

Algoritmos e Estruturas de Dados I

Árvores Rubro-Negras

Prof. Tiago Eugenio de Melo

tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

- As palavras com a fonte `Courier` indicam uma palavra-reservada da linguagem de programação.
- Animação online:
 - <http://gregfjohnson.com/cgi-bin/redblackbuilder>

Árvores Rubro-Negras

Introdução

Introdução

- Criada em 1970 por Rudolf Bayer com o nome de B-Árvores binárias simétricas.

Introdução

- Criada em 1970 por Rudolf Bayer com o nome de B-Árvores binárias simétricas.
- O seu atual nome foi estabelecido em 1978 por Leo J. Guibas e Robert Sedgwick.

Introdução

- Criada em 1970 por Rudolf Bayer com o nome de B-Árvores binárias simétricas.
- O seu atual nome foi estabelecido em 1978 por Leo J. Guibas e Robert Sedgwick.
- Do inglês Red-Black Trees.

Árvore Rubro-Negra

Árvore Rubro-Negra

- A árvore rubro-negra tem esse nome devido a coloração de seus nós.

Árvore Rubro-Negra

- A árvore rubro-negra tem esse nome devido a coloração de seus nós.
- Uma árvore rubro-negra (ARN) é uma árvore binária de busca com um campo adicional que armazena a coloração do nó (rubro ou negro).

Árvore Rubro-Negra

- A árvore rubro-negra tem esse nome devido a coloração de seus nós.
- Uma árvore rubro-negra (ARN) é uma árvore binária de busca com um campo adicional que armazena a coloração do nó (rubro ou negro).
- O fato de um nó ser rubro ou negro é usado como fator de balanceamento da ARN.

Árvore Rubro-Negra

Árvore Rubro-Negra

- Apesar das árvores AVL e 2-3 apresentarem propriedades interessantes, elas também possuem algumas desvantagens.

Árvore Rubro-Negra

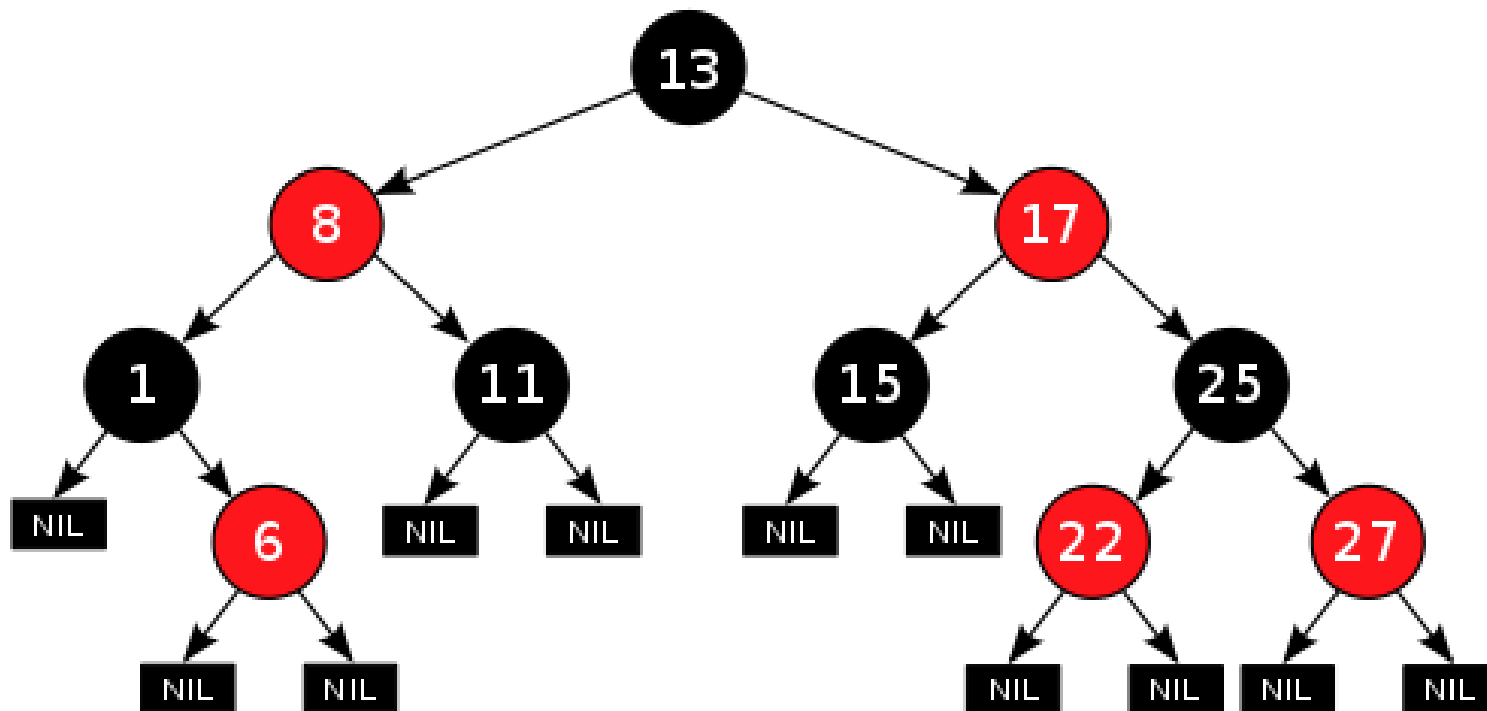
- Apesar das árvores AVL e 2-3 apresentarem propriedades interessantes, elas também possuem algumas desvantagens.
- As AVL requerem muitas operações de reestrutura (rotações) após a remoção de um item.

Árvore Rubro-Negra

- Apesar das árvores AVL e 2-3 apresentarem propriedades interessantes, elas também possuem algumas desvantagens.
- As AVL requerem muitas operações de reestrutura (rotações) após a remoção de um item.
- As árvores 2-3 requerem muitas operações de divisão e fusão depois da inserção ou remoção de elementos.

Árvore Rubro-Negra

- Exemplo:



Propriedades

Propriedades

- Toda folha é preta.

Propriedades

- Toda folha é preta.
- Se um nó é rubro (vermelho), então ambos os seus filhos são pretos.

Propriedades

- Toda folha é preta.
- Se um nó é rubro (vermelho), então ambos os seus filhos são pretos.
- Qualquer caminho da raiz até uma subárvore vazia tem um número igual de nós negros.

Conceitos

- A altura de uma árvore rubro-negra é o número de nós negros que se encontram no caminho da raiz até uma folha.

Inserção/Remoção

Inserção/Remoção

- As operações de inserir e remover são complicadas nas árvore rubro-negras porque elas podem ferir alguma propriedade deste tipo de árvore.

Inserção/Remoção

- As operações de inserir e remover são complicadas nas árvore rubro-negras porque elas podem ferir alguma propriedade deste tipo de árvore.
- Porém, é possível implementar essas operações de modo bastante parecido com as operações das Árvores Binárias de Busca (ABB), bastando “apenas” modificar as cores dos nós para que as propriedades das ARN sejam mantidas.

Inserção

Inserção

- Ao contrário da AVL, temos agora vários critérios para ajustar simultaneamente.

Inserção

- Ao contrário da AVL, temos agora vários critérios para ajustar simultaneamente.
- Ao inserir um novo nó em uma posição vazia da árvore, este nó é pintado de vermelho.

Inserção

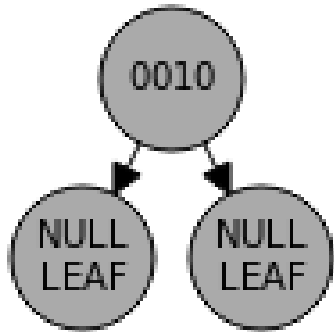
- Ao contrário da AVL, temos agora vários critérios para ajustar simultaneamente.
- Ao inserir um novo nó em uma posição vazia da árvore, este nó é pintado de vermelho.
- A razão para isto é preservar a altura da árvore, uma vez que um nó rubro não contribui para a altura negra da árvore.

Inserção

- Exemplo:

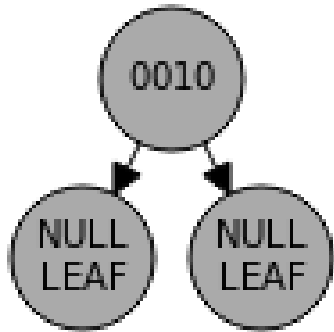
Inserção

- Exemplo:



Inserção

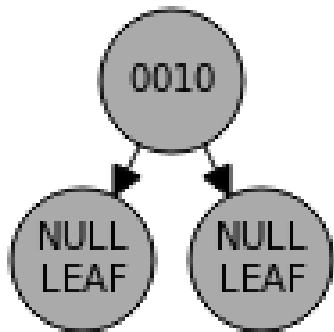
- Exemplo:



inserir o **20**

Inserção

- Exemplo:

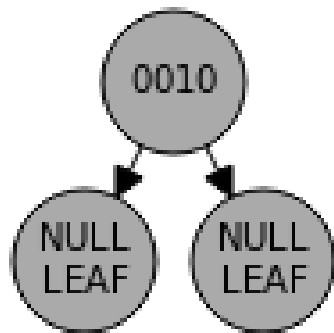


inserir o **20**

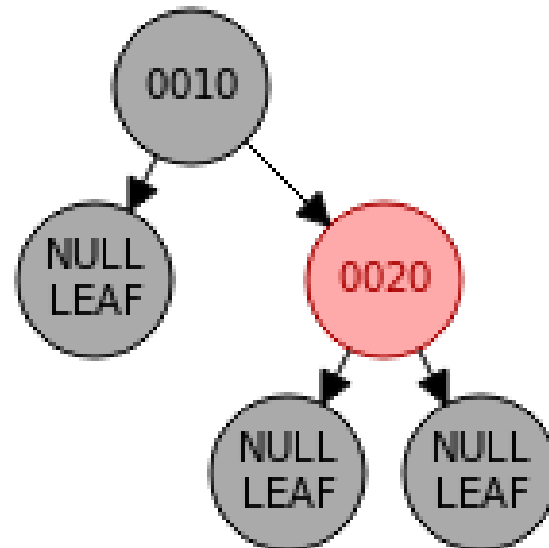


Inserção

- Exemplo:



inserir o **20**



Inserção

Inserção

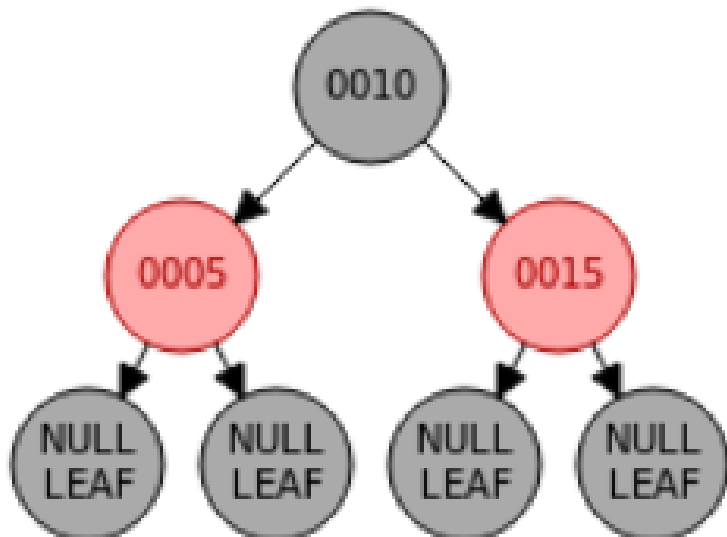
- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:

Inserção

- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:
 - Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro.

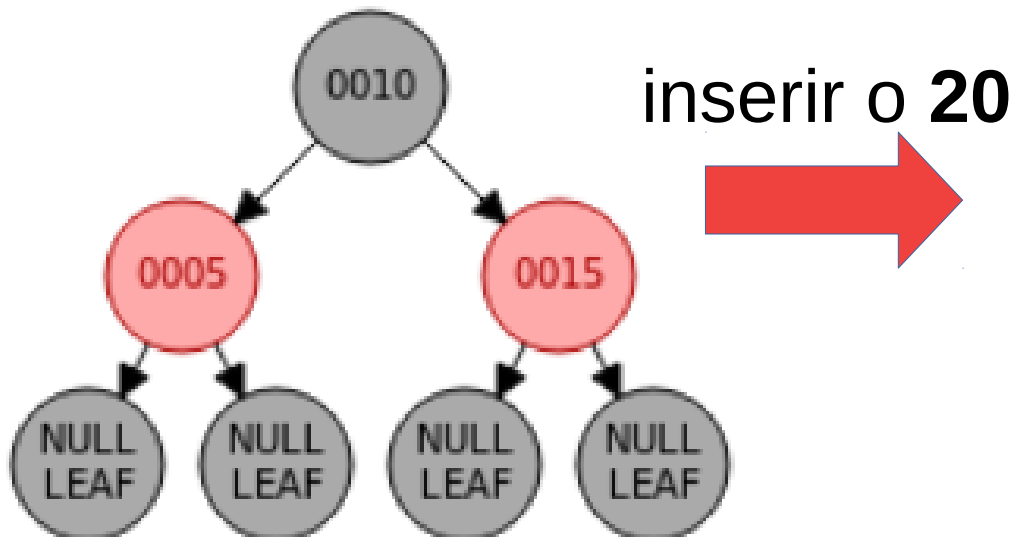
Inserção

- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:
 - Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro.



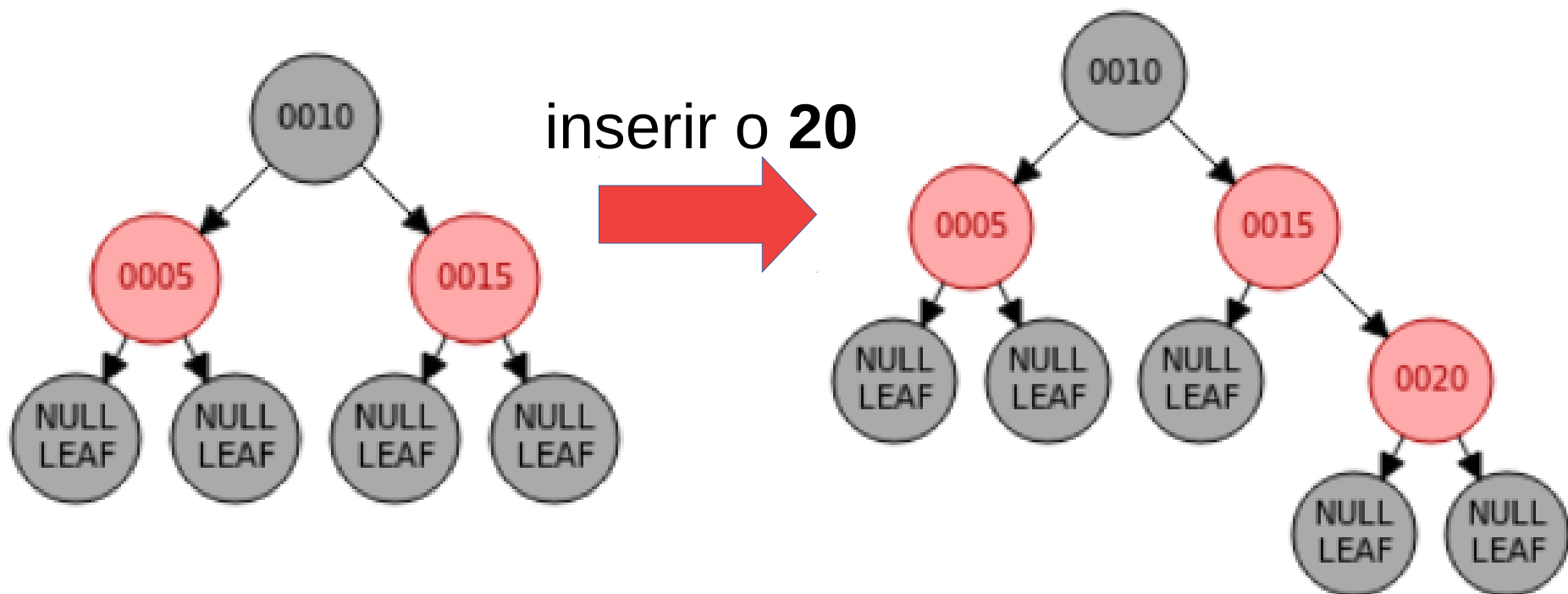
Inserção

- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:
 - Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro.



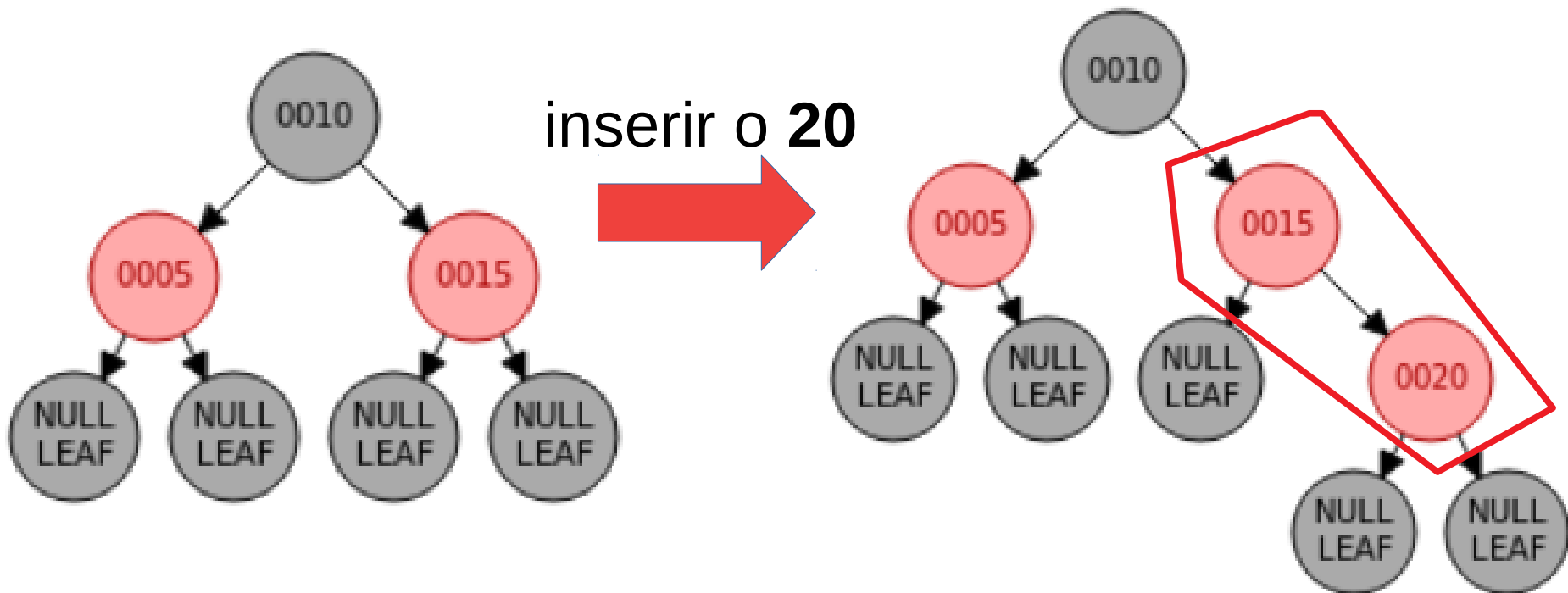
Inserção

- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:
 - Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro.



Inserção

- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:
 - Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro.



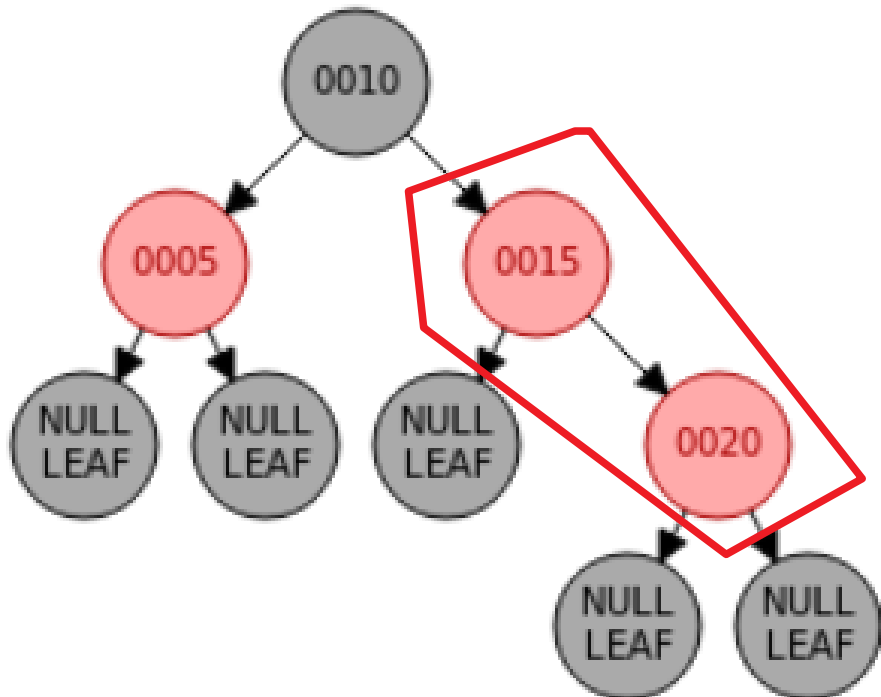
Inserção

Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)

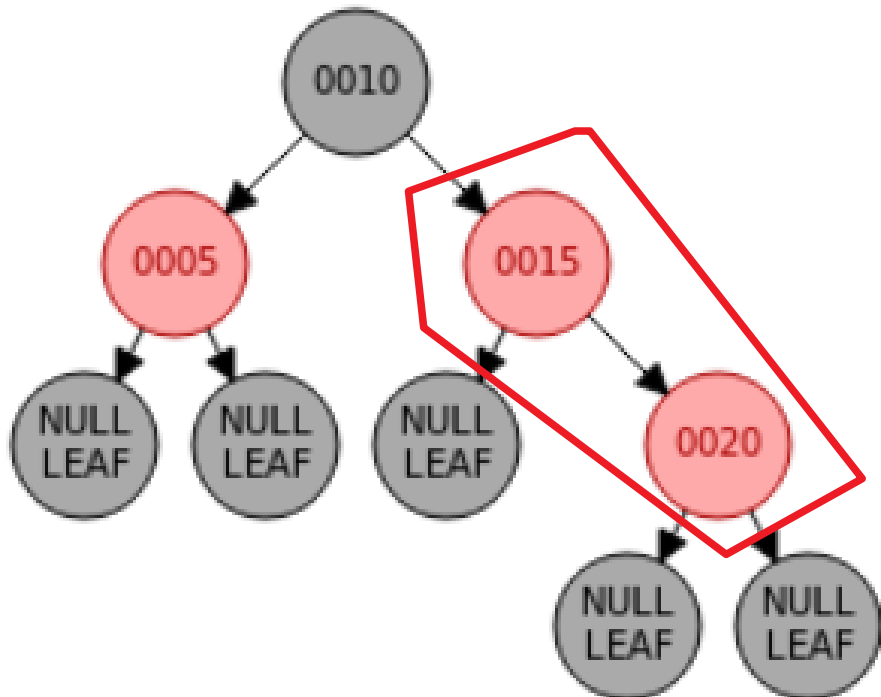
Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)



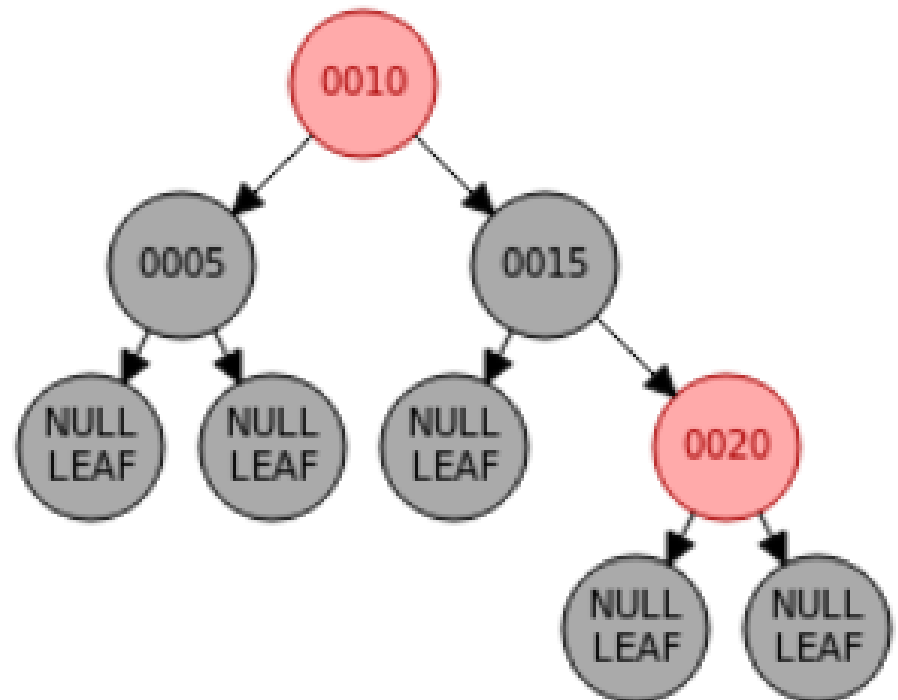
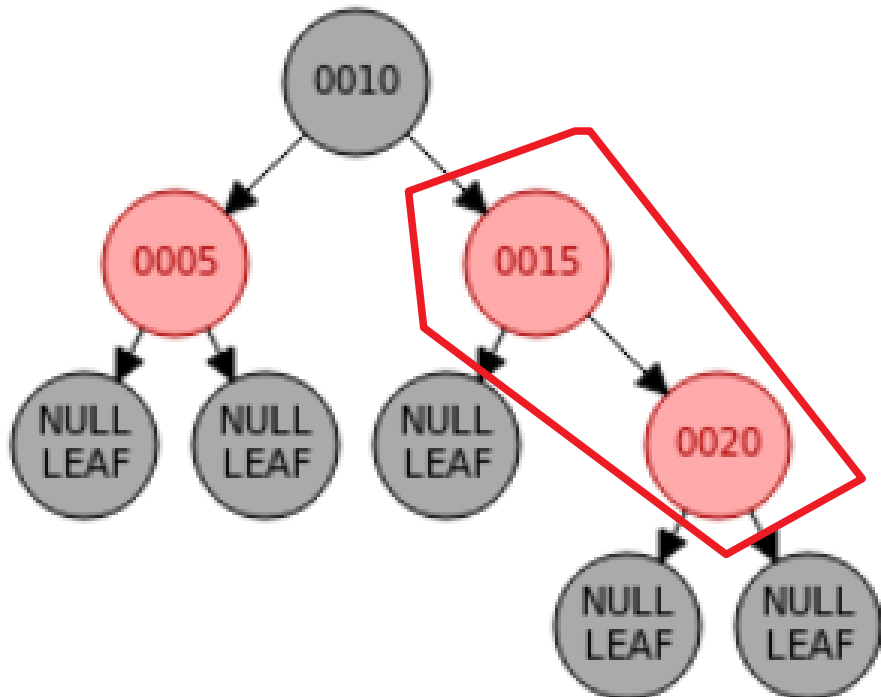
Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)
mudar as cores do pai, tio e avô



Inserção

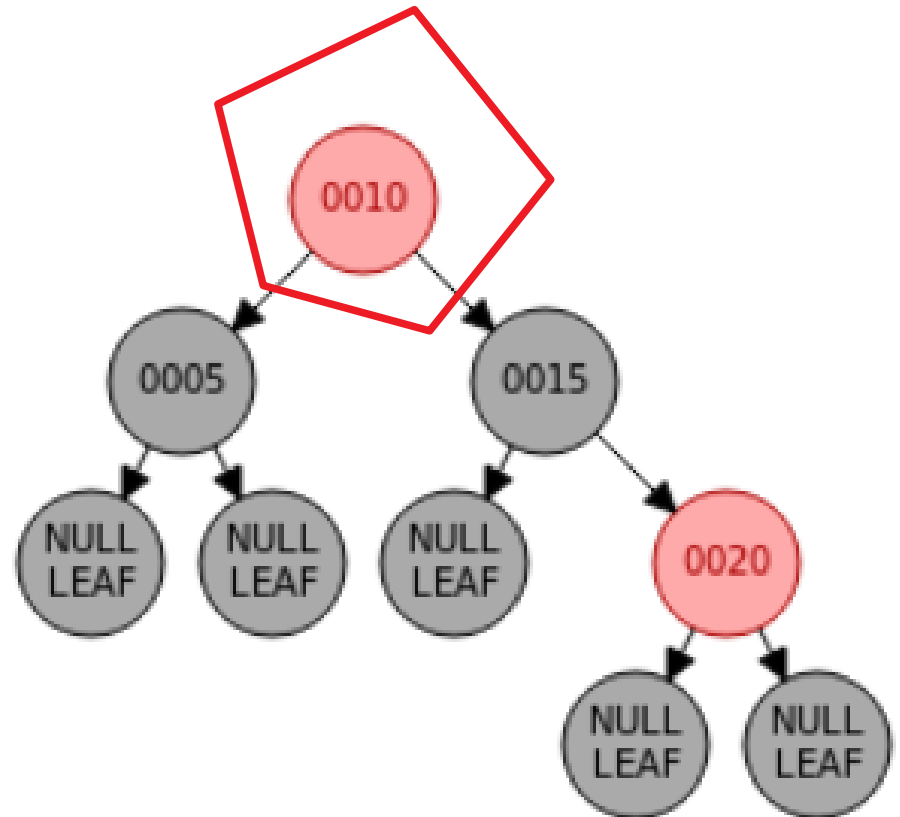
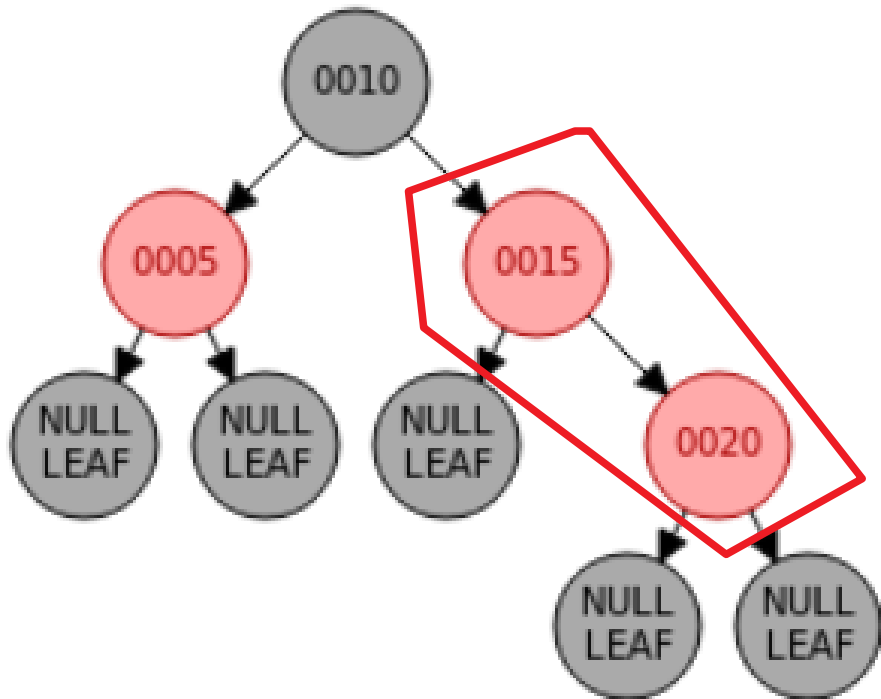
- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)
mudar as cores do pai, tio e avô



Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)

mudar as cores do pai, tio e avô



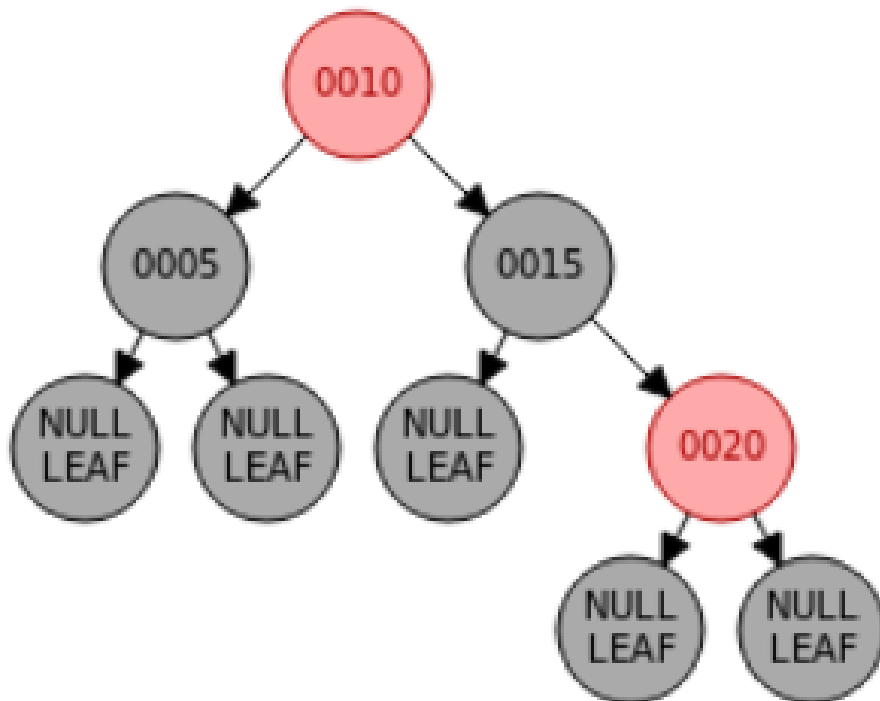
Inserção

Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)

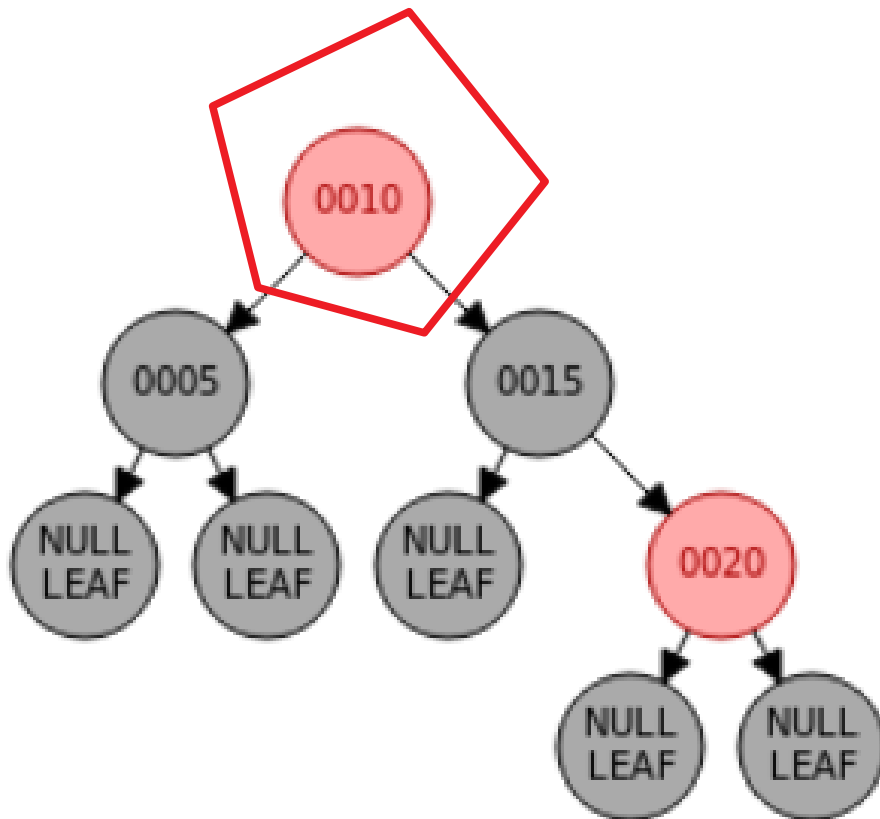
Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)



Inserção

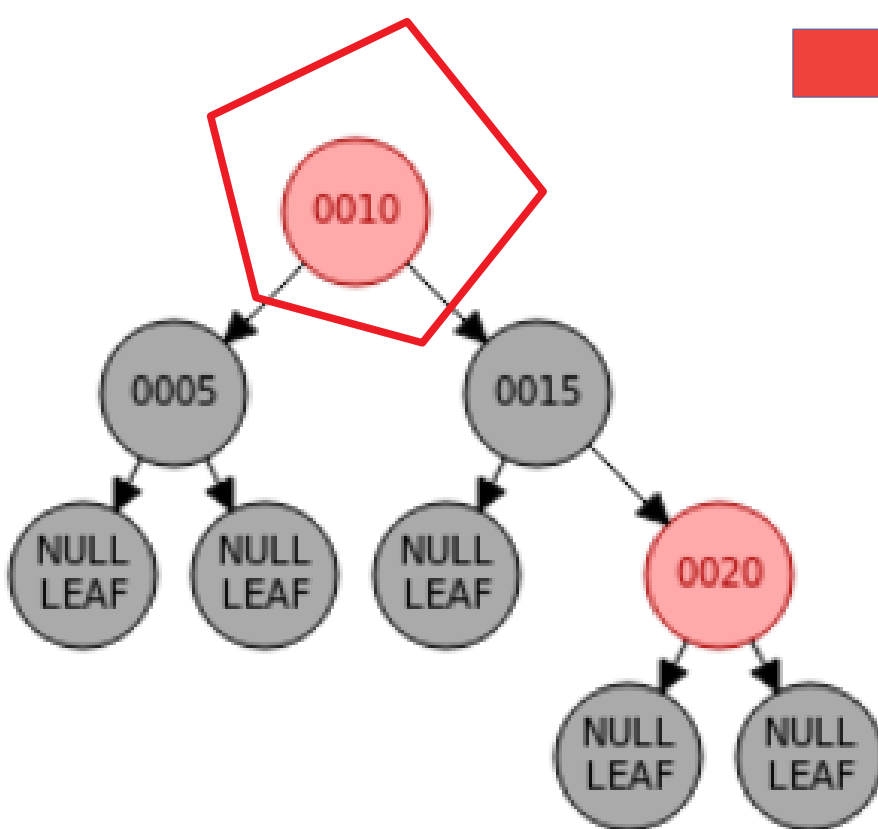
- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)



Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)

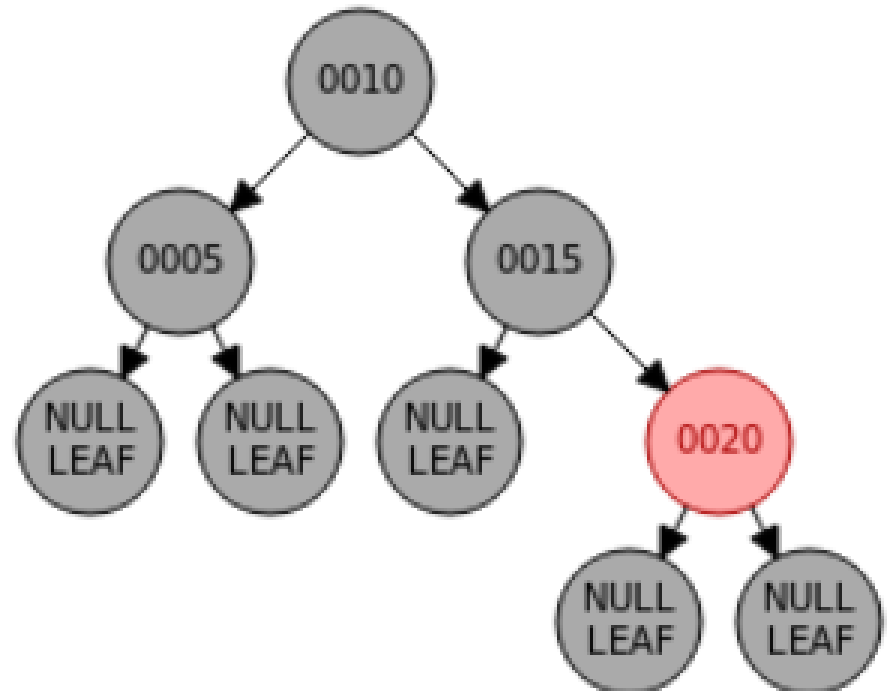
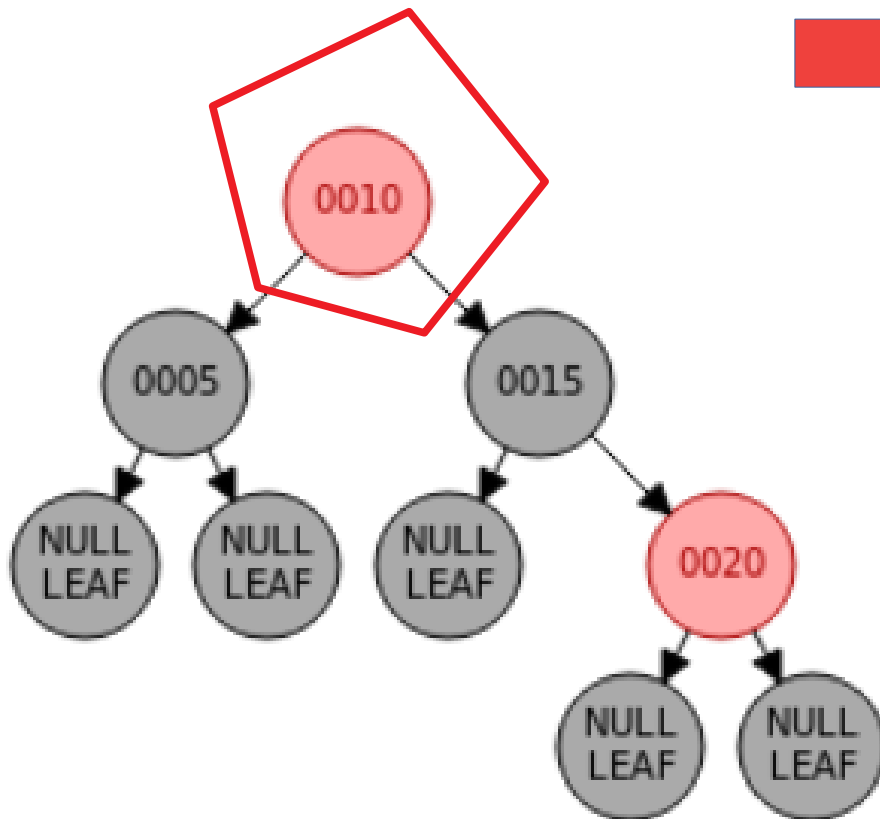
mudar a cor da raiz



Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)

mudar a cor da raiz



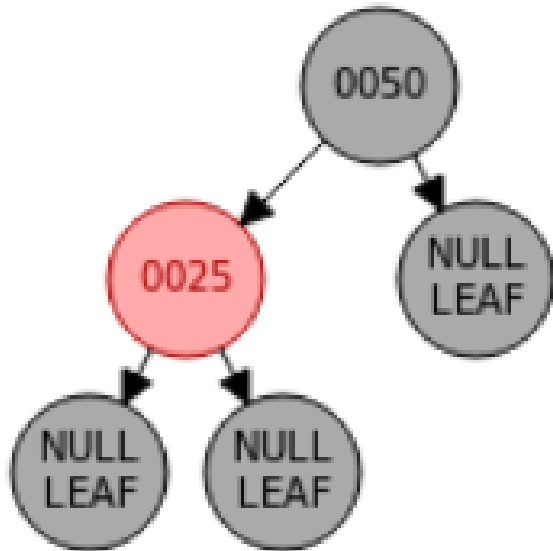
Inserção

Inserção

- Caso 2: o elemento inserido é vermelho, seu pai é vermelho e seu irmão é negro.
- Existem 4 subcasos (rotações).

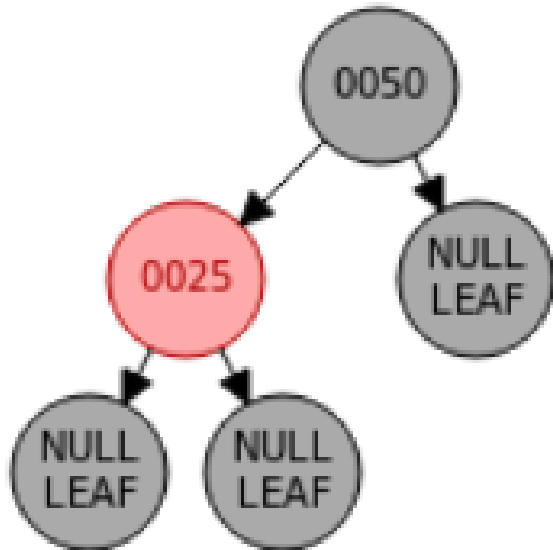
Inserção

- Caso 2: o elemento inserido é vermelho, seu pai é vermelho e seu irmão é negro.
- Existem 4 subcasos (rotações).

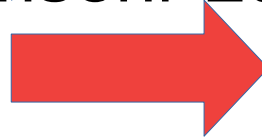


Inserção

- Caso 2: o elemento inserido é vermelho, seu pai é vermelho e seu irmão é negro.
- Existem 4 subcasos (rotações).

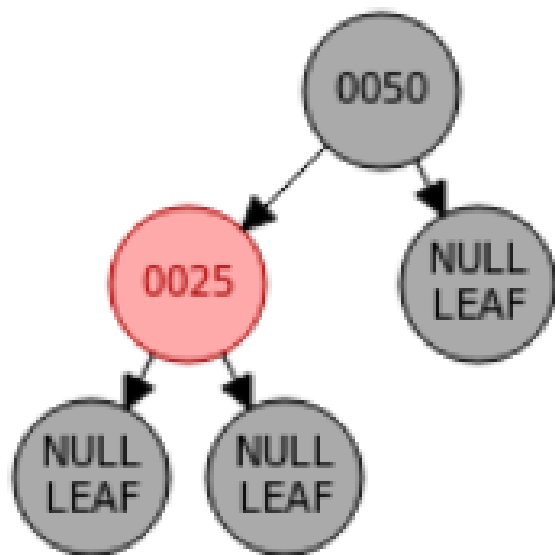


inserir **10**

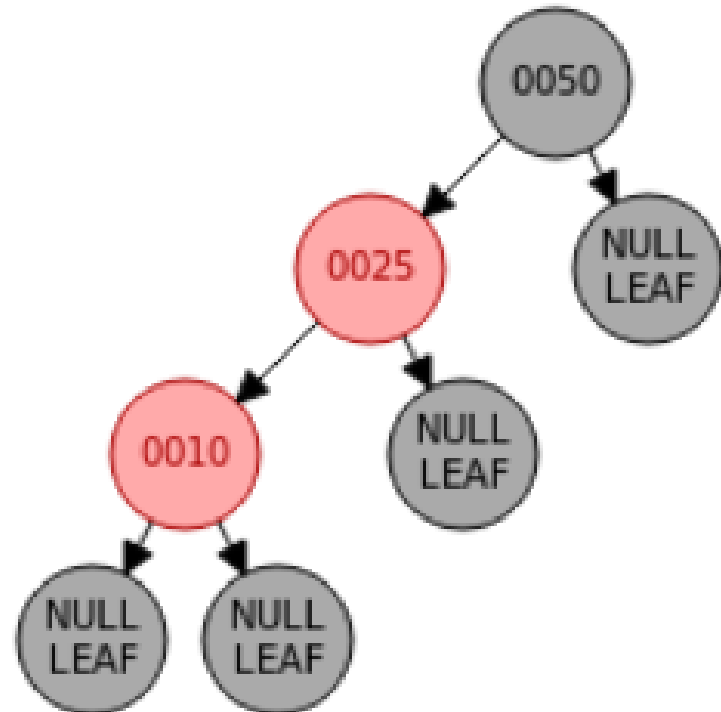
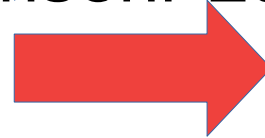


Inserção

- Caso 2: o elemento inserido é vermelho, seu pai é vermelho e seu irmão é negro.
- Existem 4 subcasos (rotações).



inserir **10**



Inserção

Inserção

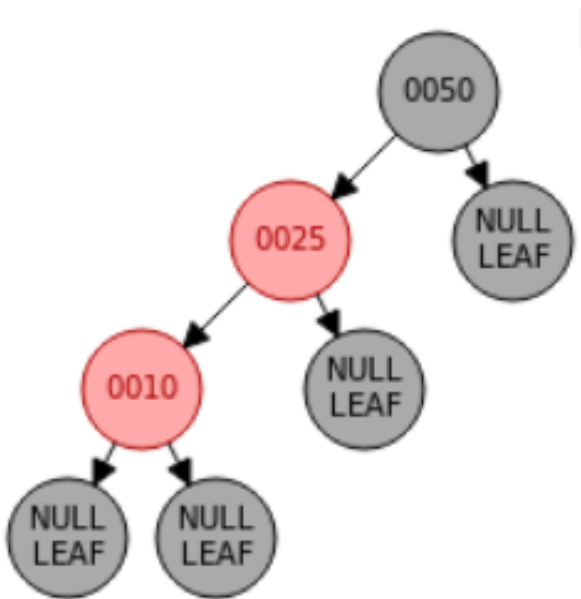
- Caso 2 (rotação 1)

Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
 - Rotação direita simples.

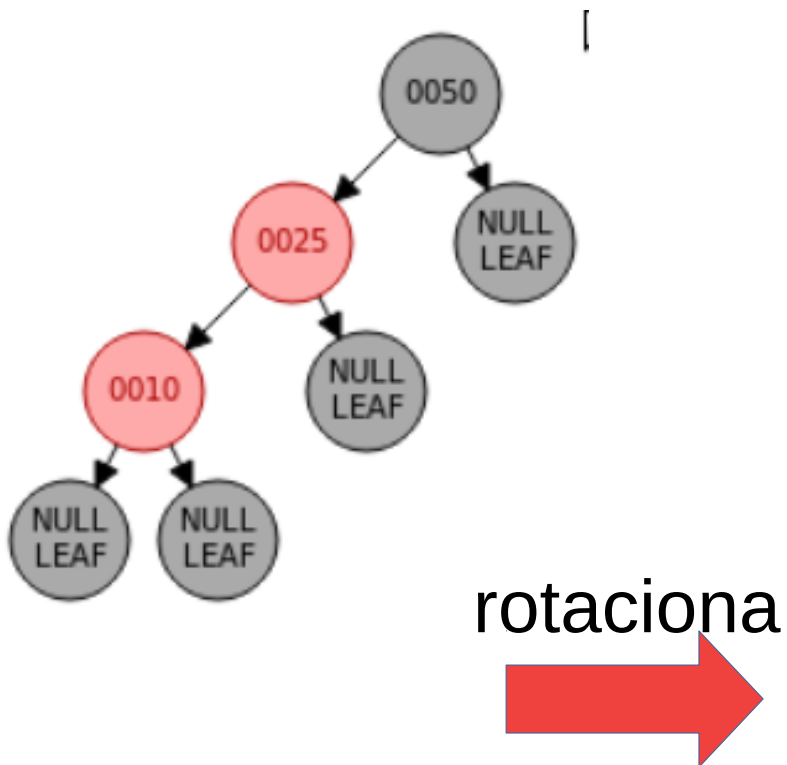
Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
 - Rotação direita simples.



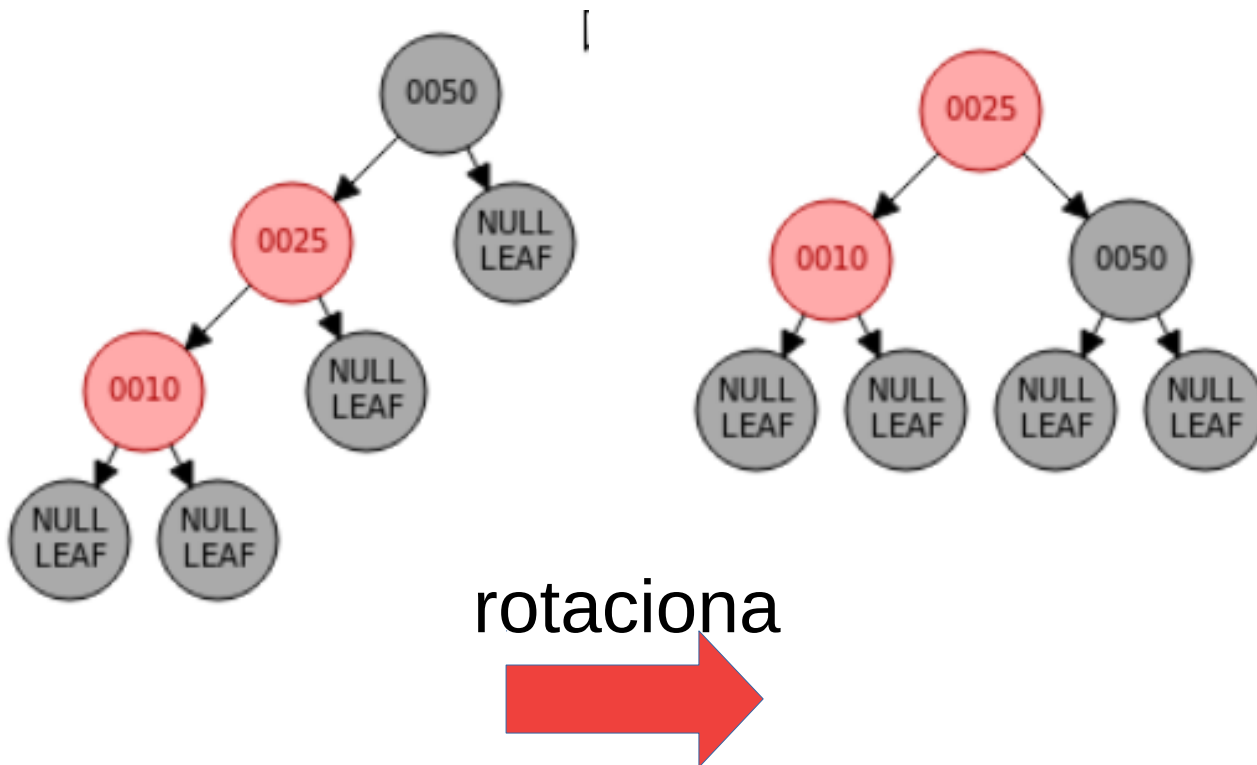
Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
 - Rotação direita simples.



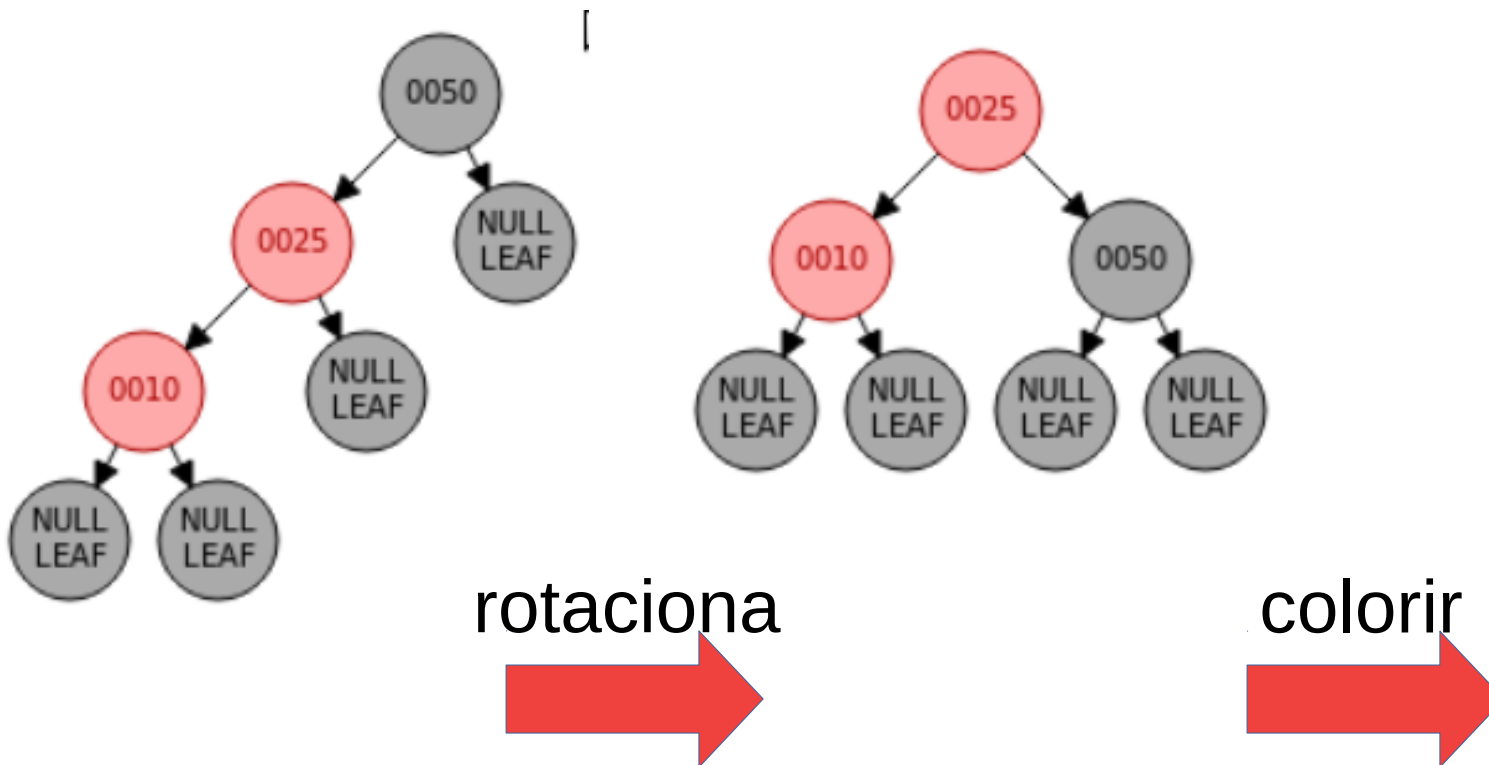
Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
 - Rotação direita simples.



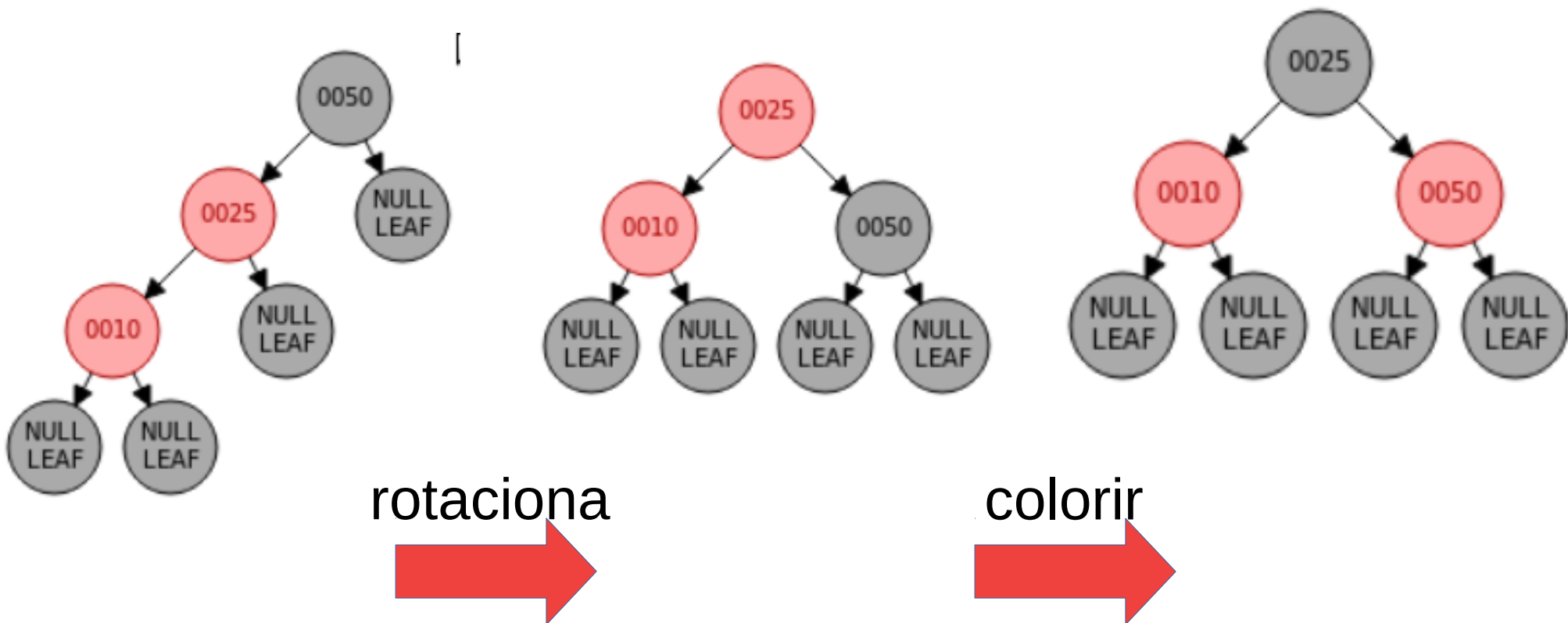
Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
 - Rotação direita simples.



Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
 - Rotação direita simples.



Inserção

Inserção

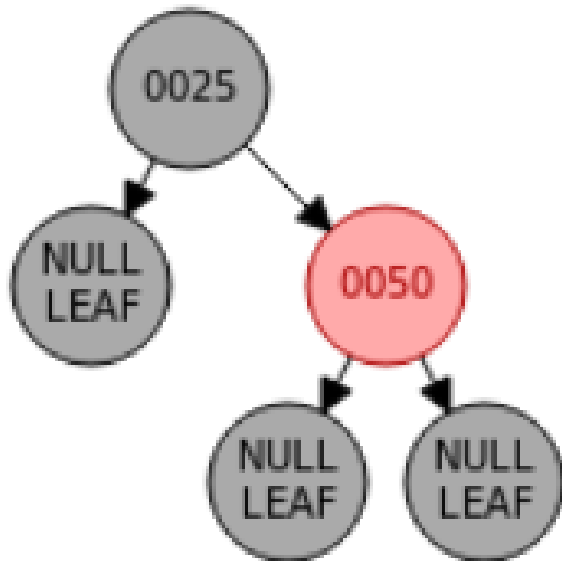
- Caso 2 (rotação 2)

Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.

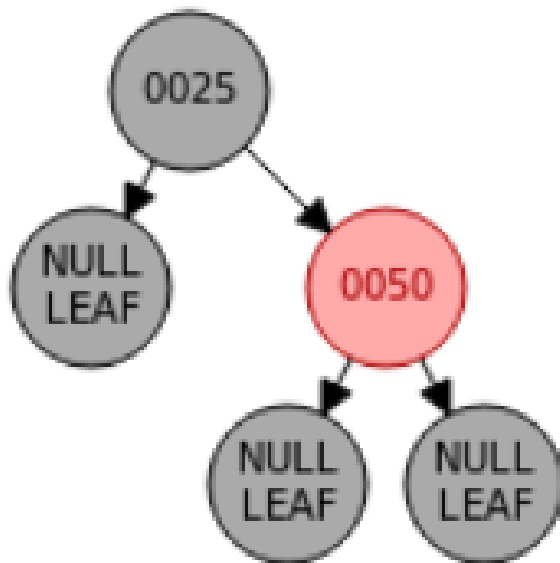
Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.



Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.

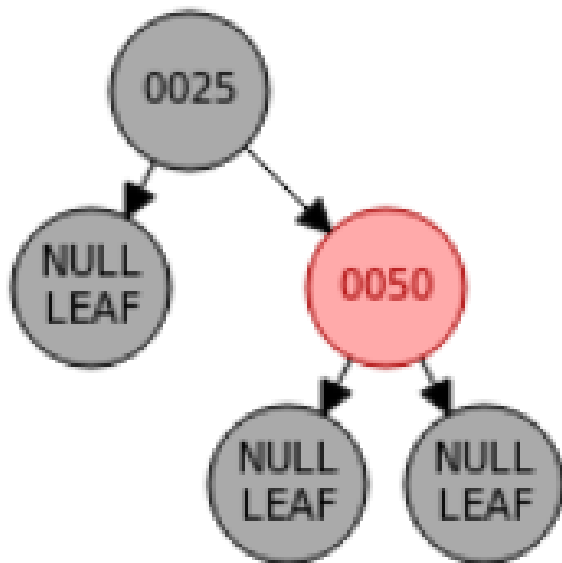


inserir **70**

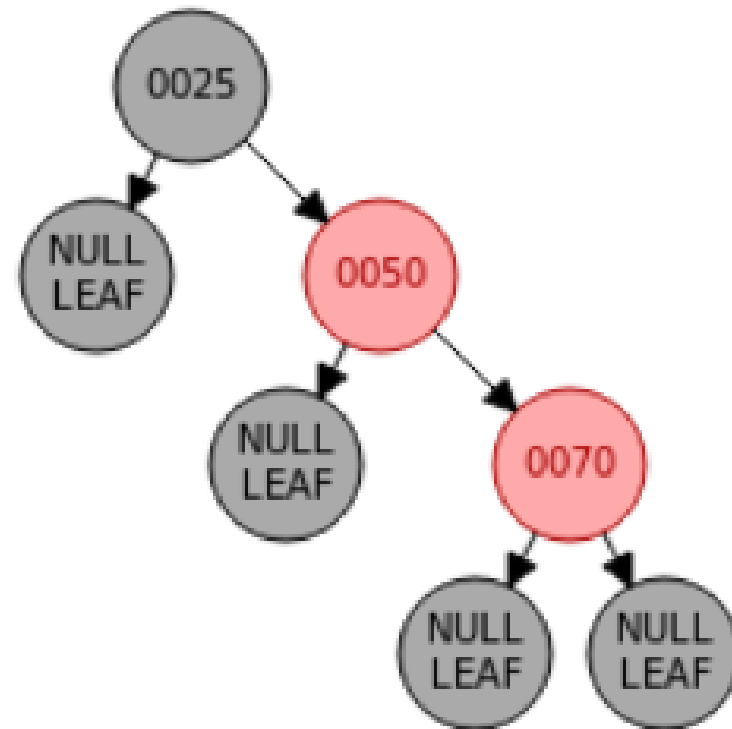


Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.



inserir 70
→



Inserção

Inserção

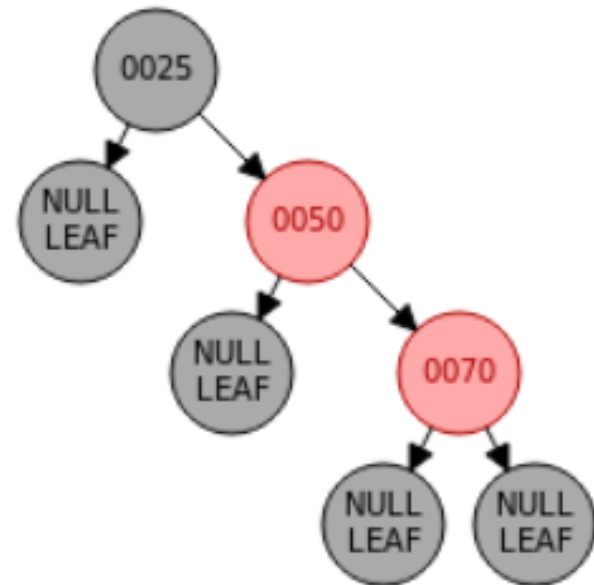
- Caso 2 (rotação 2)

Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.

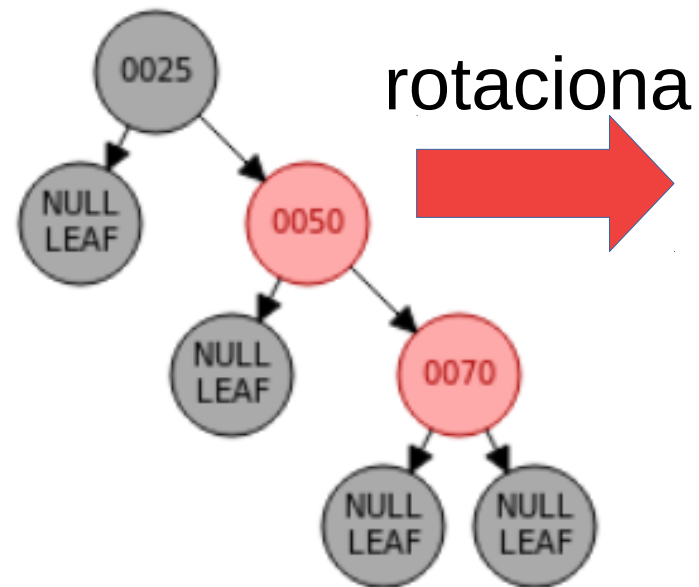
Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.



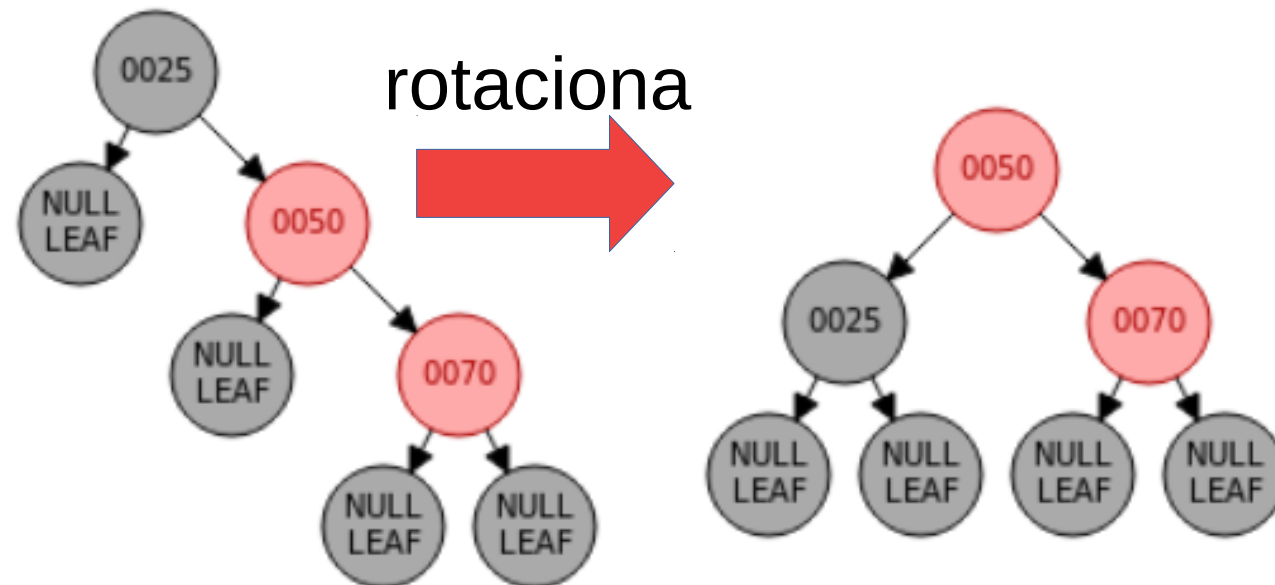
Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.



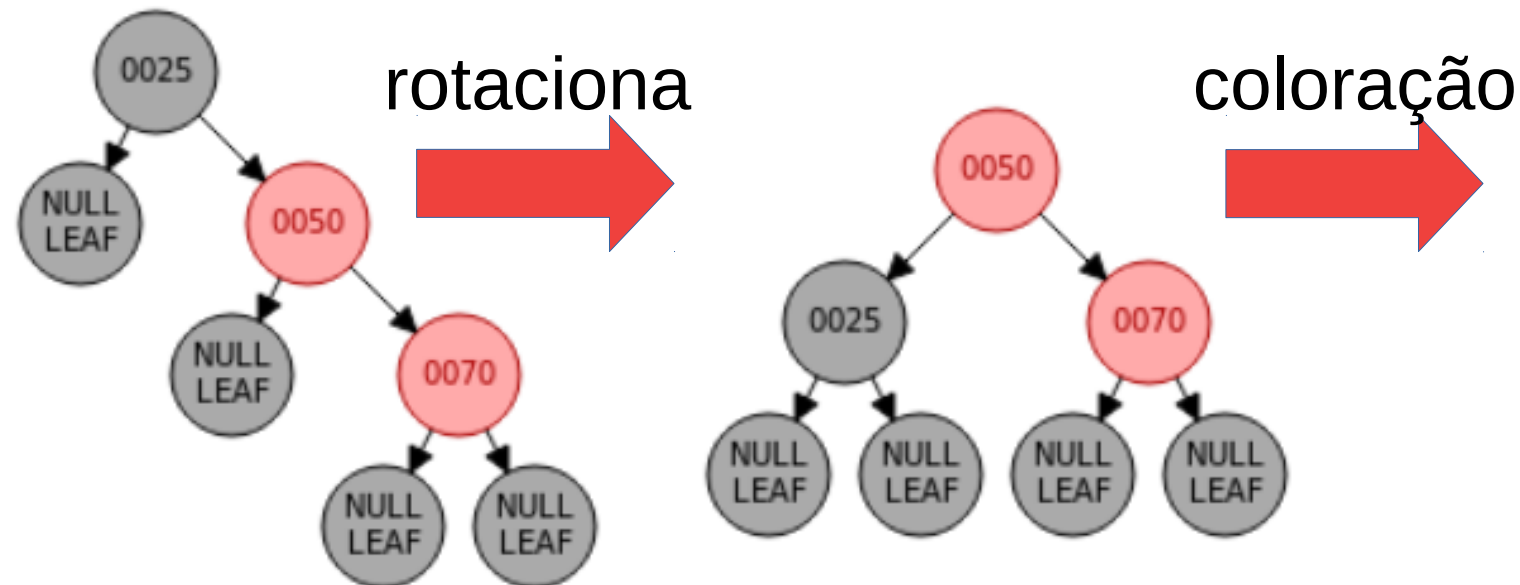
Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.



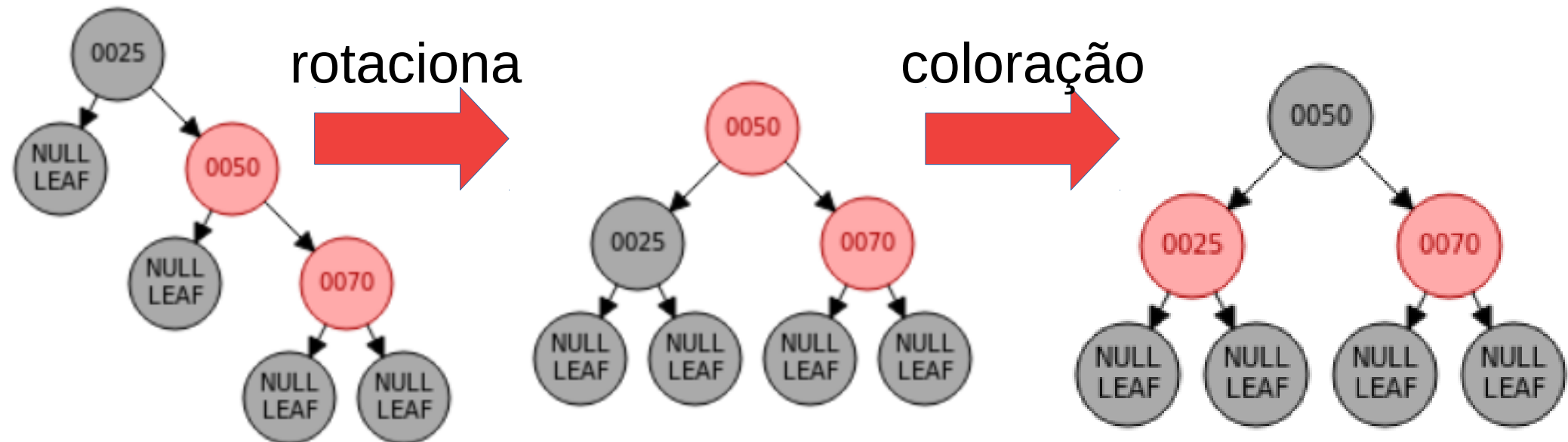
Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.



Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.



Inserção

Inserção

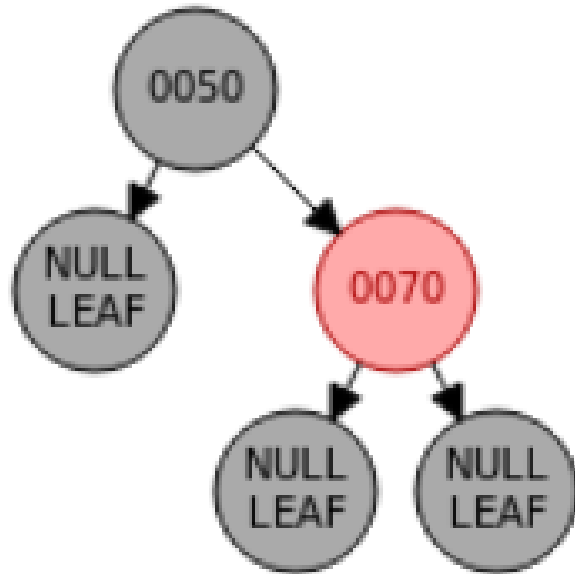
- Caso 2 (rotação 3)

Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla

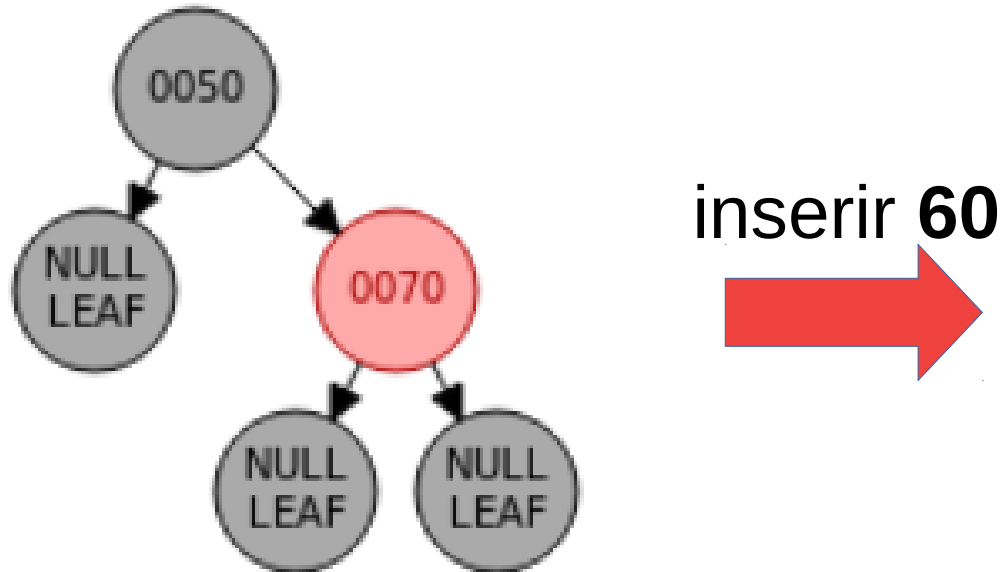
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



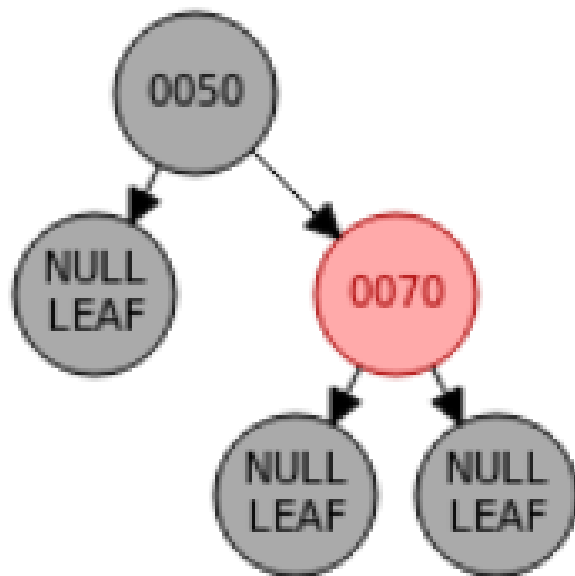
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla

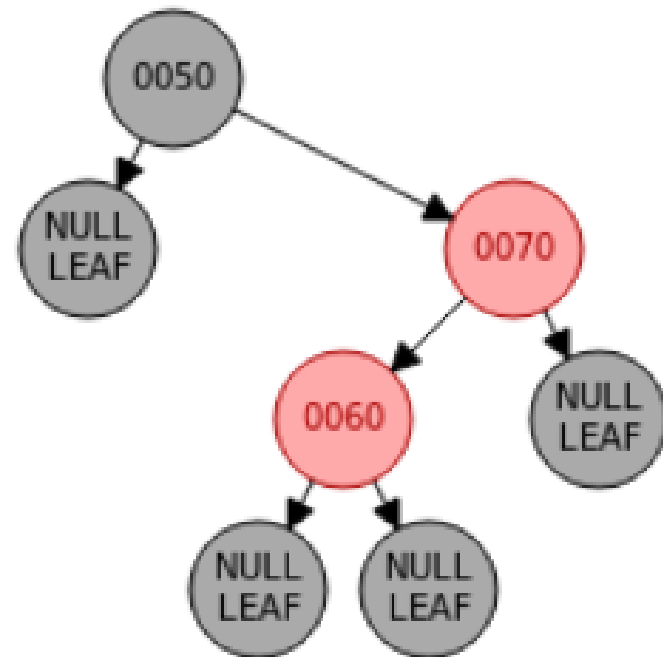


Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



inserir 60



Inserção

Inserção

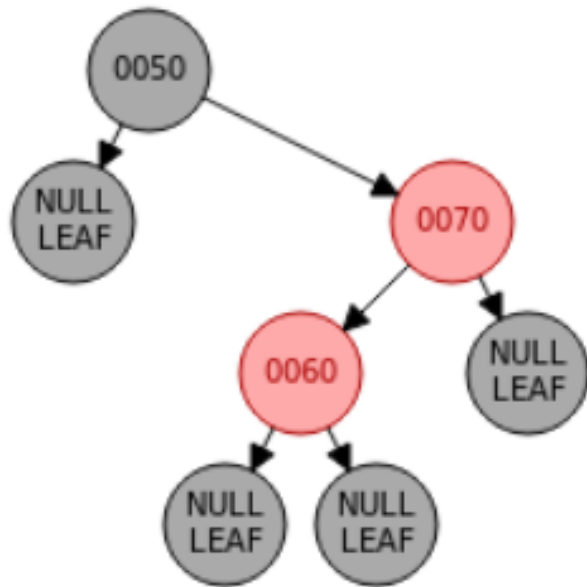
- Caso 2 (rotação 3)

Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla

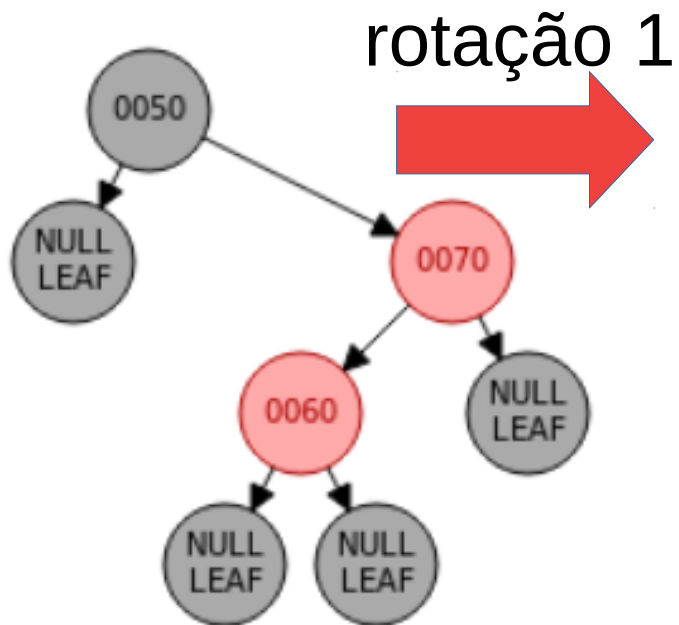
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



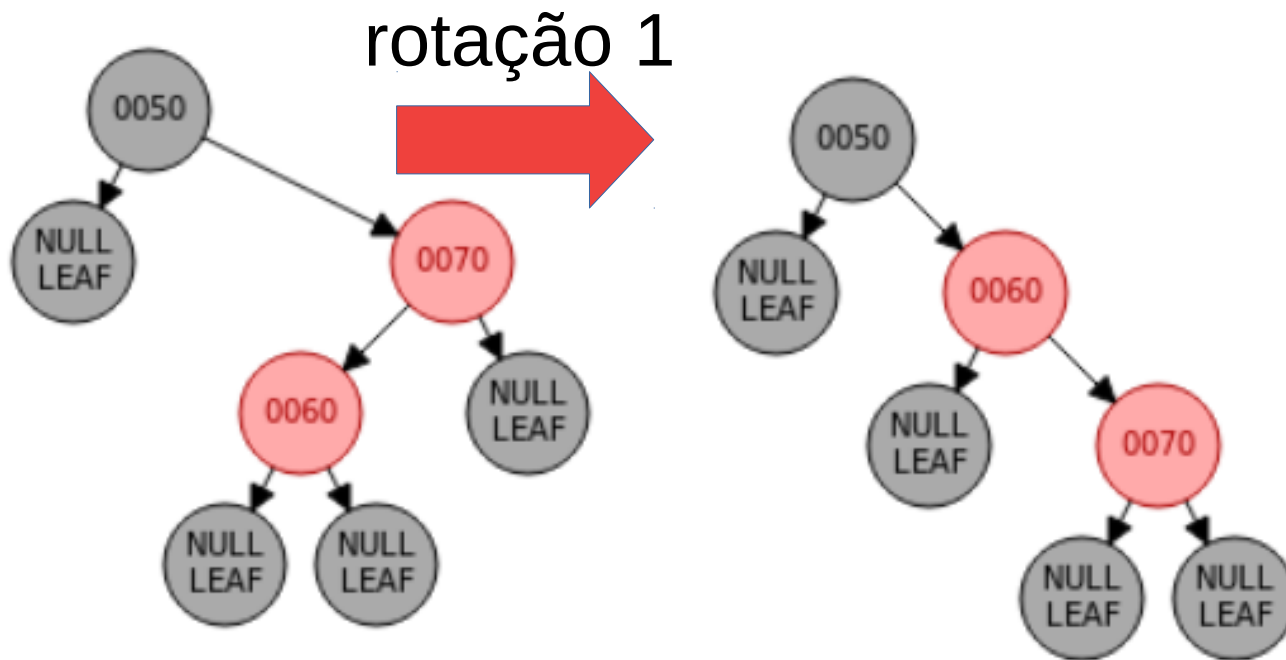
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



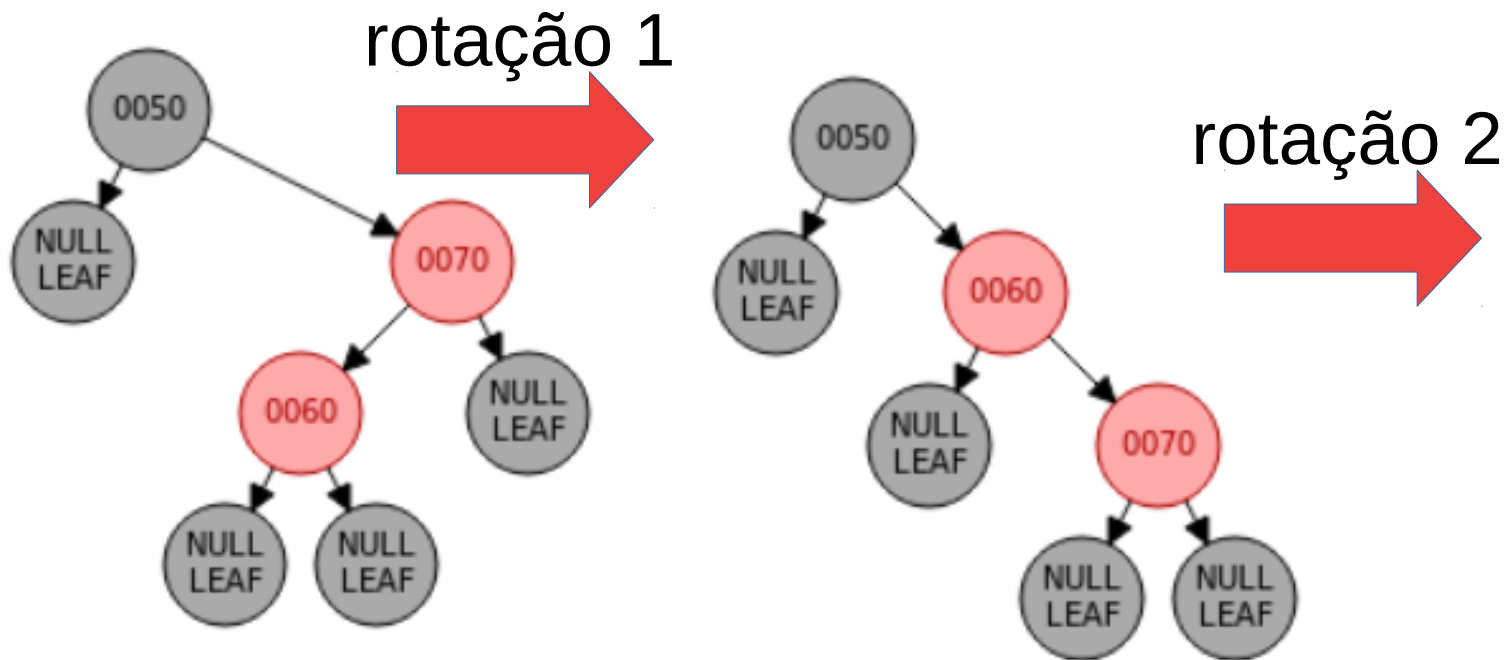
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



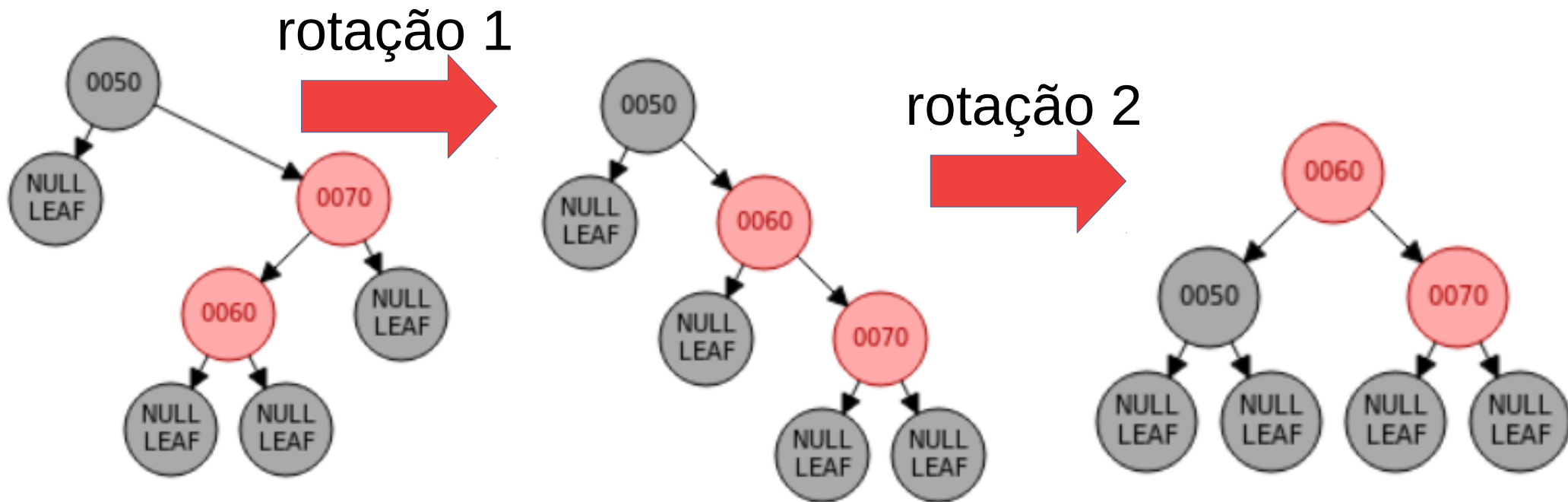
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



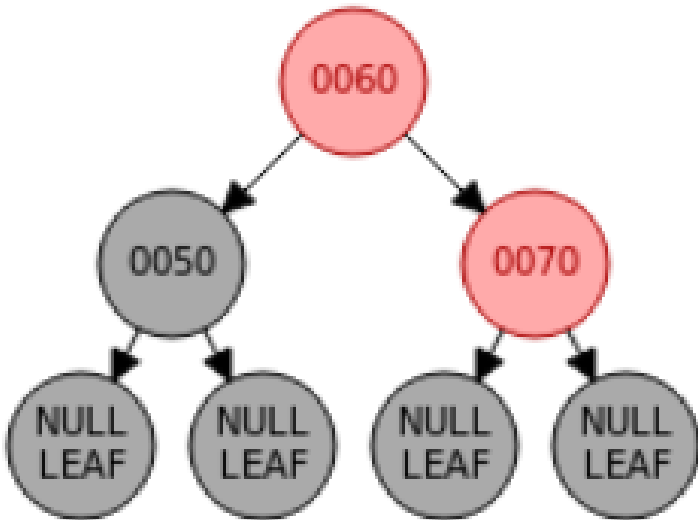
Inserção

Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla

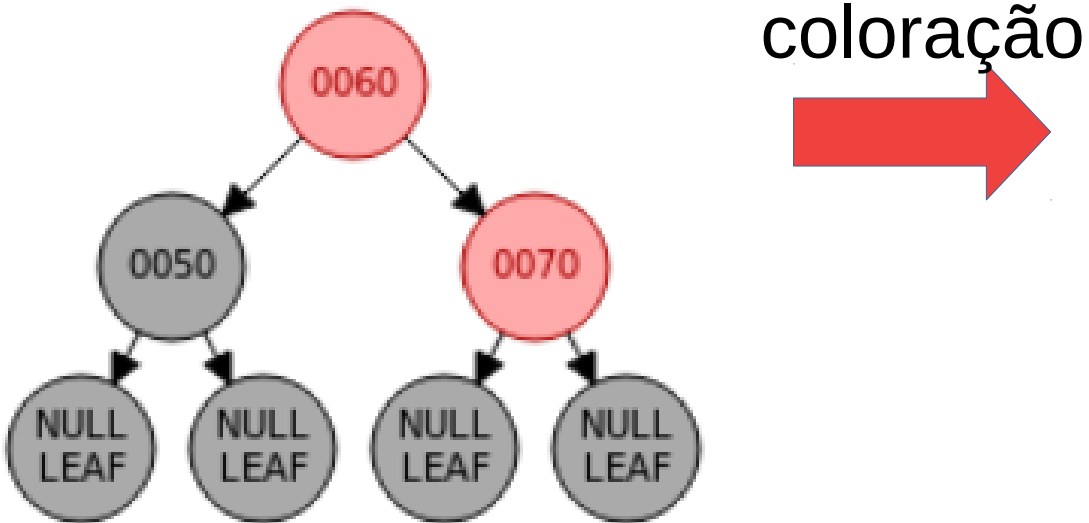
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



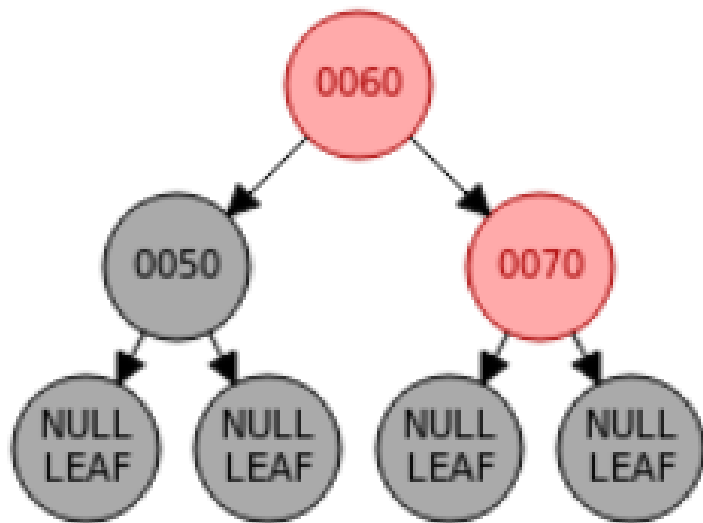
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla

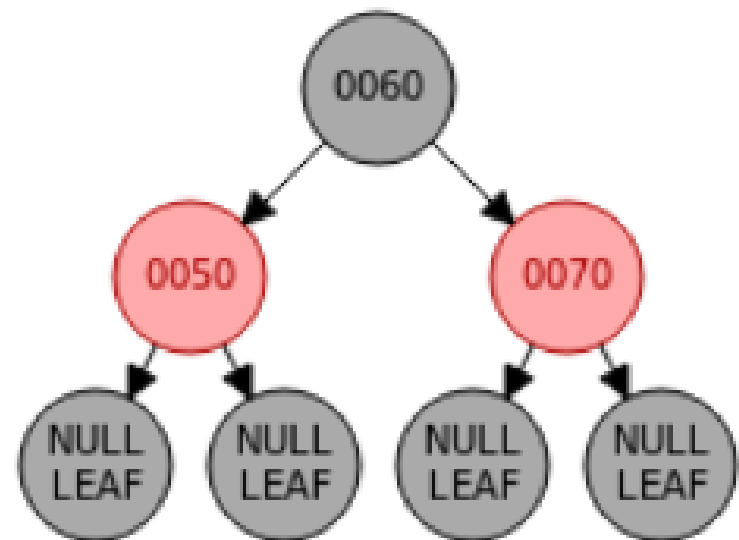


Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



coloração
→



Inserção

Inserção

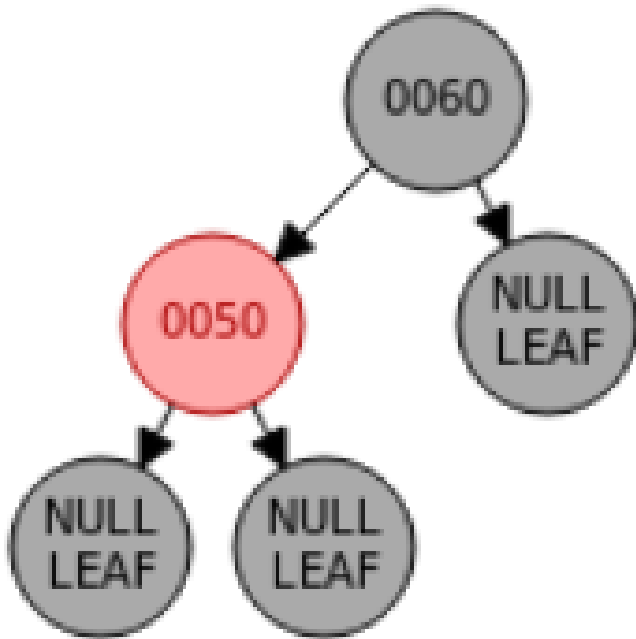
- Caso 2 (rotação 4)

Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla

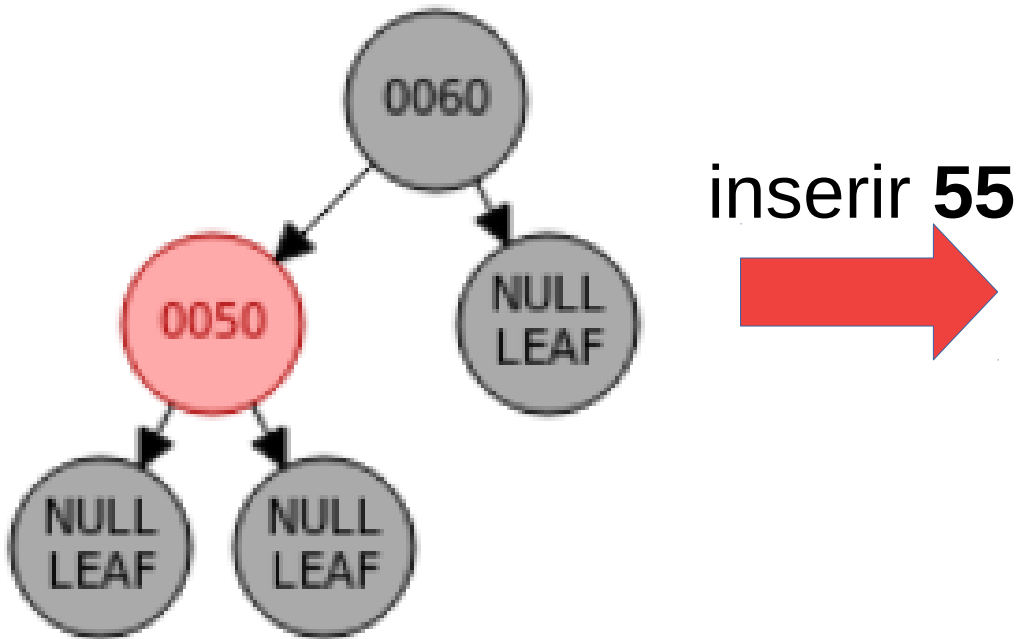
Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



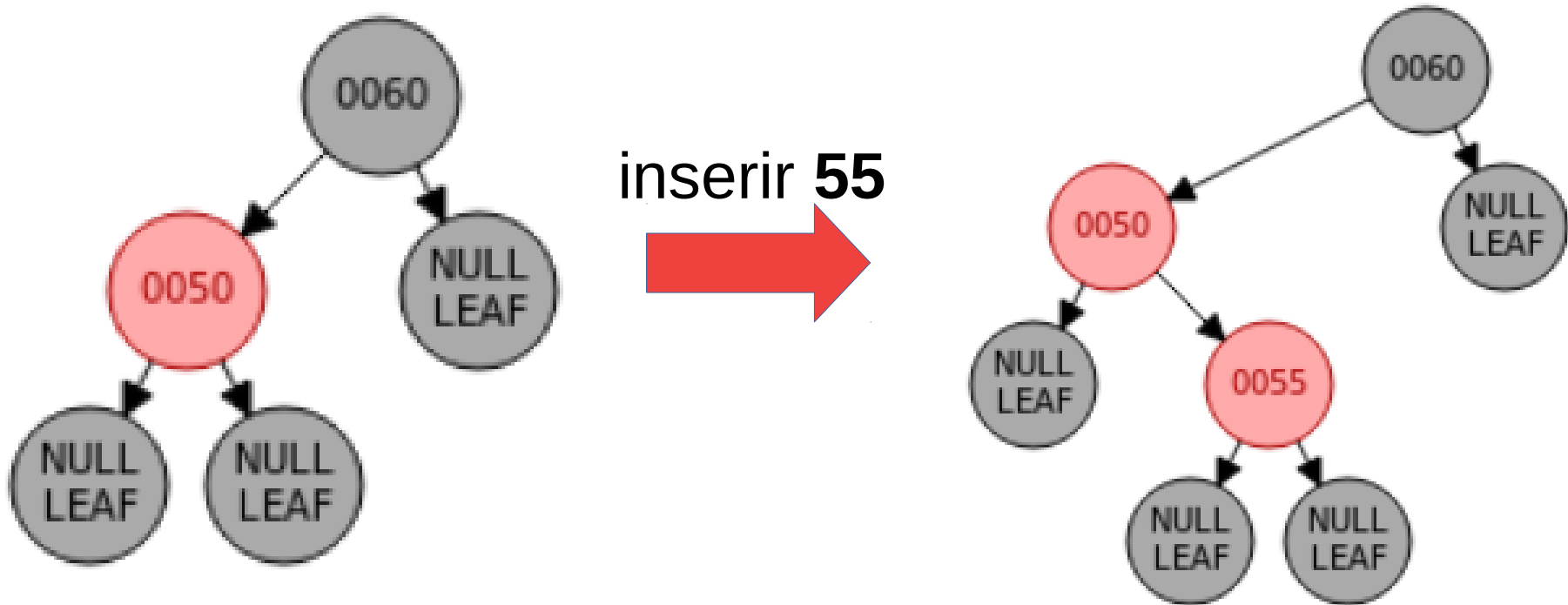
Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



Inserção

Inserção

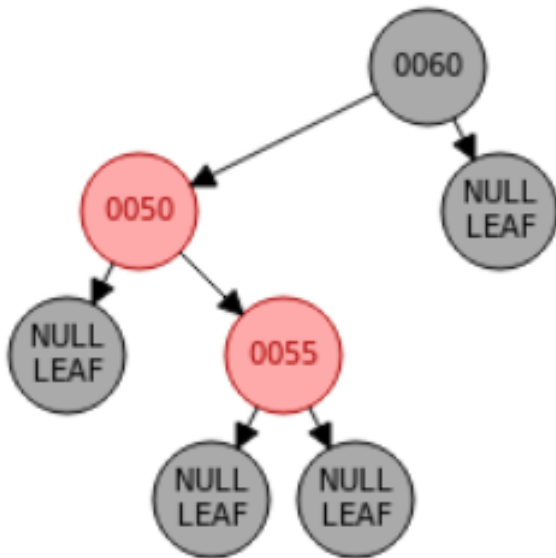
- Caso 2 (rotação 4)

Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla

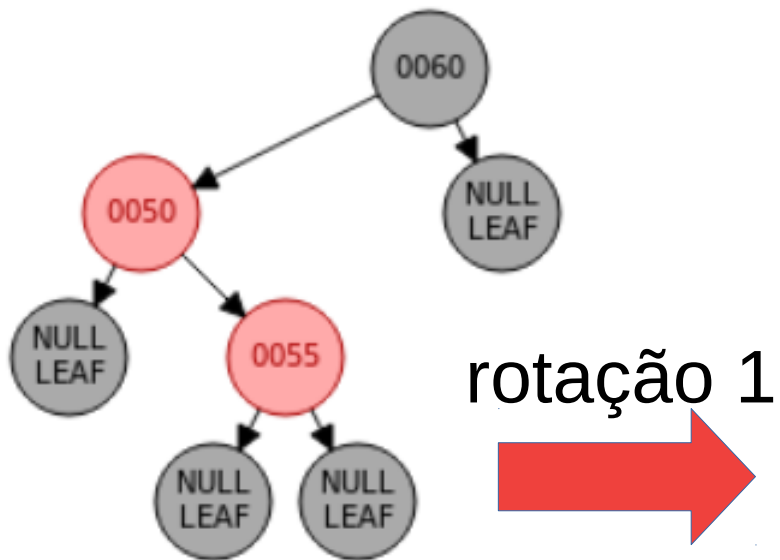
Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



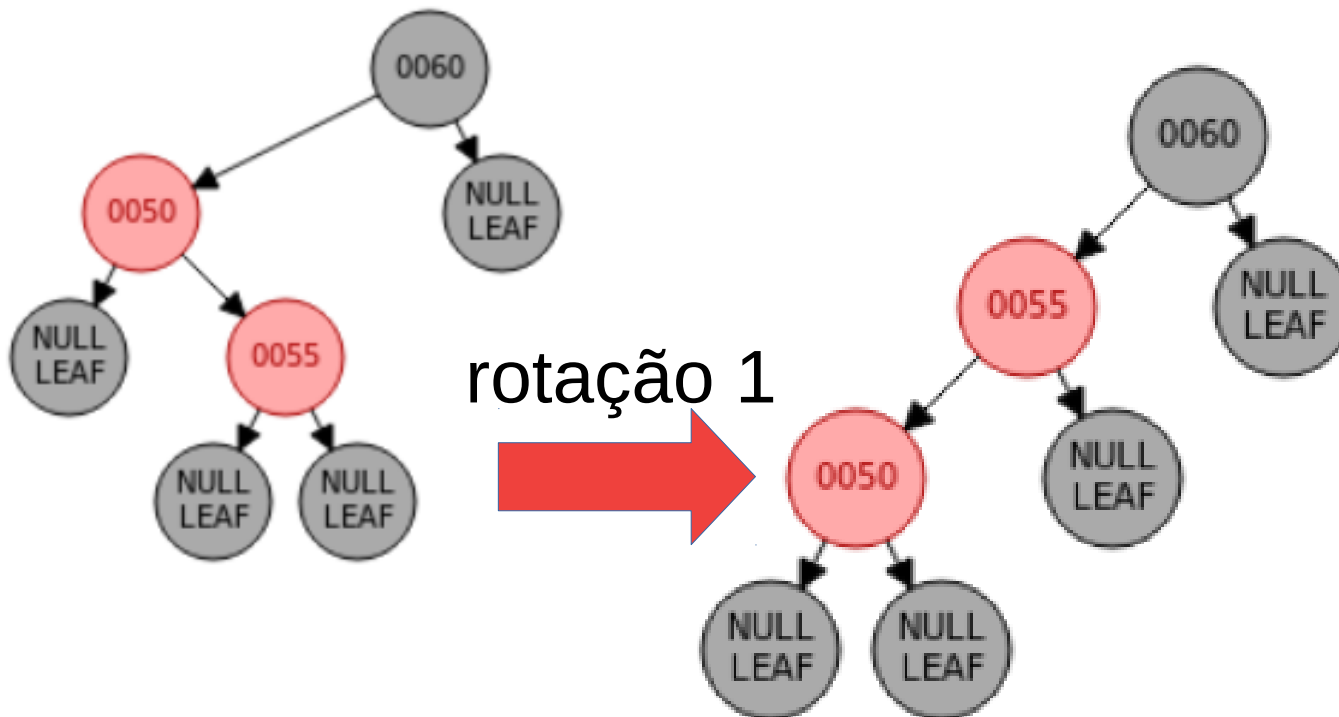
Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



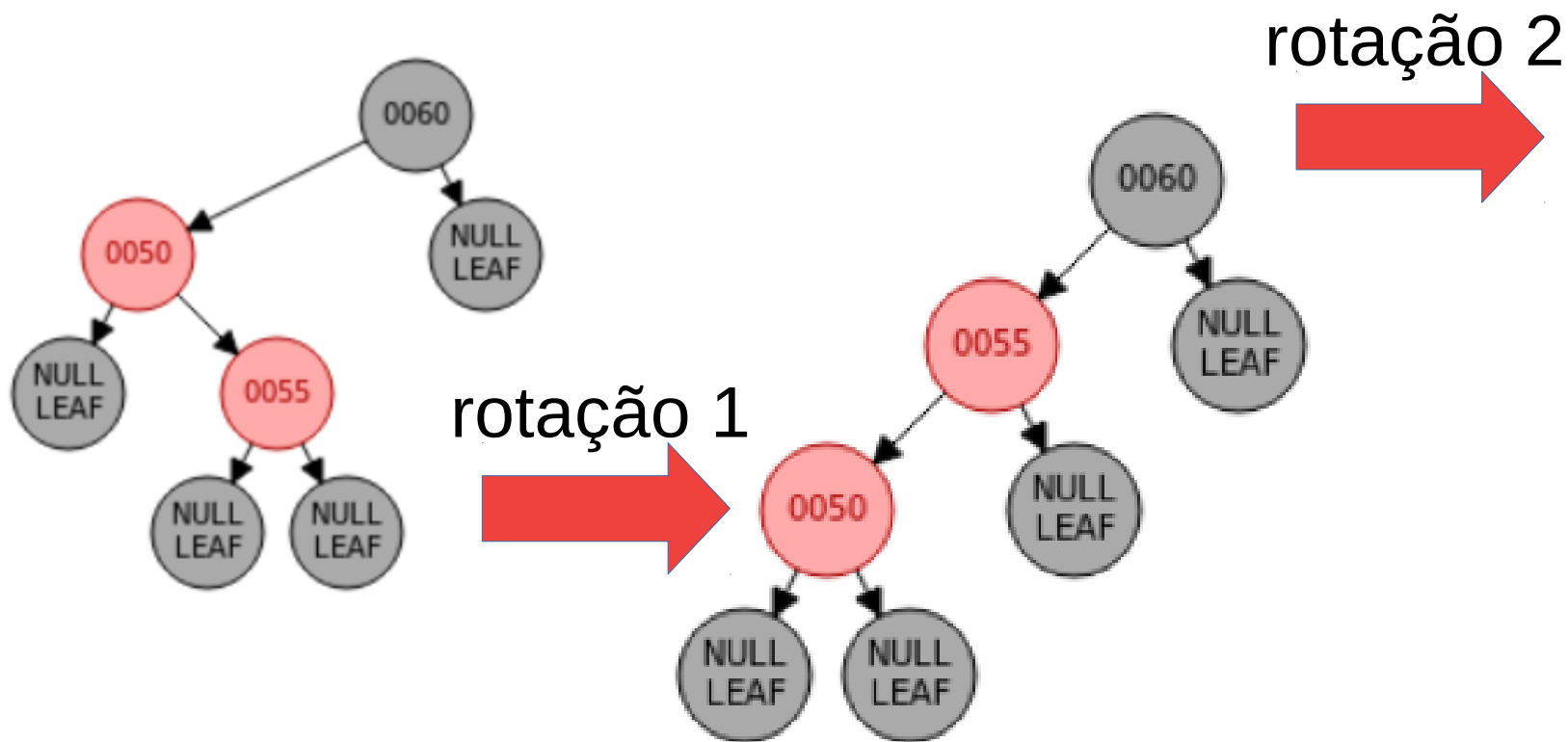
Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



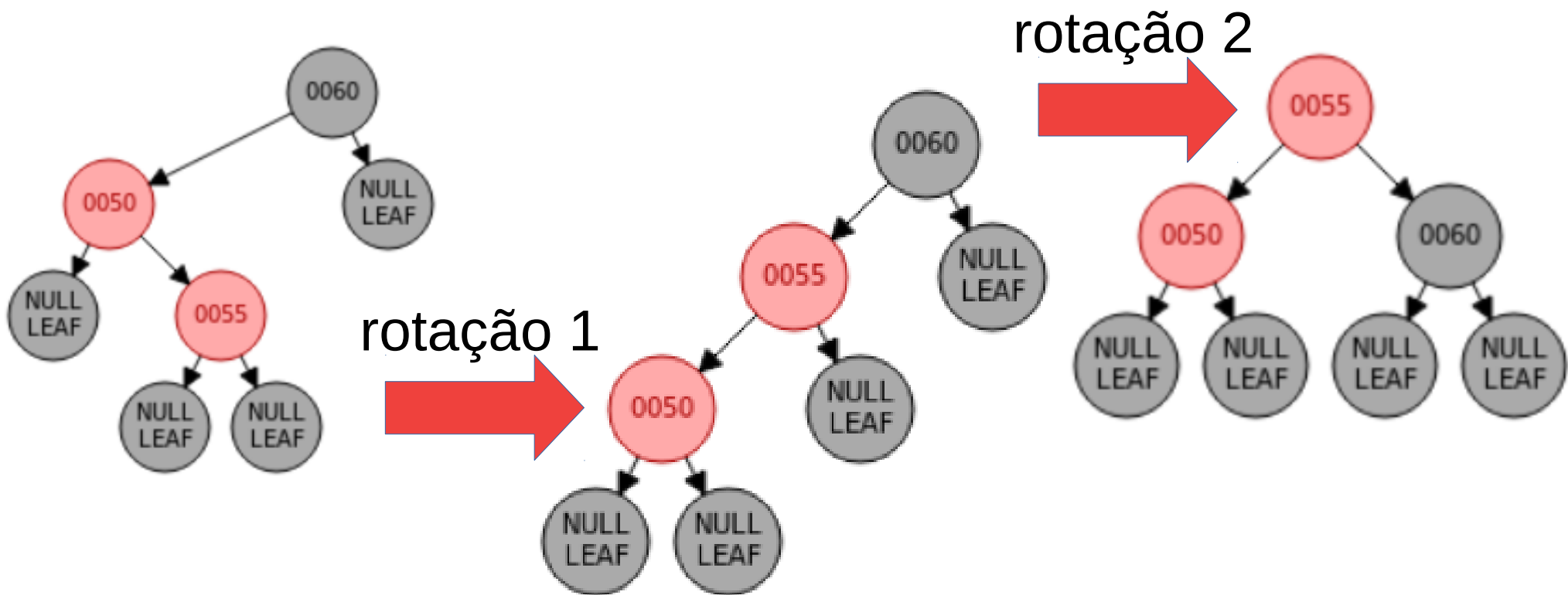
Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



Inserção

Inserção

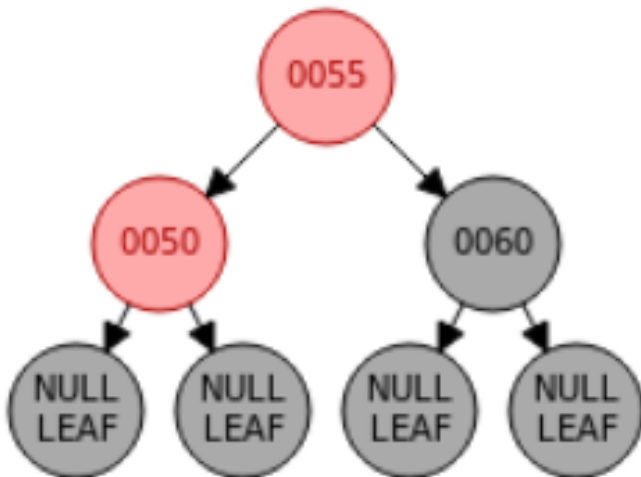
- Caso 2 (rotação 4)

Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla

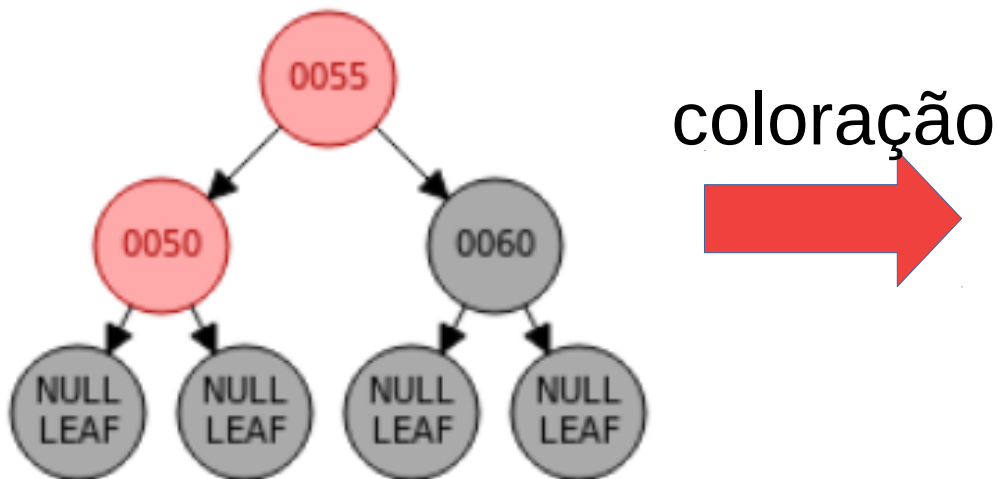
Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



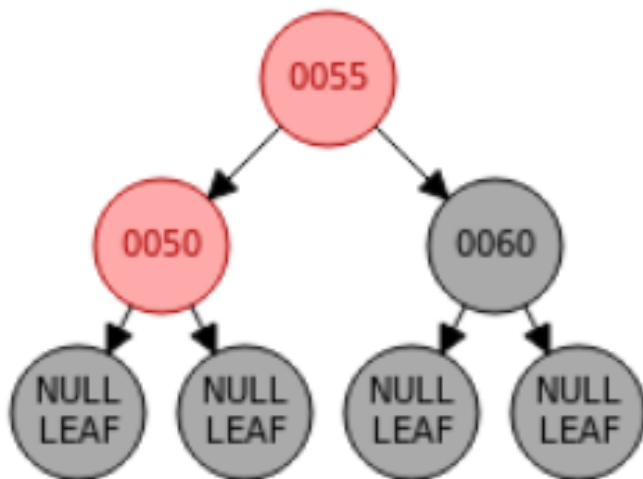
Inserção


- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla

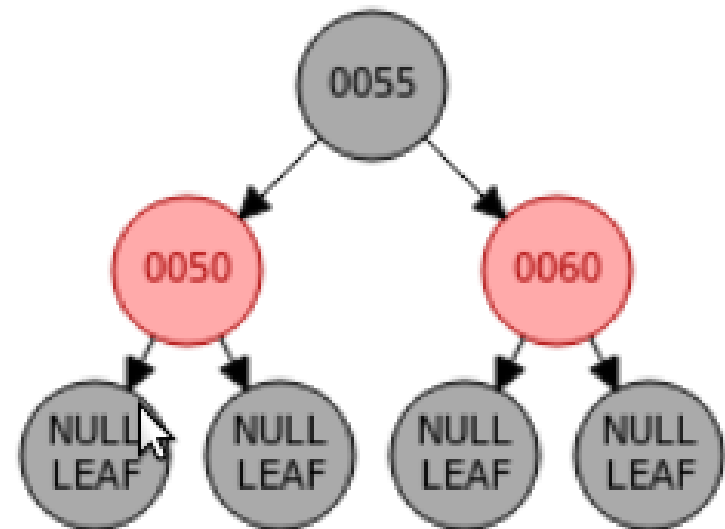


Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



coloração




Remoção

Remoção

- É um pouco mais complexa do que a inserção.

Remoção

- É um pouco mais complexa do que a inserção.
- Passos:

Remoção

- É um pouco mais complexa do que a inserção.
- Passos:
 - Encontre o nó V que será removido.

Remoção

- É um pouco mais complexa do que a inserção.
- Passos:
 - Encontre o nó V que será removido.
 - Remova o nó V da mesma maneira que uma ABB.

Remoção

- É um pouco mais complexa do que a inserção.
- Passos:
 - Encontre o nó V que será removido.
 - Remova o nó V da mesma maneira que uma ABB.
 - Ajuste os critérios da ARN.

Remoção

Remoção

- Situação 1

Remoção

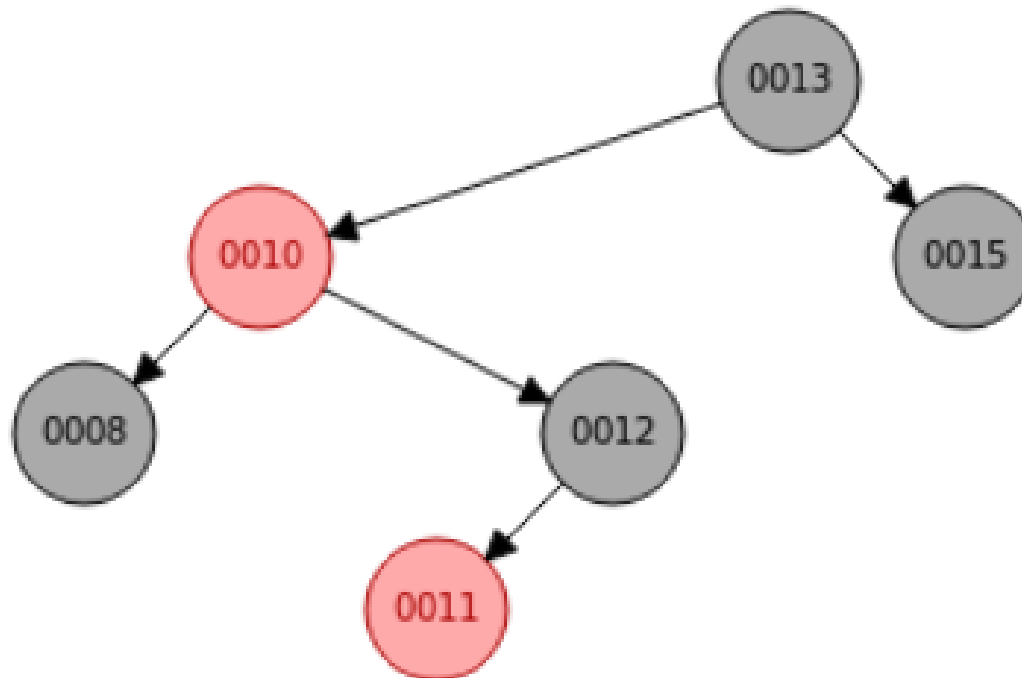
- Situação 1
 - O nó removido é rubro.

Remoção

- Situação 1
 - O nó removido é rubro.
 - Exemplo: remover o nó 10.

Remoção

- Situação 1
 - O nó removido é rubro.
 - Exemplo: remover o nó 10.



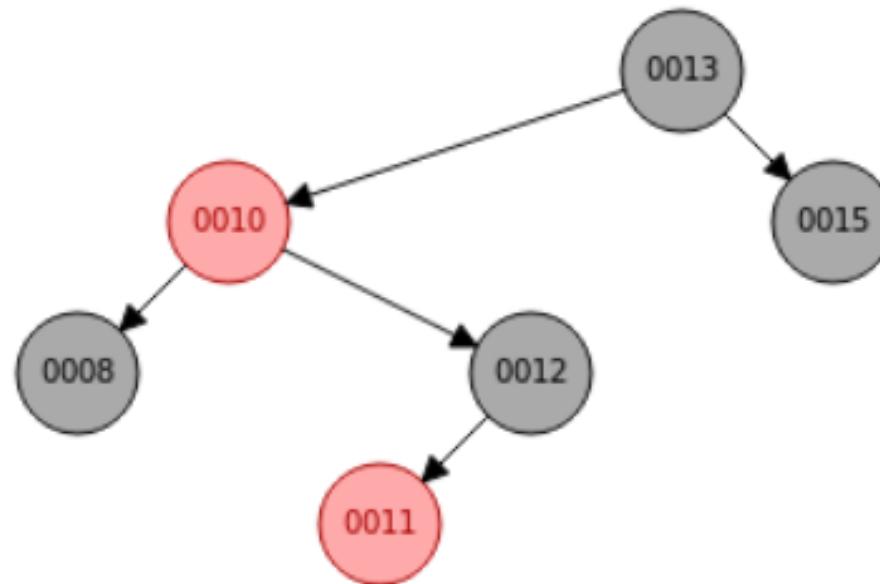
Remoção

Remoção

- Situação 1 (remover 10)

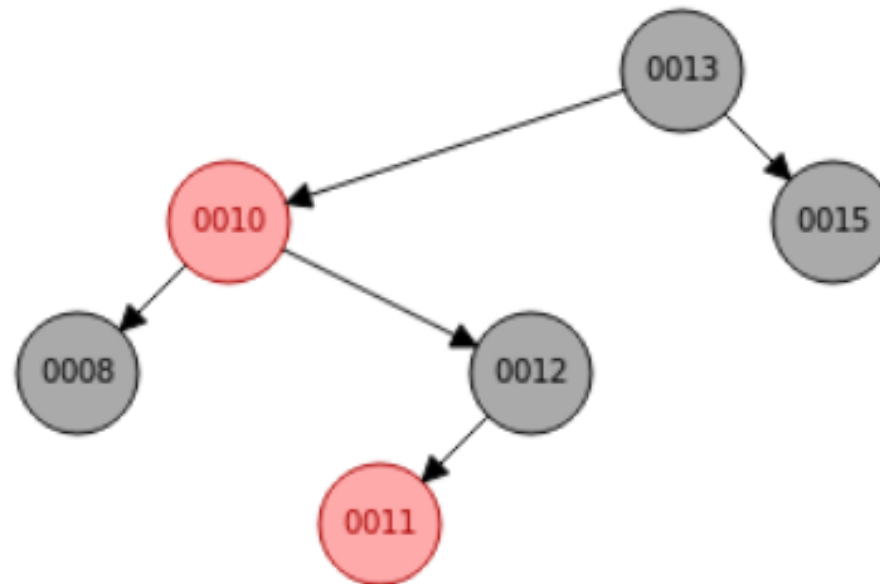
Remoção

- Situação 1 (remover 10)



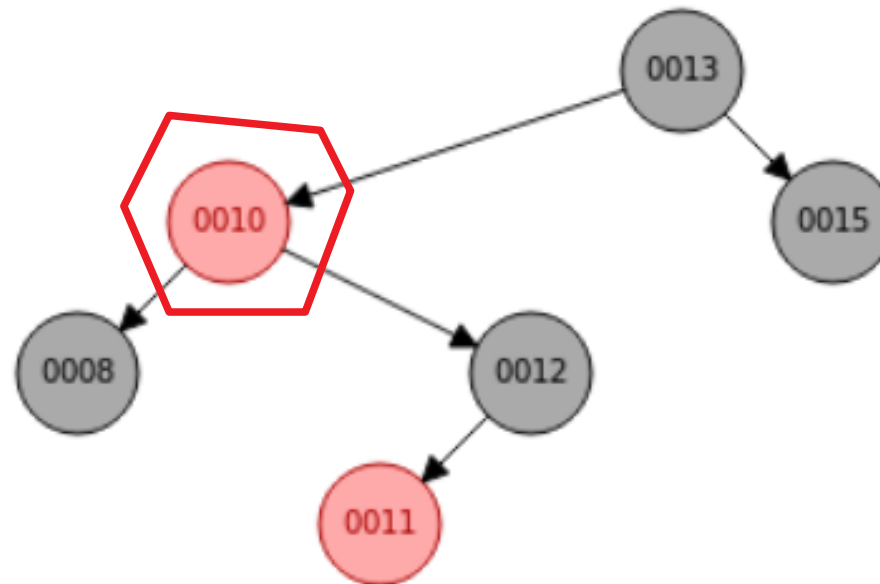
Remoção

- Situação 1 (remover 10)
 - Localizar o elemento (10).



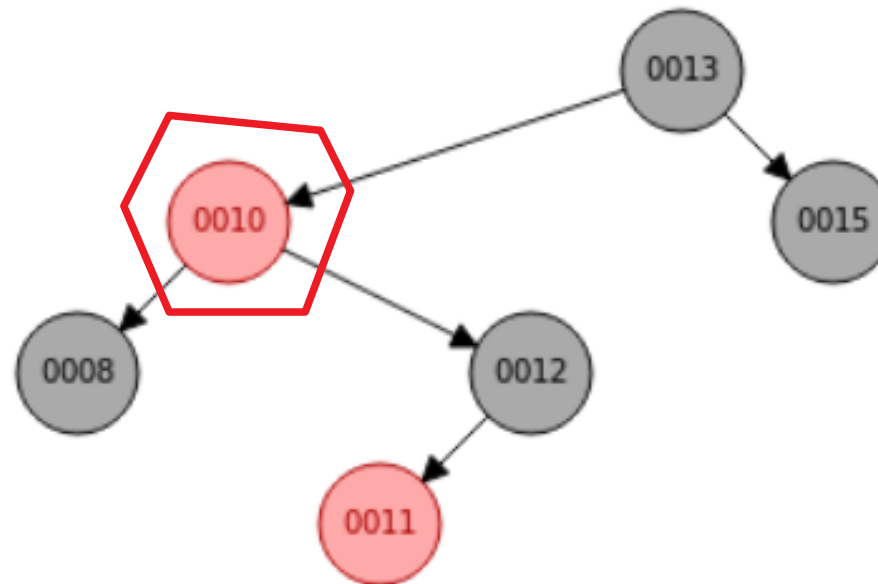
Remoção

- Situação 1 (remover 10)
 - Localizar o elemento (10).



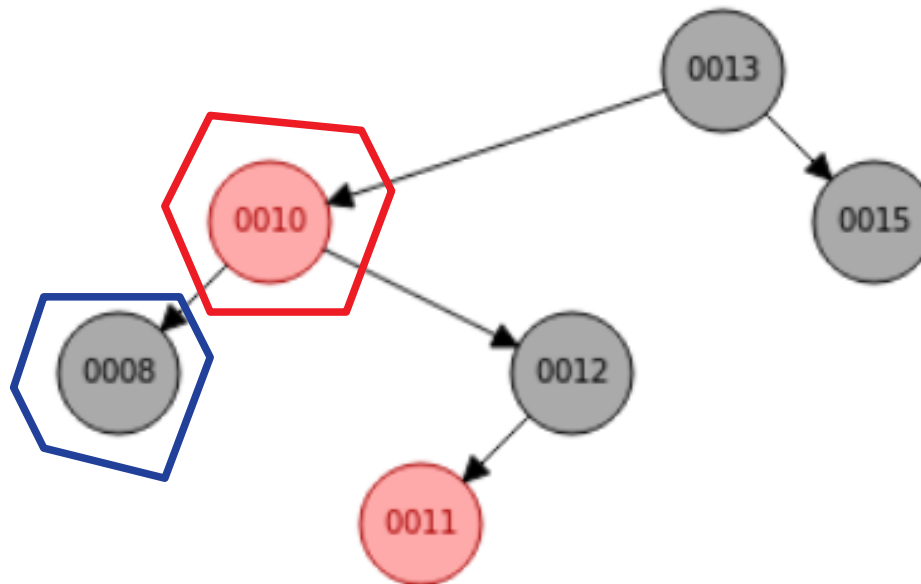
Remoção

- Situação 1 (remover 10)
 - Localizar o elemento (10).
 - Achar o maior na subárvore a esquerda.



Remoção

- Situação 1 (remover 10)
 - Localizar o elemento (10).
 - Achar o maior na subárvore a esquerda.



Remoção

Remoção

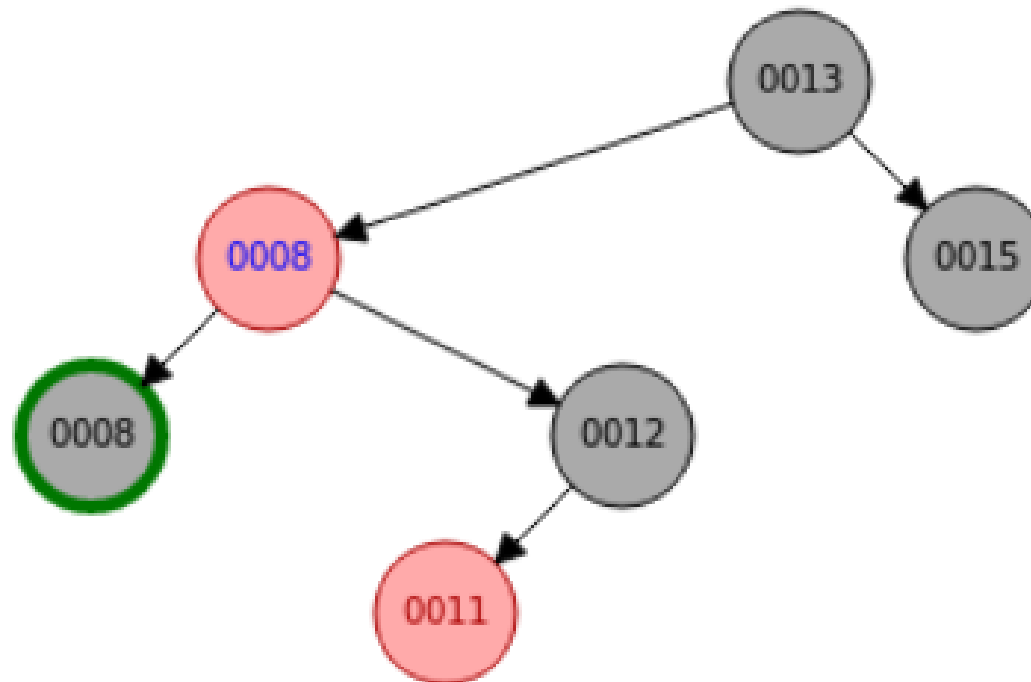
- Situação 1

Remoção

- Situação 1
 - Copiar o maior valor da subárvore a esquerda para o nó que será removido.

Remoção

- Situação 1
 - Copiar o maior valor da subárvore a esquerda para o nó que será removido.



Remoção

Remoção

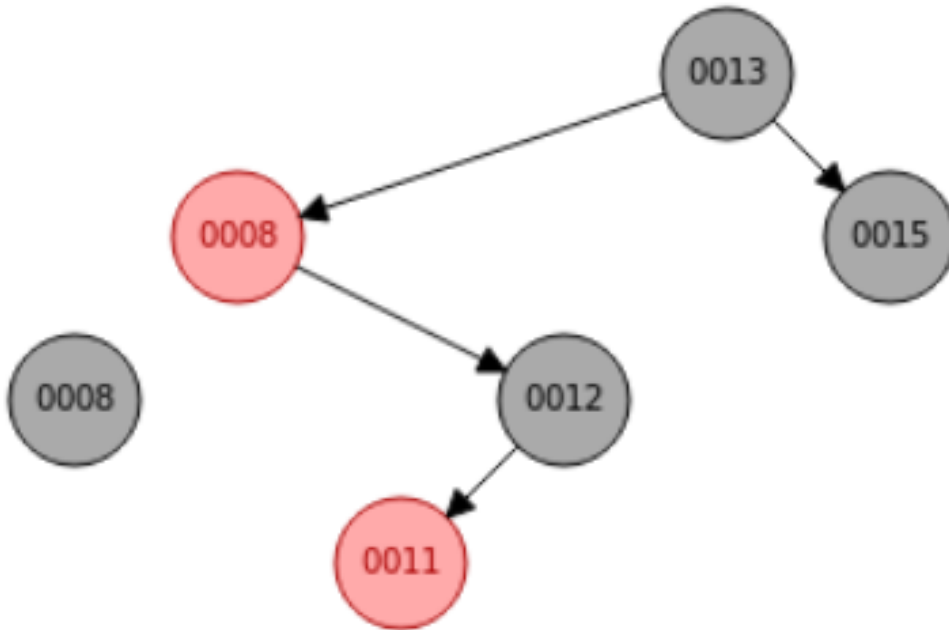
- Situação 1

Remoção

- Situação 1
 - Remover o nó copiado.

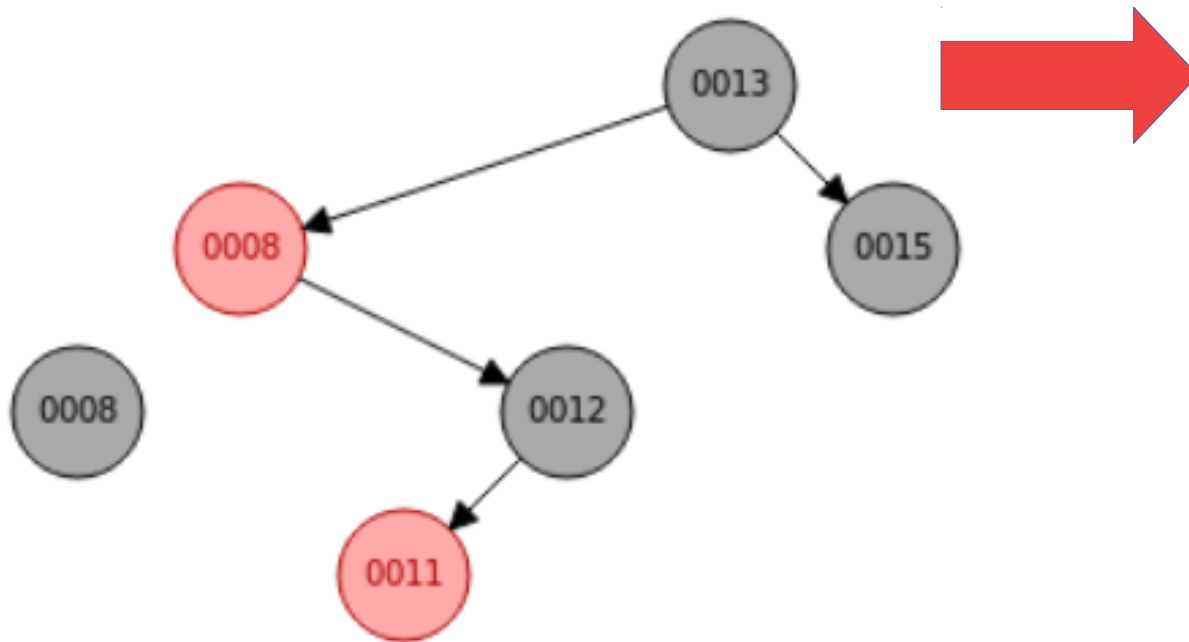
Remoção

- Situação 1
 - Remover o nó copiado.



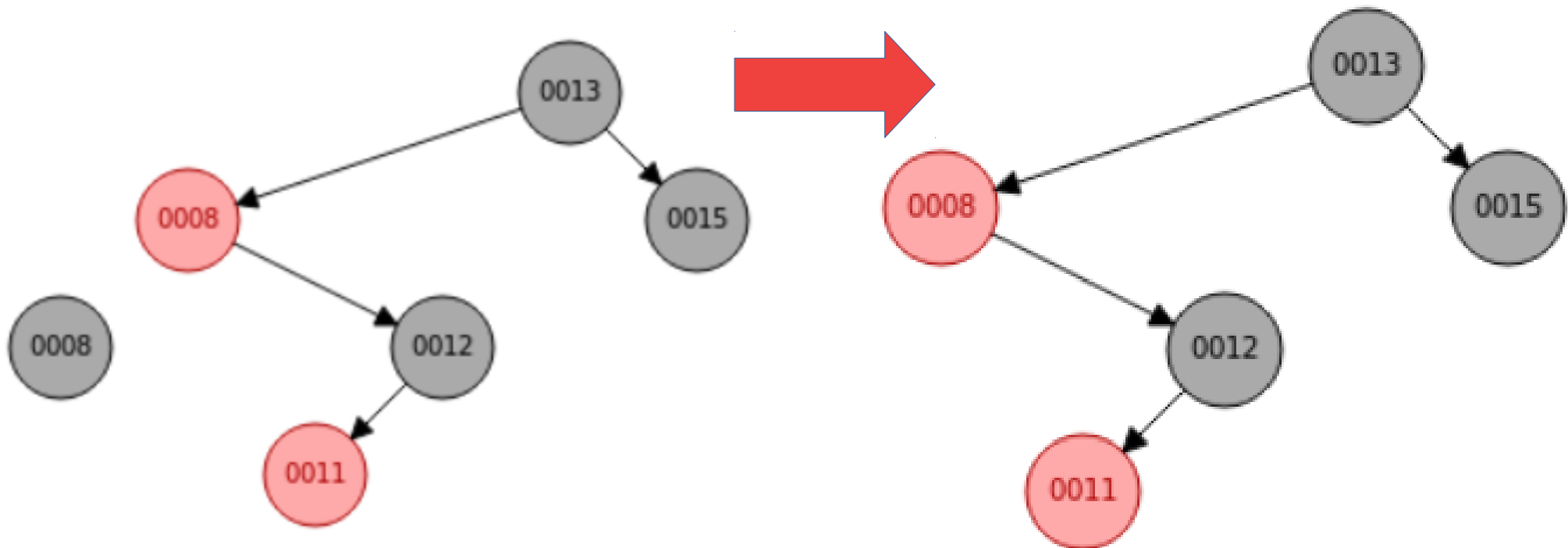
Remoção

- Situação 1
 - Remover o nó copiado.



Remoção

- Situação 1
 - Remover o nó copiado.



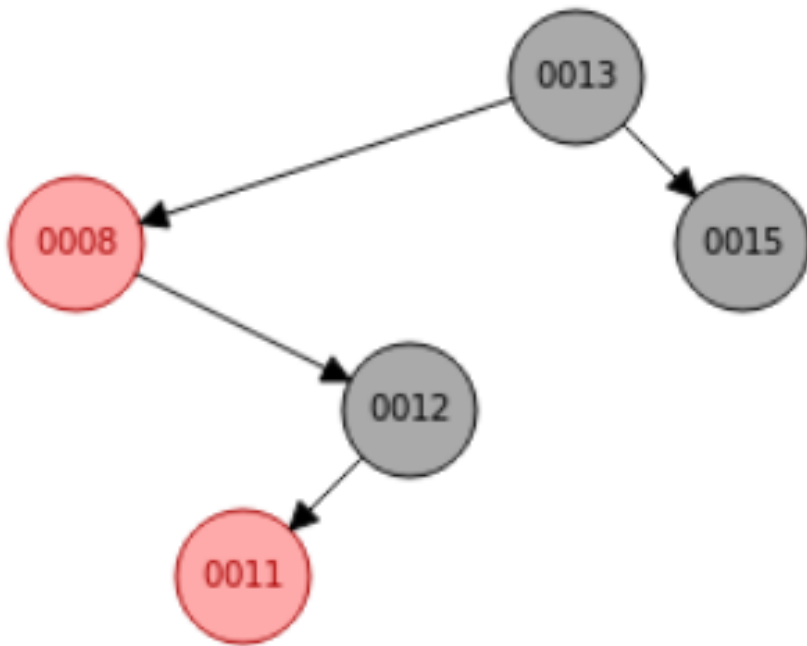
Remoção

Remoção

- Situação 1
 - Colorir o filho a esquerda de preto.

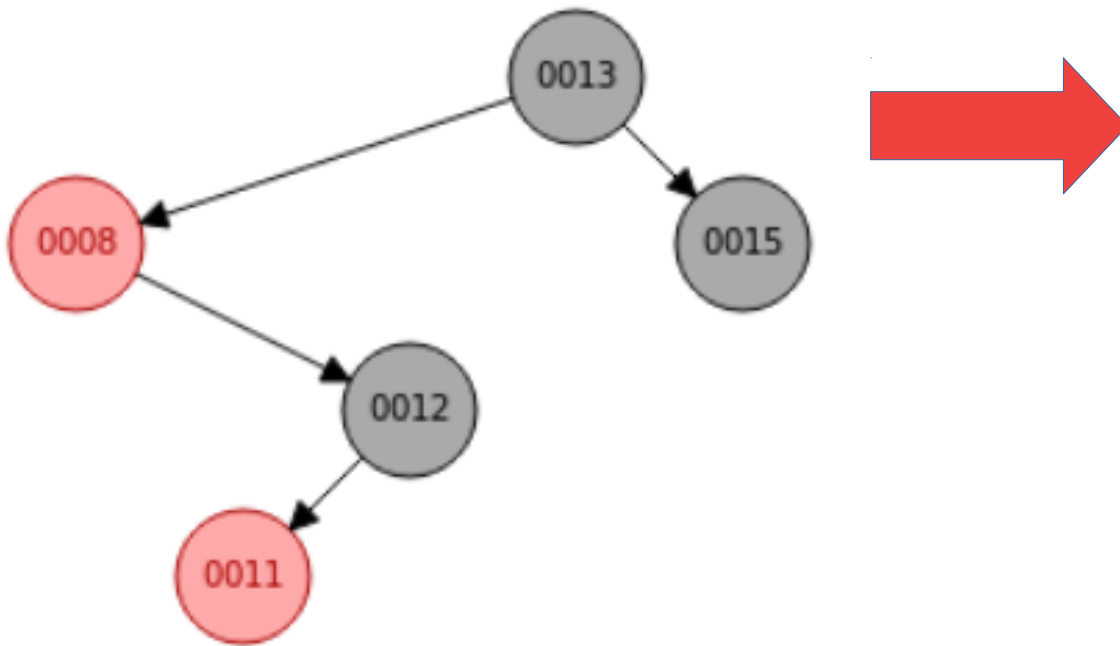
Remoção

- Situação 1
 - Colorir o filho a esquerda de preto.



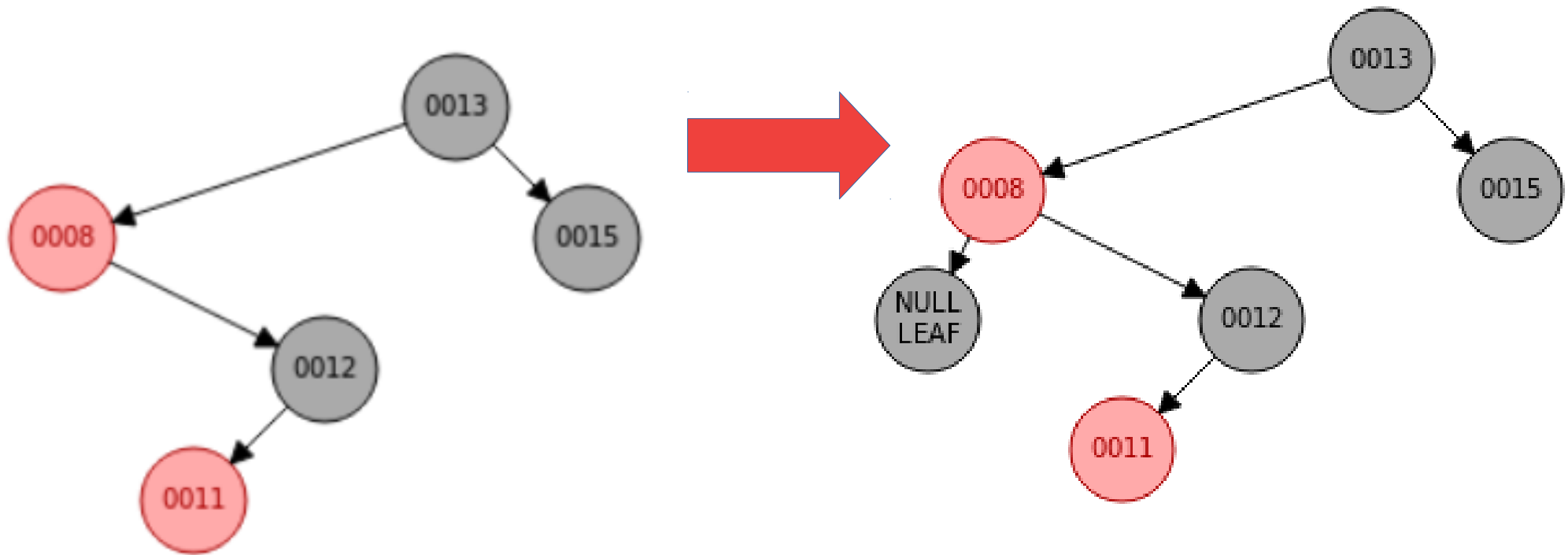
Remoção

- Situação 1
 - Colorir o filho a esquerda de preto.



Remoção

- Situação 1
 - Colorir o filho a esquerda de preto.



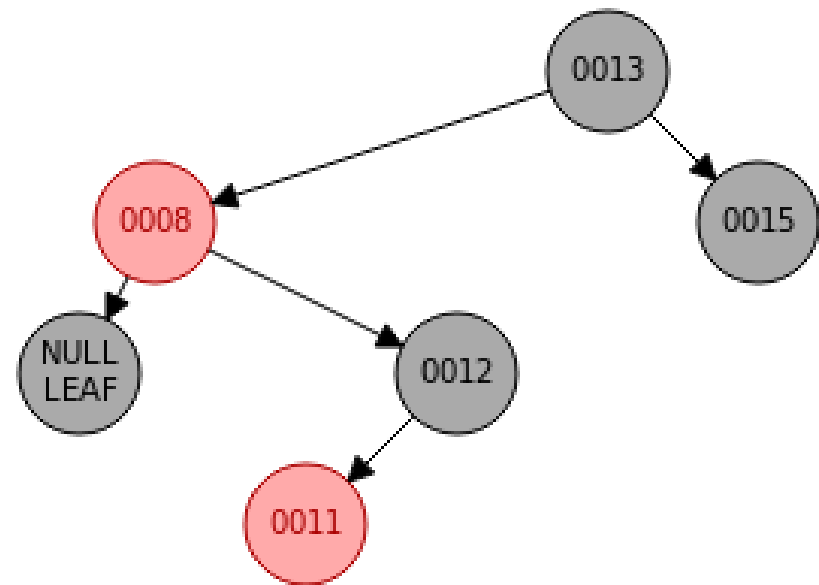
Remoção

Remoção

- Situação 1
 - Rotaciona

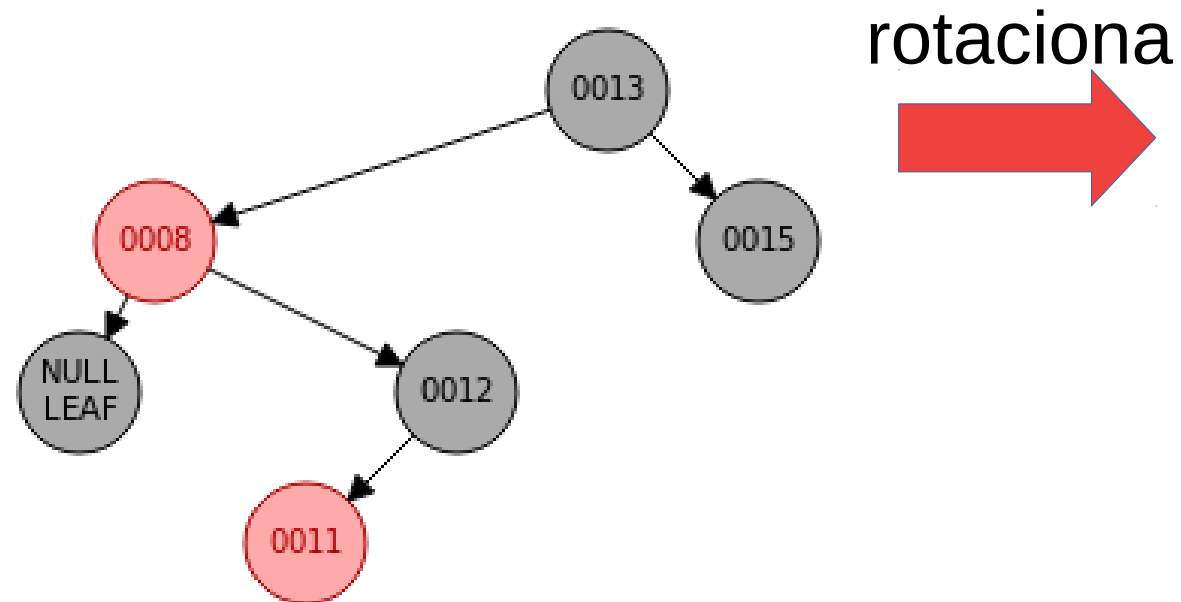
Remoção

- Situação 1
 - Rotacional



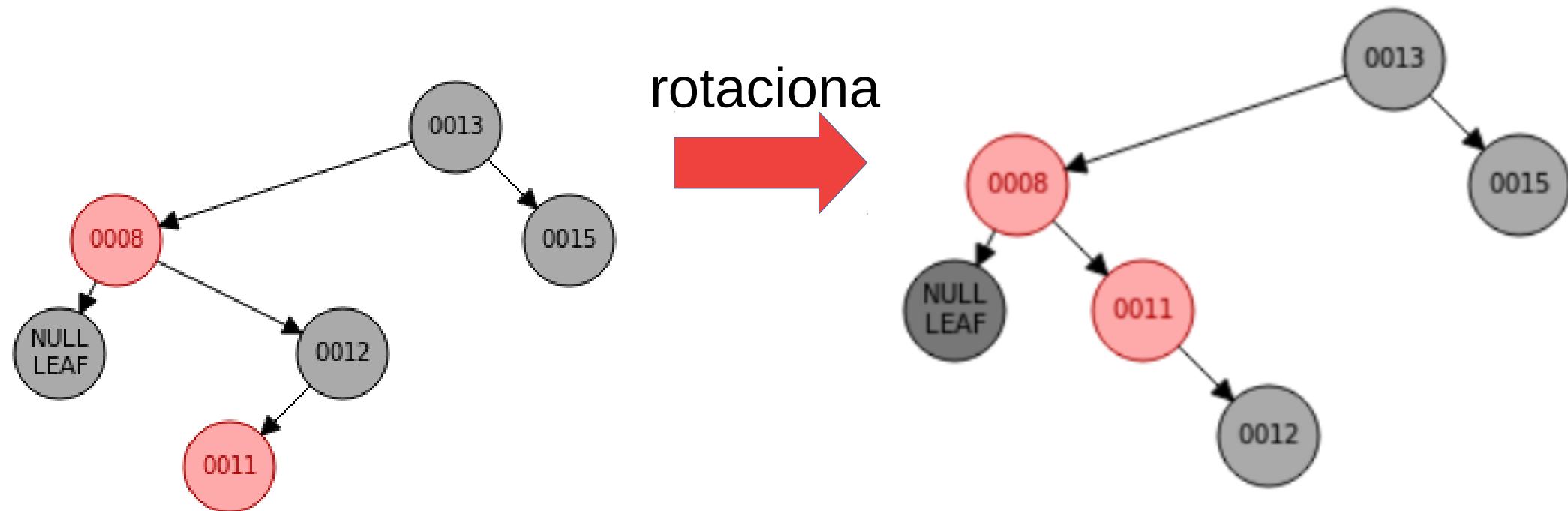
Remoção

- Situação 1
 - Rotaciona



Remoção

- Situação 1
 - Rotacionala



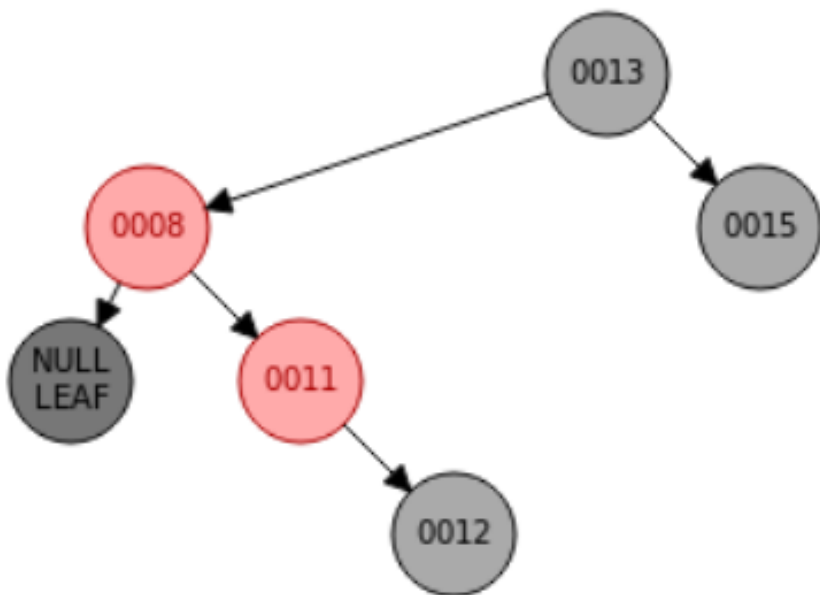
Remoção

Remoção

- Situação 1
 - Coloração

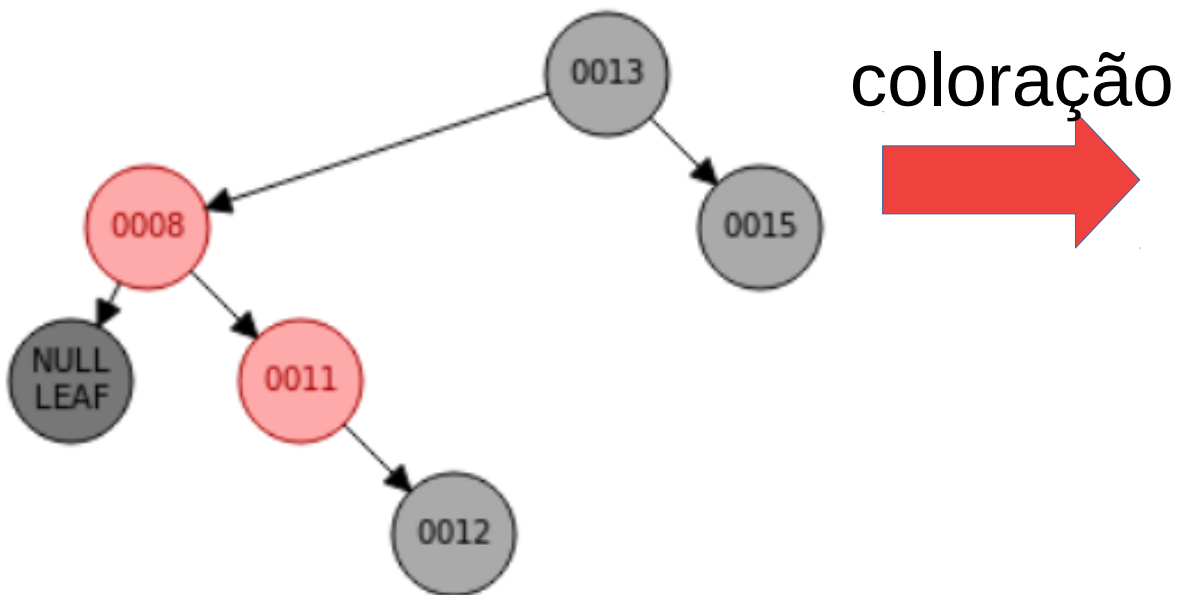
Remoção

- Situação 1
 - Coloração



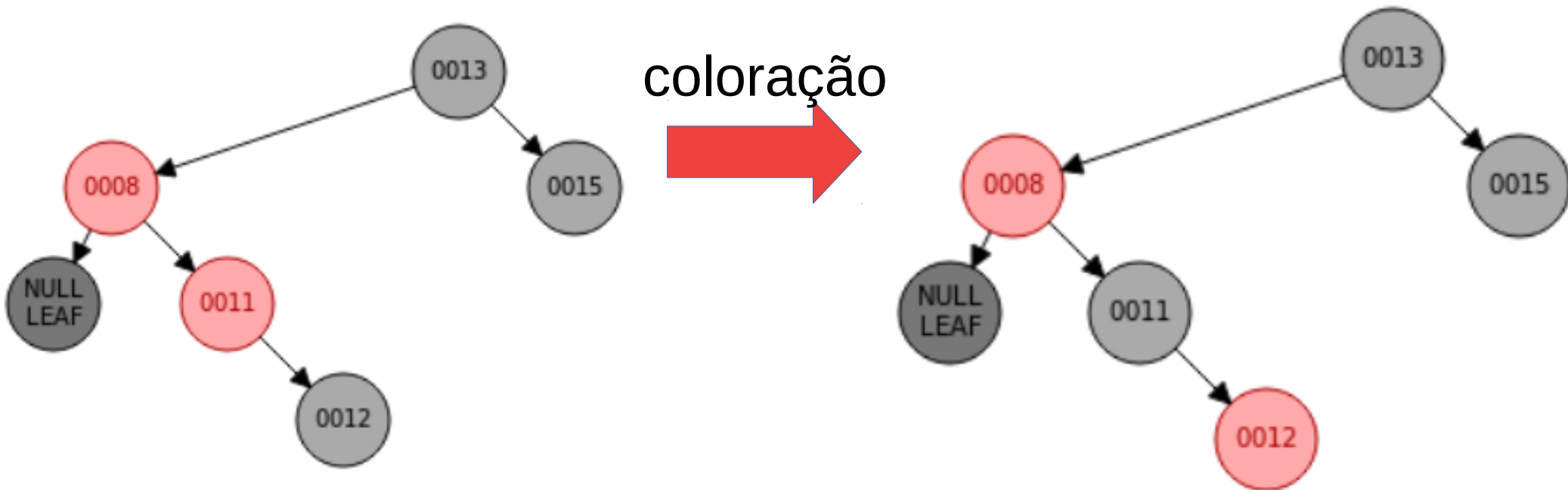
Remoção

- Situação 1
 - Coloração



Remoção

- Situação 1
 - Coloração



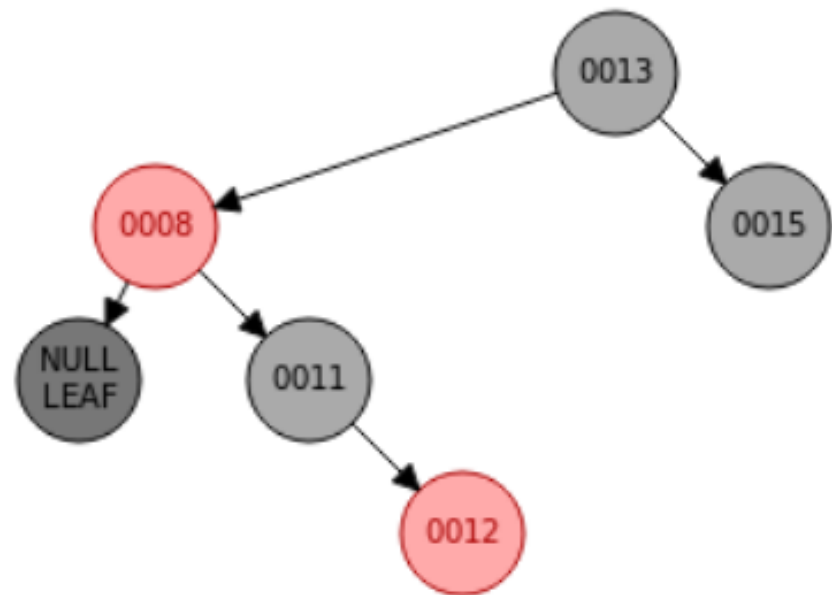
Remoção

Remoção

- Situação 1
 - Rotaciona

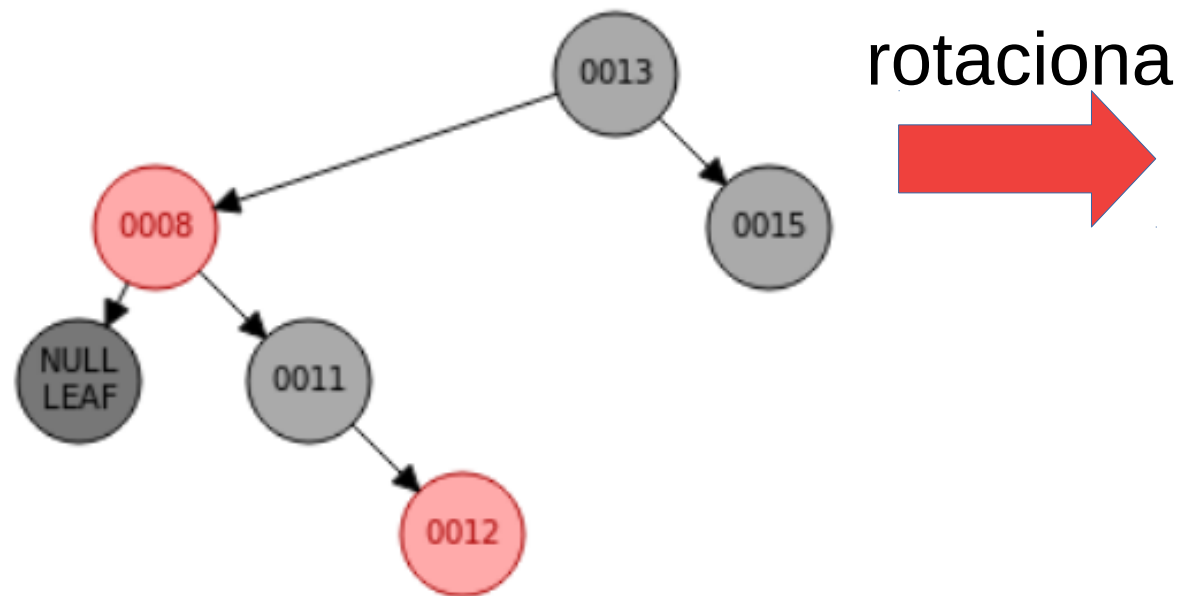
Remoção

- Situação 1
 - Rotacional



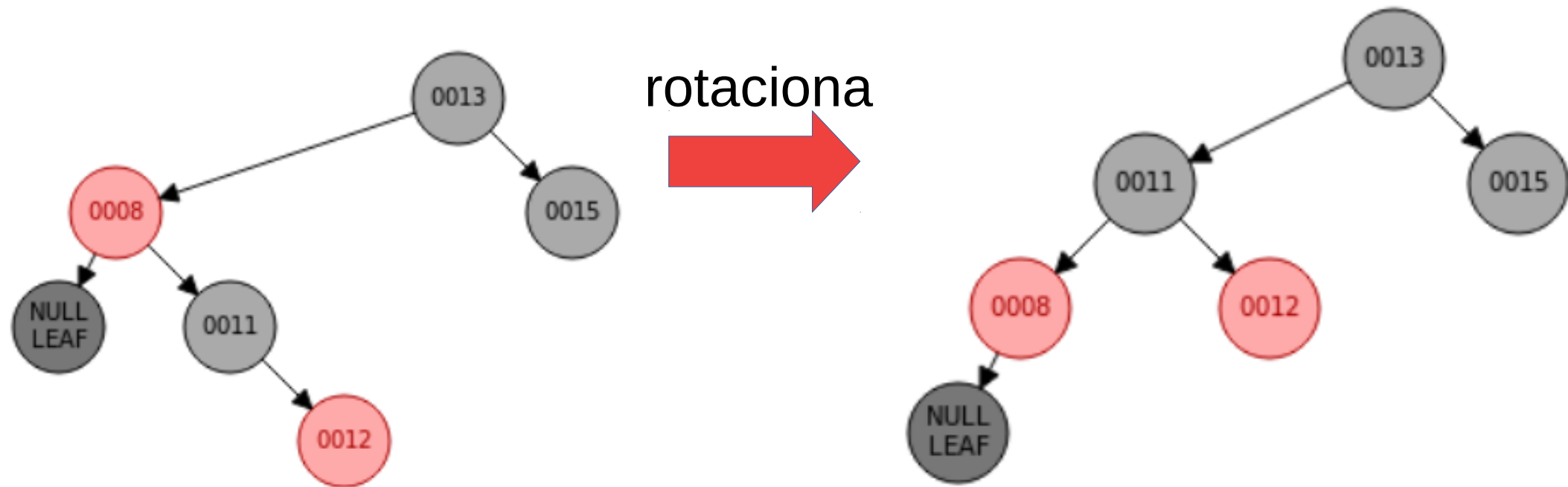
Remoção

- Situação 1
 - Rotacionala



Remoção

- Situação 1
 - Rotaciona



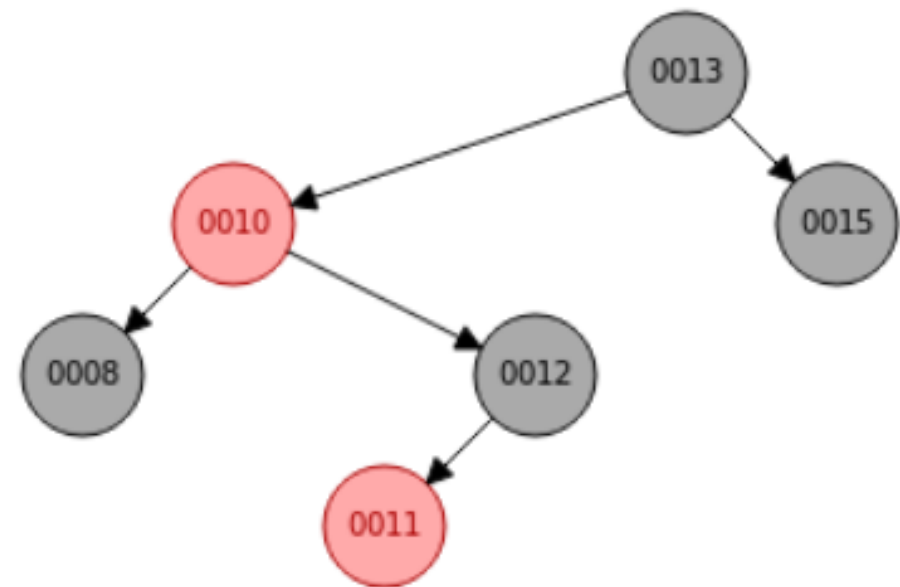
Remoção

Remoção

- Situação 1

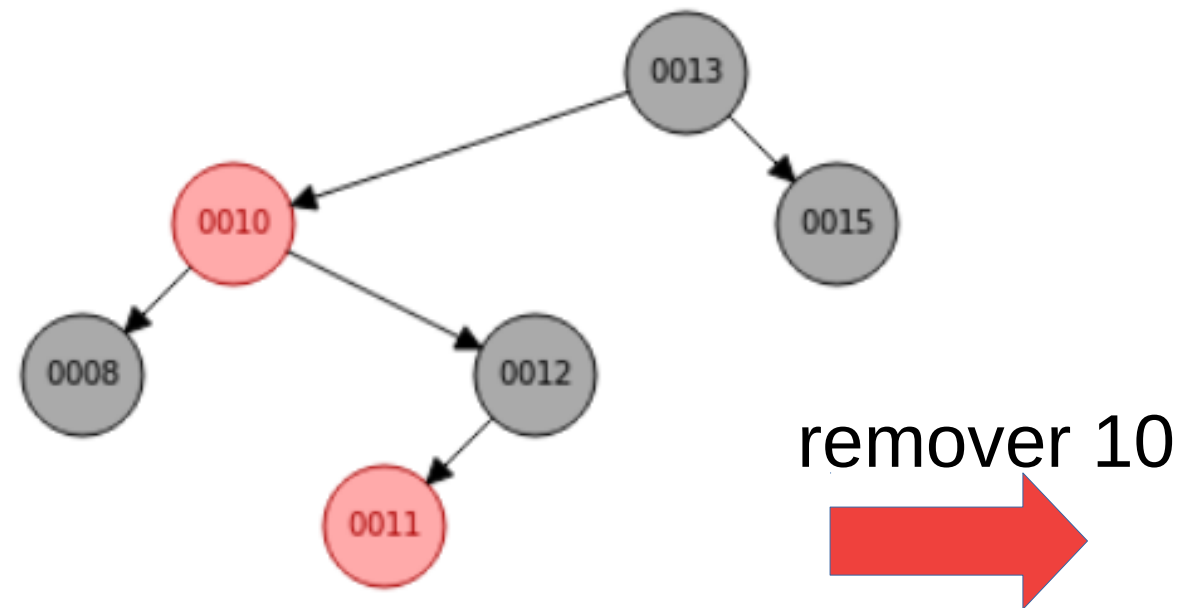
Remoção

- Situação 1



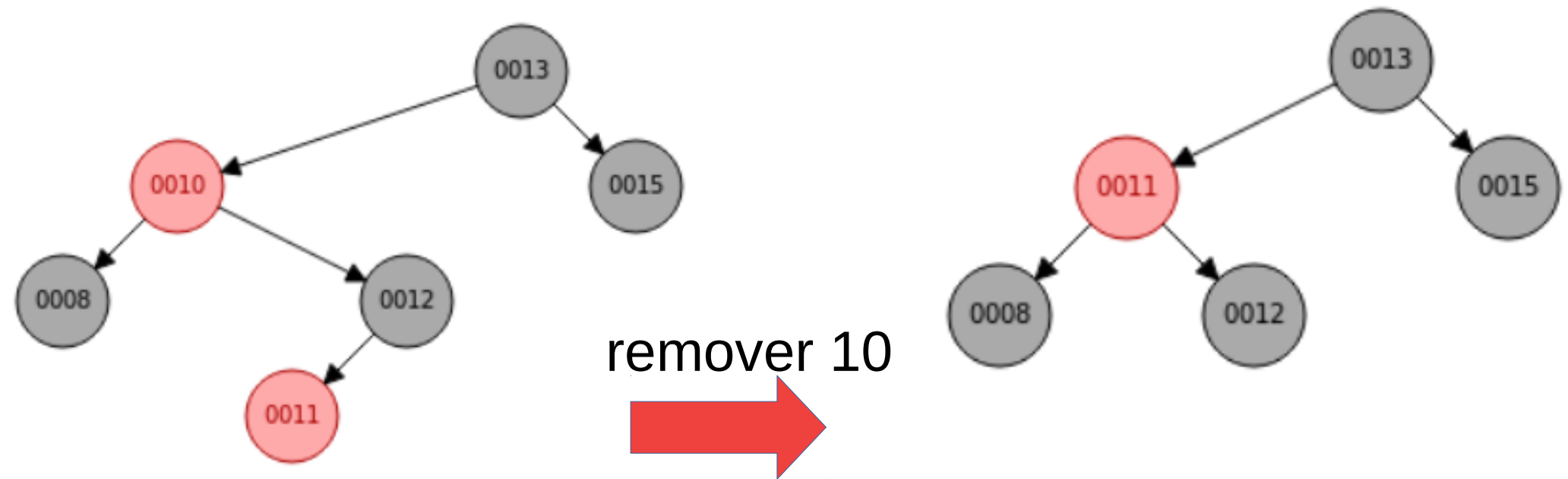
Remoção

- Situação 1



Remoção

- Situação 1



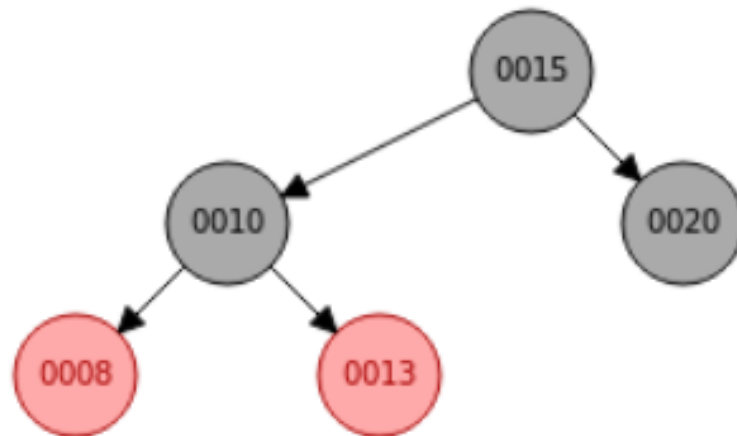
Remoção

Remoção

- Situação 2

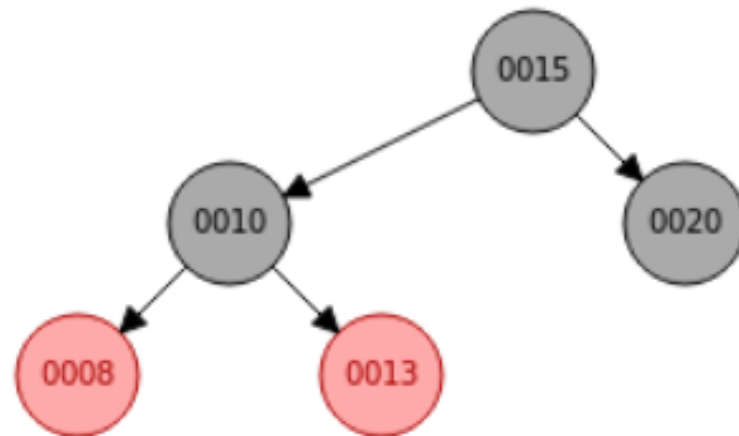
Remoção

- Situação 2



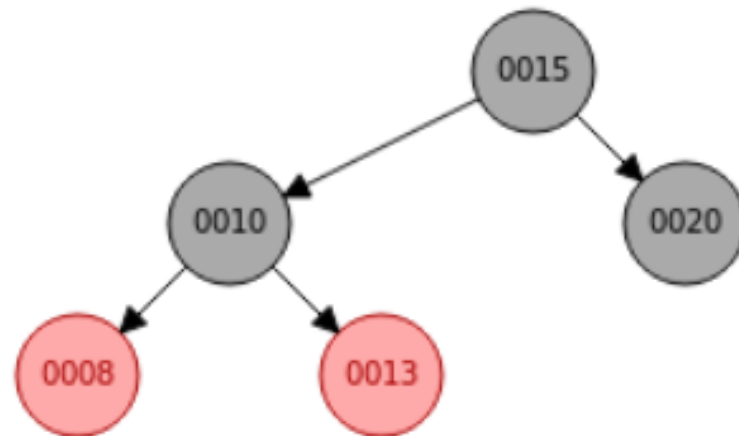
Remoção

- Situação 2
 - O nó removido é negro.



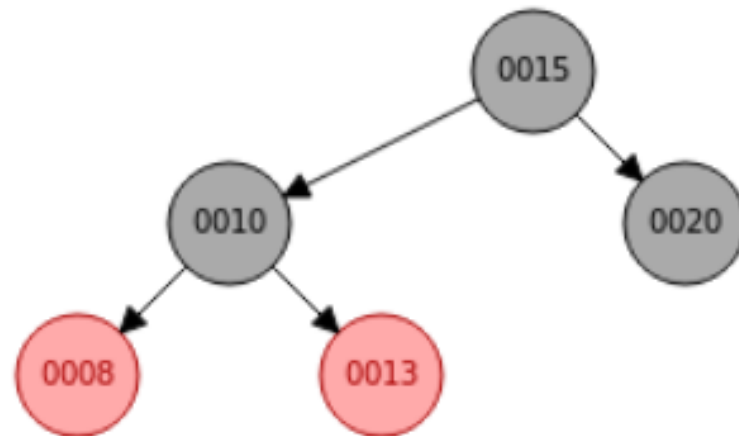
Remoção

- Situação 2
 - O nó removido é negro.
 - O sucessor do nó removido é rubro.



Remoção

- Situação 2
 - O nó removido é negro.
 - O sucessor do nó removido é rubro.
 - Exemplo: remover o nó 10.



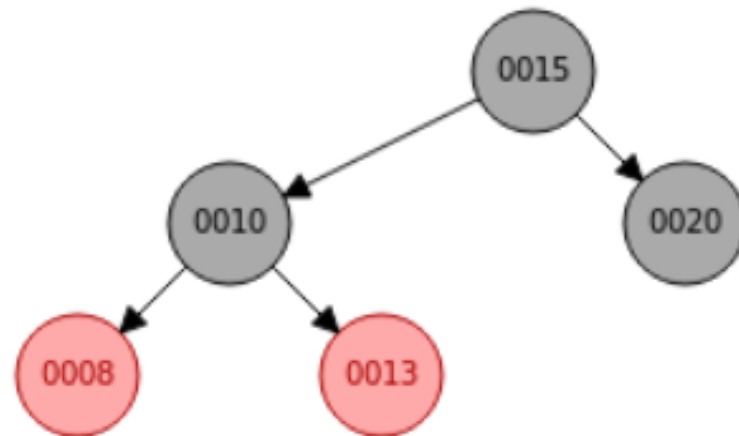
Remoção

Remoção

- Situação 2

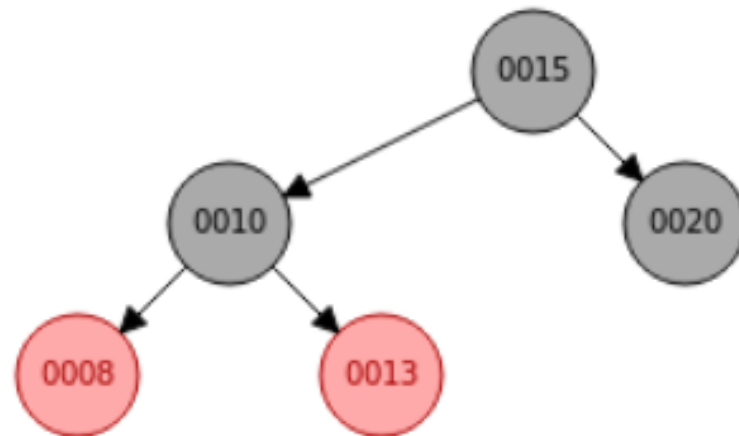
Remoção

- Situação 2



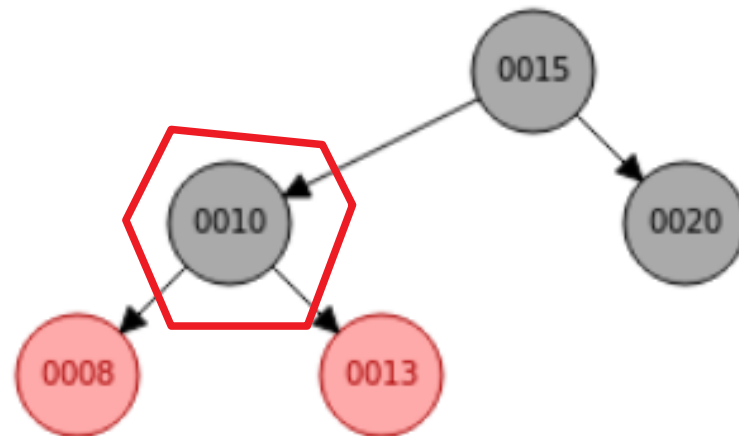
Remoção

- Situação 2
 - Localizar o elemento (10).



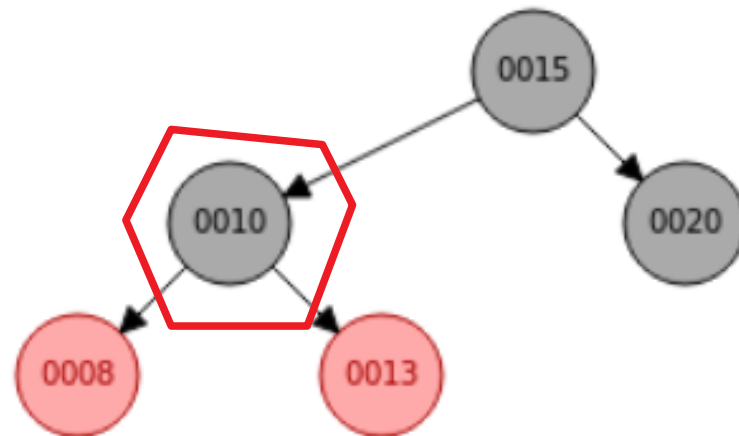
Remoção

- Situação 2
 - Localizar o elemento (10).



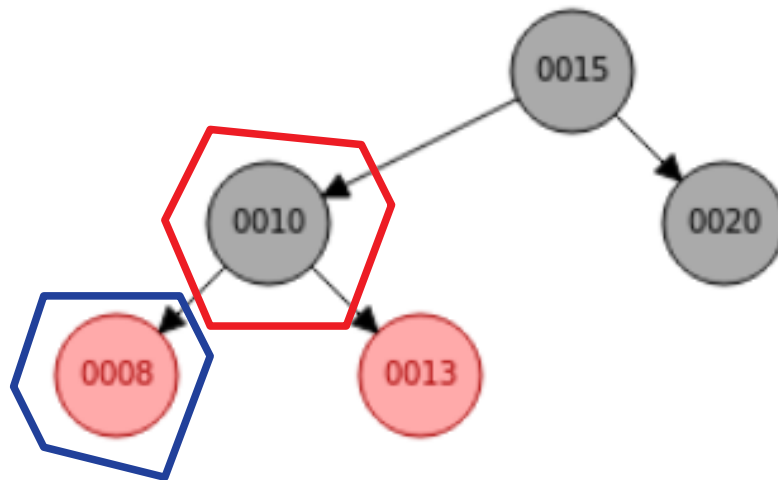
Remoção

- Situação 2
 - Localizar o elemento (10).
 - Achar o maior na subárvore a esquerda.



Remoção

- Situação 2
 - Localizar o elemento (10).
 - Achar o maior na subárvore a esquerda.



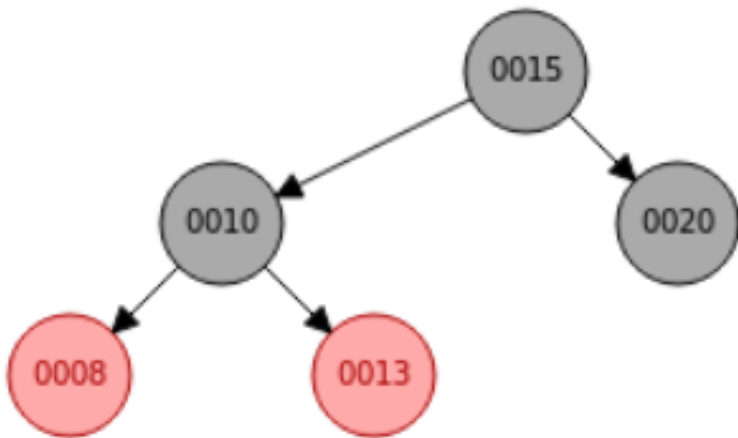
Remoção

Remoção

- Situação 2
 - Copiar o maior valor da subárvore a esquerda para o nó que será removido.

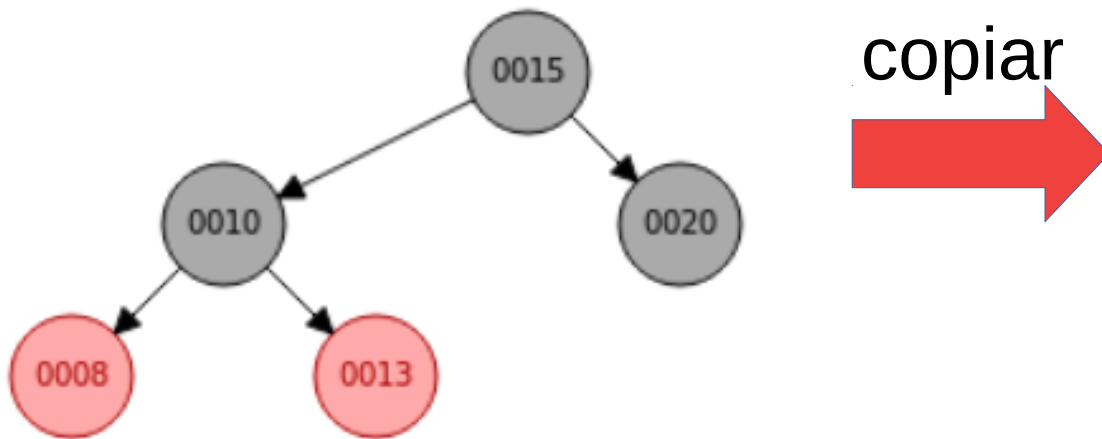
Remoção

- Situação 2
 - Copiar o maior valor da subárvore a esquerda para o nó que será removido.



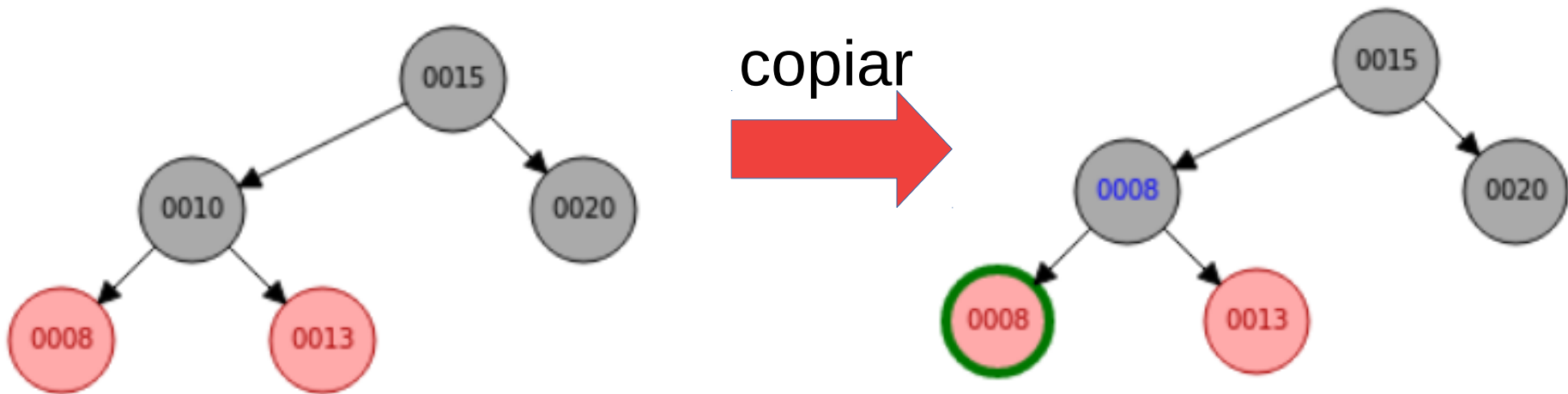
Remoção

- Situação 2
 - Copiar o maior valor da subárvore a esquerda para o nó que será removido.



Remoção

- Situação 2
 - Copiar o maior valor da subárvore a esquerda para o nó que será removido.



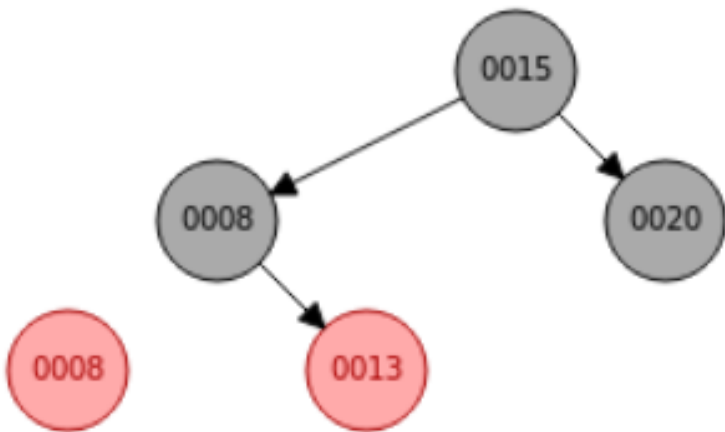
Remoção

Remoção

- Situação 2
 - Remover o nó que foi copiado.

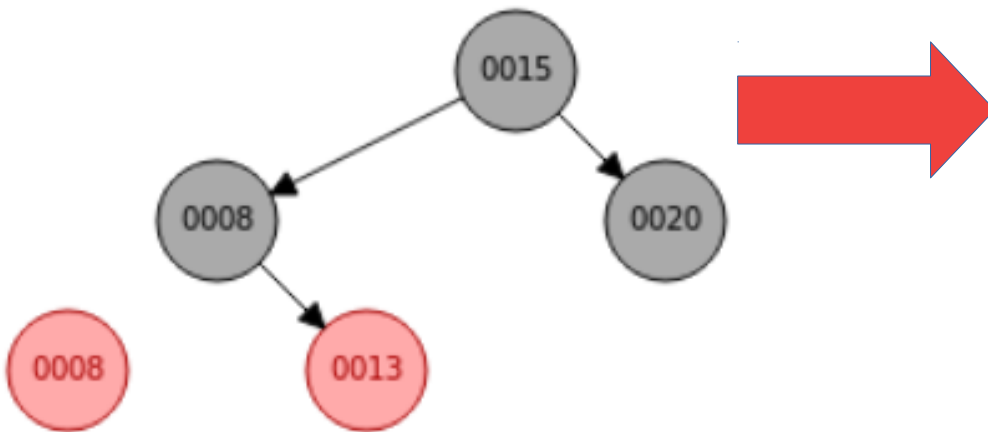
Remoção

- Situação 2
 - Remover o nó que foi copiado.



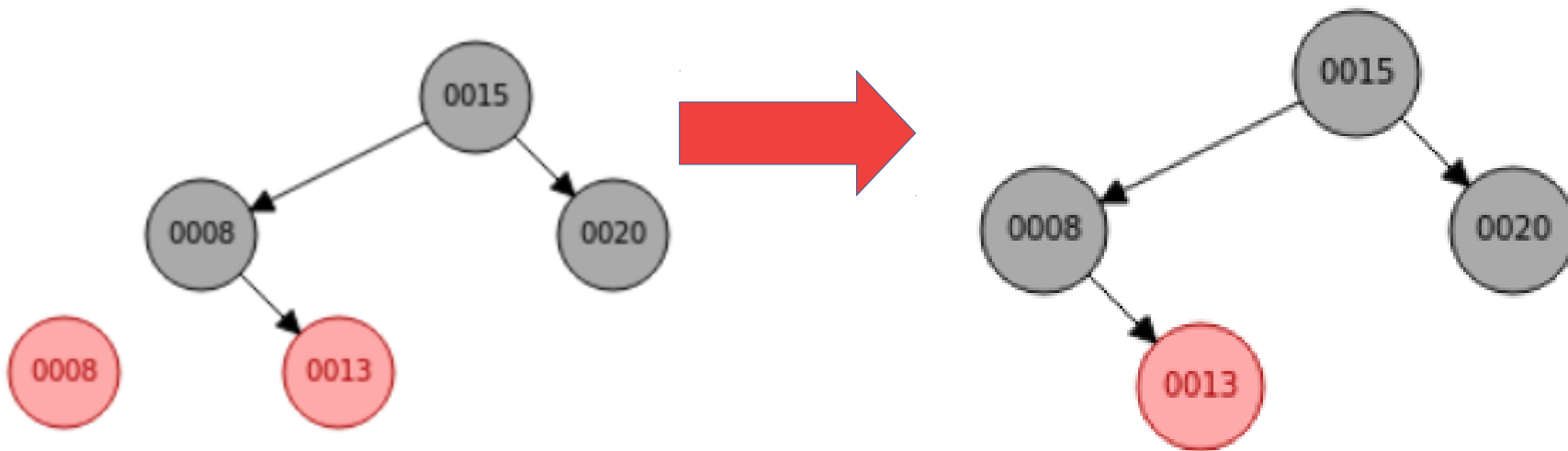
Remoção

- Situação 2
 - Remover o nó que foi copiado.



Remoção

- Situação 2
 - Remover o nó que foi copiado.



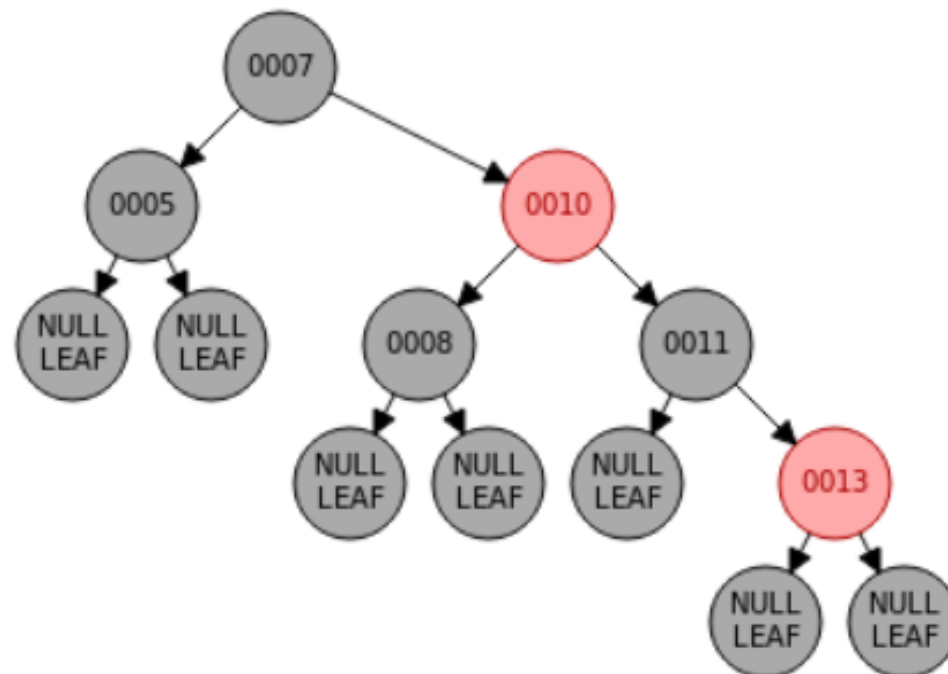
Remoção

Remoção

- Situação 3

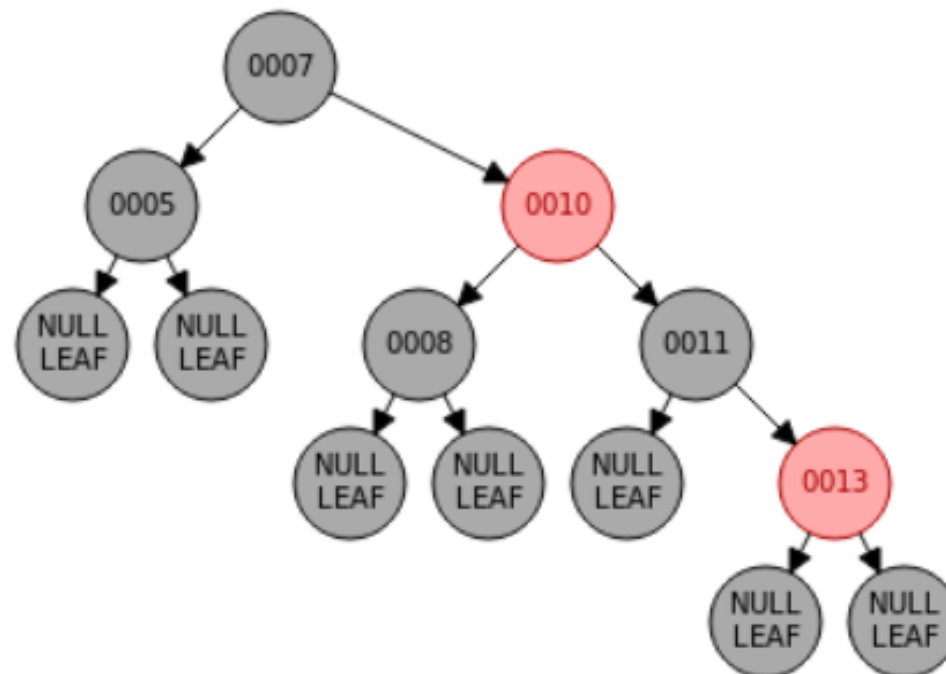
Remoção

- Situação 3



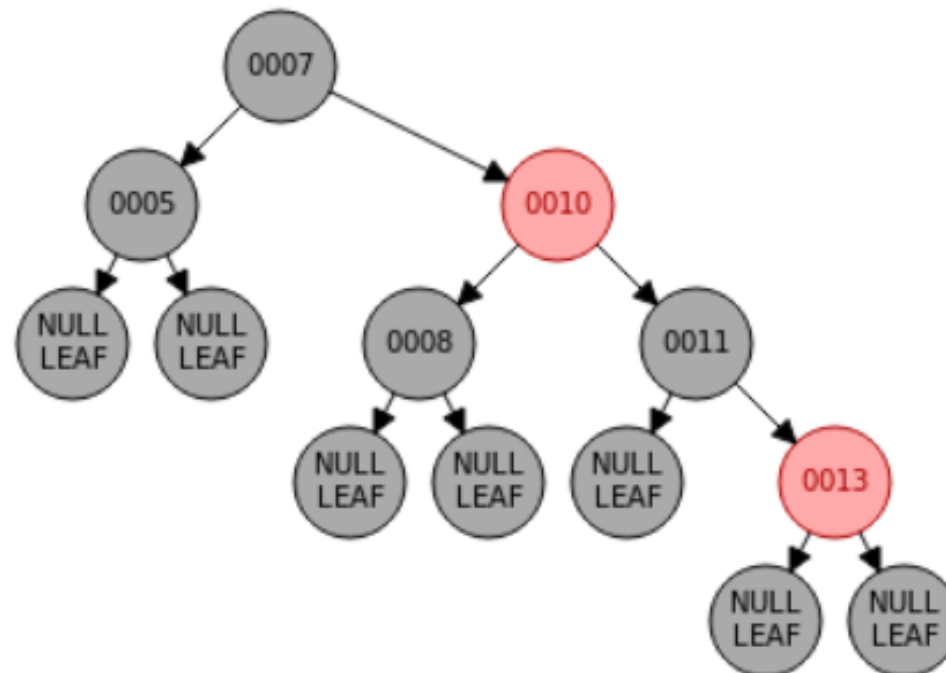
Remoção

- Situação 3
 - Exemplo: remover o nó 10.



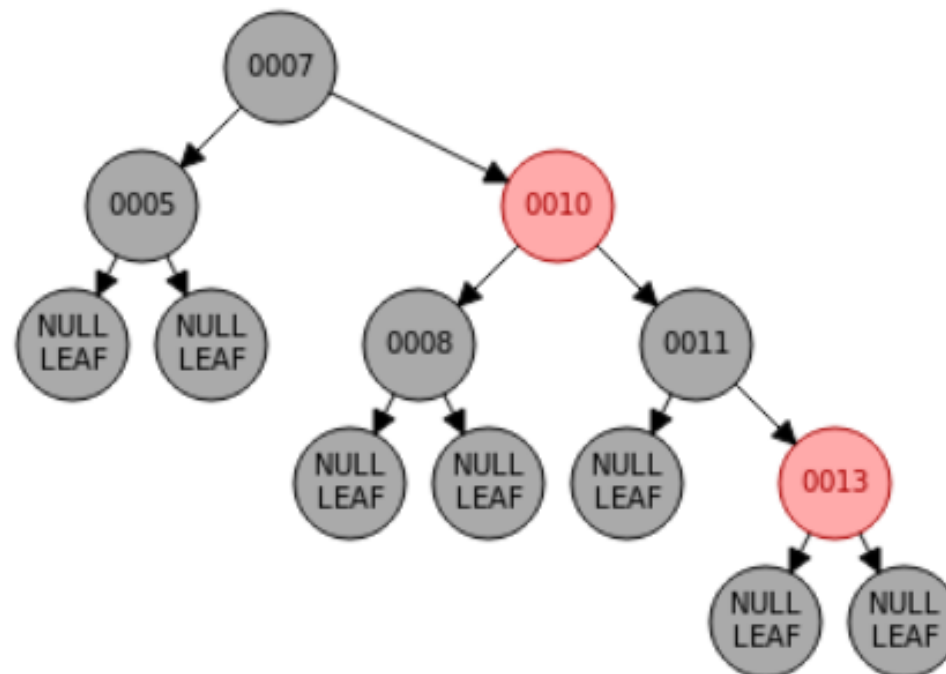
Remoção

- Situação 3
 - Exemplo: remover o nó 10.
 - O nó removido é rubro.



Remoção

- Situação 3
 - Exemplo: remover o nó 10.
 - O nó removido é rubro.
 - O sucessor do nó removido é negro.



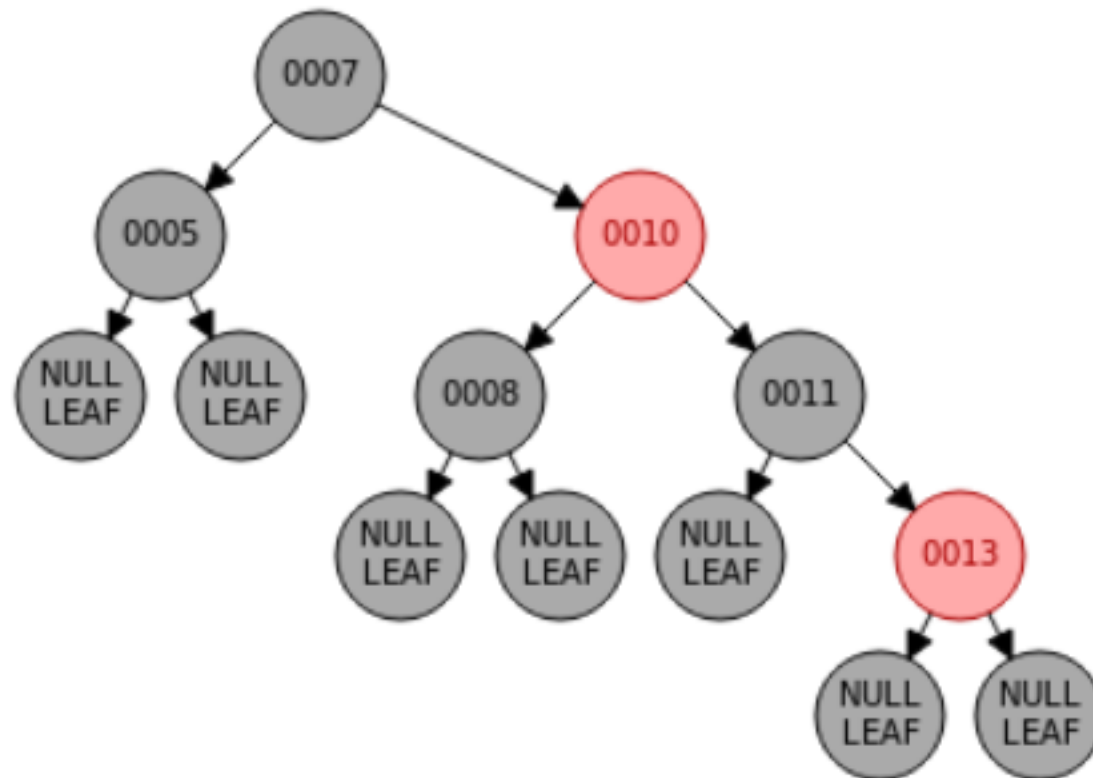
Remoção

Remoção

- Situação 3 (remover 10)

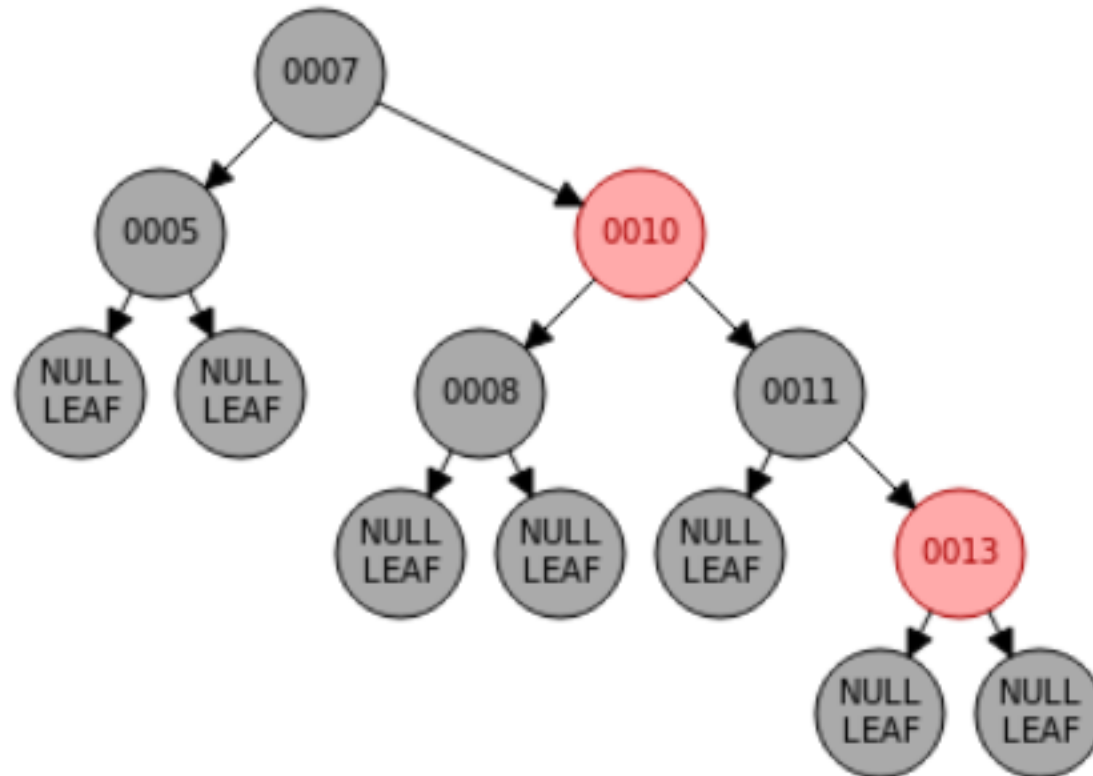
Remoção

- Situação 3 (remover 10)



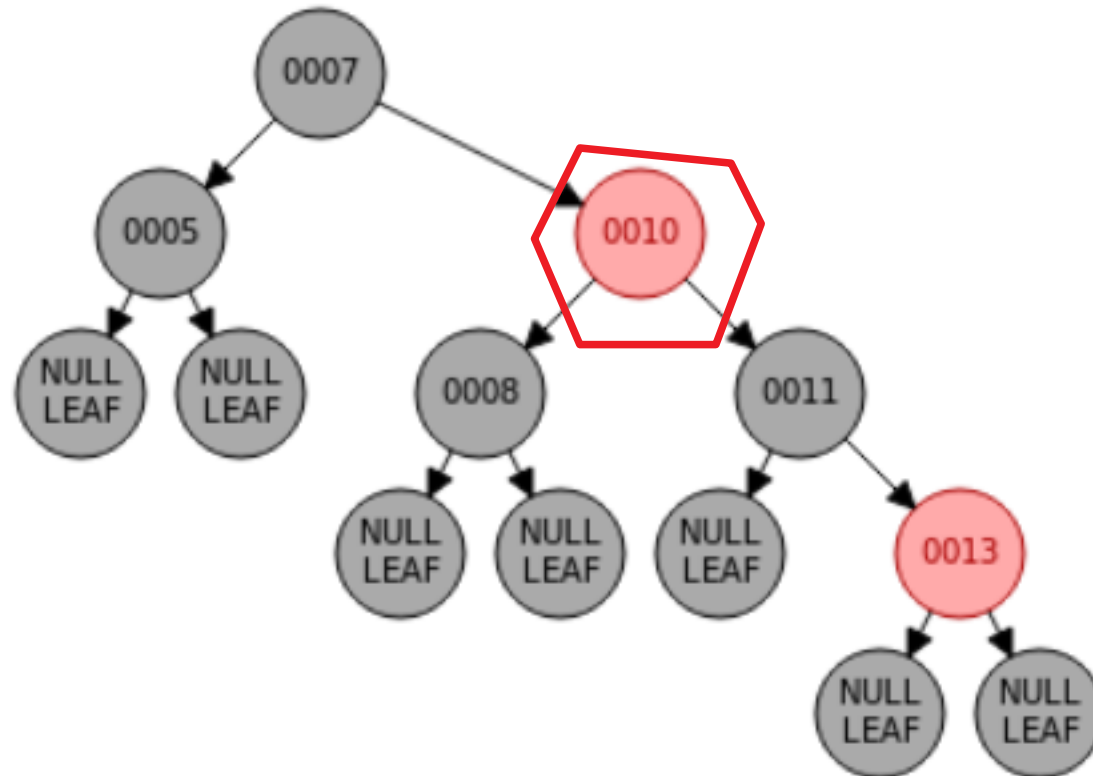
Remoção

- Situação 3 (remover 10)
 - Localizar o elemento (10).



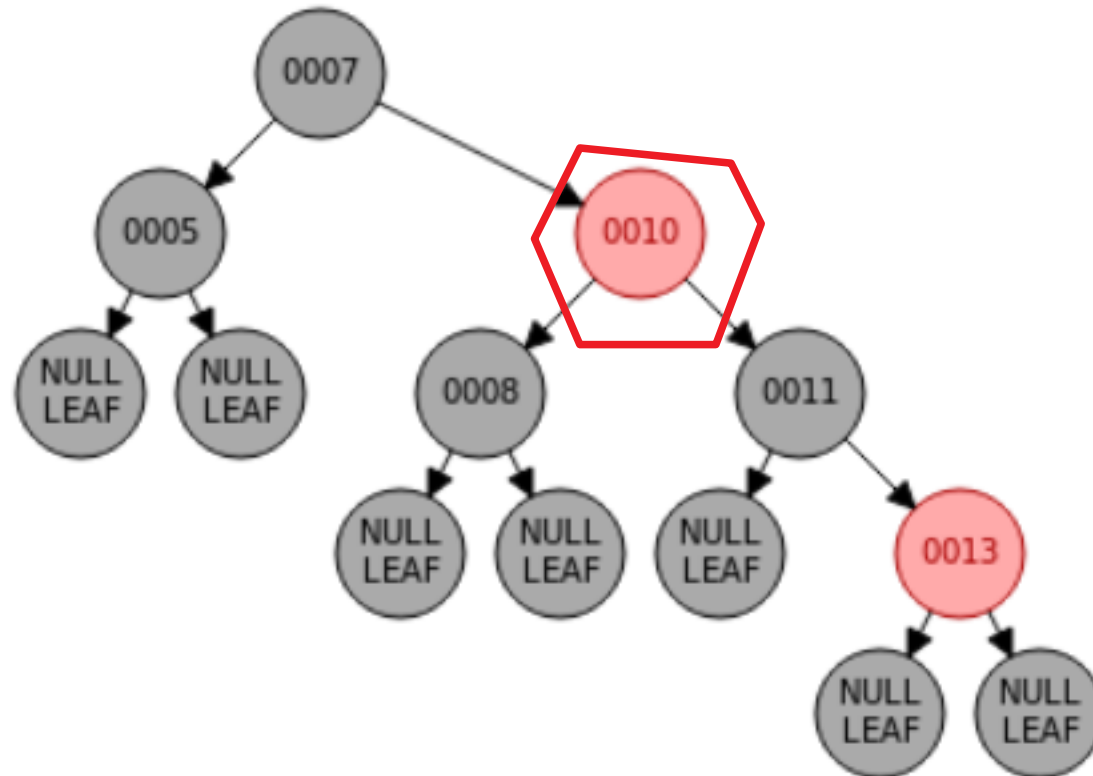
Remoção

- Situação 3 (remover 10)
 - Localizar o elemento (10).



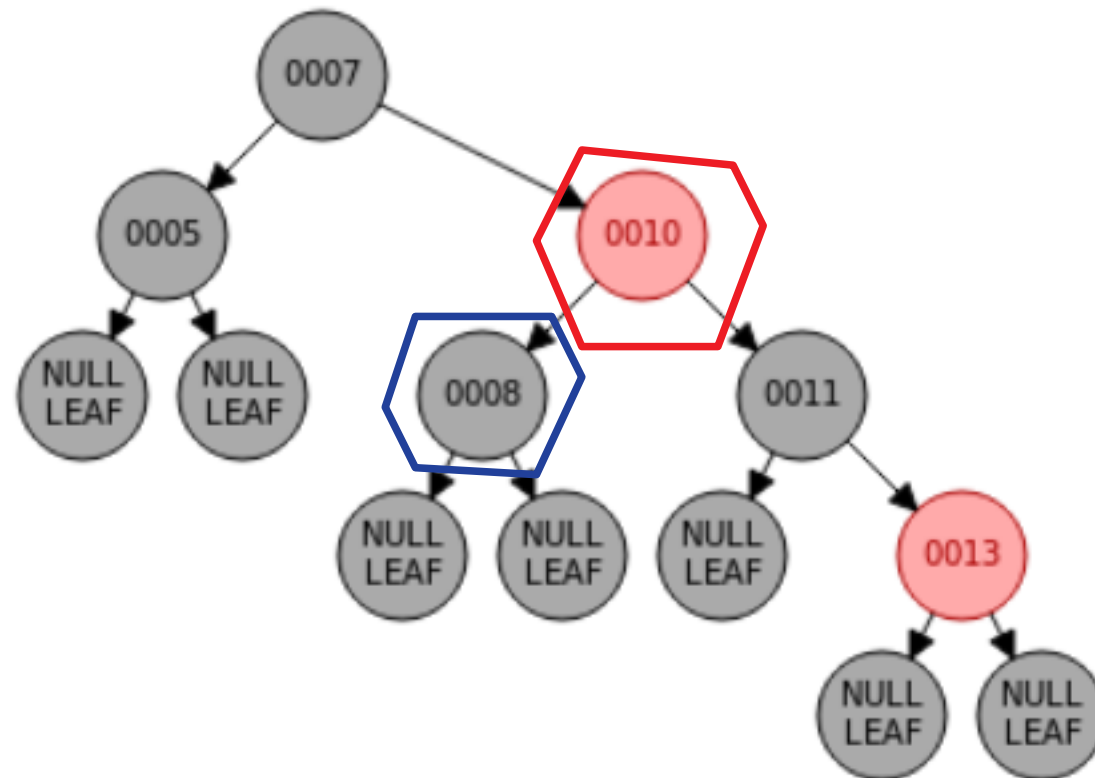
Remoção

- Situação 3 (remover 10)
 - Localizar o elemento (10).
 - Achar o maior na subárvore a esquerda.



Remoção

- Situação 3 (remover 10)
 - Localizar o elemento (10).
 - Achar o maior na subárvore a esquerda.



Remoção

Remoção

- Situação 3

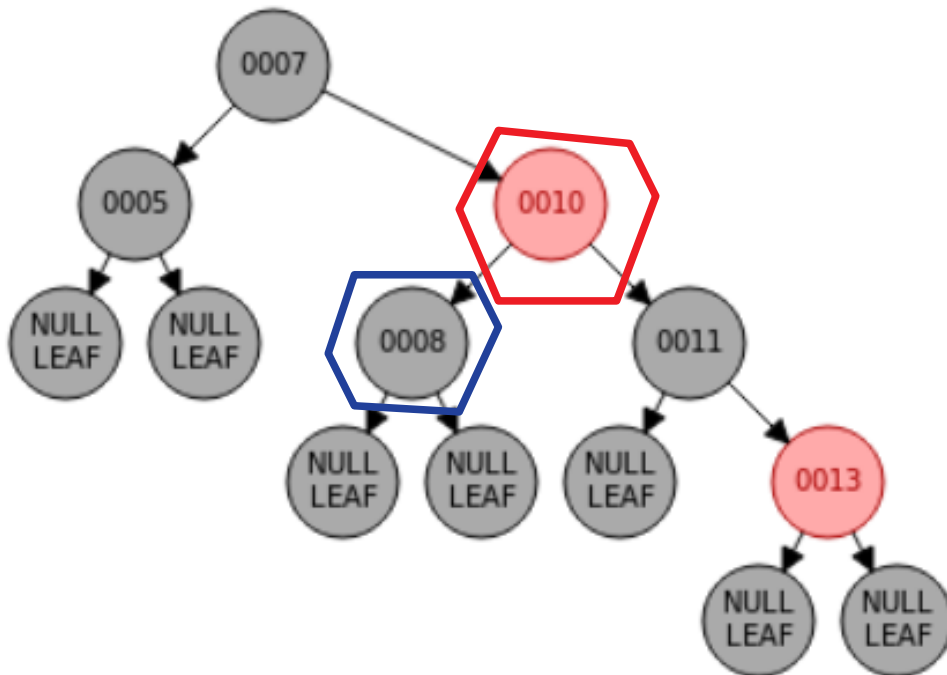
Remoção

- Situação 3
 - Copiar o maior valor da subárvore a esquerda para no nó que será removido.

Remoção

- Situação 3

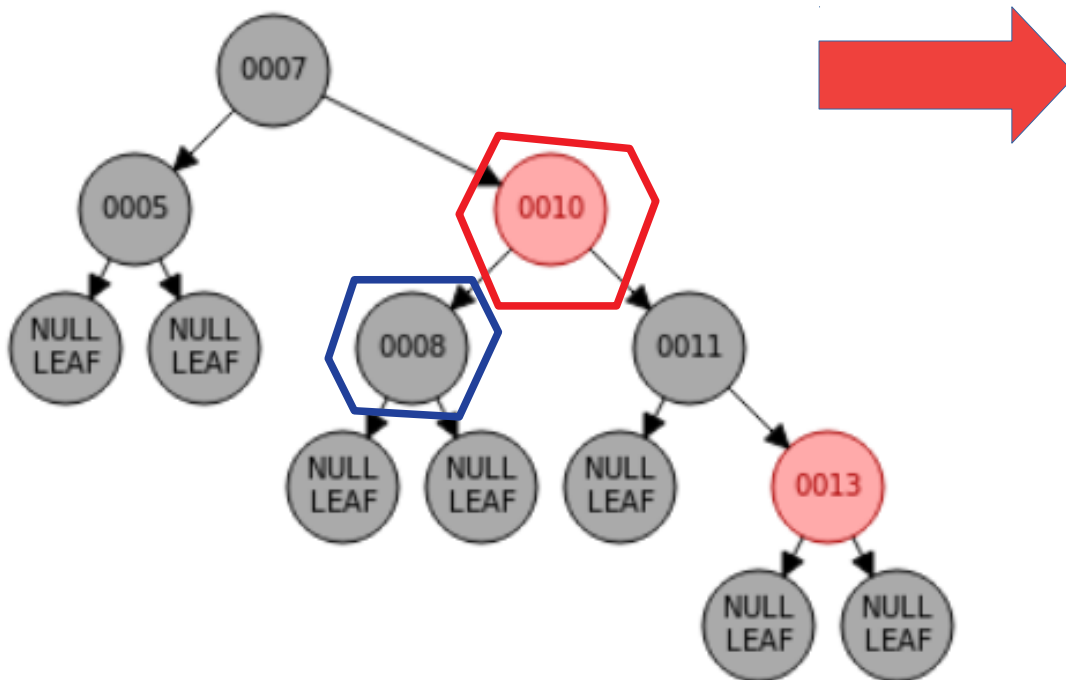
- Copiar o maior valor da subárvore a esquerda para no nó que será removido.



Remoção

- Situação 3

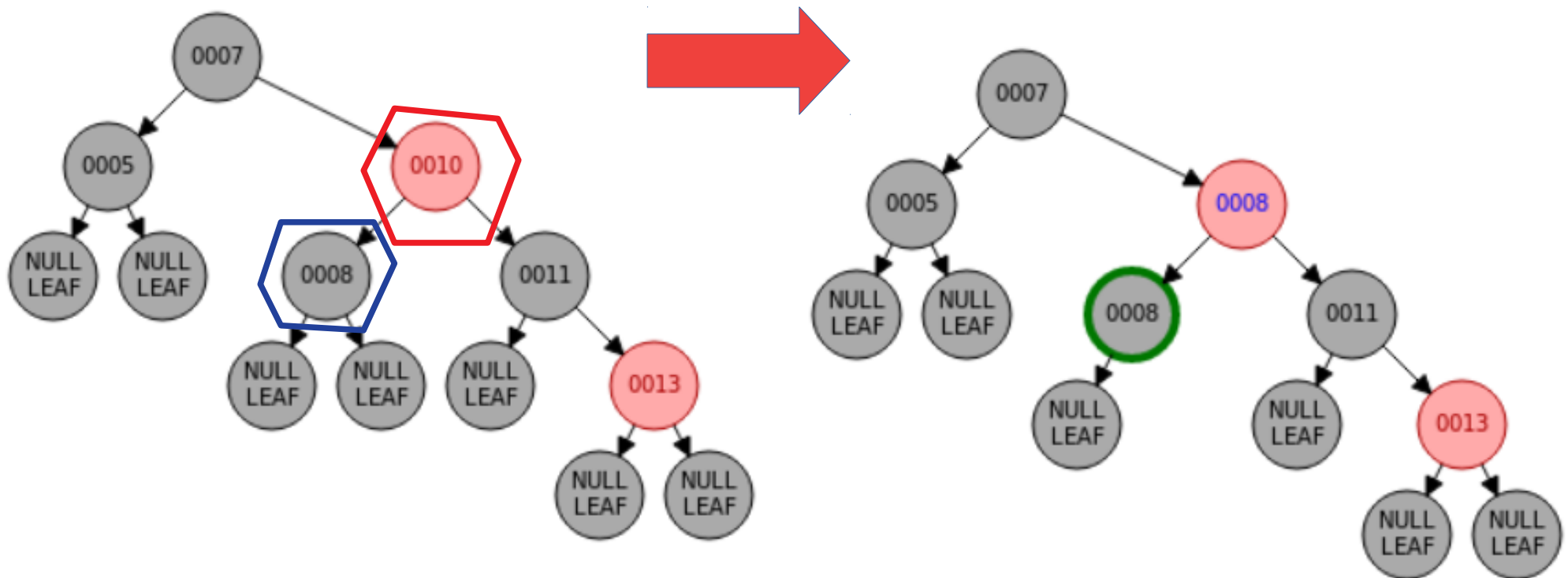
- Copiar o maior valor da subárvore a esquerda para no nó que será removido.



Remoção

- Situação 3

- Copiar o maior valor da subárvore a esquerda para no nó que será removido.



Remoção

Remoção

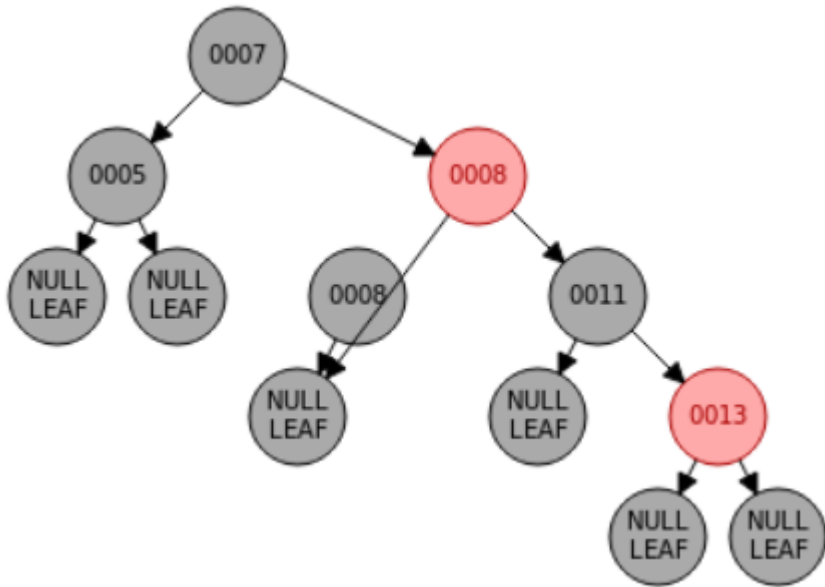
- Situação 3

Remoção

- Situação 3
 - Remover o nó copiado.

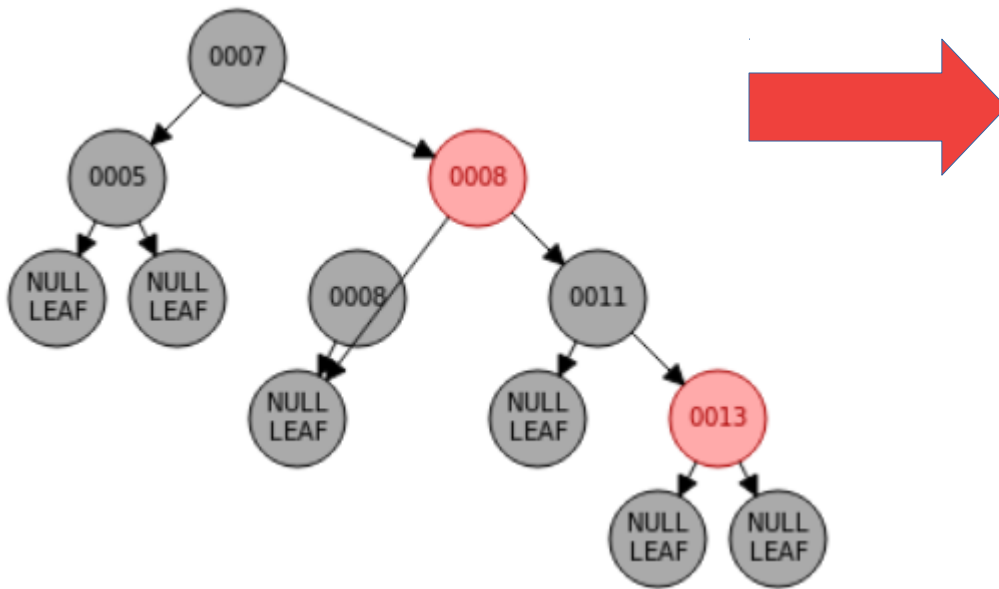
Remoção

- Situação 3
 - Remover o nó copiado.



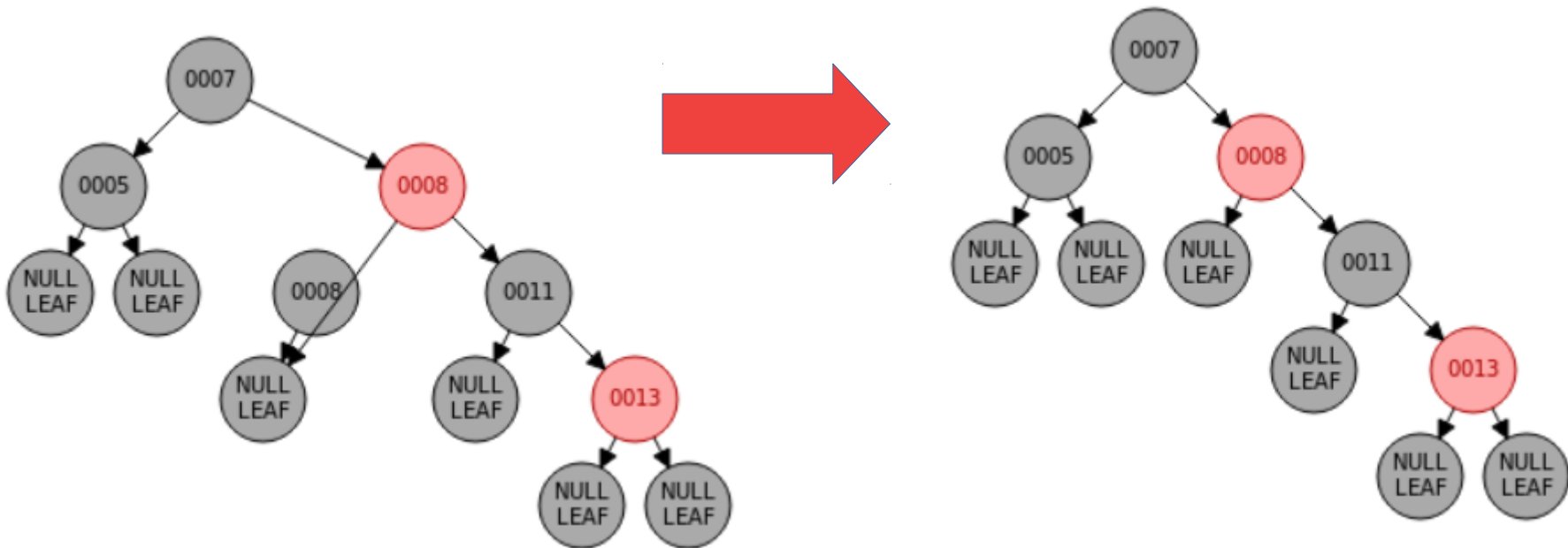
Remoção

- Situação 3
 - Remover o nó copiado.



Remoção

- Situação 3
 - Remover o nó copiado.



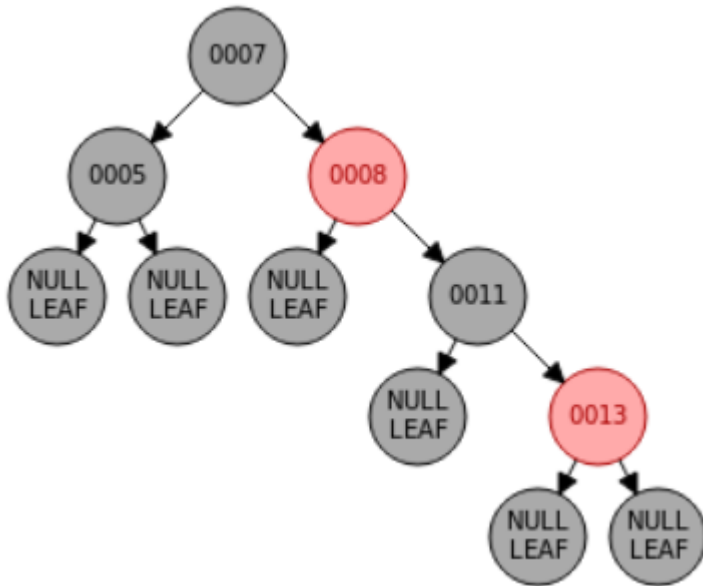
Remoção

Remoção

- Situação 3
 - Rotacionar

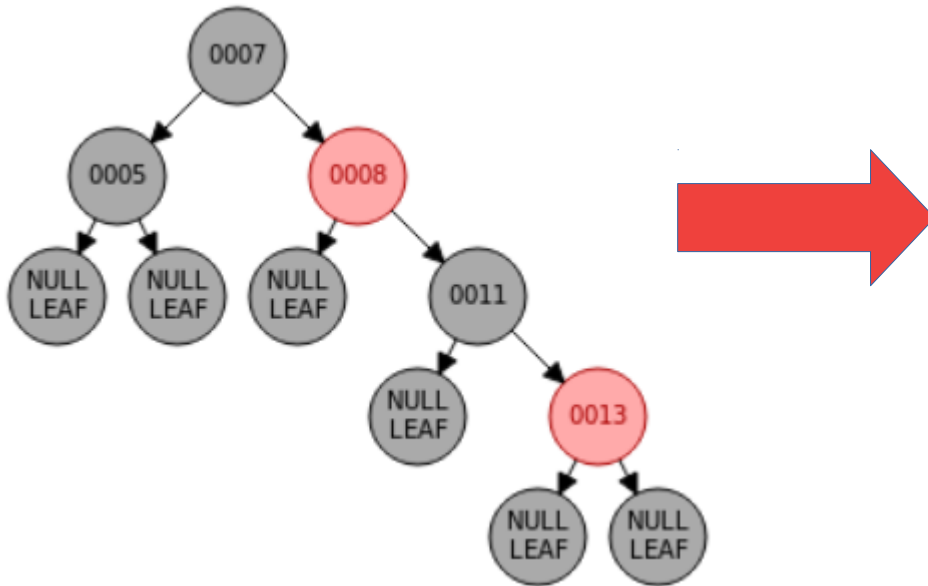
Remoção

- Situação 3
 - Rotacionar



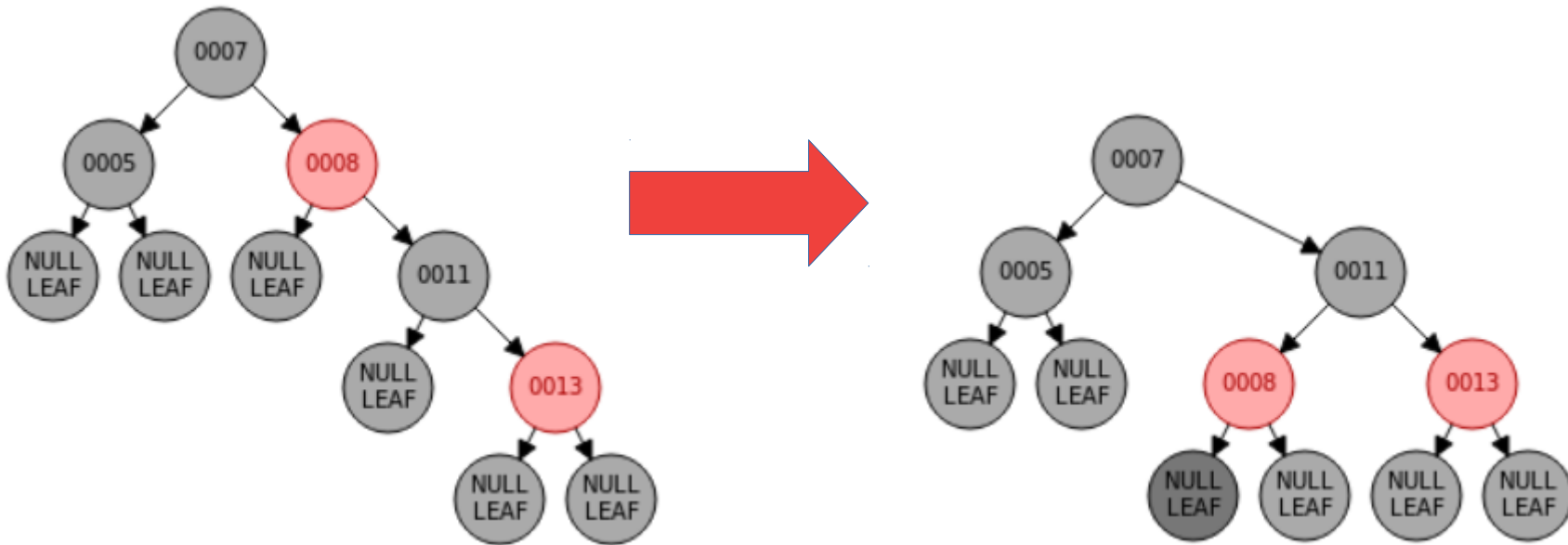
Remoção

- Situação 3
 - Rotacionar



Remoção

- Situação 3
 - Rotacionar



Exercícios

- Mostre as árvores rubro-negras resultantes da inserção das seguintes chaves: 41, 38, 31, 12, 18 e 8 em uma árvore inicialmente vazia. Em seguida, mostre as árvores rubro-negras que resultam da eliminação sucessiva das chaves 8, 12, 18, 31, 38 e 41.
- Qual é a altura mínima de uma árvore rubro-negra que contém N nós?