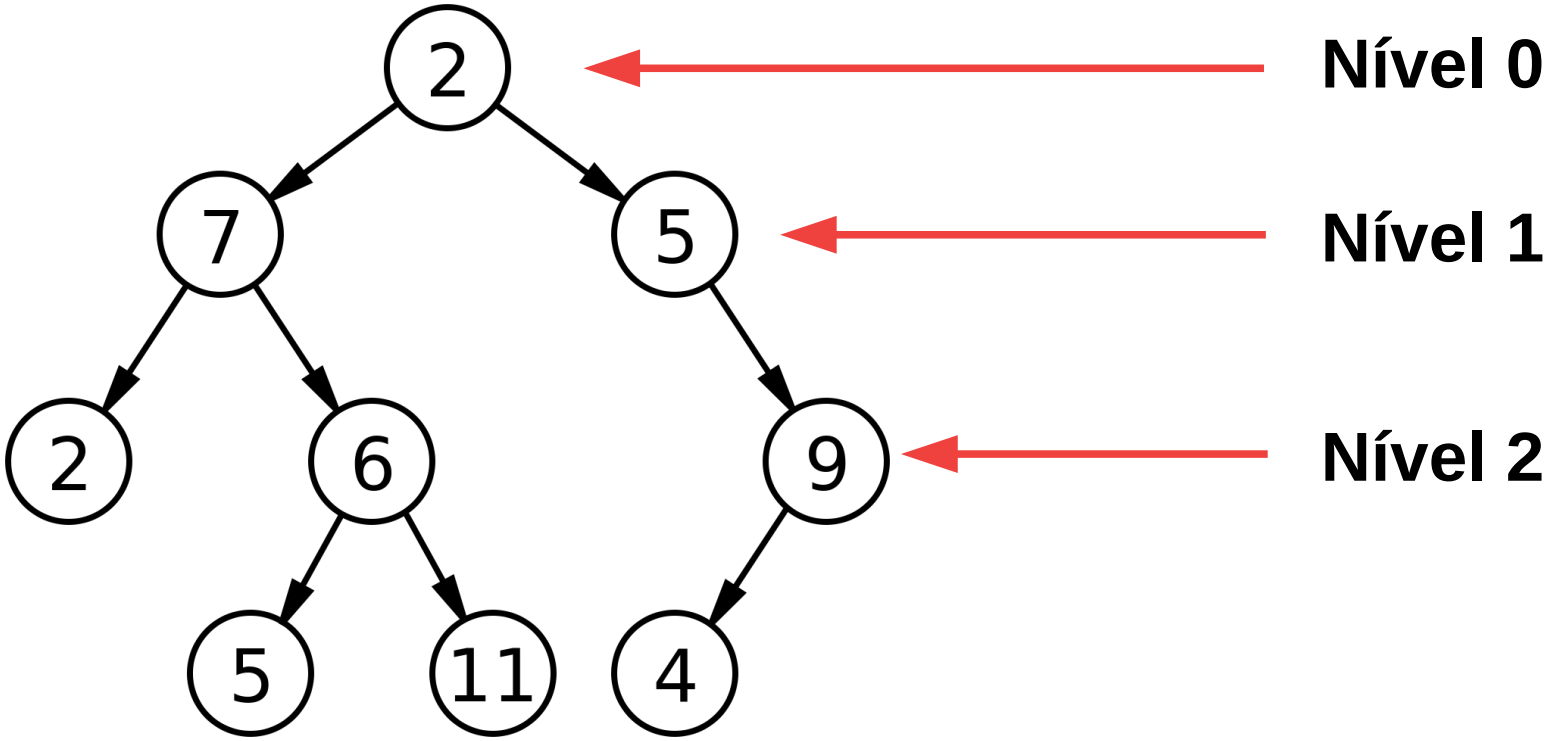
Árvores Binárias

- Tamanho da árvore
  - Os nós em uma árvore binária são organizados em níveis (*levels*), onde o nó raiz está no nível 0, os seus filhos no nível 1, etc.



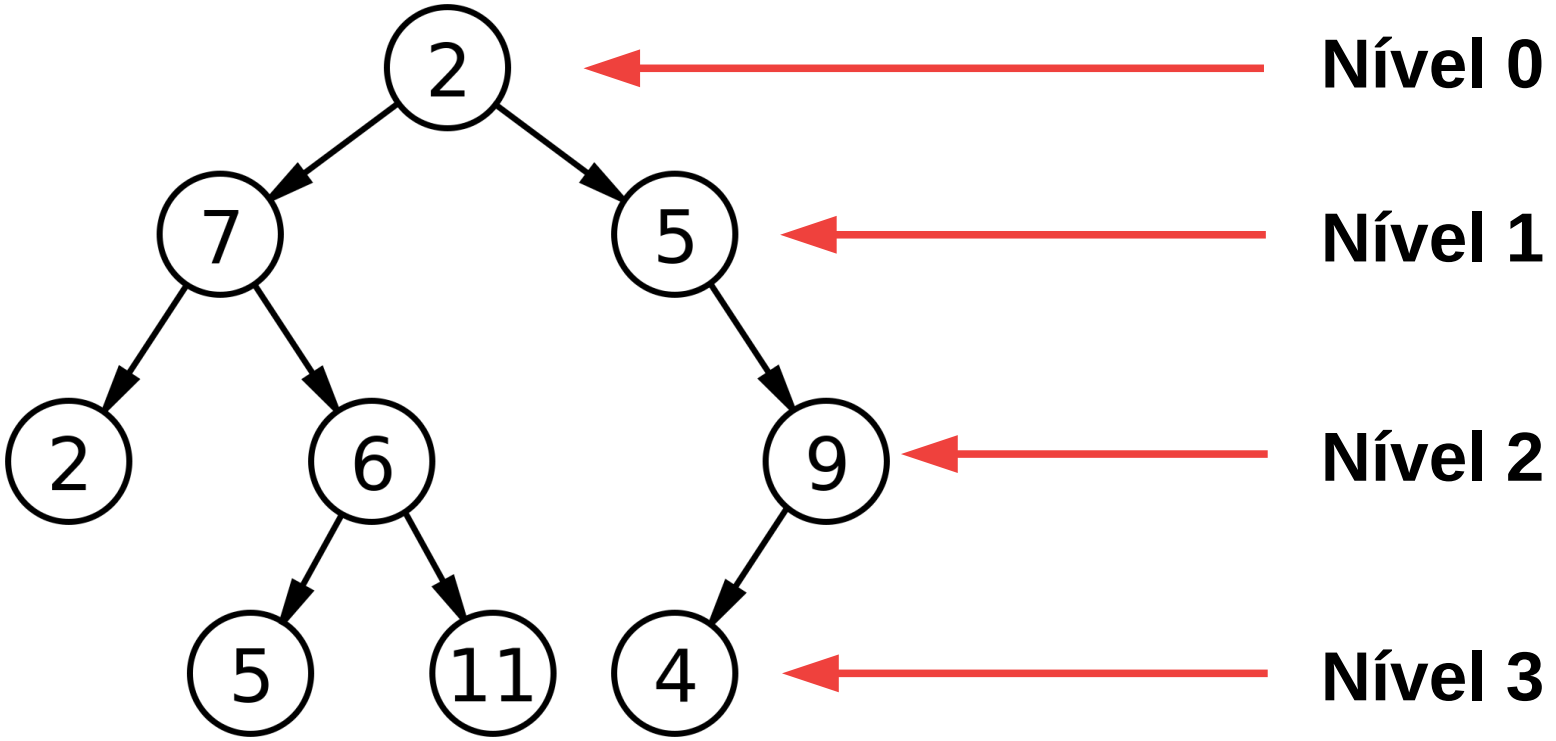
Árvores Binárias

- Tamanho da árvore
  - Os nós em uma árvore binária são organizados em níveis (*levels*), onde o nó raiz está no nível 0, os seus filhos no nível 1, etc.



Árvores Binárias

- Tamanho da árvore
  - Os nós em uma árvore binária são organizados em níveis (*levels*), onde o nó raiz está no nível 0, os seus filhos no nível 1, etc.



Árvores Binárias

Árvores Binárias

- Profundidade (*depth*)

Árvores Binárias

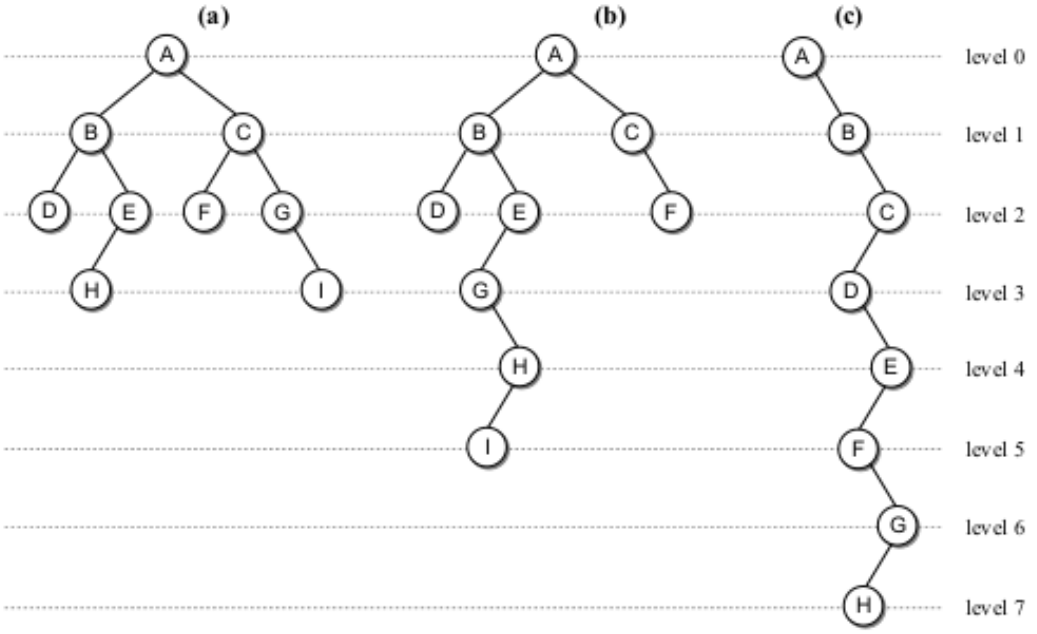
- Profundidade (*depth*)
  - A profundidade de um nó é a sua distância até a raiz.

Árvores Binárias

- Profundidade (*depth*)
  - A profundidade de um nó é a sua distância até a raiz.
  - A profundidade do nó G:

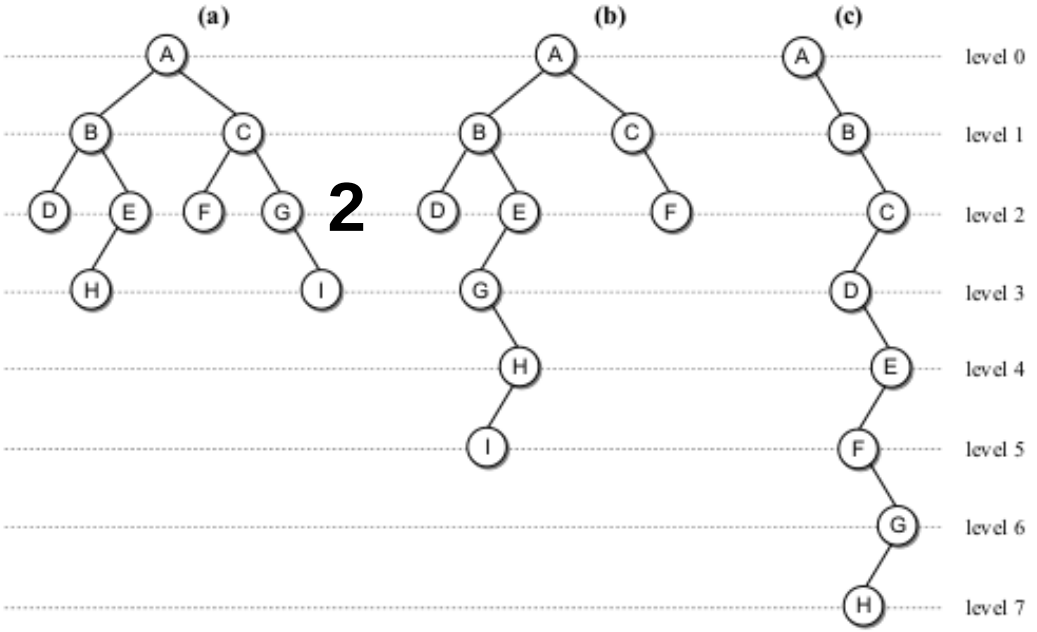
Árvores Binárias

- Profundidade (*depth*)
  - A profundidade de um nó é a sua distância até a raiz.
  - A profundidade do nó G:



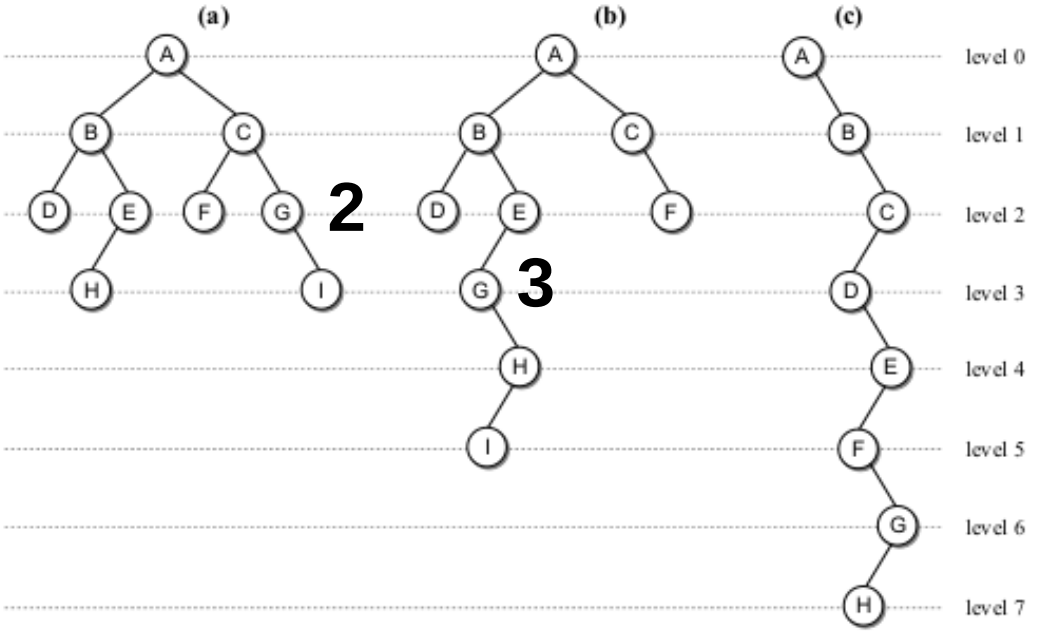
Árvores Binárias

- Profundidade (*depth*)
  - A profundidade de um nó é a sua distância até a raiz.
  - A profundidade do nó G:



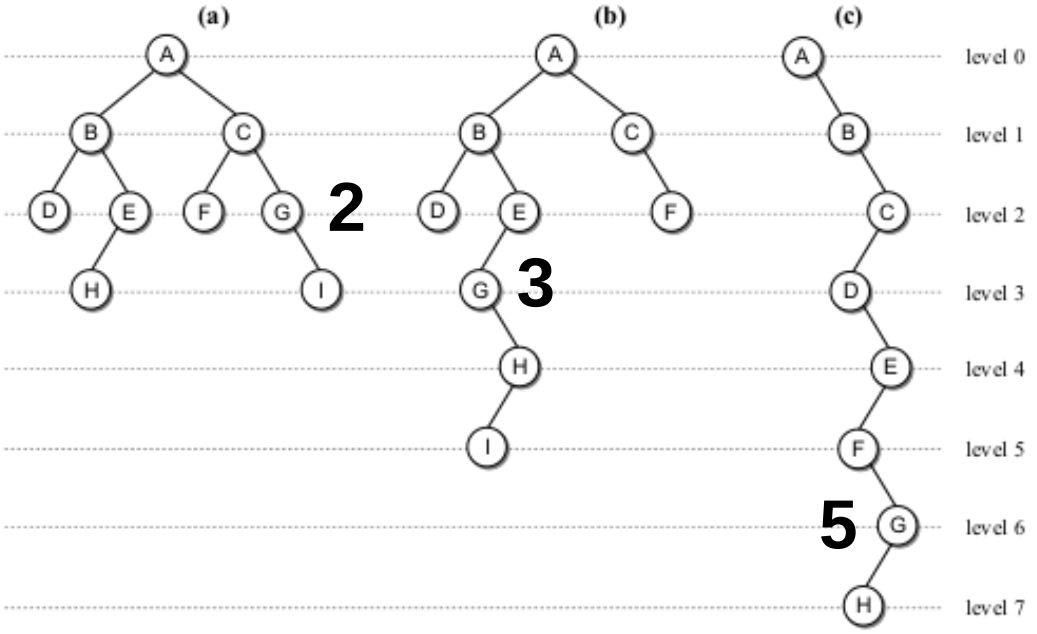
Árvores Binárias

- Profundidade (*depth*)
  - A profundidade de um nó é a sua distância até a raiz.
  - A profundidade do nó G:



Árvores Binárias

- Profundidade (*depth*)
  - A profundidade de um nó é a sua distância até a raiz.
  - A profundidade do nó G:



Árvores Binárias

Árvores Binárias

- Altura (*height*)

Árvores Binárias

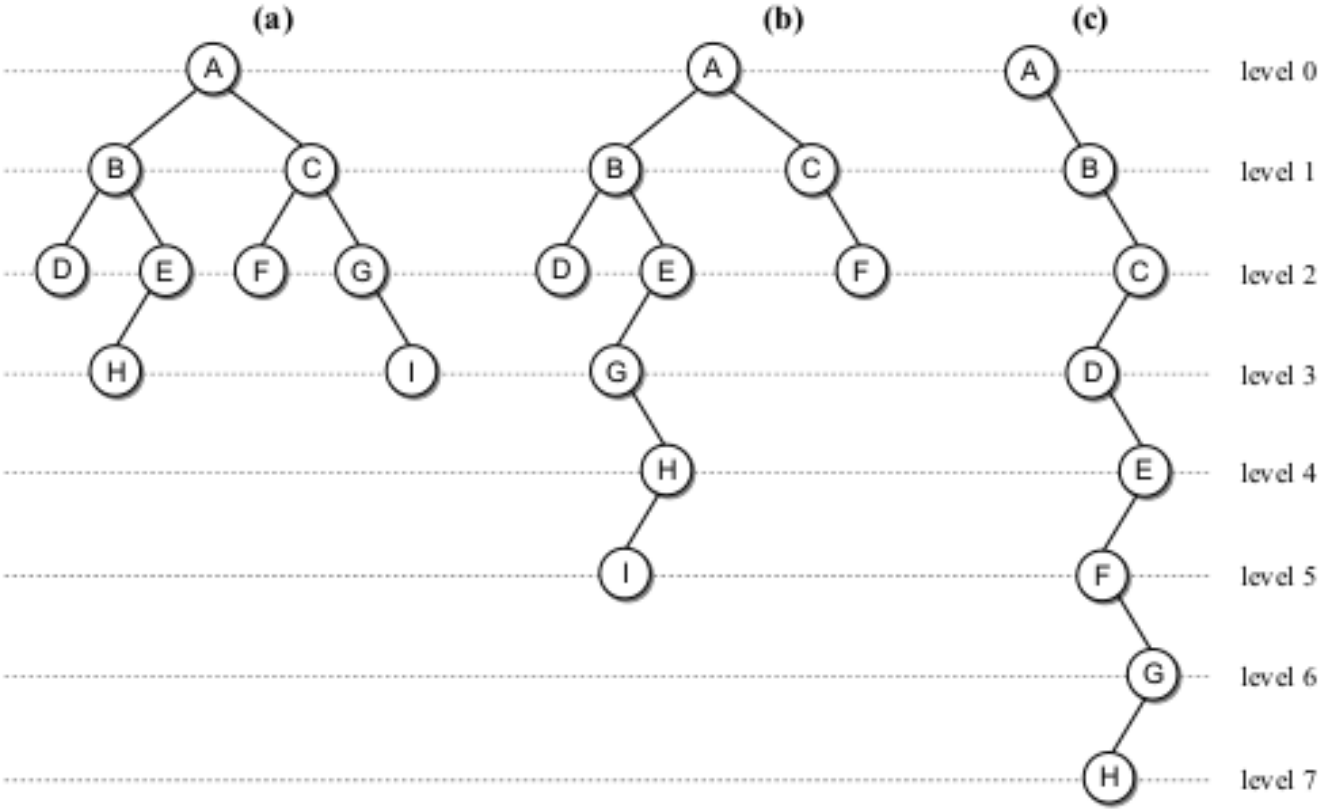
- Altura (*height*)
  - É o número de níveis de uma árvore.

Árvores Binárias

- Altura (*height*)
  - É o número de níveis de uma árvore.
  - Exemplo:

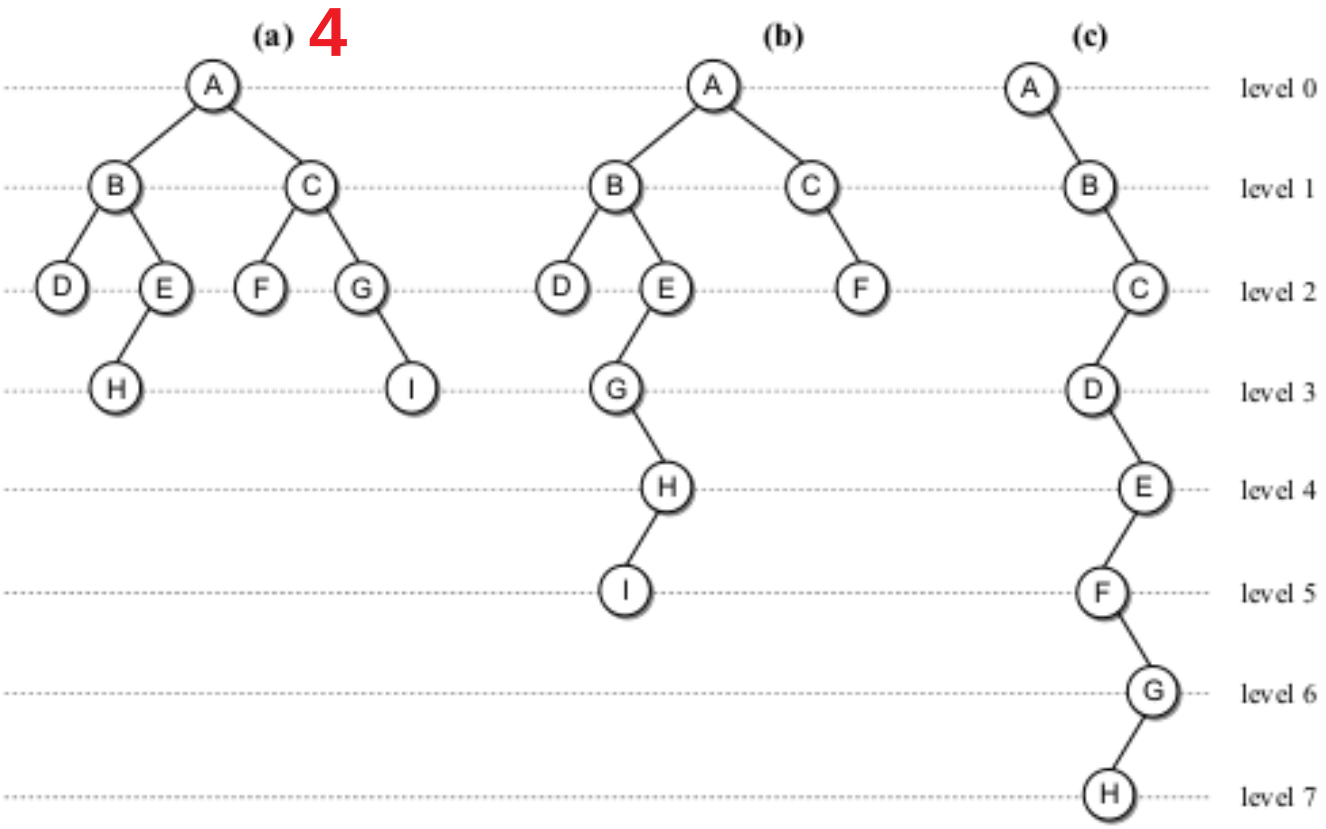
Árvores Binárias

- Altura (*height*)
  - É o número de níveis de uma árvore.
  - Exemplo:



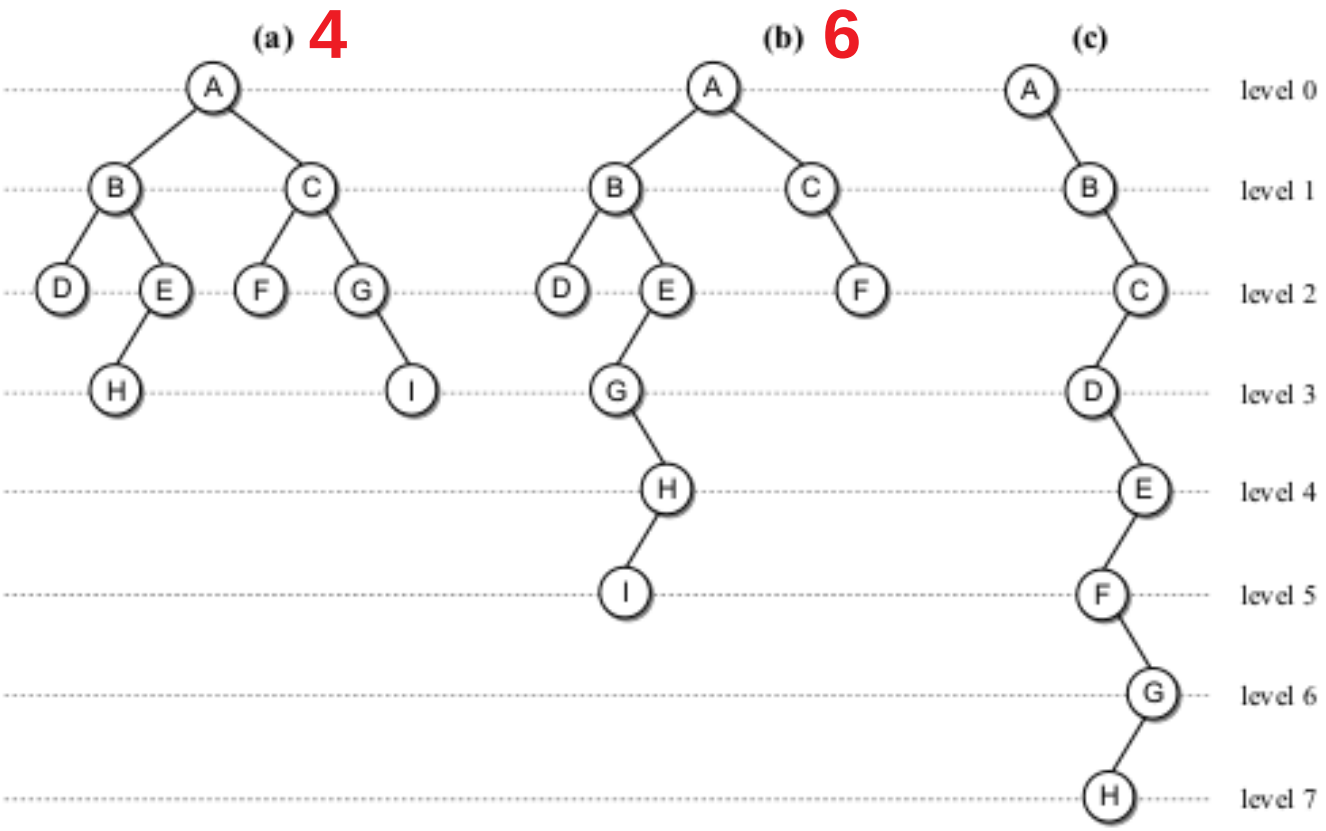
Árvores Binárias

- Altura (*height*)
  - É o número de níveis de uma árvore.
  - Exemplo:



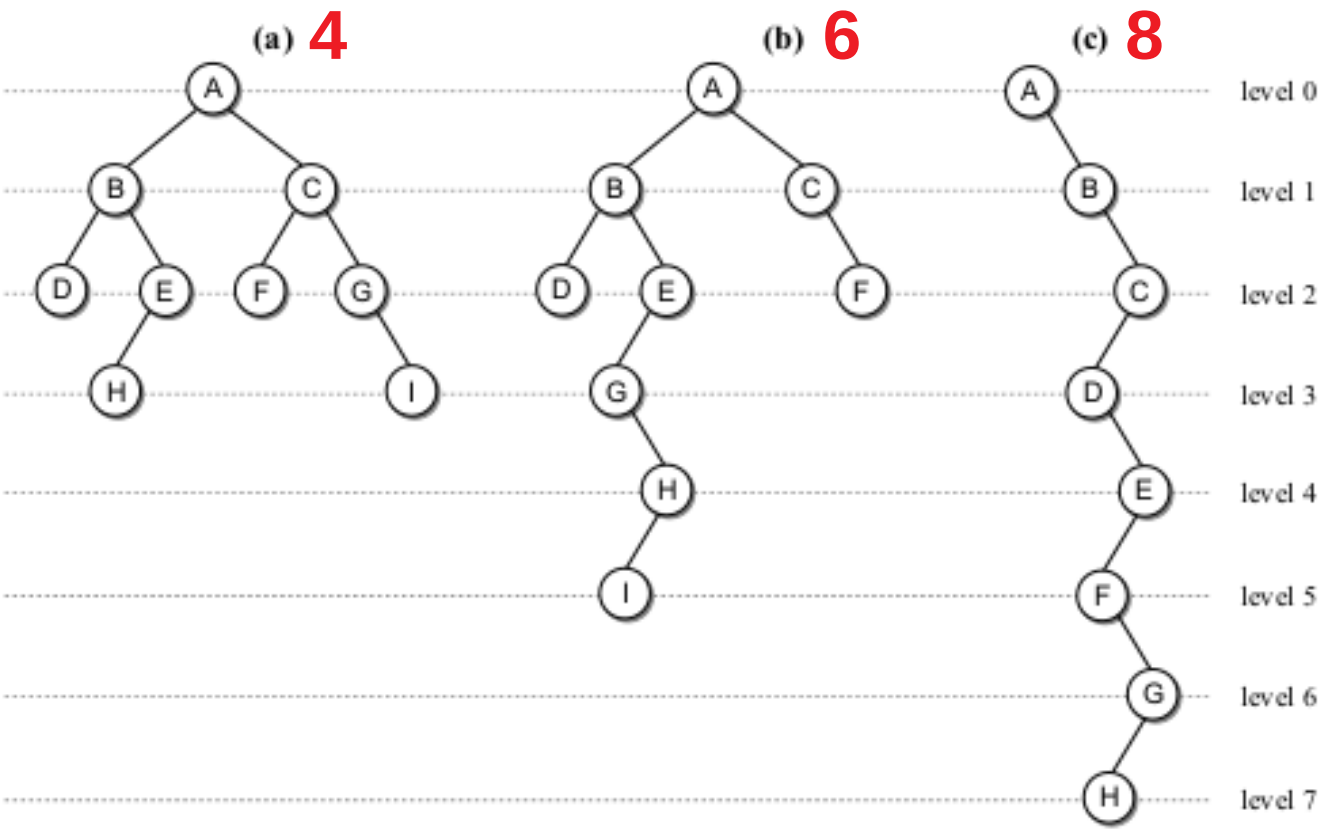
Árvores Binárias

- Altura (*height*)
  - É o número de níveis de uma árvore.
  - Exemplo:



Árvores Binárias

- Altura (*height*)
  - É o número de níveis de uma árvore.
  - Exemplo:



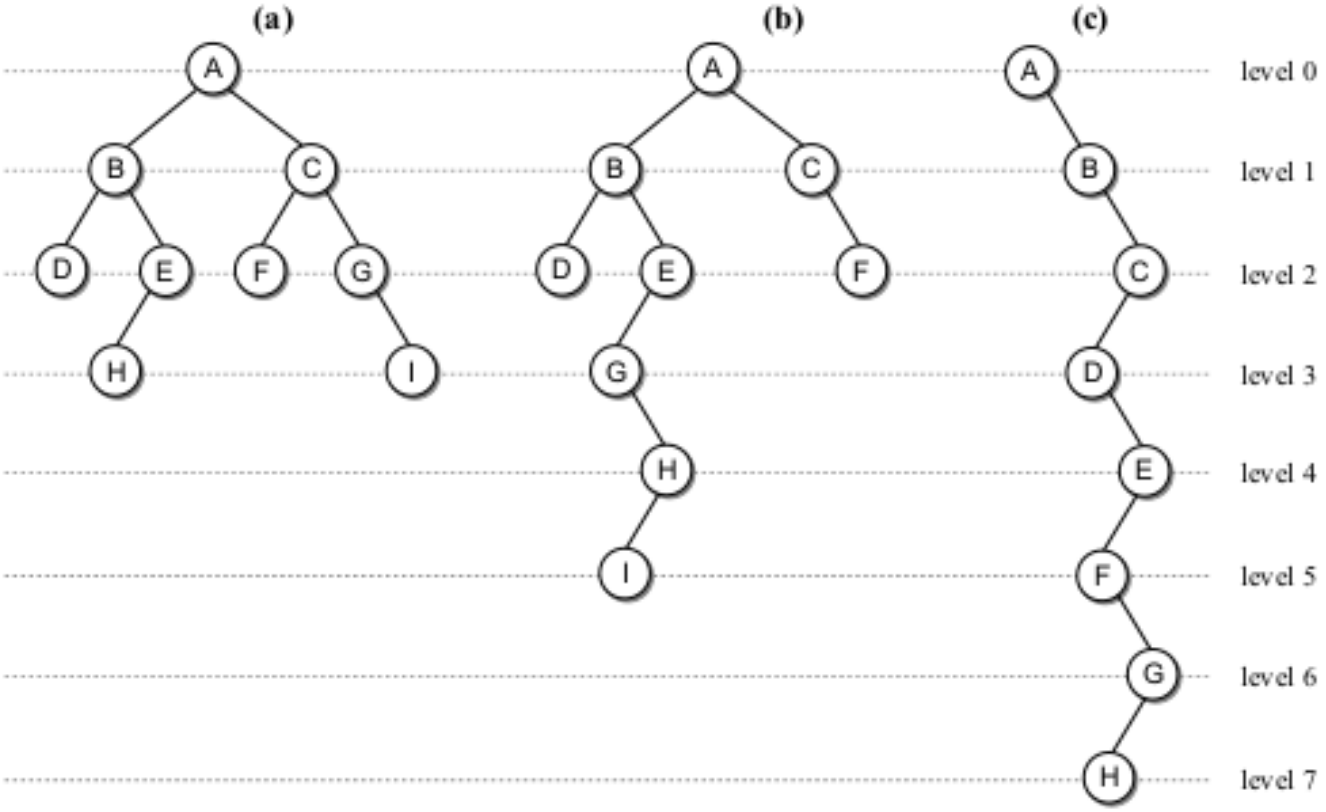
Árvores Binárias

Árvores Binárias

- Largura (*width*)
  - É o número de nós no nível que contém a maioria dos nós.

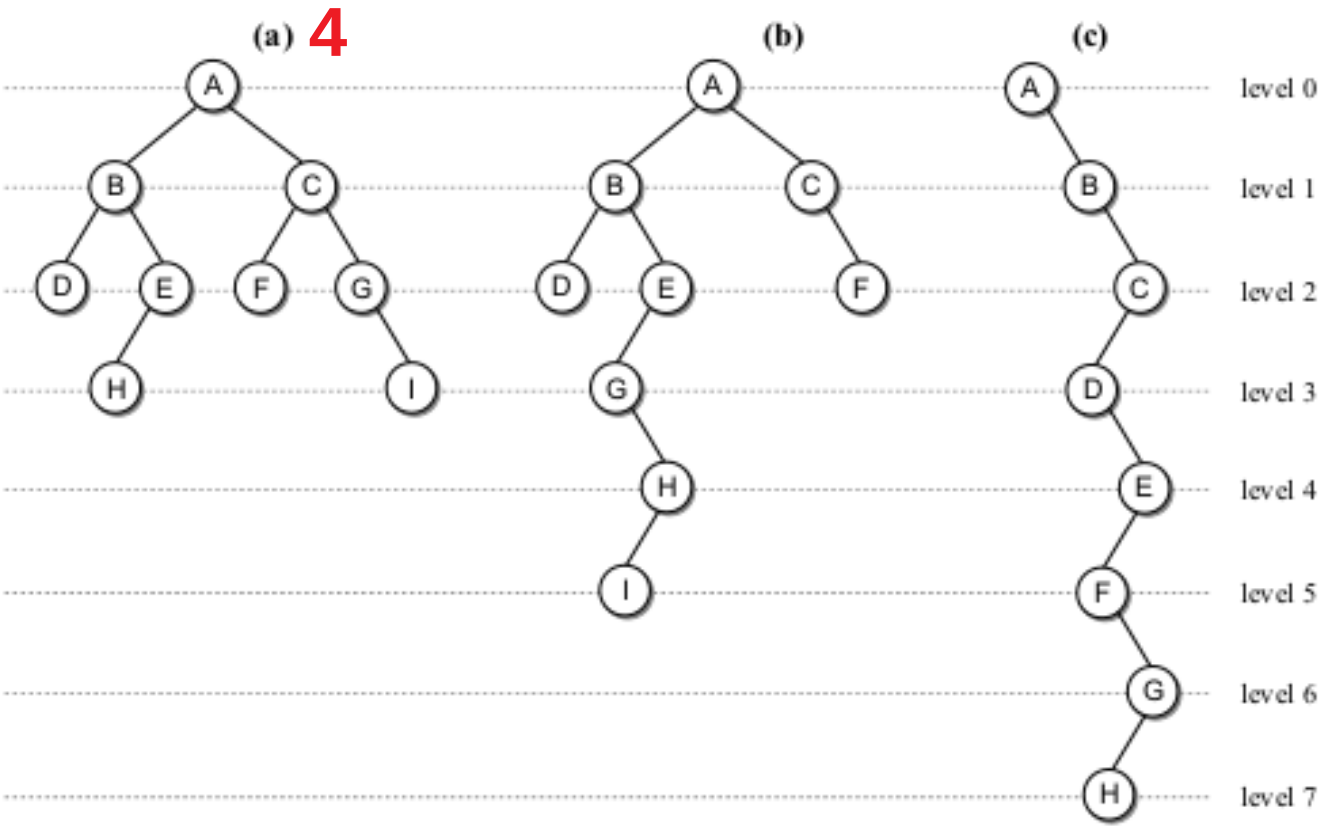
Árvores Binárias

- Largura (*width*)
  - É o número de nós no nível que contém a maioria dos nós.



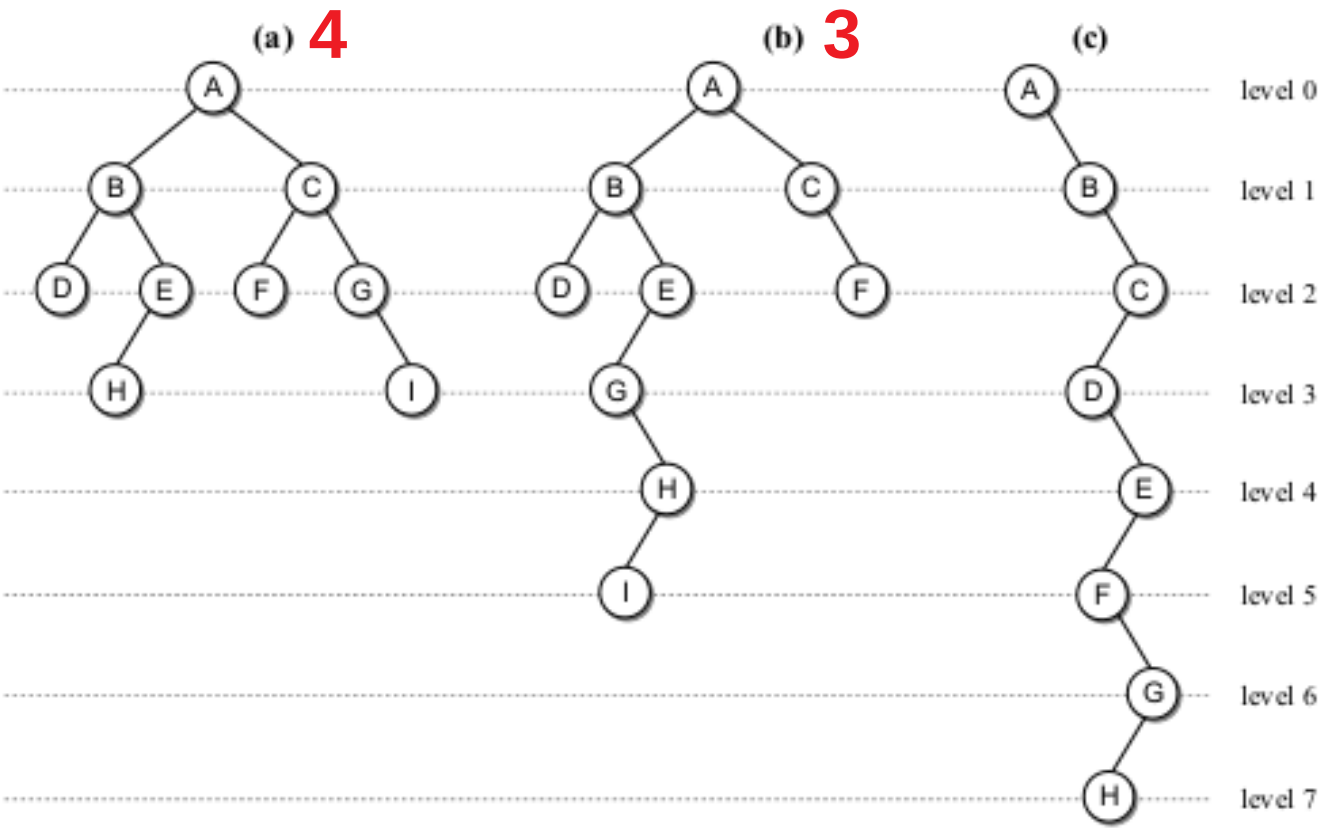
Árvores Binárias

- Largura (*width*)
  - É o número de nós no nível que contém a maioria dos nós.



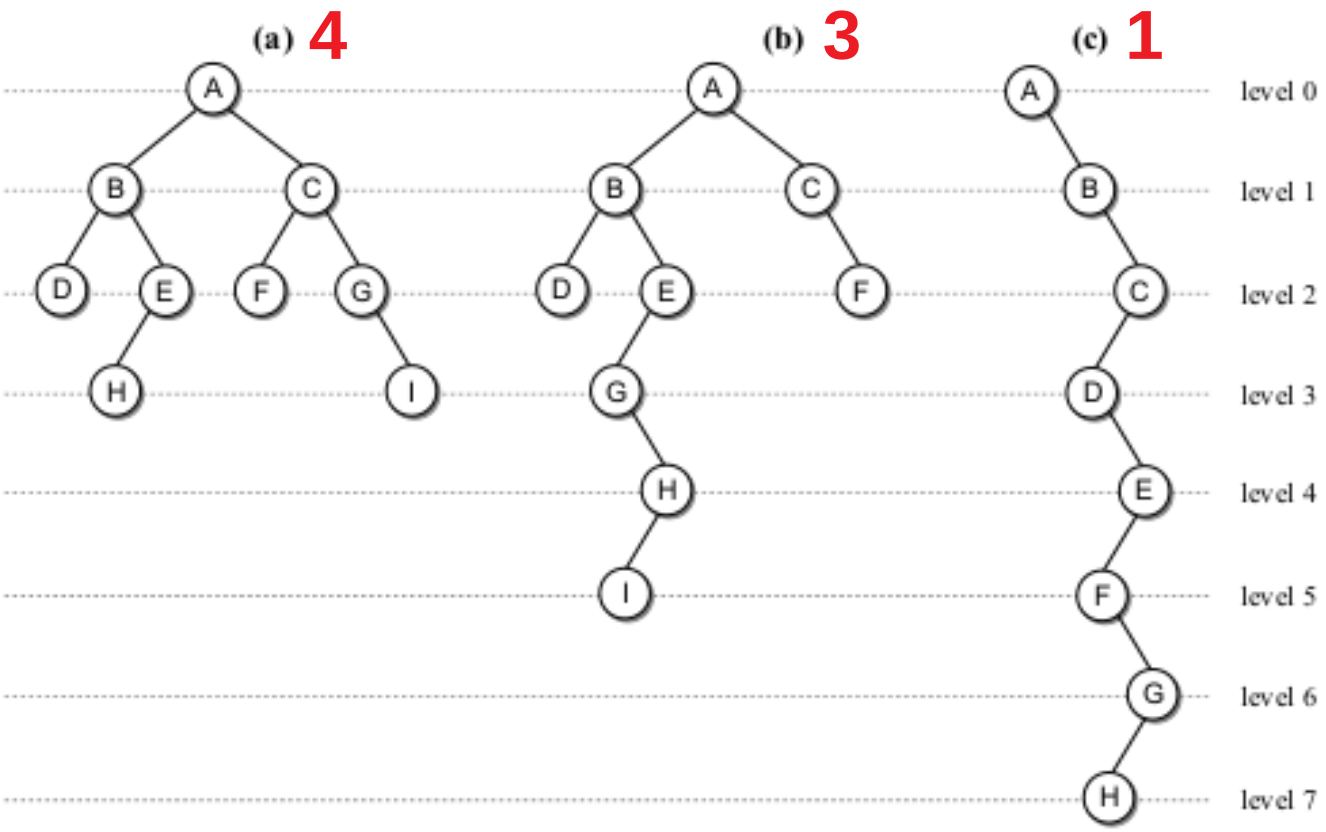
Árvores Binárias

- Largura (*width*)
  - É o número de nós no nível que contém a maioria dos nós.



Árvores Binárias

- Largura (*width*)
  - É o número de nós no nível que contém a maioria dos nós.



Árvores Binárias

Árvores Binárias

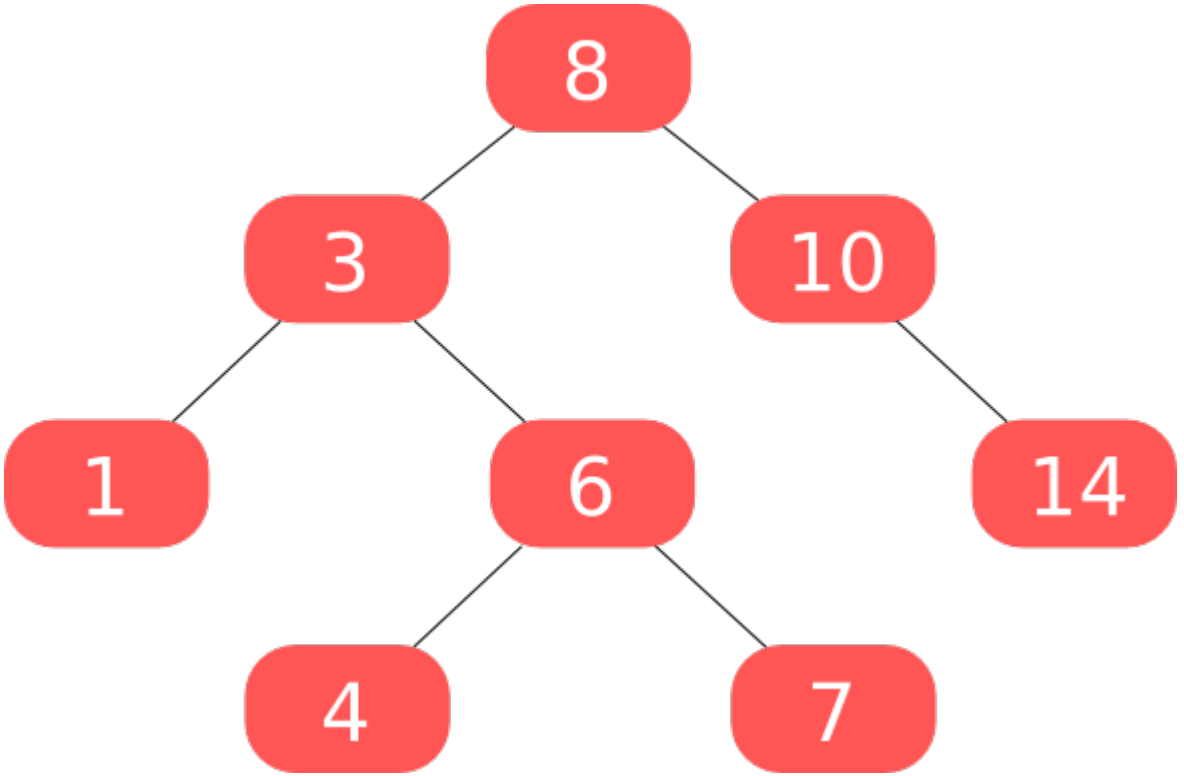
- Tamanho (*size*)

Árvores Binárias

- Tamanho (*size*)
  - O tamanho máximo de uma árvore é o número de nós da árvore.

Árvores Binárias

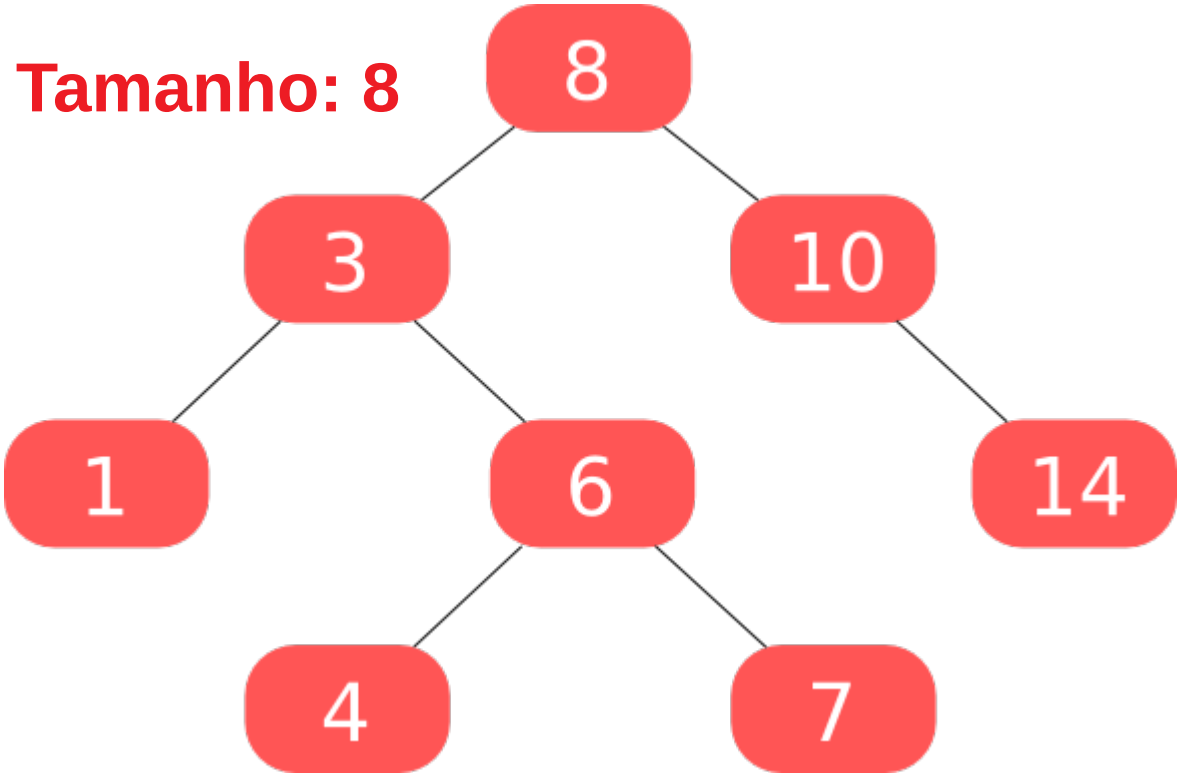
- Tamanho (*size*)
  - O tamanho máximo de uma árvore é o número de nós da árvore.



Árvores Binárias

- Tamanho (*size*)
  - O tamanho máximo de uma árvore é o número de nós da árvore.

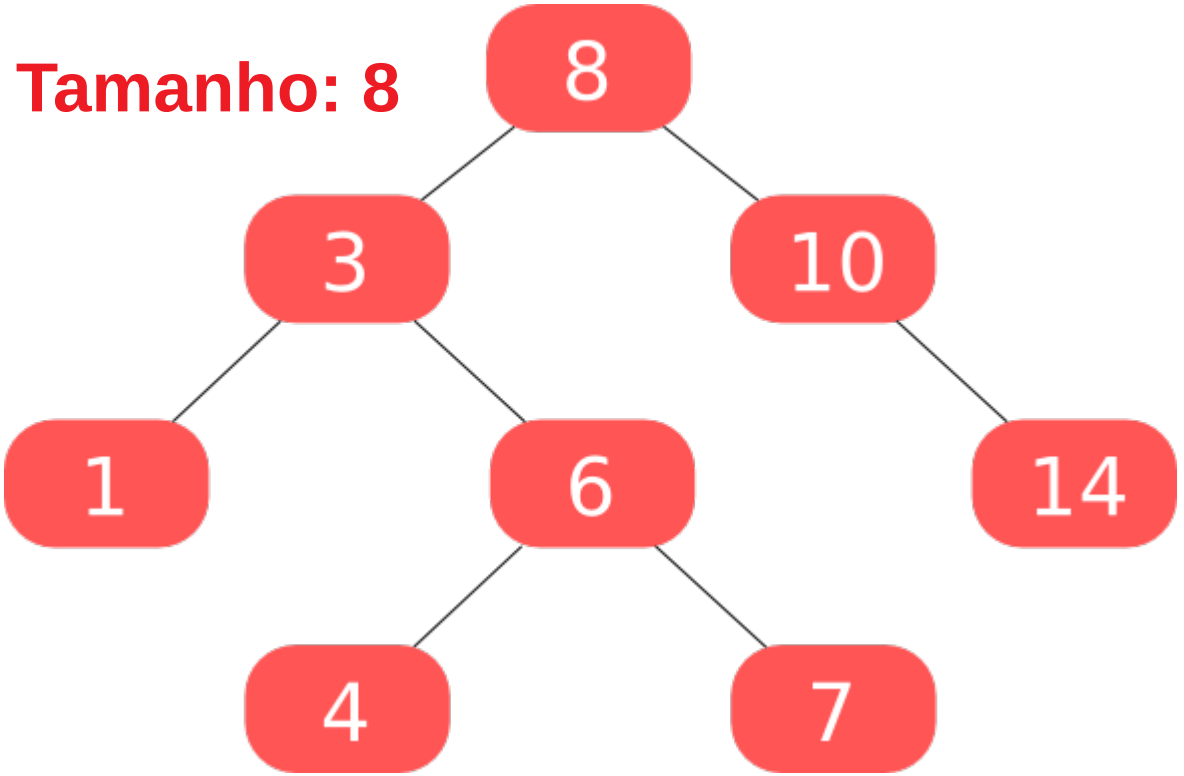
Tamanho: 8

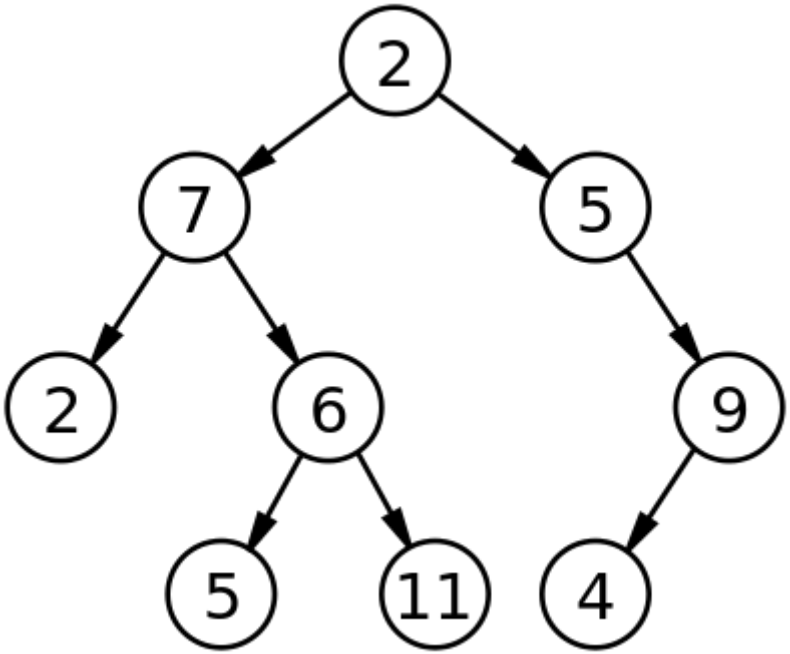


Árvores Binárias

- Tamanho (*size*)
  - O tamanho máximo de uma árvore é o número de nós da árvore.

Tamanho: 8

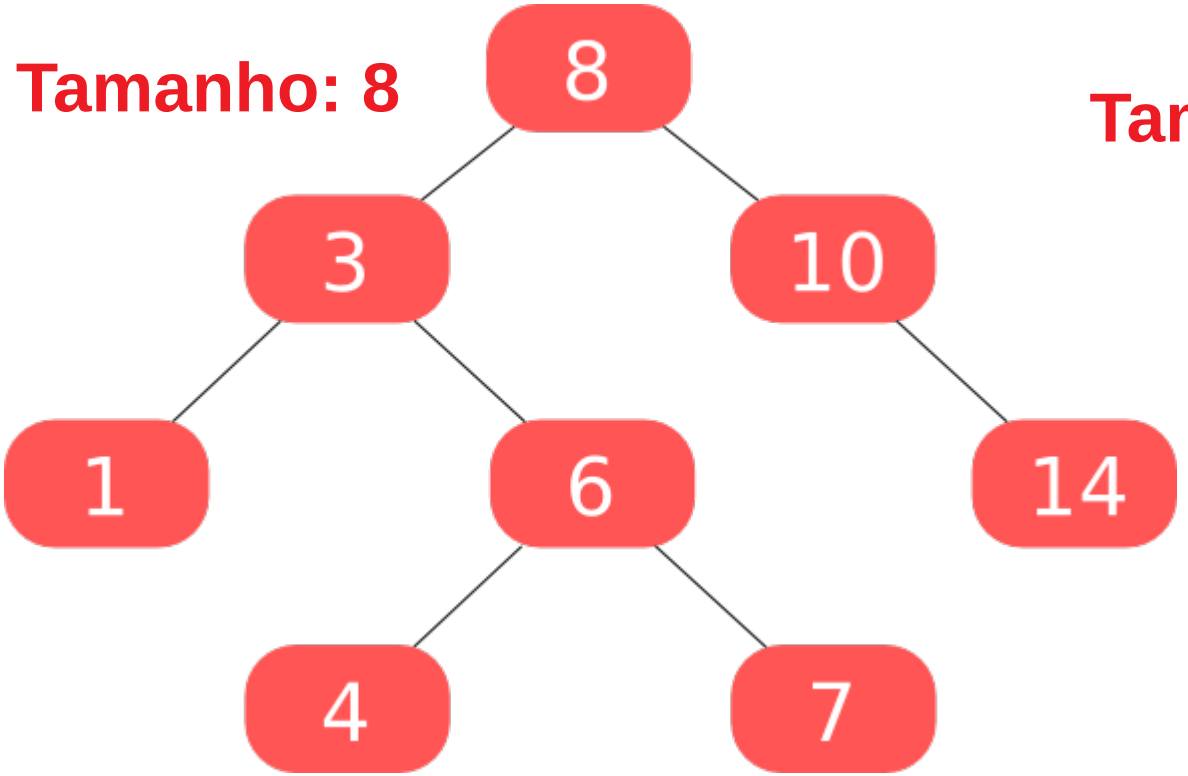




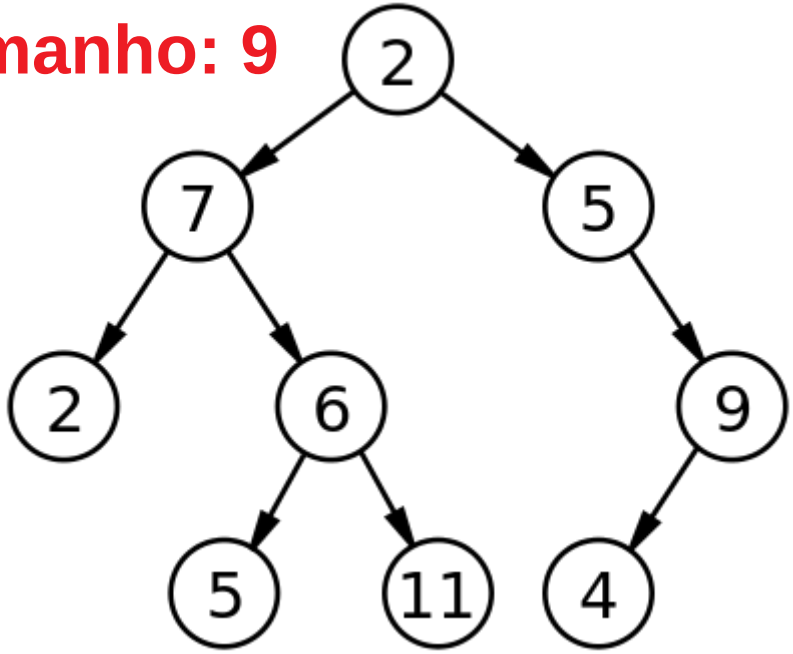
Árvores Binárias

- Tamanho (*size*)
  - O tamanho máximo de uma árvore é o número de nós da árvore.

Tamanho: 8



Tamanho: 9



Árvores Binárias

Árvores Binárias

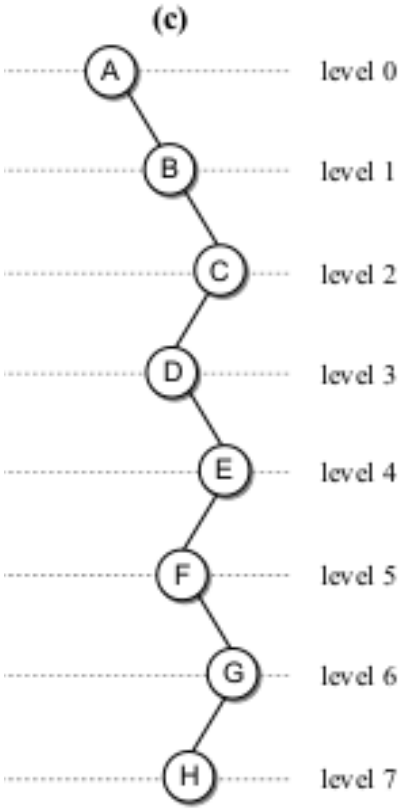
- Uma árvore binária de tamanho n pode ter uma altura máxima de n, quando existe um nó por nível.

Árvores Binárias

- Uma árvore binária de tamanho n pode ter uma altura máxima de n, quando existe um nó por nível.
- Exemplo:

Árvores Binárias

- Uma árvore binária de tamanho n pode ter uma altura máxima de n, quando existe um nó por nível.
- Exemplo:



Árvores Binárias

Árvores Binárias

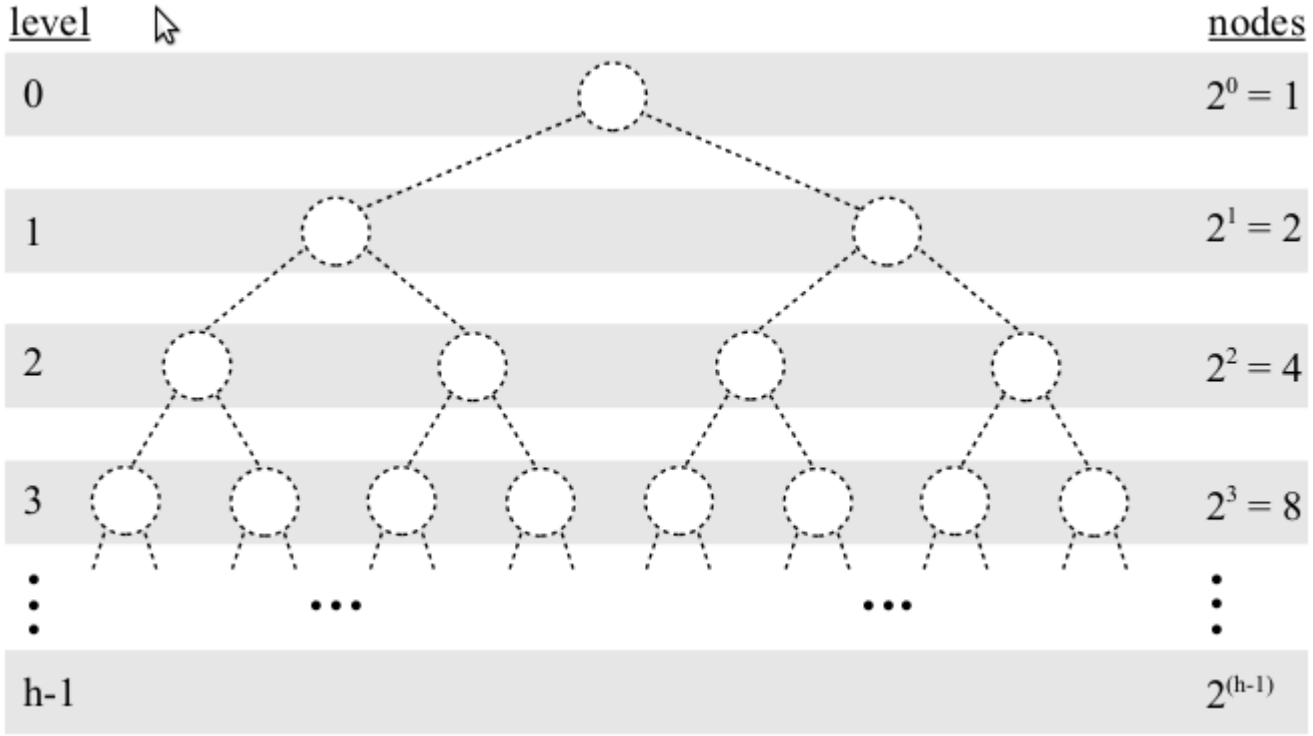
- Qual é a altura mínima de uma árvore binária com n nós?

Árvores Binárias

- Qual é a altura mínima de uma árvore binária com n nós?
  - Cada nível i terá 2^i nós.

Árvores Binárias

- Qual é a altura mínima de uma árvore binária com n nós?
  - Cada nível i terá 2^i nós.



Árvores Binárias

Árvores Binárias

- Qual é a altura mínima de uma árvore binária com n nós?

Árvores Binárias

- Qual é a altura mínima de uma árvore binária com n nós?

$$n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{d-1} + 2^d$$

Árvores Binárias

- Qual é a altura mínima de uma árvore binária com n nós?

$$n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{d-1} + 2^d$$

$$n = 2^{d+1} - 1$$

Árvores Binárias

- Qual é a altura mínima de uma árvore binária com n nós?

$$n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{d-1} + 2^d$$

$$n = 2^{d+1} - 1$$

$$d = \log (n + 1) - 1$$

Árvores Binárias

Árvores Binárias

- Árvore binária cheia (*full binary tree*)

Árvores Binárias

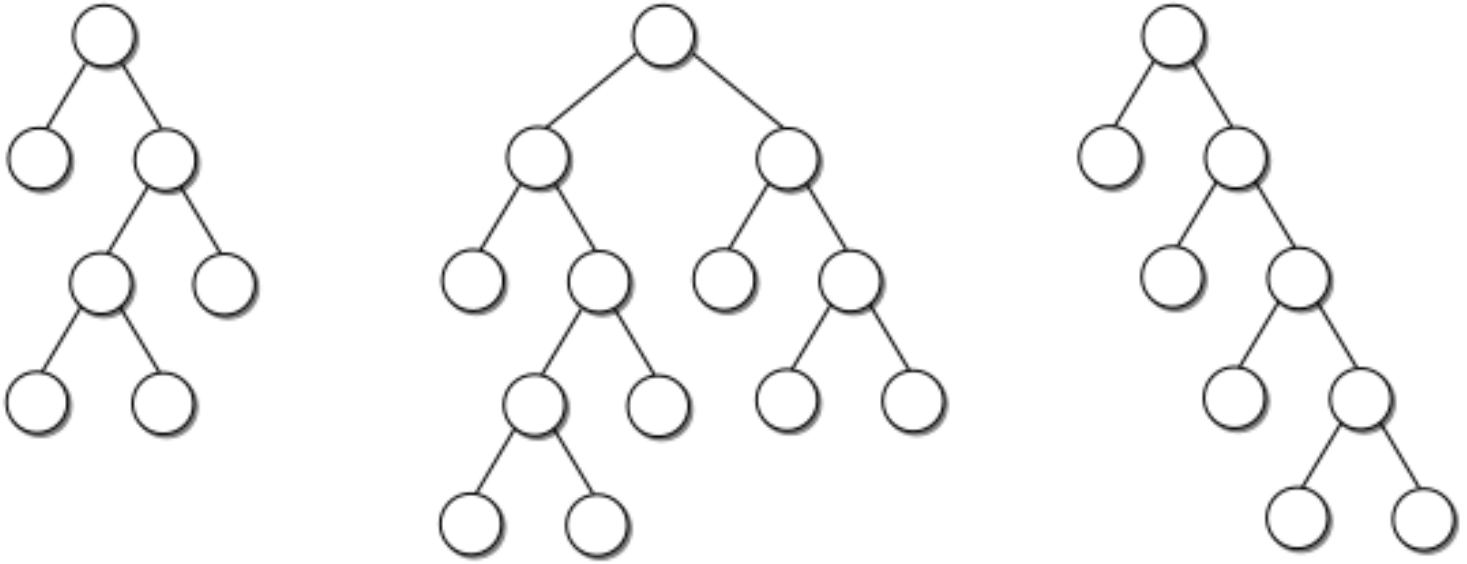
- Árvore binária cheia (*full binary tree*)
  - É uma árvore em que cada nó interior contém dois filhos.

Árvores Binárias

- Árvore binária cheia (*full binary tree*)
  - É uma árvore em que cada nó interior contém dois filhos.
  - Exemplos:

Árvores Binárias

- Árvore binária cheia (*full binary tree*)
  - É uma árvore em que cada nó interior contém dois filhos.
  - Exemplos:



Árvores Binárias

Árvores Binárias

- Árvore binária perfeita (*perfect binary tree*)

Árvores Binárias

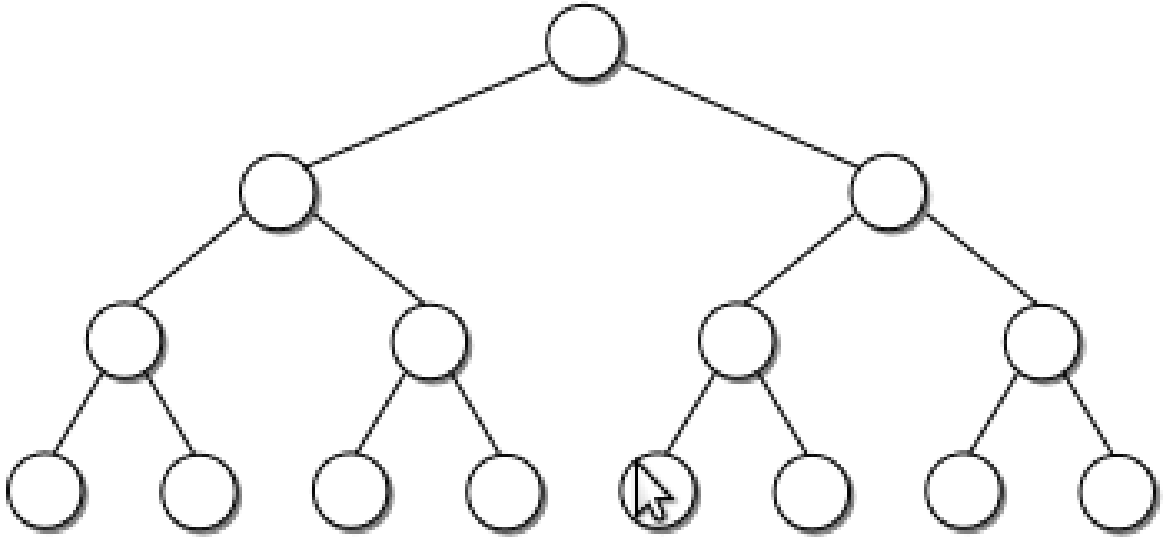
- Árvore binária perfeita (*perfect binary tree*)
  - É uma árvore binária em que todos os nós folhas estão no mesmo nível.

Árvores Binárias

- Árvore binária perfeita (*perfect binary tree*)
  - É uma árvore binária em que todos os nós folhas estão no mesmo nível.
  - Exemplo:

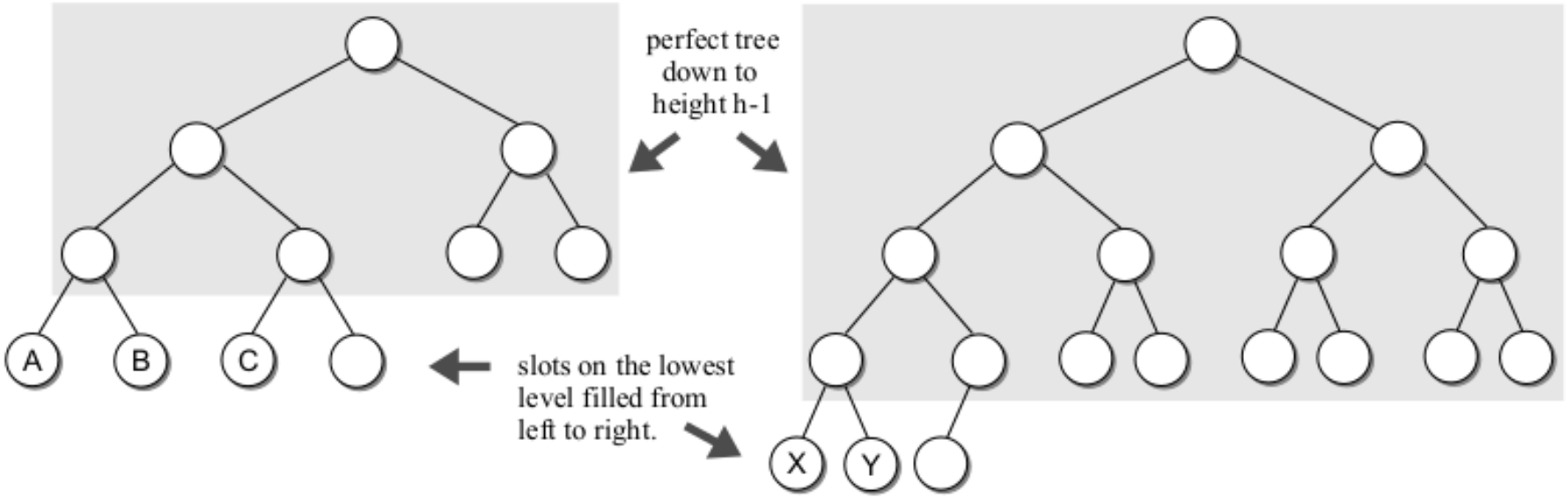
Árvores Binárias

- Árvore binária perfeita (*perfect binary tree*)
  - É uma árvore binária em que todos os nós folhas estão no mesmo nível.
  - Exemplo:



Árvores Binárias

- Árvore binária completa (*complete binary tree*)
  - É uma árvore completa em todos os níveis, exceto possivelmente o último.
  - Exemplo:



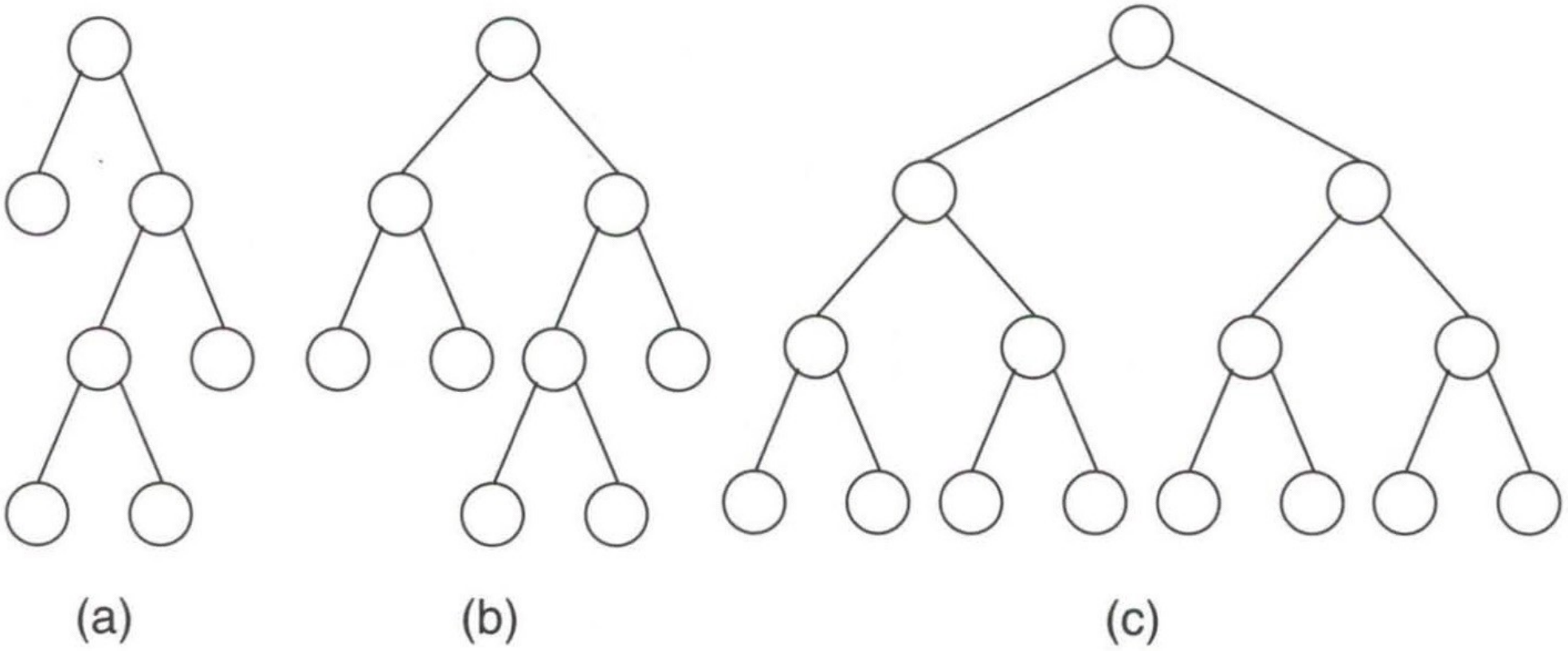
Árvores Binárias

Árvores Binárias

- Comparação

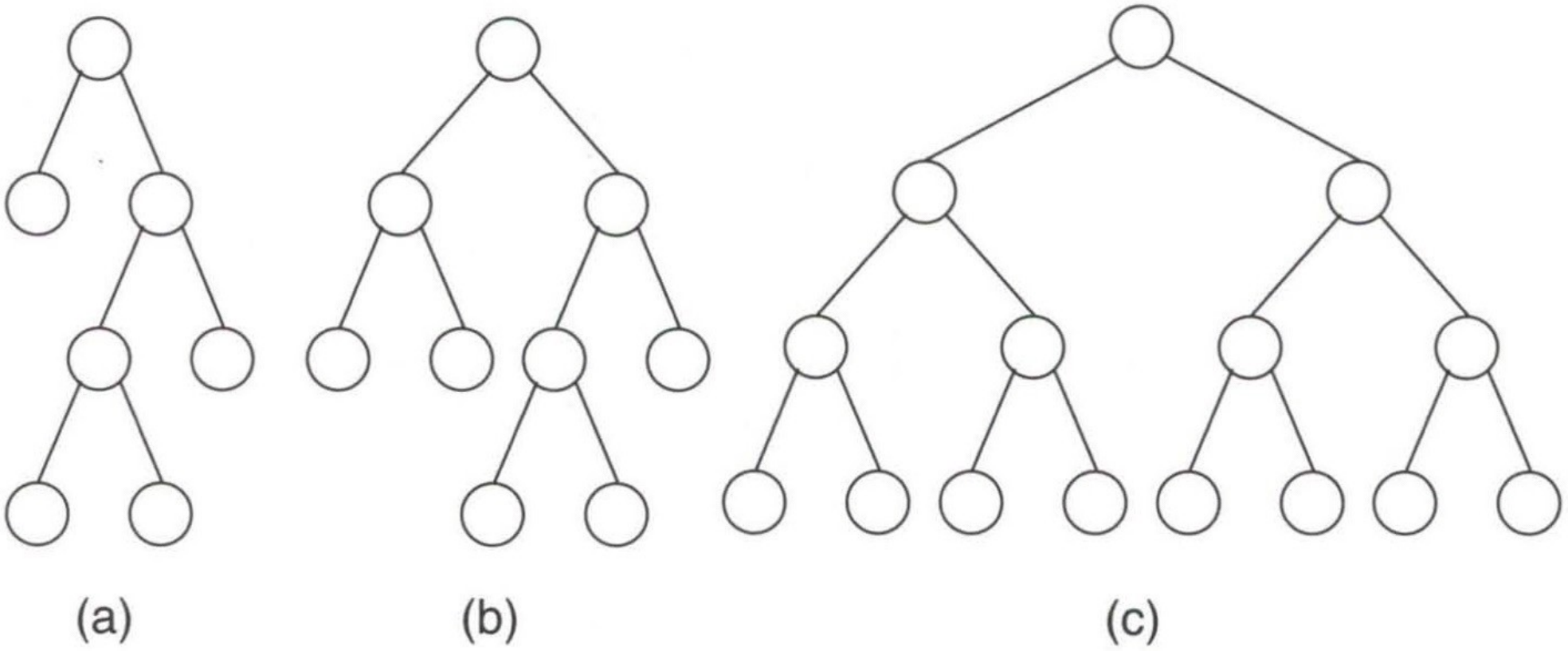
Árvores Binárias

- Comparação



Árvores Binárias

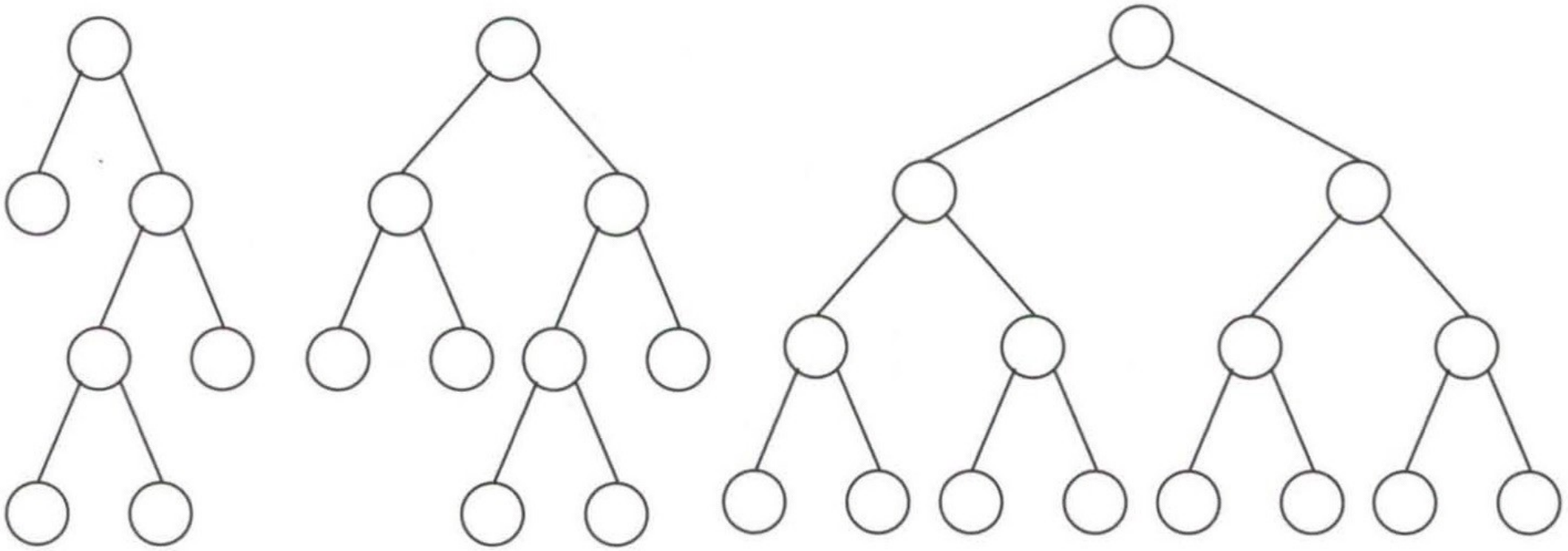
- Comparação



estritamente binária

Árvores Binárias

- Comparação

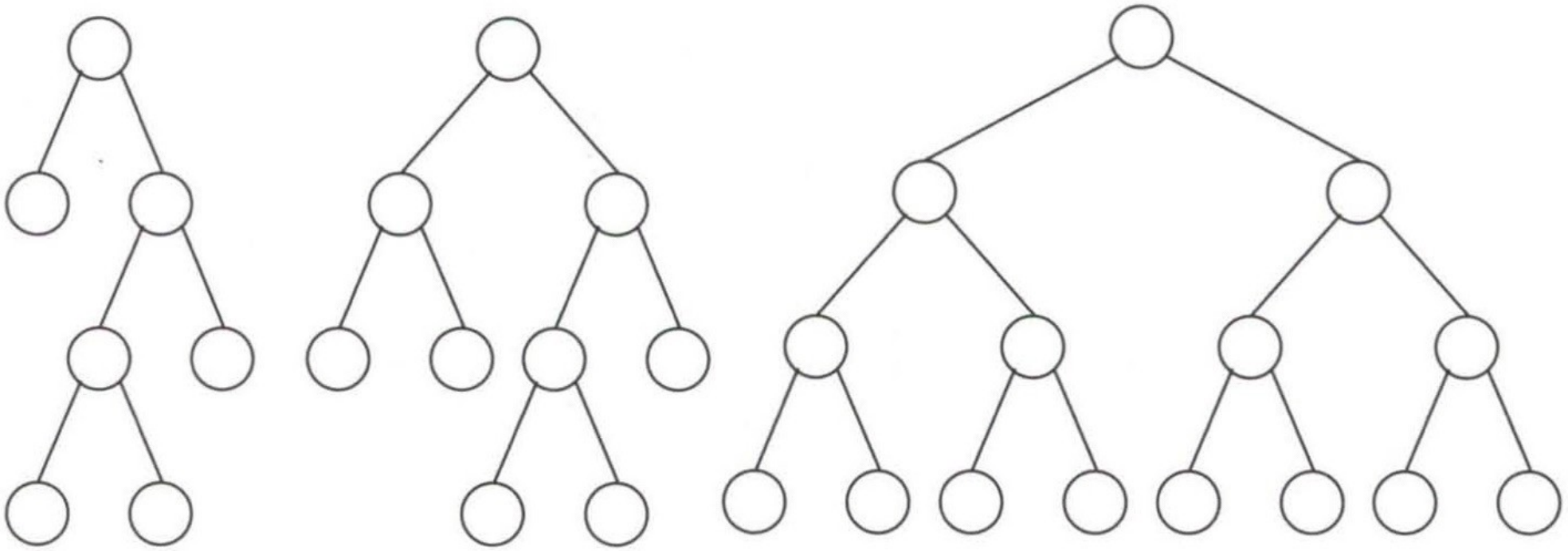


(a) (b) **binária completa** (c)

estritamente binária

Árvores Binárias

- Comparação



(a) (b) **binária completa** (c) **binária cheia**

estritamente binária

Árvores Binárias

Árvores Binárias

- Árvores binárias são comumente implementadas como estruturas dinâmicas, assim como fizemos com as listas ligadas.

Árvores Binárias

- Árvores binárias são comumente implementadas como estruturas dinâmicas, assim como fizemos com as listas ligadas.
- Uma árvore binária é uma estrutura de dados que pode ser usada para implementar diferentes tipos abstratos de dados (TAD).

Árvores Binárias

- Árvores binárias são comumente implementadas como estruturas dinâmicas, assim como fizemos com as listas ligadas.
- Uma árvore binária é uma estrutura de dados que pode ser usada para implementar diferentes tipos abstratos de dados (TAD).
- Para a sua implementação, nós devemos explicitamente armazenar em cada nó as ligações (*links*) para os dois nós filhos juntamente com os dados armazenados em cada nó.

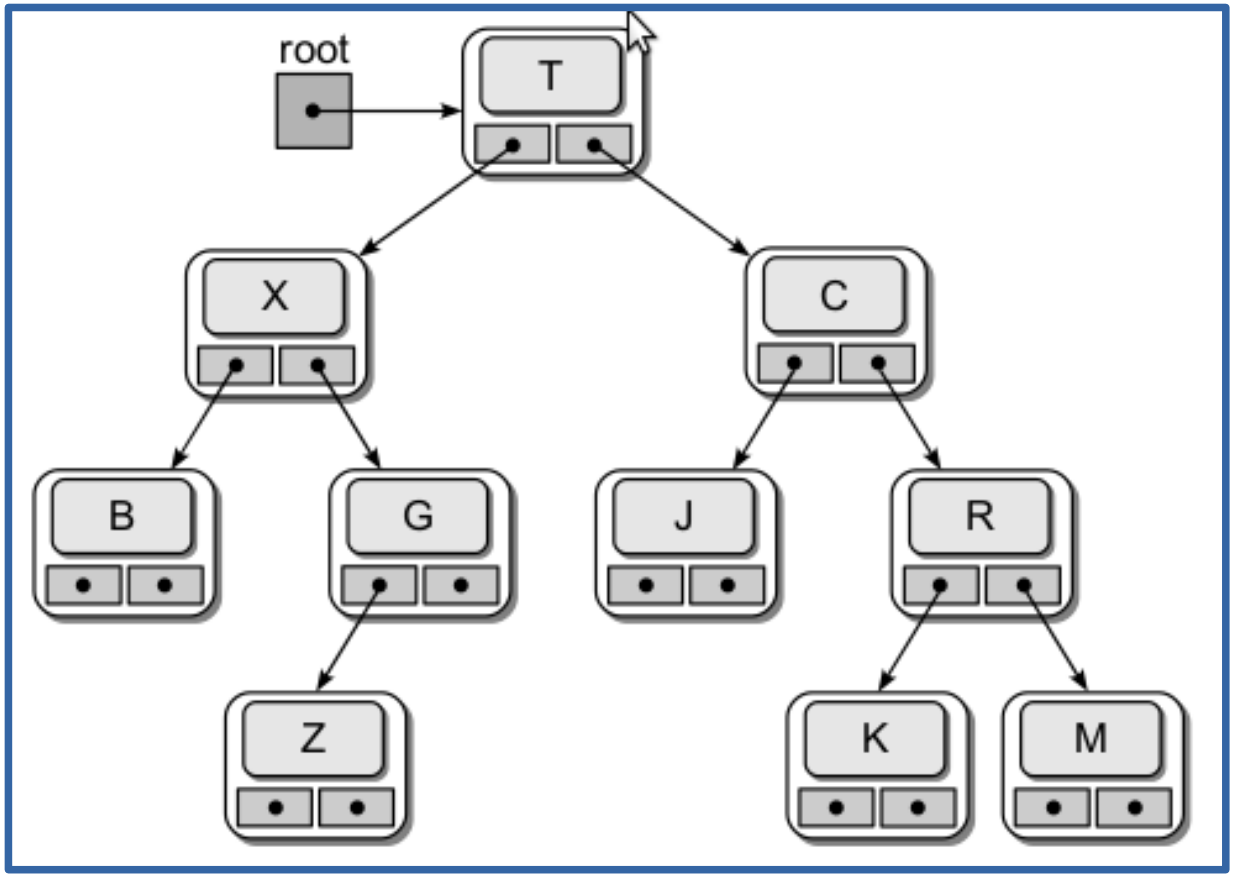
Árvores Binárias

- Classe Nó

```
1  # The storage class for creating binary tree nodes.
2  class _BinTreeNode :
3    def __init__( self, data ):
4      self.data = data
5      self.left = None
6      self.right = None
```

Árvores Binárias

- Exemplo de implementação física da AB:



Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- A operação de varredura é uma das mais importantes na manipulação de coleções de dados.

Árvores Binárias - Varredura

- A operação de varredura é uma das mais importantes na manipulação de coleções de dados.
- O objetivo aqui é percorrer toda a coleção, acessando um elemento de cada vez.

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Como seria a busca em uma lista ligada?

Árvores Binárias - Varredura

- Como seria a busca em uma lista ligada?
  - Bastaria iniciar do primeiro nó e percorrer a lista, seguindo as ligações, até o último nó.

Árvores Binárias - Varredura

- Como seria a busca em uma lista ligada?
  - Bastaria iniciar do primeiro nó e percorrer a lista, seguindo as ligações, até o último nó.
- Mas seria possível visitar cada nó em uma árvore binária?

Árvores Binárias - Varredura

- Como seria a busca em uma lista ligada?
  - Bastaria iniciar do primeiro nó e percorrer a lista, seguindo as ligações, até o último nó.
- Mas seria possível visitar cada nó em uma árvore binária?
  - Não existe um único caminho que parta da raiz e consiga visitar todos os nós.

Árvores Binárias - Varredura

- Como seria a busca em uma lista ligada?
  - Bastaria iniciar do primeiro nó e percorrer a lista, seguindo as ligações, até o último nó.
- Mas seria possível visitar cada nó em uma árvore binária?
  - Não existe um único caminho que parta da raiz e consiga visitar todos os nós.
  - As árvores podem ser percorridas de várias formas.

Árvores Binárias - Varredura

- Existem vários métodos de varredura (caminhamento) em árvores, que permitem percorrê-la de forma sistemática e de tal modo que cada nó seja visitado apenas uma vez.

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Existem 3 principais ordens de caminhamento:

Árvores Binárias - Varredura

- Existem 3 principais ordens de caminhamento:
  - Pré-fixado

Árvores Binárias - Varredura

- Existem 3 principais ordens de caminhamento:
  - Pré-fixado
  - Central

Árvores Binárias - Varredura

- Existem 3 principais ordens de caminhamento:
  - Pré-fixado
  - Central
  - Pós-fixado

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Pré-fixado

Árvores Binárias - Varredura

- Pré-fixado
    - Visita a raiz.

Árvores Binárias - Varredura

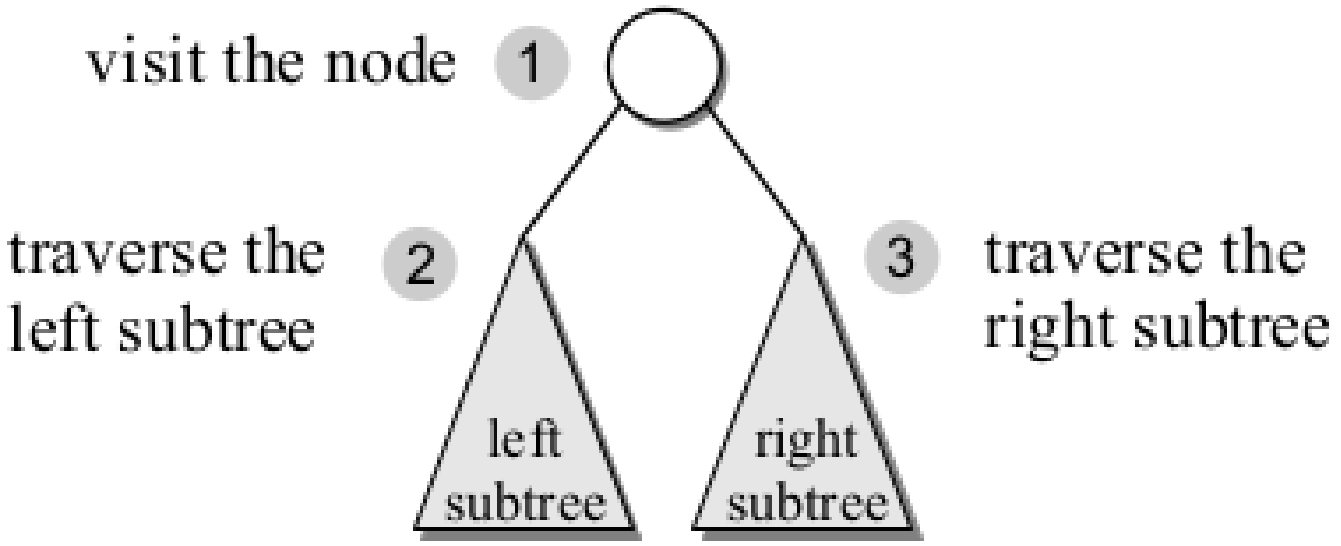
- Pré-fixado
  - Visita a raiz.
  - Percorre a subárvore da esquerda.

Árvores Binárias - Varredura

- Pré-fixado
  - Visita a raiz.
  - Percorre a subárvore da esquerda.
  - Percorre a subárvore da direita.

Árvores Binárias - Varredura

- Pré-fixado
  - Visita a raiz.
  - Percorre a subárvore da esquerda.
  - Percorre a subárvore da direita.



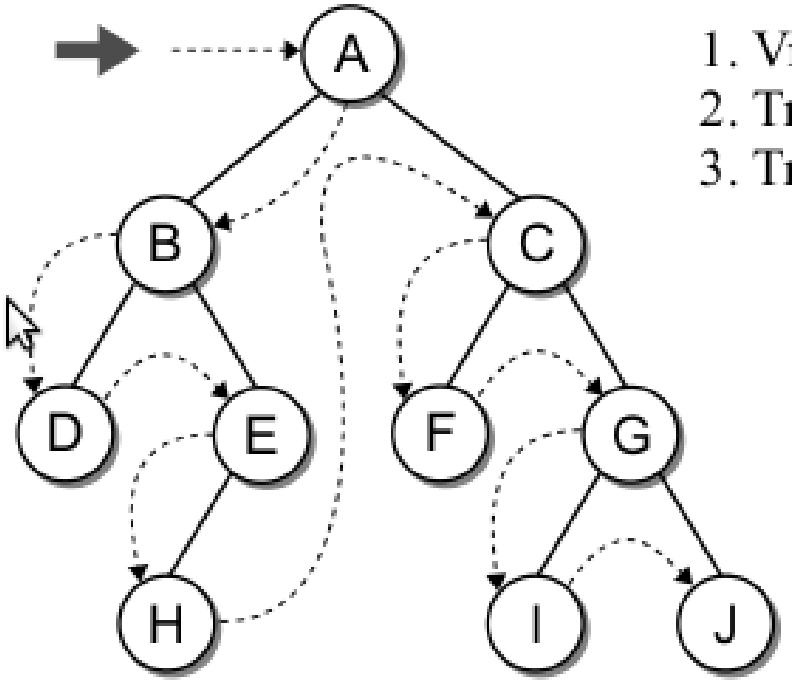
Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de pré-fixado:

Árvores Binárias - Varredura

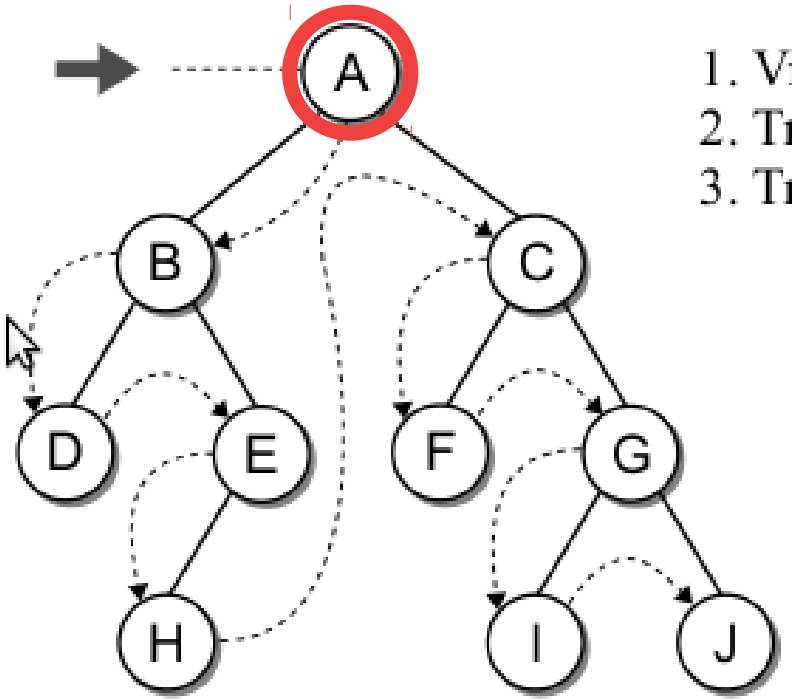
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

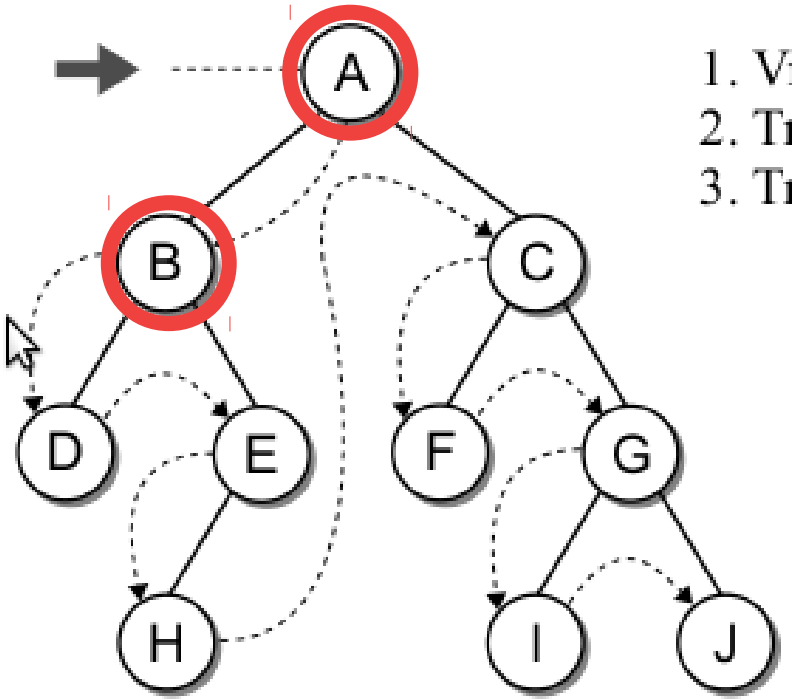
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

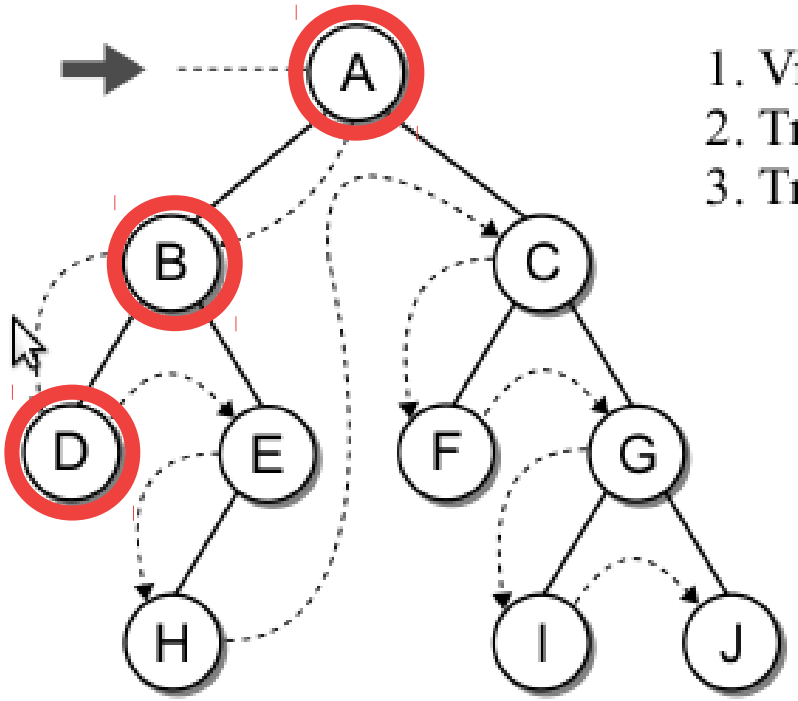
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

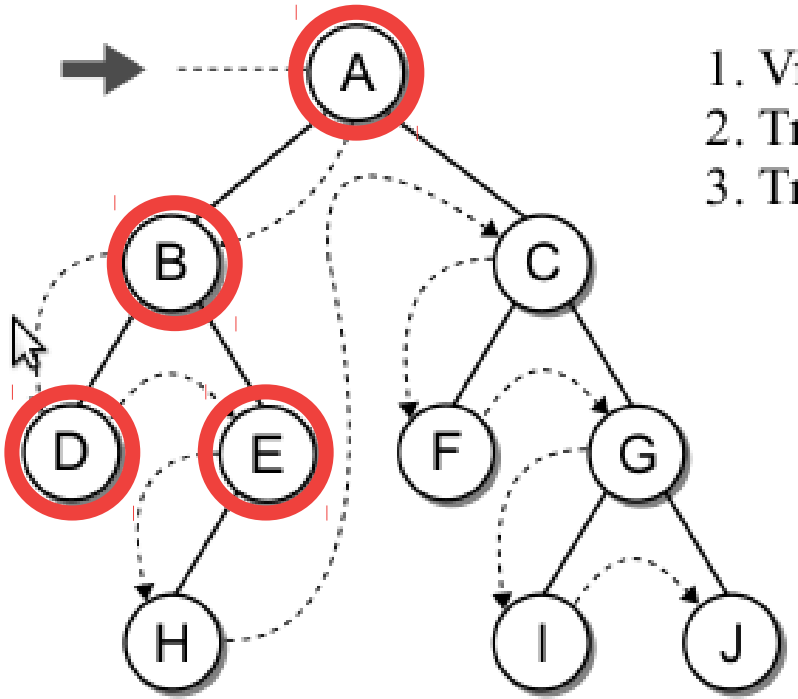
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

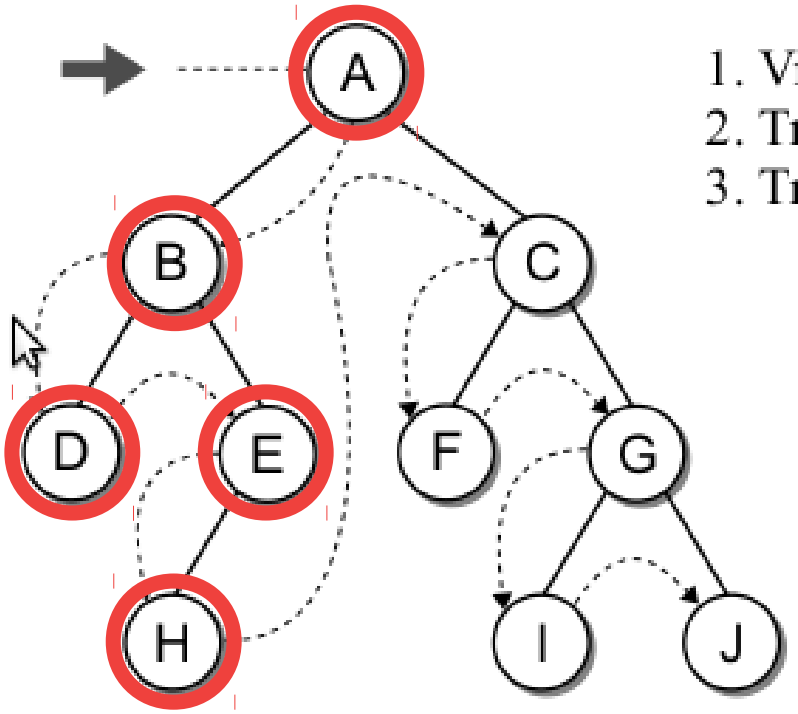
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

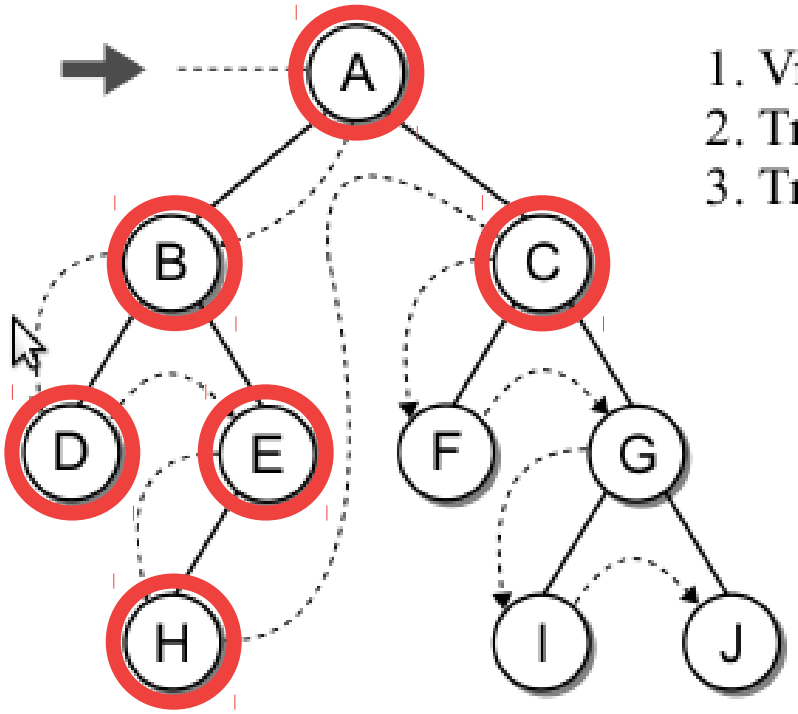
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

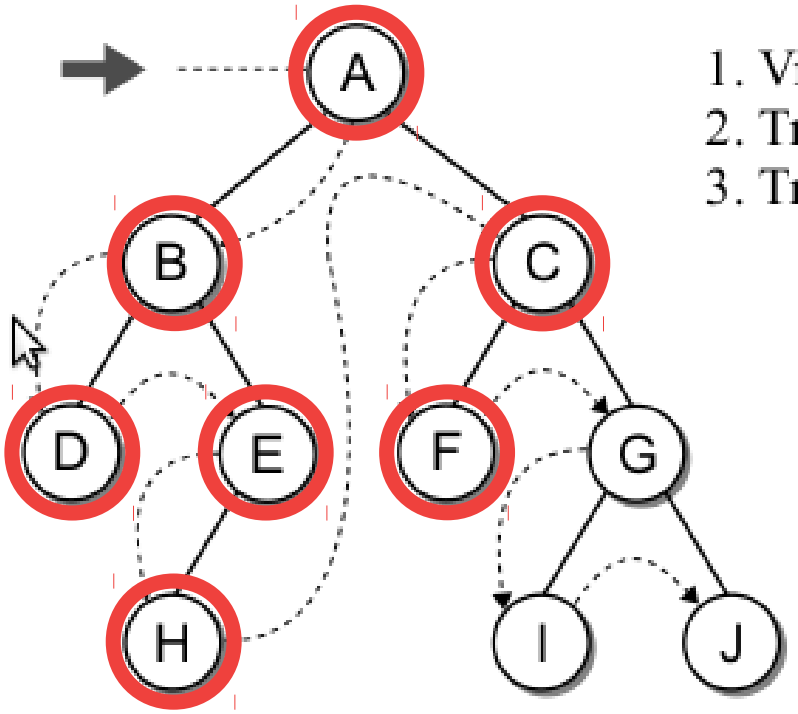
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

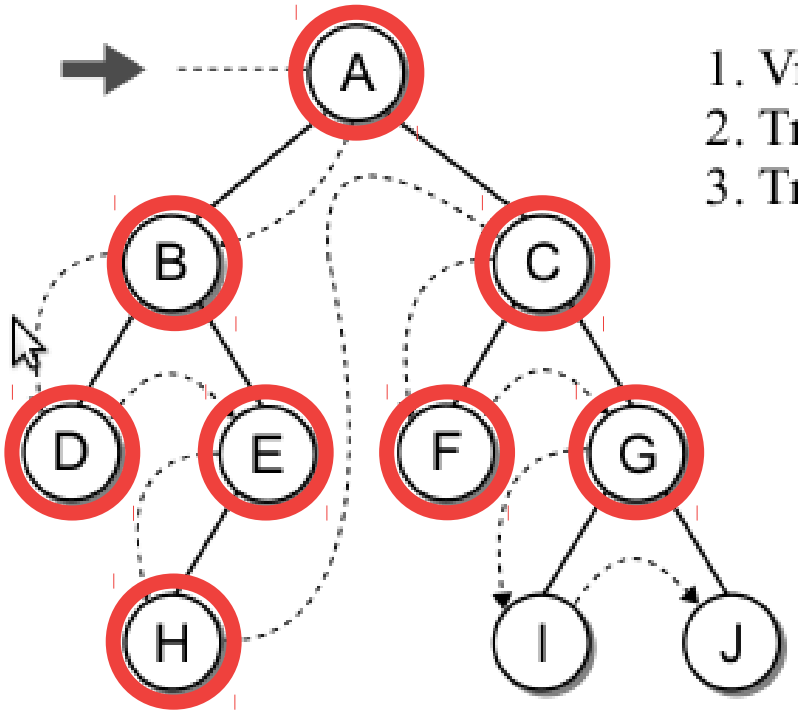
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

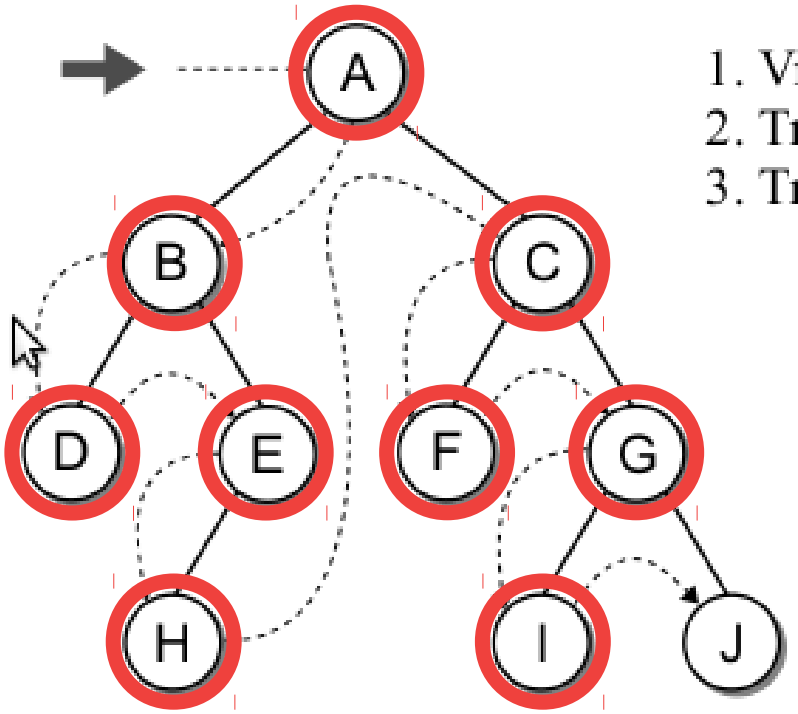
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

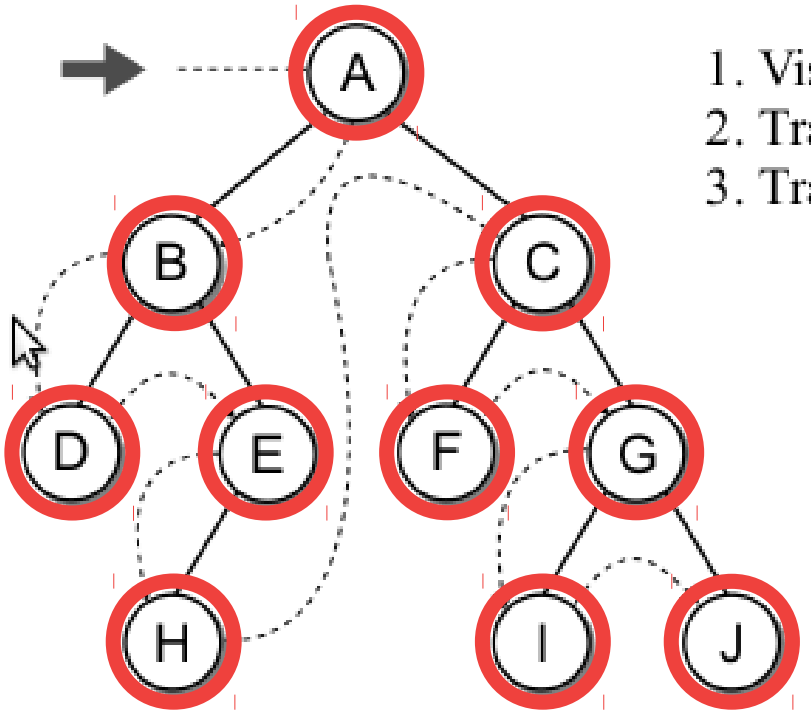
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

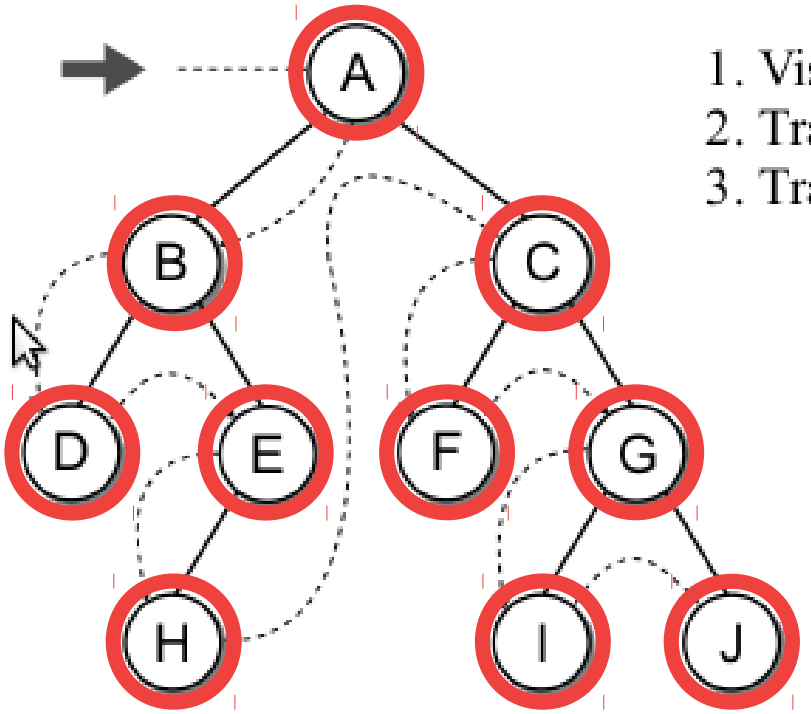
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

A → B → D → E → H → C → F → G → I → J

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pré-fixado:

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pré-fixado:
  - Função recursiva.

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pré-fixado:
  - Função recursiva.

```
1  def preorderTrav( subtree ):
2    if subtree is not None :
3      print( subtree.data )
4      preorderTrav( subtree.left )
5      preorderTrav( subtree.right )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pré-fixado:
  - Função recursiva.
  - O parâmetro será uma subárvore:

```
1  def preorderTrav( subtree ):
2    if subtree is not None :
3      print( subtree.data )
4      preorderTrav( subtree.left )
5      preorderTrav( subtree.right )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pré-fixado:
  - Função recursiva.
  - O parâmetro será uma subárvore:
    - Referência null (None) ou

```
1  def preorderTrav( subtree ):
2    if subtree is not None :
3      print( subtree.data )
4      preorderTrav( subtree.left )
5      preorderTrav( subtree.right )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pré-fixado:
  - Função recursiva.
  - O parâmetro será uma subárvore:
    - Referência null (None) ou
    - Referência para o nó raiz de uma subárvore.

```
1  def preorderTrav( subtree ):
2    if subtree is not None :
3      print( subtree.data )
4      preorderTrav( subtree.left )
5      preorderTrav( subtree.right )
```

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Caminhamento pré-fixado

Árvores Binárias - Varredura

- Caminhamento pré-fixado
  - Dada uma árvore binária de tamanho n, o caminhamento completo dessa árvore visitará cada nó uma única vez.

Árvores Binárias - Varredura

- Caminhamento pré-fixado
  - Dada uma árvore binária de tamanho n, o caminhamento completo dessa árvore visitará cada nó uma única vez.
  - Se a operação de visita requerer tempo constante, então o tempo de caminhamento será feito em O(n).

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Central

Árvores Binárias - Varredura

- Central
    - Percorre a subárvore da esquerda.

Árvores Binárias - Varredura

- Central
  - Percorre a subárvore da esquerda.
  - Visita a raiz.

Árvores Binárias - Varredura

- Central
  - Percorre a subárvore da esquerda.
  - Visita a raiz.
  - Percorre a subárvore da direita.

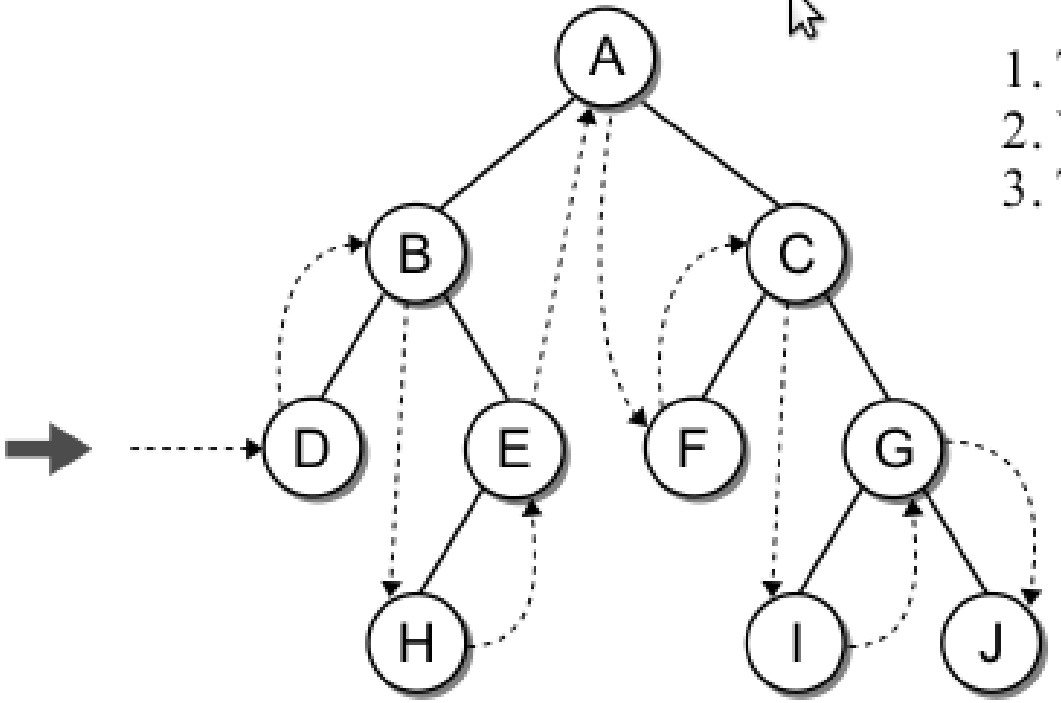
Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento central

Árvores Binárias - Varredura

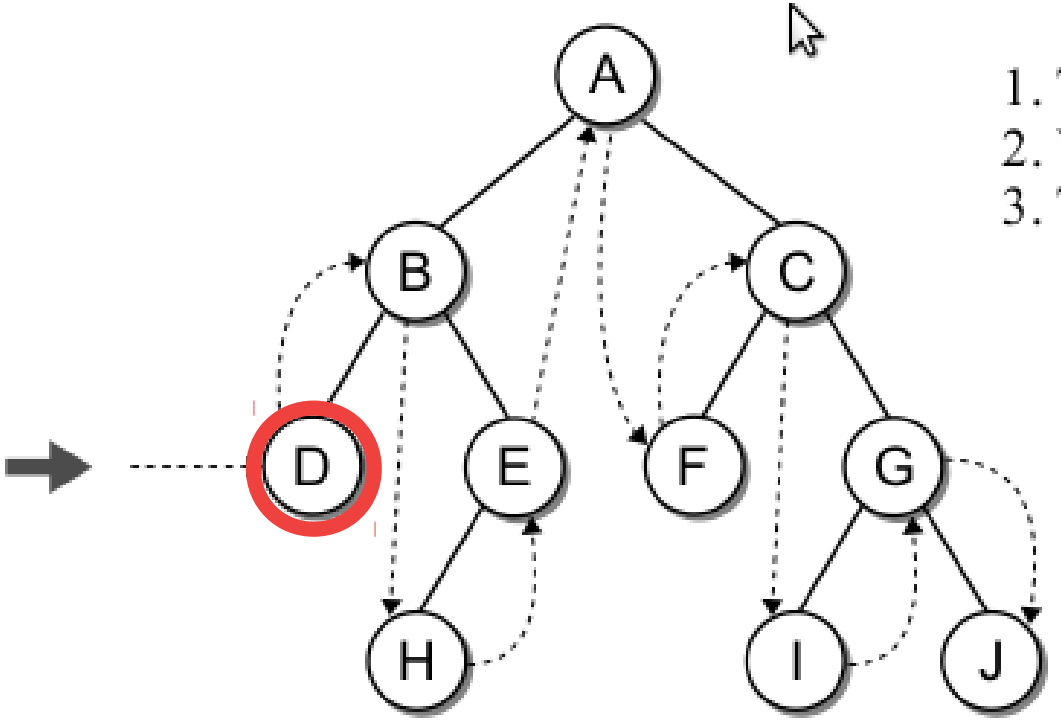
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

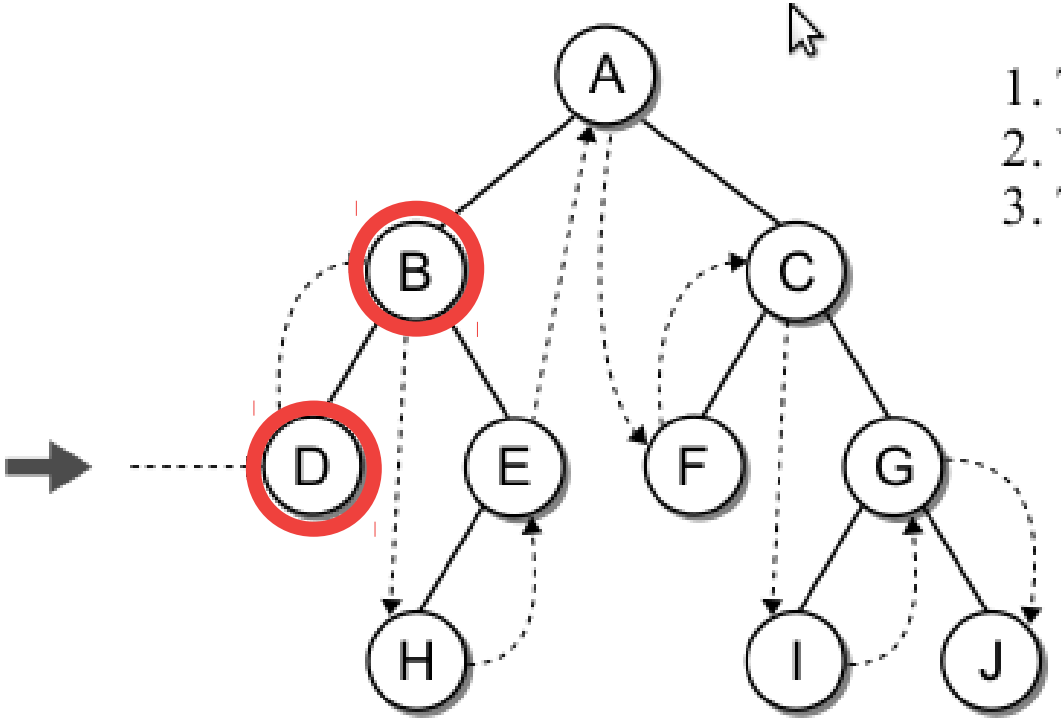
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

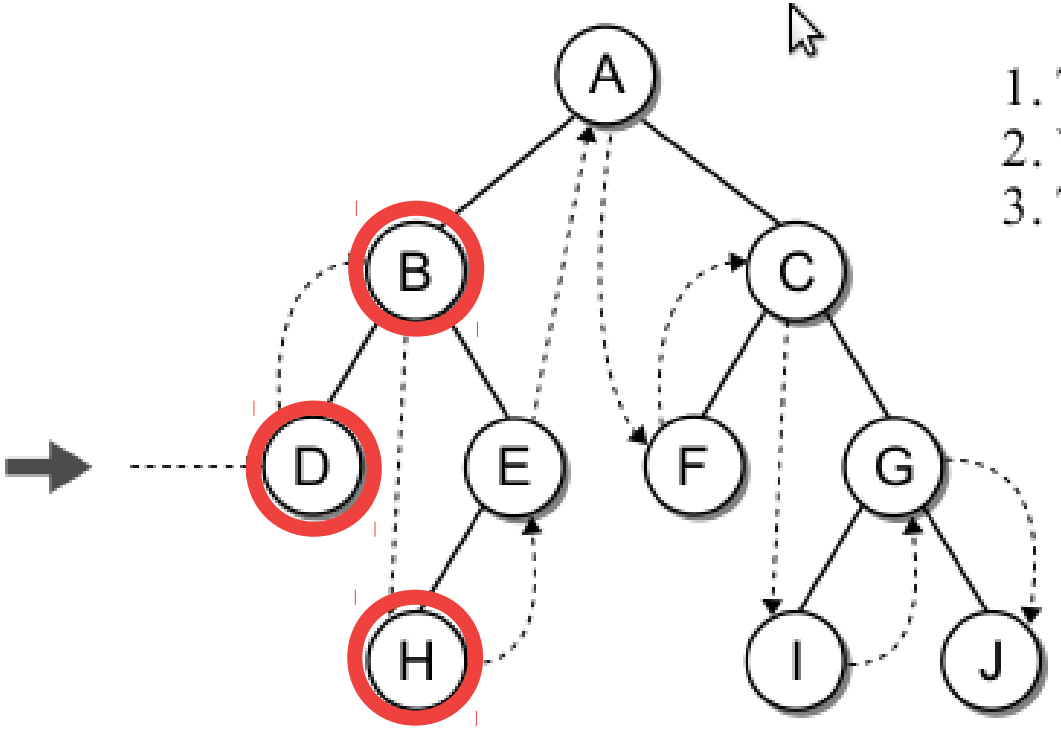
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

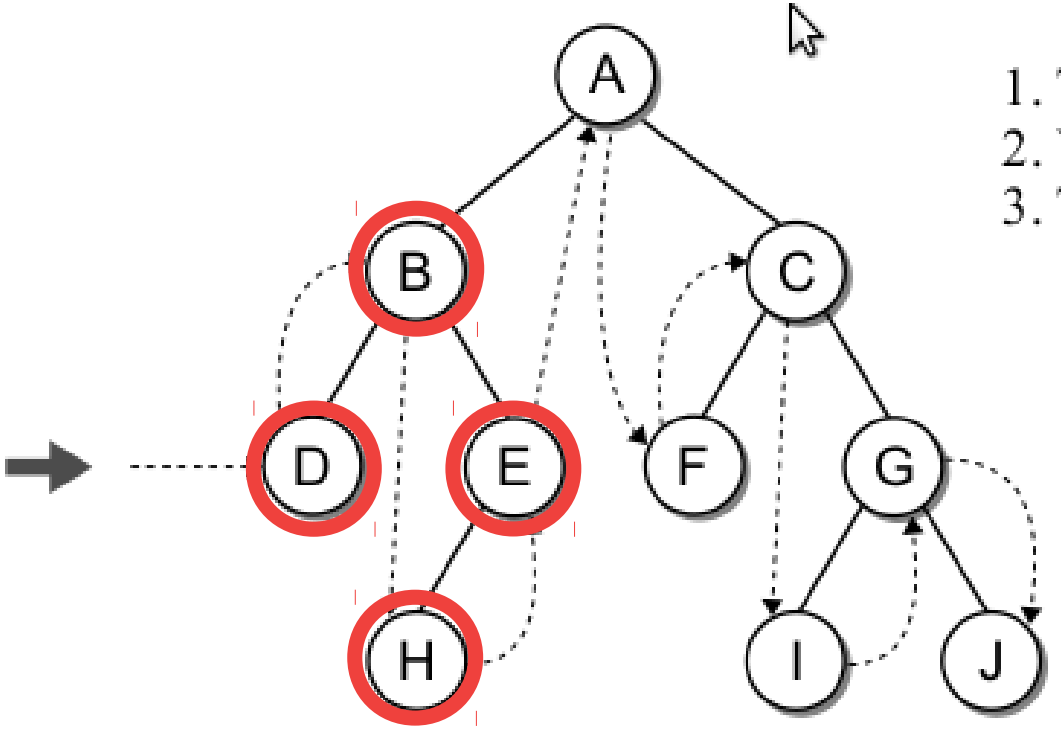
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

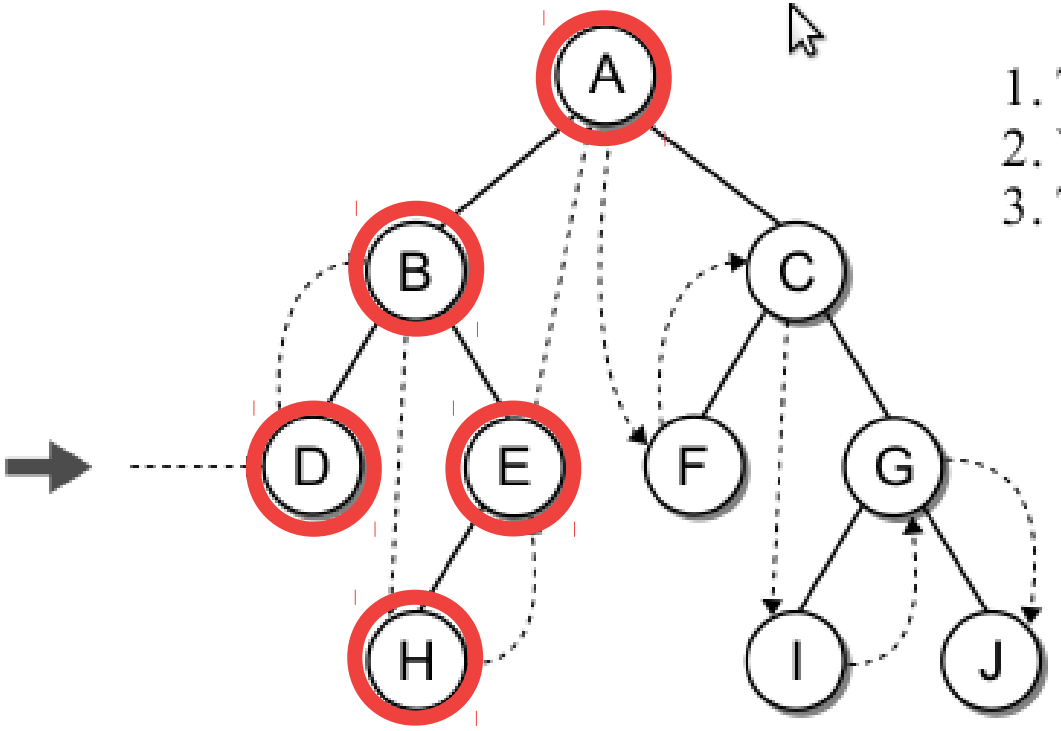
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

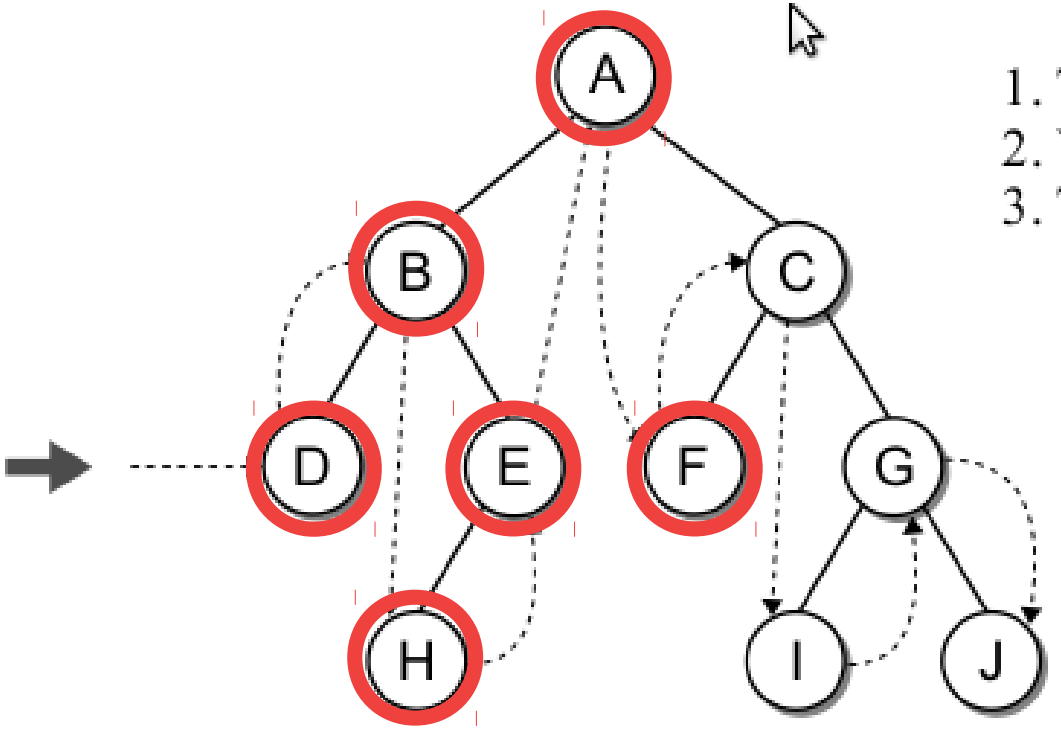
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

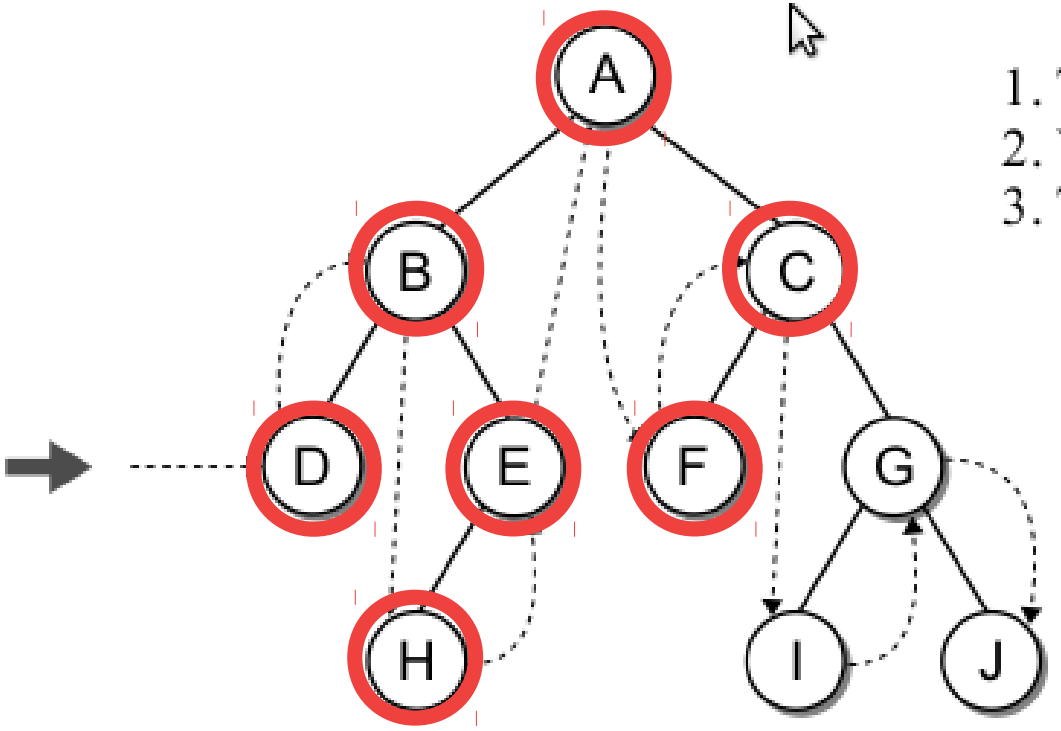
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

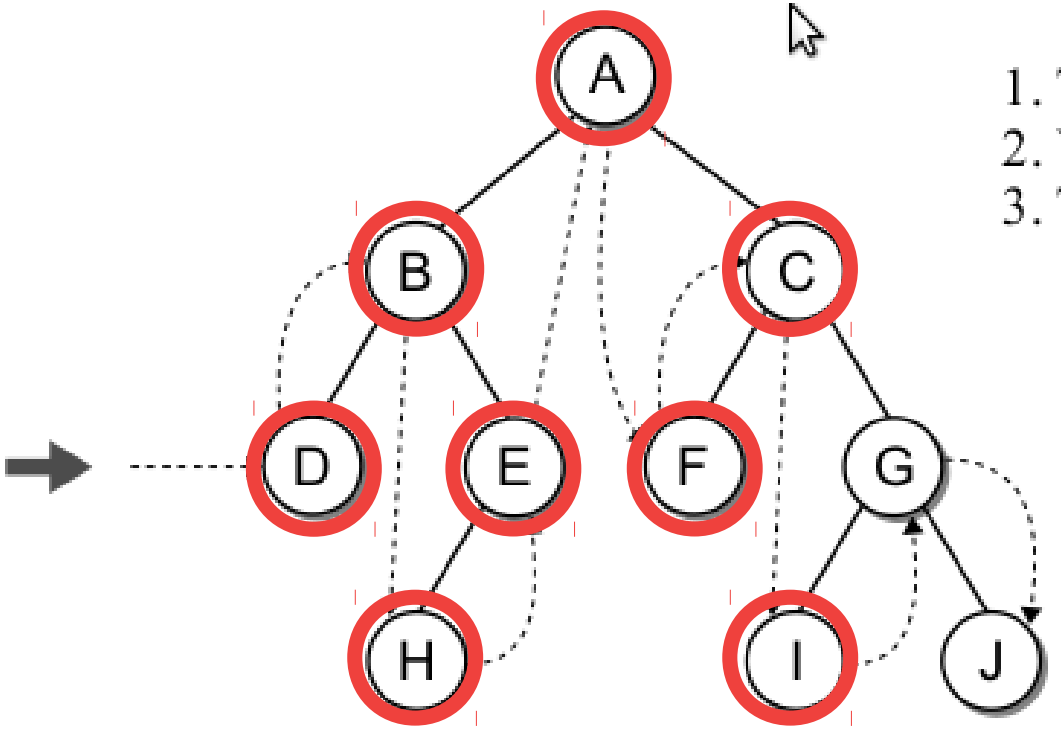
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

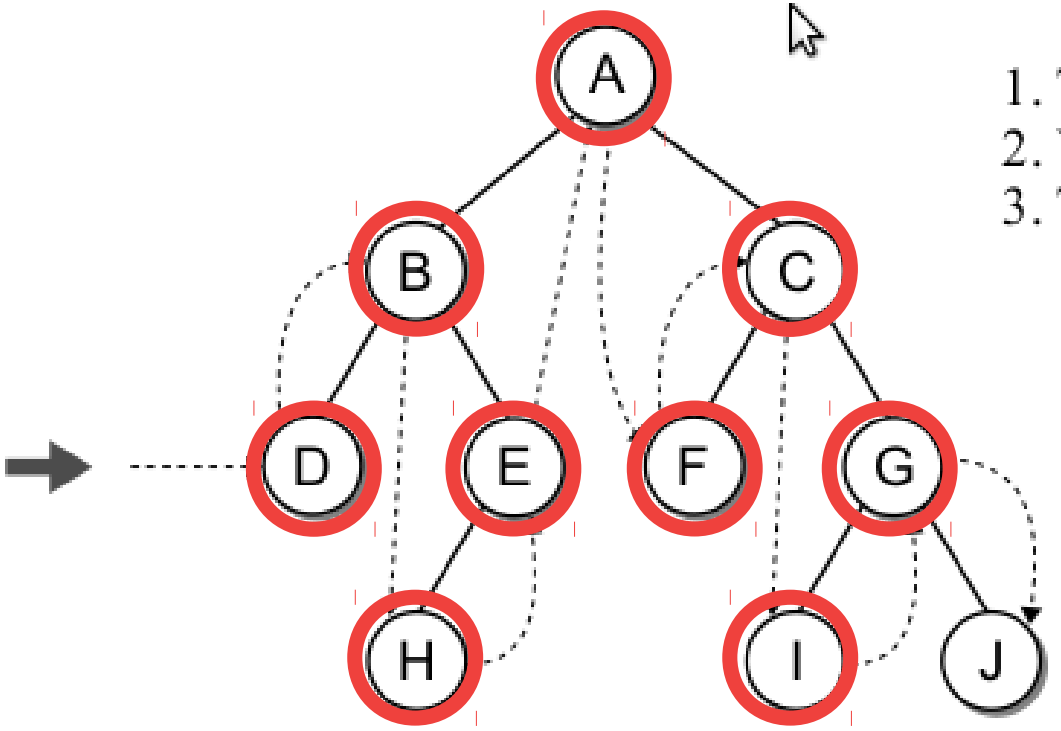
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

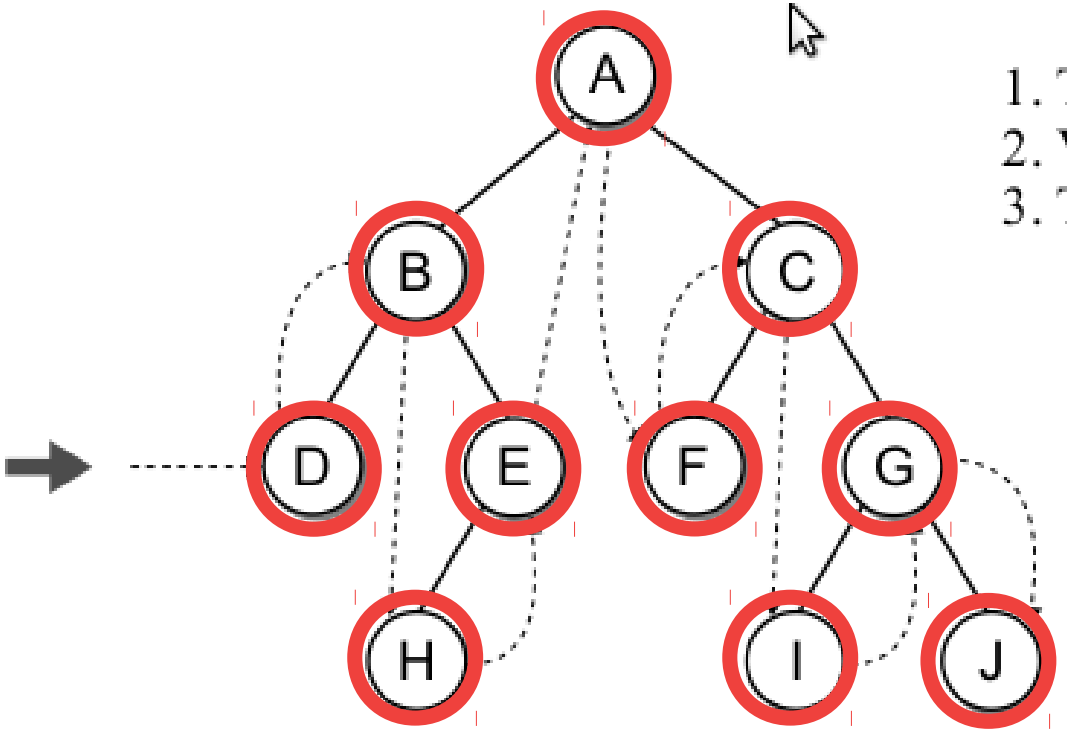
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

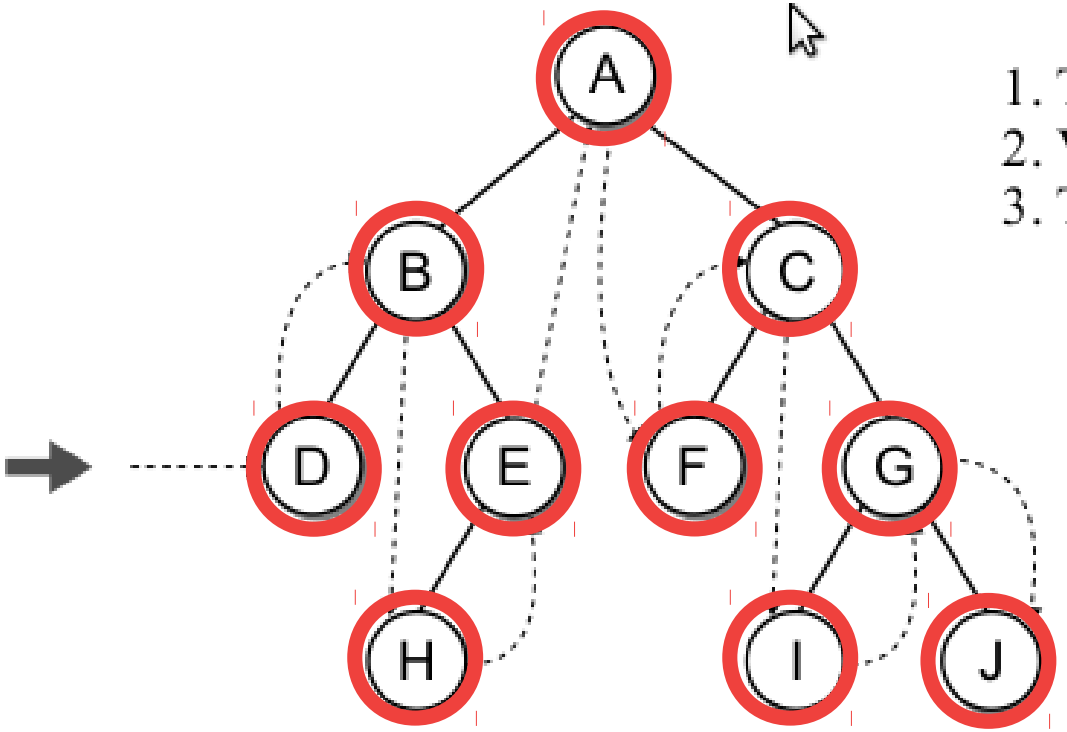
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

D → B → H → E → A → F → C → I → G → J

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho central:

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho central:
  - Função recursiva.

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho central:
  - Função recursiva.

```
1  def inorderTrav( subtree ):
2    if subtree is not None :
3      inorderTrav( subtree.left )
4      print( subtree.data )
5      inorderTrav( subtree.right )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho central:
  - Função recursiva.
  - O parâmetro será uma subárvore:

```
1  def inorderTrav( subtree ):
2    if subtree is not None :
3      inorderTrav( subtree.left )
4      print( subtree.data )
5      inorderTrav( subtree.right )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho central:
  - Função recursiva.
  - O parâmetro será uma subárvore:
    - Referência null (None) ou

```
1  def inorderTrav( subtree ):
2    if subtree is not None :
3      inorderTrav( subtree.left )
4      print( subtree.data )
5      inorderTrav( subtree.right )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho central:
  - Função recursiva.
  - O parâmetro será uma subárvore:
    - Referência null (None) ou
    - Referência para o nó raiz de uma subárvore.

```
1  def inorderTrav( subtree ):
2    if subtree is not None :
3      inorderTrav( subtree.left )
4      print( subtree.data )
5      inorderTrav( subtree.right )
```

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Pós-fixado

Árvores Binárias - Varredura

- Pós-fixado
    - Percorre a subárvore da esquerda.

Árvores Binárias - Varredura

- Pós-fixado
  - Percorre a subárvore da esquerda.
  - Percorre a subárvore da direita.

Árvores Binárias - Varredura

- Pós-fixado
  - Percorre a subárvore da esquerda.
  - Percorre a subárvore da direita.
  - Visita a raiz.

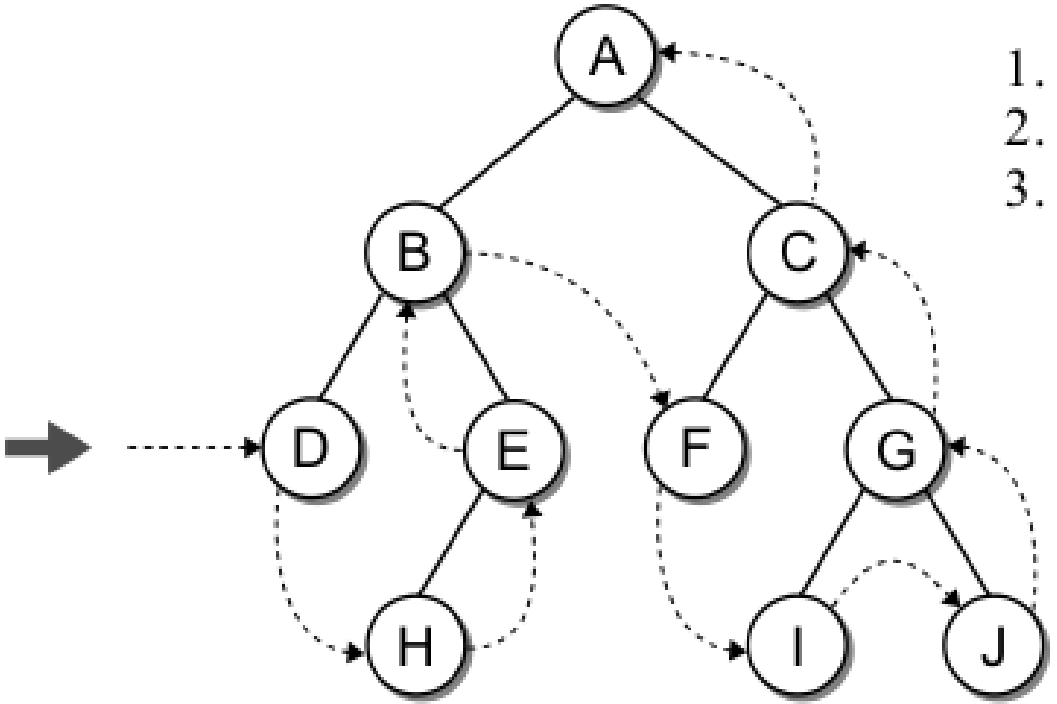
Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento pós-fixado

Árvores Binárias - Varredura

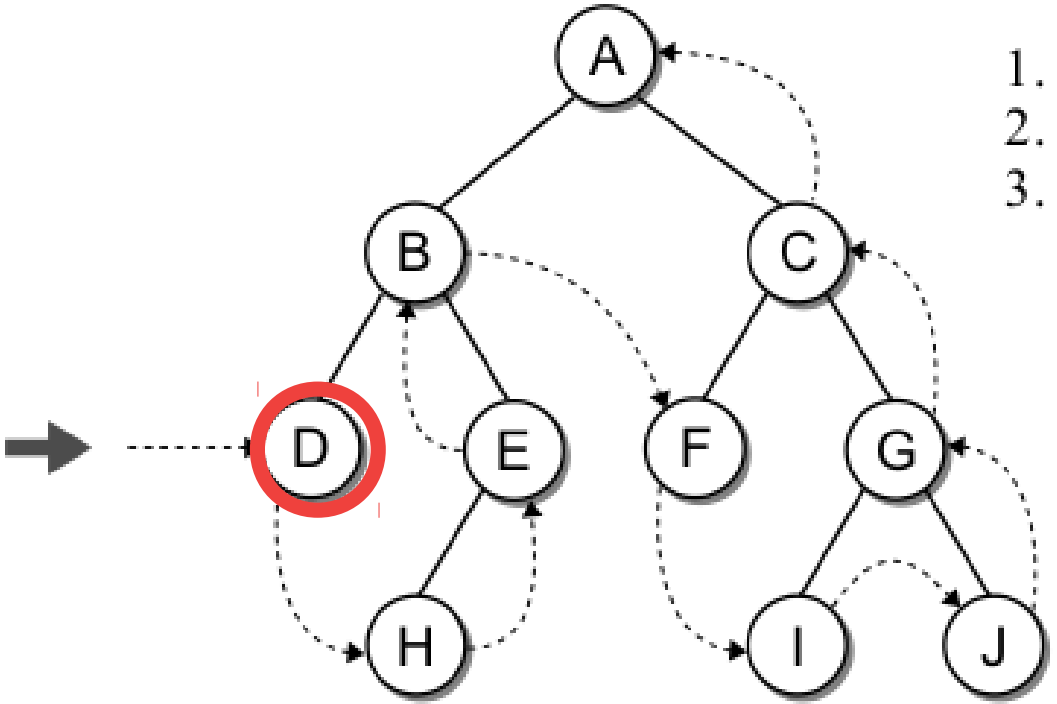
- Exemplo de caminhamento pós-fixado



1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.

Árvores Binárias - Varredura

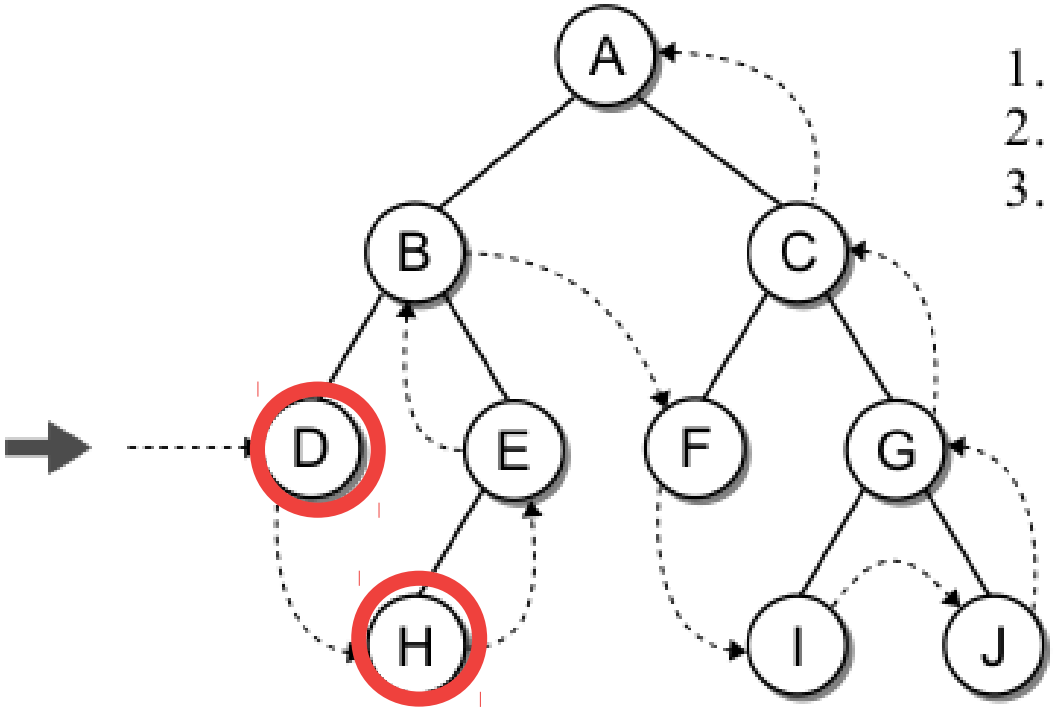
- Exemplo de caminhamento pós-fixado



1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.

Árvores Binárias - Varredura

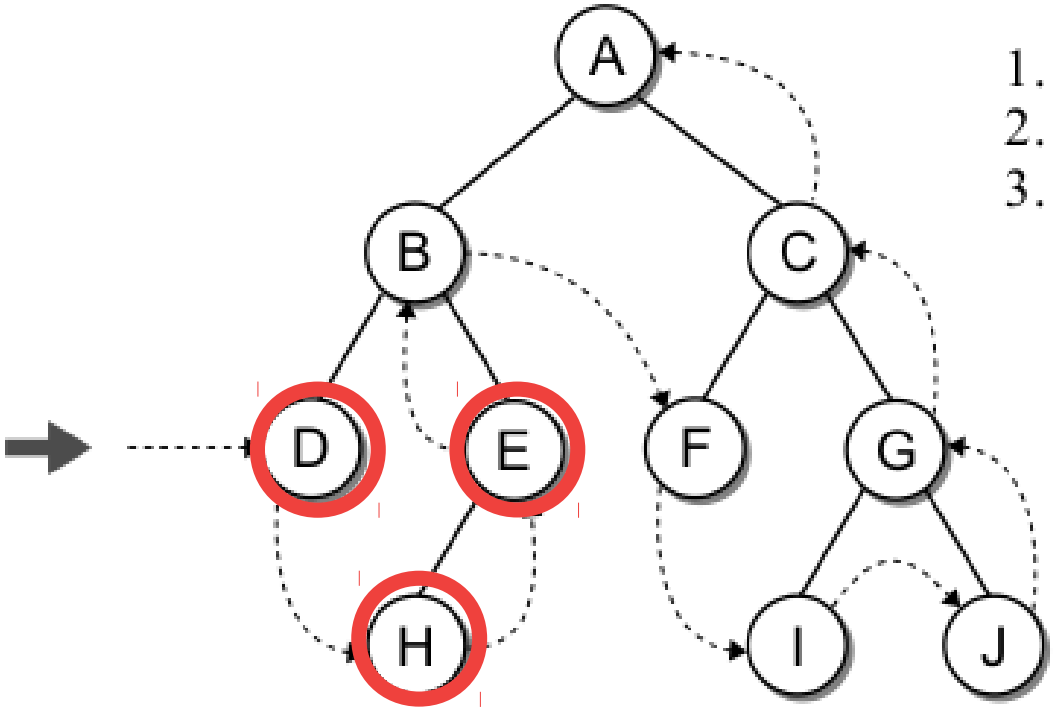
- Exemplo de caminhamento pós-fixado



1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.

Árvores Binárias - Varredura

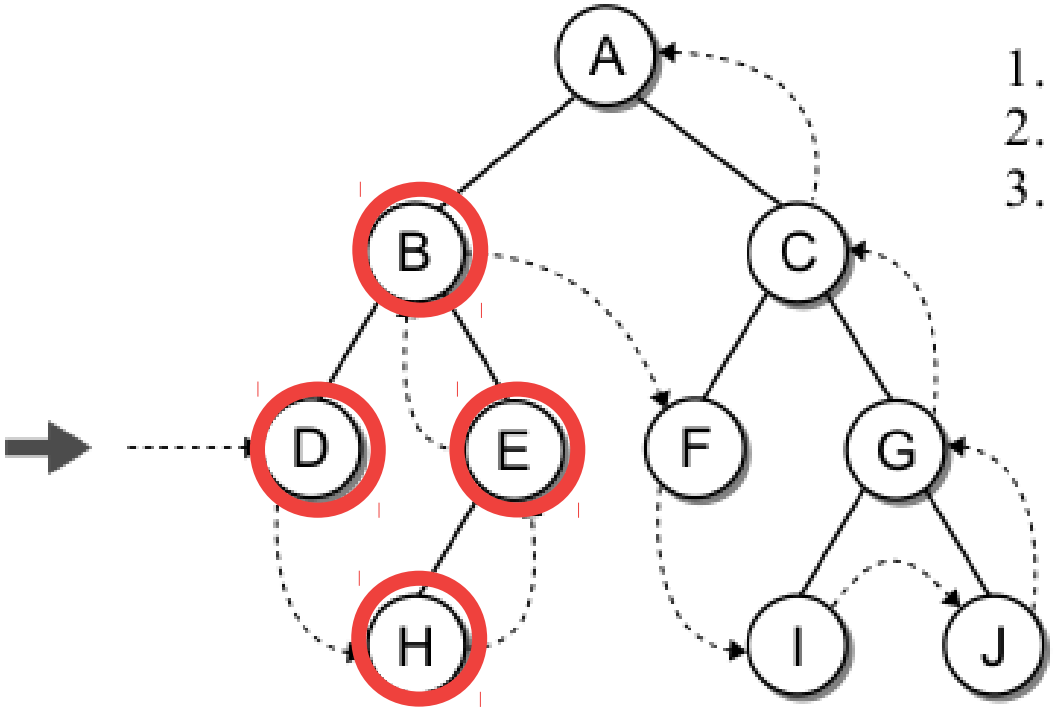
- Exemplo de caminhamento pós-fixado



1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.

Árvores Binárias - Varredura

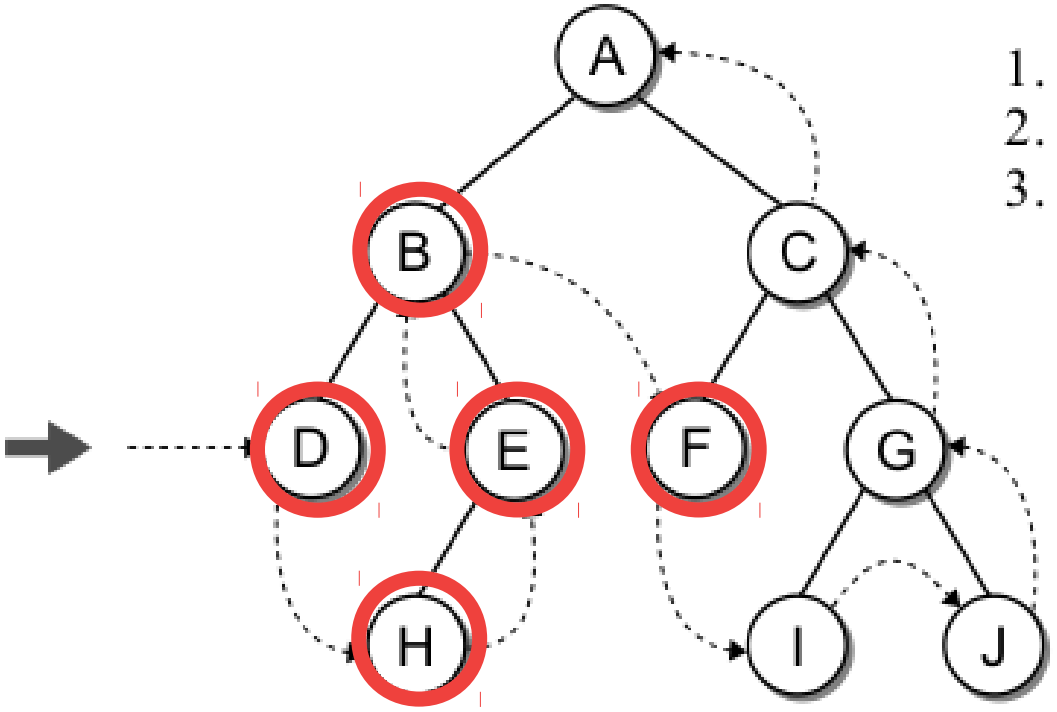
- Exemplo de caminhamento pós-fixado



1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.

Árvores Binárias - Varredura

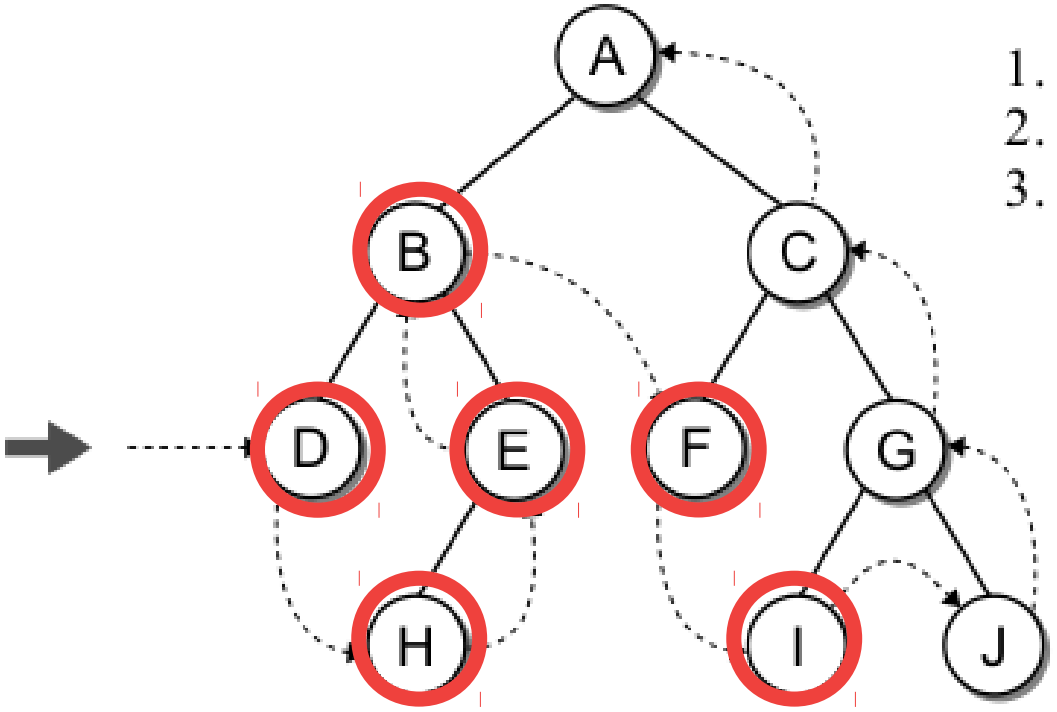
- Exemplo de caminhamento pós-fixado



1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.

Árvores Binárias - Varredura

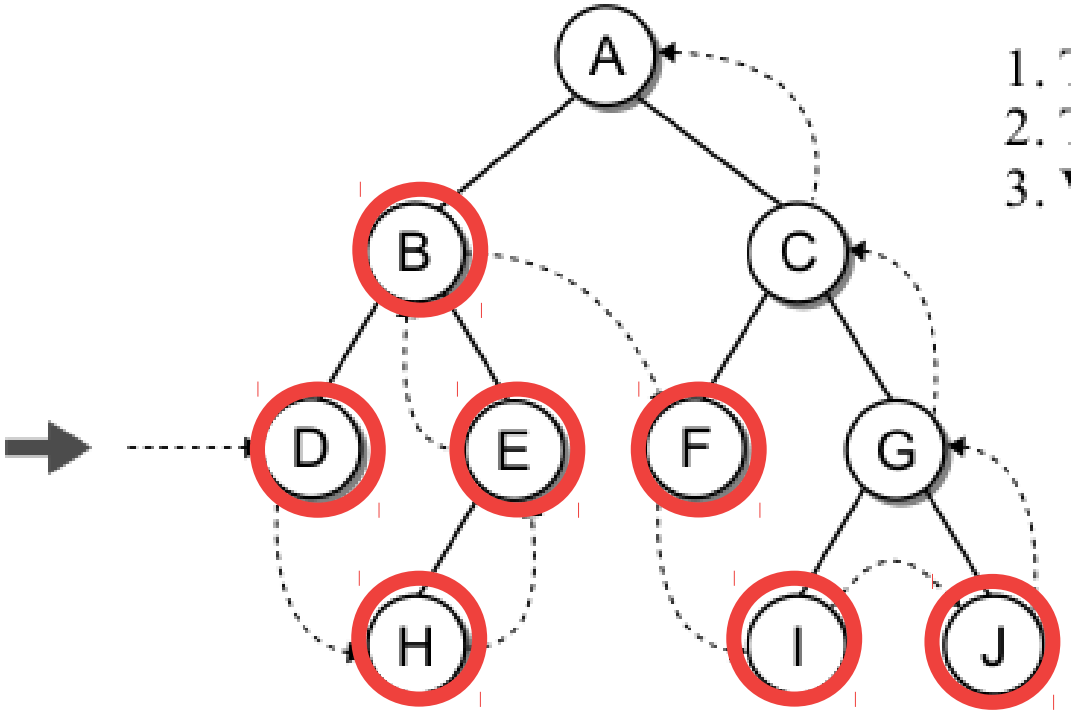
- Exemplo de caminhamento pós-fixado



1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.

Árvores Binárias - Varredura

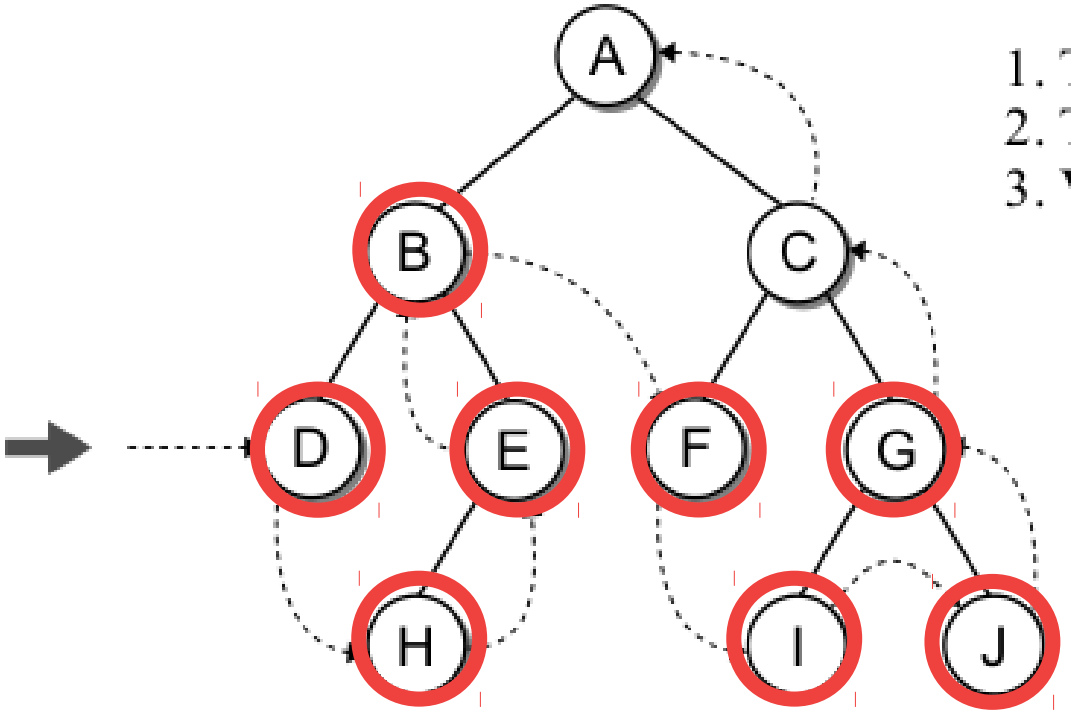
- Exemplo de caminhamento pós-fixado



1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.

Árvores Binárias - Varredura

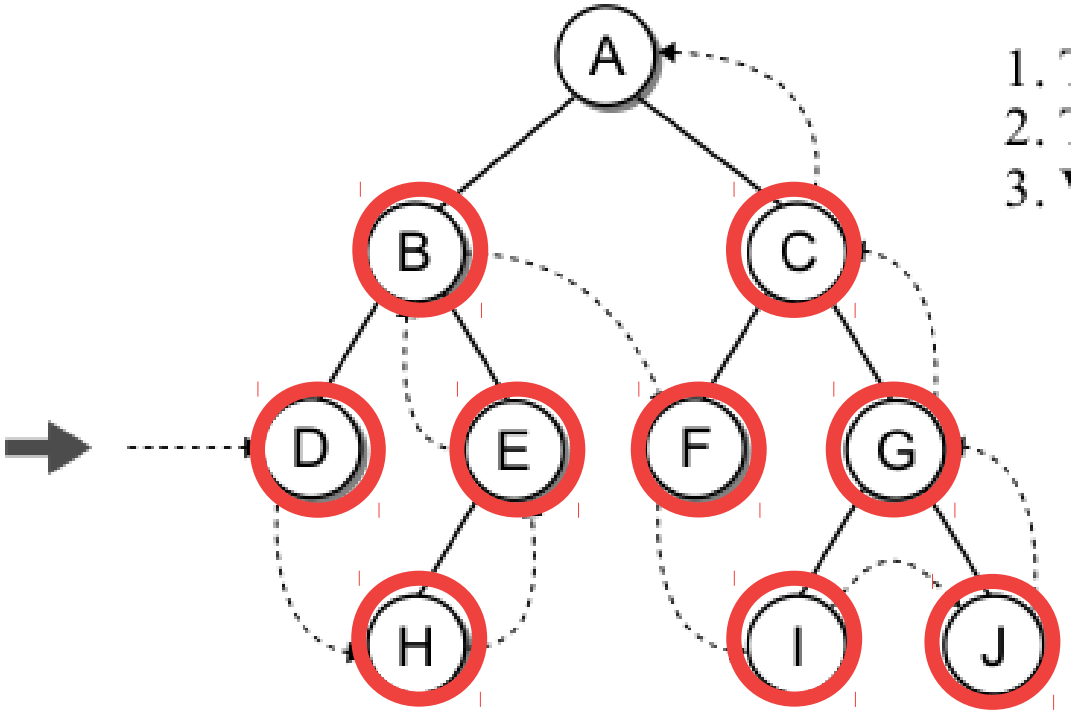
- Exemplo de caminhamento pós-fixado



1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.

Árvores Binárias - Varredura

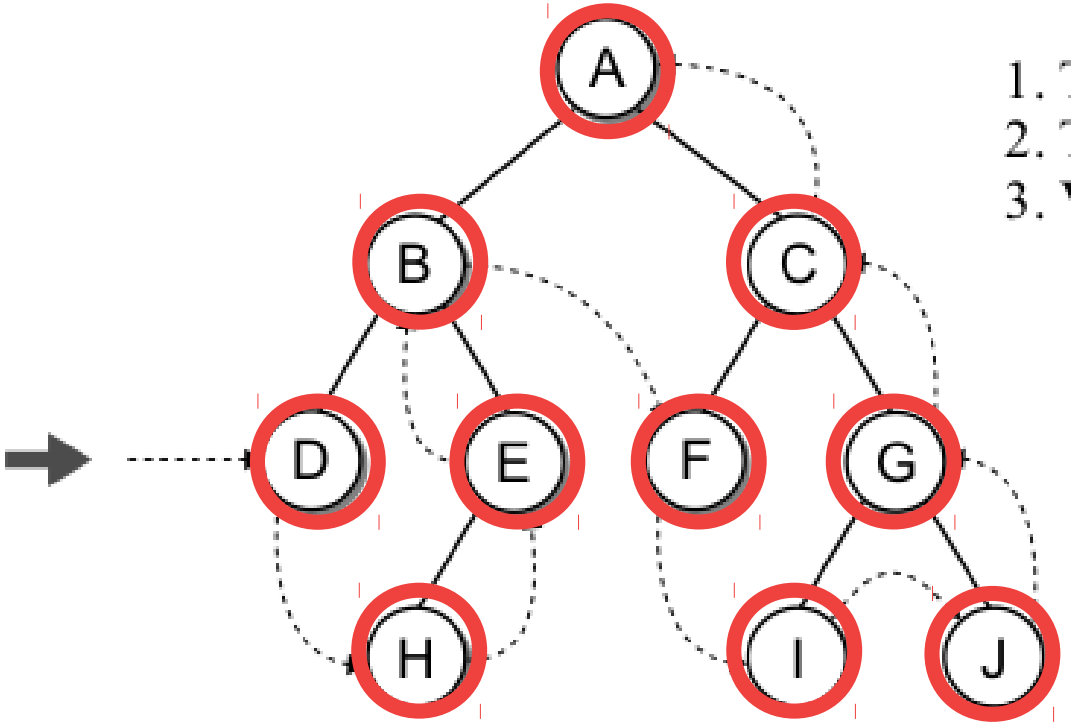
- Exemplo de caminhamento pós-fixado



1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.

Árvores Binárias - Varredura

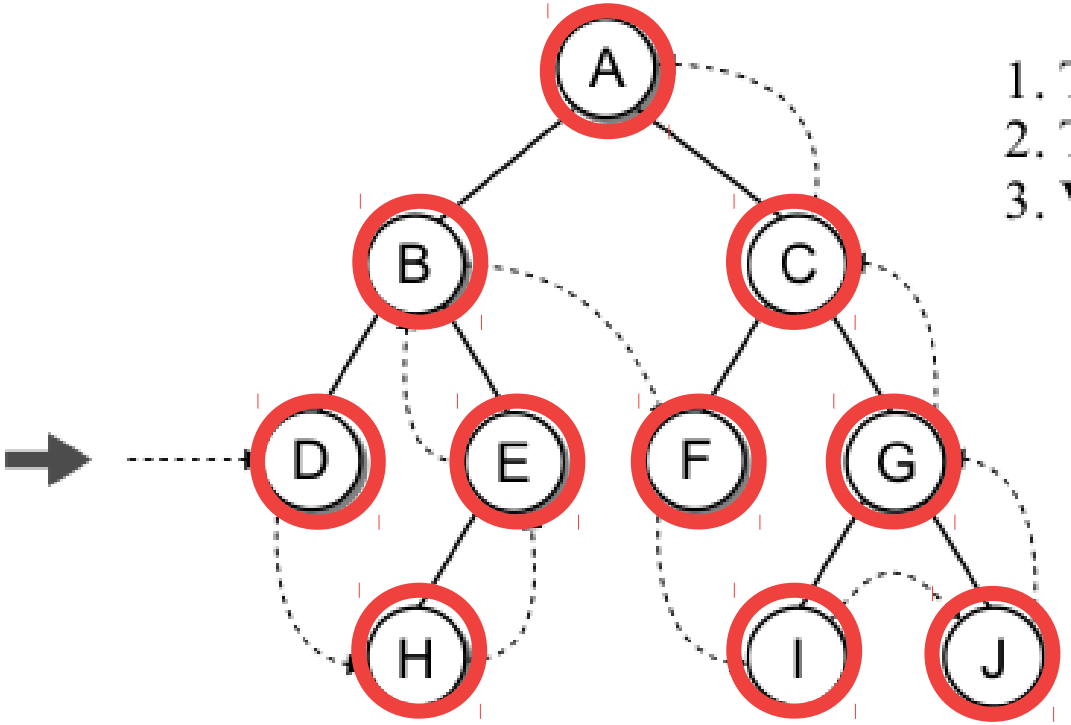
- Exemplo de caminhamento pós-fixado



1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.

Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento pós-fixado



1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.

D → H → E → B → F → I → J → G → C → A

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pós-fixado:

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pós-fixado:
  - Função recursiva.

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pós-fixado:
  - Função recursiva.

```
1  def postorderTrav( subtree ):
2    if subtree is not None :
3      postorderTrav( subtree.left )
4      postorderTrav( subtree.right )
5      print( subtree.data )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pós-fixado:
  - Função recursiva.
  - O parâmetro será uma subárvore:

```
1  def postorderTrav( subtree ):
2    if subtree is not None :
3      postorderTrav( subtree.left )
4      postorderTrav( subtree.right )
5      print( subtree.data )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pós-fixado:
  - Função recursiva.
  - O parâmetro será uma subárvore:
    - Referência null (None) ou

```
1  def postorderTrav( subtree ):
2    if subtree is not None :
3      postorderTrav( subtree.left )
4      postorderTrav( subtree.right )
5      print( subtree.data )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pós-fixado:
  - Função recursiva.
  - O parâmetro será uma subárvore:
    - Referência null (None) ou
    - Referência para o nó raiz de uma subárvore.

```
1  def postorderTrav( subtree ):
2    if subtree is not None :
3      postorderTrav( subtree.left )
4      postorderTrav( subtree.right )
5      print( subtree.data )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pós-fixado:
  - Função recursiva.
  - O parâmetro será uma subárvore:
    - Referência null (None) ou
    - Referência para o nó raiz de uma subárvore.
  - O nó raiz é sempre visitado por último.

```
1  def postorderTrav( subtree ):
2    if subtree is not None :
3      postorderTrav( subtree.left )
4      postorderTrav( subtree.right )
5      print( subtree.data )
```

Caminhamento em Largura

Caminhamento em Largura

- Os caminhamentos pré-fixado, central e pós-fixado são exemplos de busca em profundidade.

Caminhamento em Largura

- Os caminhamentos pré-fixado, central e pós-fixado são exemplos de busca em profundidade.
- Outra forma de pesquisa é o **caminhamento em largura** (*breadth-first*).

Caminhamento em Largura

Caminhamento em Largura

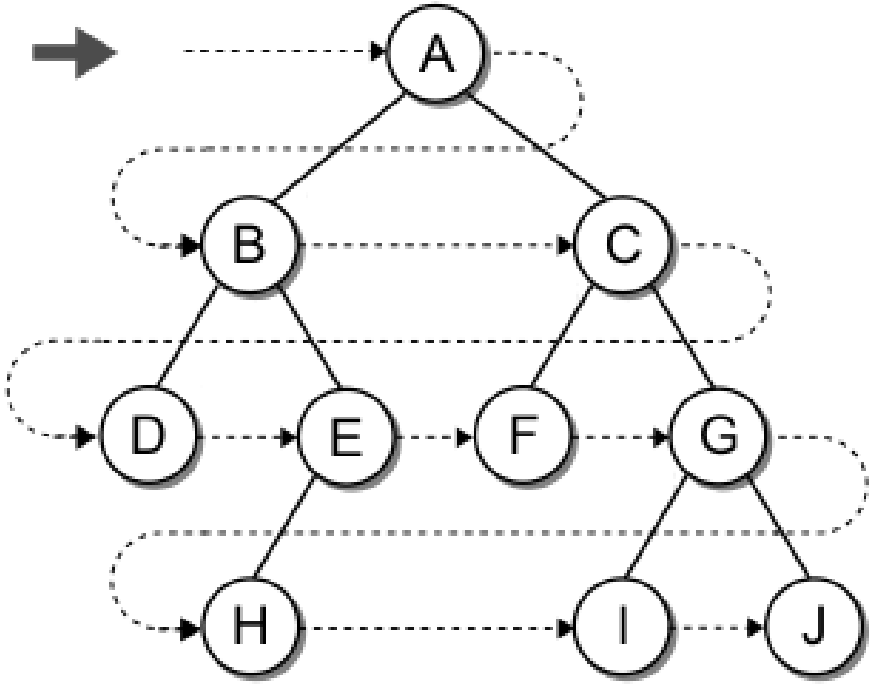
- No caminhamento em largura, os nós são visitados por nível, da esquerda para a direita.

Caminhamento em Largura

- No caminhamento em largura, os nós são visitados por nível, da esquerda para a direita.
- Exemplo:

Caminhamento em Largura

- No caminhamento em largura, os nós são visitados por nível, da esquerda para a direita.
- Exemplo:



Caminhamento em Largura

Caminhamento em Largura

- Não é possível usar funções recursivas nesse tipo de caminhamento.

Caminhamento em Largura

- Não é possível usar funções recursivas nesse tipo de caminhamento.
- Uma alternativa é usar uma estrutura do tipo Fila.

Caminhamento em Largura

- Não é possível usar funções recursivas nesse tipo de caminhamento.
- Uma alternativa é usar uma estrutura do tipo Fila.
- Algoritmo:

Caminhamento em Largura

- Não é possível usar funções recursivas nesse tipo de caminhamento.
- Uma alternativa é usar uma estrutura do tipo Fila.
- Algoritmo:
  - Inicia pelo nó raiz.

Caminhamento em Largura

- Não é possível usar funções recursivas nesse tipo de caminhamento.
- Uma alternativa é usar uma estrutura do tipo Fila.
- Algoritmo:
  - Inicia pelo nó raiz.
  - Durante cada iteração, nós removemos o nó da fila, visitamos o nó, e então adicionamos os seus filhos à fila.

Caminhamento em Largura

- Não é possível usar funções recursivas nesse tipo de caminhamento.
- Uma alternativa é usar uma estrutura do tipo Fila.
- Algoritmo:
  - Inicia pelo nó raiz.
  - Durante cada iteração, nós removemos o nó da fila, visitamos o nó, e então adicionamos os seus filhos à fila.
  - O algoritmo termina quando todos os nós tiverem sido visitados.

Caminhamento em Largura

Caminhamento em Largura

- Exemplo de código:

Caminhamento em Largura

- Exemplo de código:

```
1  def breadthFirstTrav( bintree ):
2     # Create a queue and add the root node to it.
3    Queue q
4    q.enqueue( bintree )
5
6     # Visit each node in the tree.
7    while not q.isEmpty() :
8       # Remove the next node from the queue and visit it.
9      node = q.dequeue()
10     print( node.data )
11
12      # Add the two children to the queue.
13     if node.left is not None :
14       q.enqueue( node.left )
15     if node.right is not None :
16       q.enqueue( node.right )
```

Para pensar...

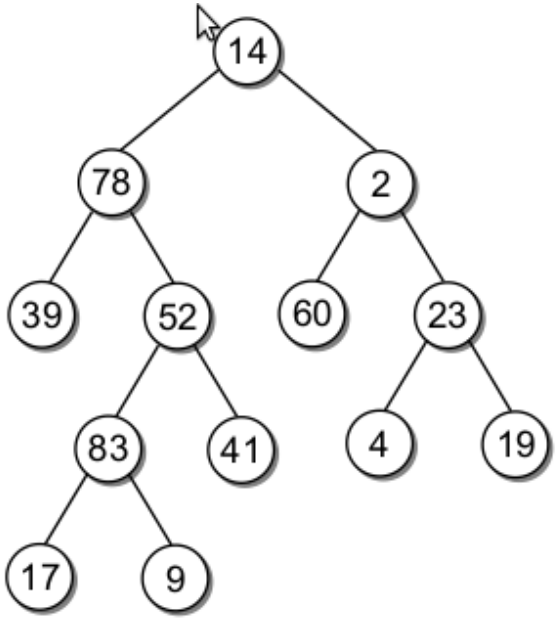
Como seria possível representar uma expressão tal como (9 + 3) * (8 – 4) em uma árvore binária?

Exercícios

- Dada uma árvore binária de tamanho 76, qual é o número mínimo de níveis que ela pode ter? E qual seria o número máximo de níveis?
- Qual é o número máximo de nós de uma árvore binária de 5 níveis?

Exercícios

- Considere a árvore abaixo e faça o que se pede:
  - Mostre a ordem em que os nós seria visitados para cada caminhamento visto em sala de aula.
  - Identifique os nós folhas.
  - Identifique os nós internos.
  - Liste todos os nós do nível 4.
  - Identifique a profundidade do nó 2.
  - Quem são as ascendentes do nó 4?



Exercícios

- Considere as árvores binárias abaixo e responda ao que se pede:
  - Elas são balanceadas?
  - Elas são perfeitamente balanceadas?
  - Liste os nós conforme os vários tipos de caminhamento vistos em sala de aula.

a) (1 (2 (4) (5)) (3 (6) (7)));

b) (A (B (D (F)) (E)) (C (G (H))));

Exercícios

- Implemente a função `treeSize(root)` para calcular o número de nós de uma árvore binária.
- Implemente a função `treeHeight(root)` para calcular a altura de uma árvore binária.