

Algoritmos e Estruturas de Dados II

Grafos

Prof. Tiago Eugenio de Melo

tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

- As palavras com a fonte `Courier` indicam as palavras-reservadas da linguagem de programação.

Referências

- **Projetos de Algoritmos – com implementações em Pascal e C.** Nivio Ziviani. 2ª edição. Thomson, 2005.
- Material de aula do professor Marco Antônio Moreira de Carvalho. Acessado em 30/09/2019: <http://www.decom.ufop.br/marco/ensino/bcc204/material-das-aulas>

CONTEXTO

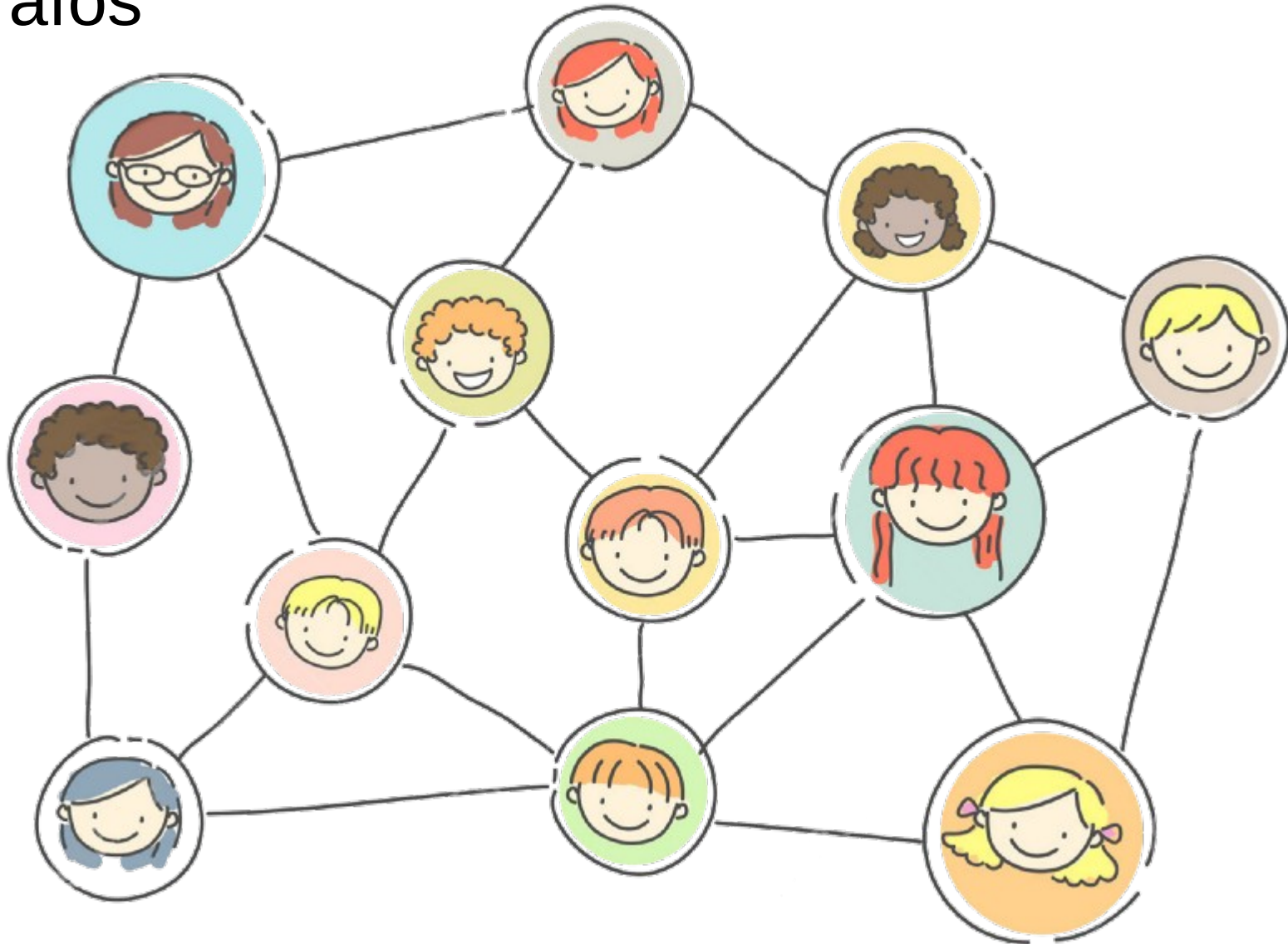
Contexto



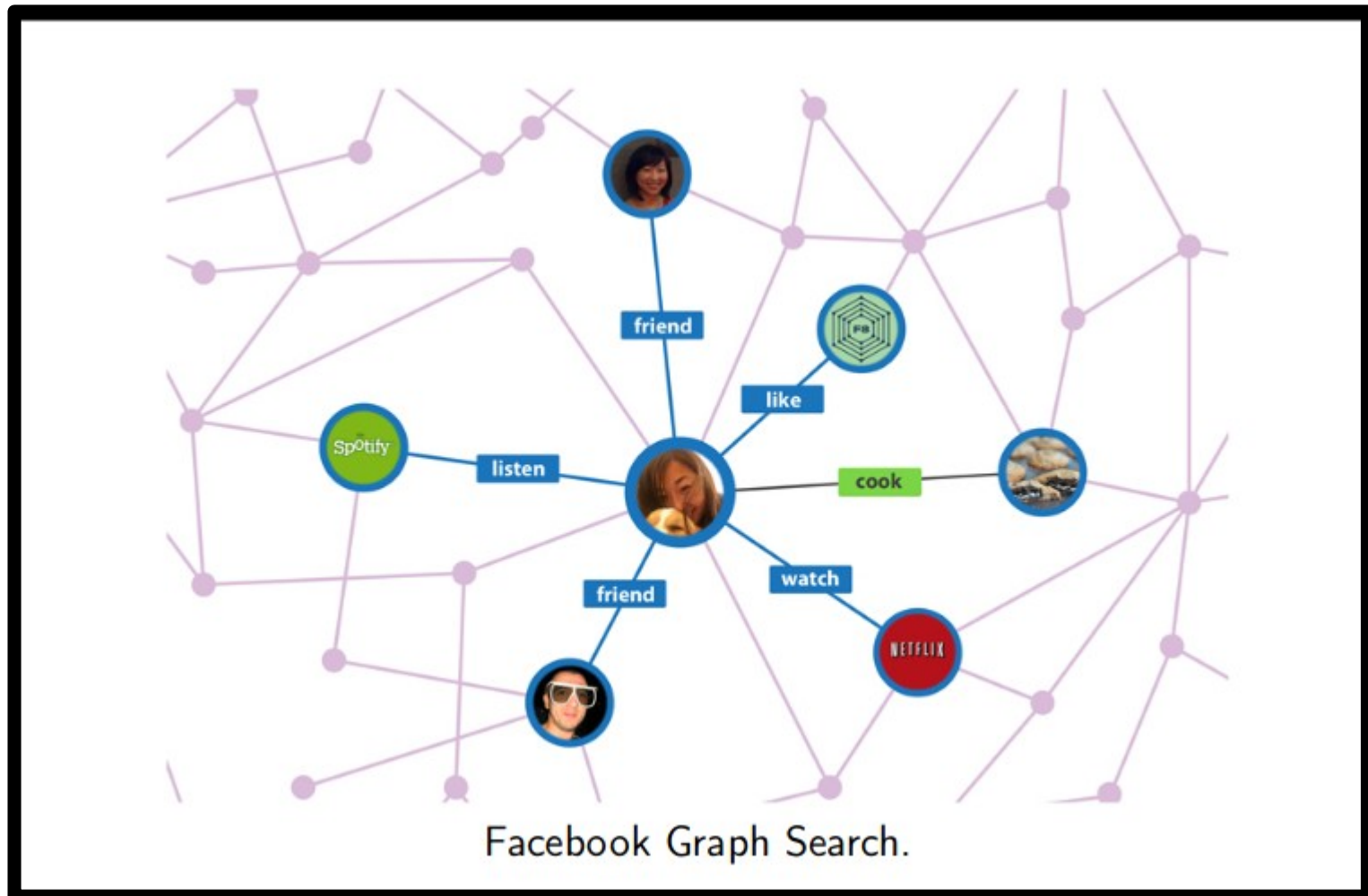
- Facebook em 2019: aproximadamente 2.3 bilhões de usuários ativos.

Contexto

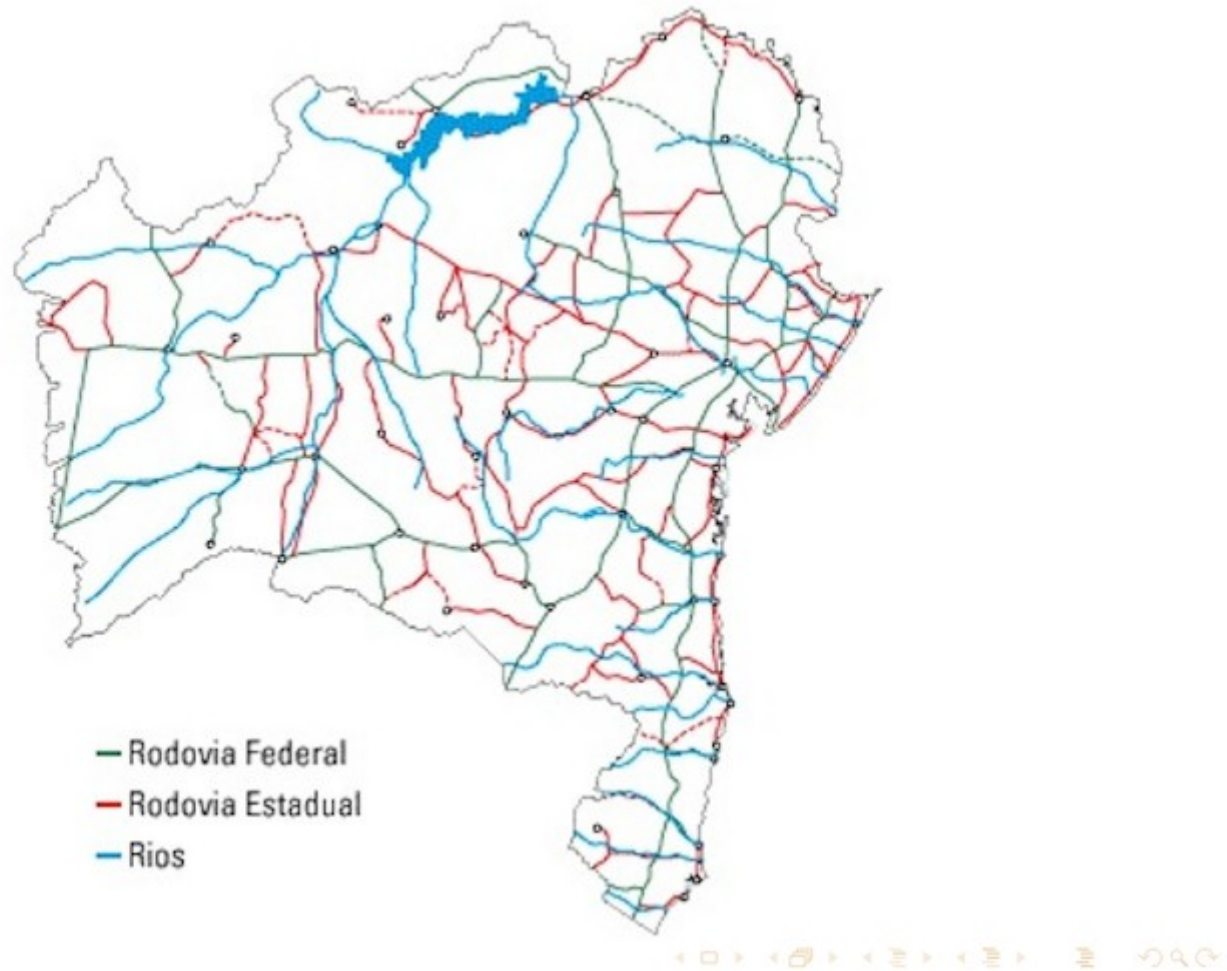
- Grafos



Contexto



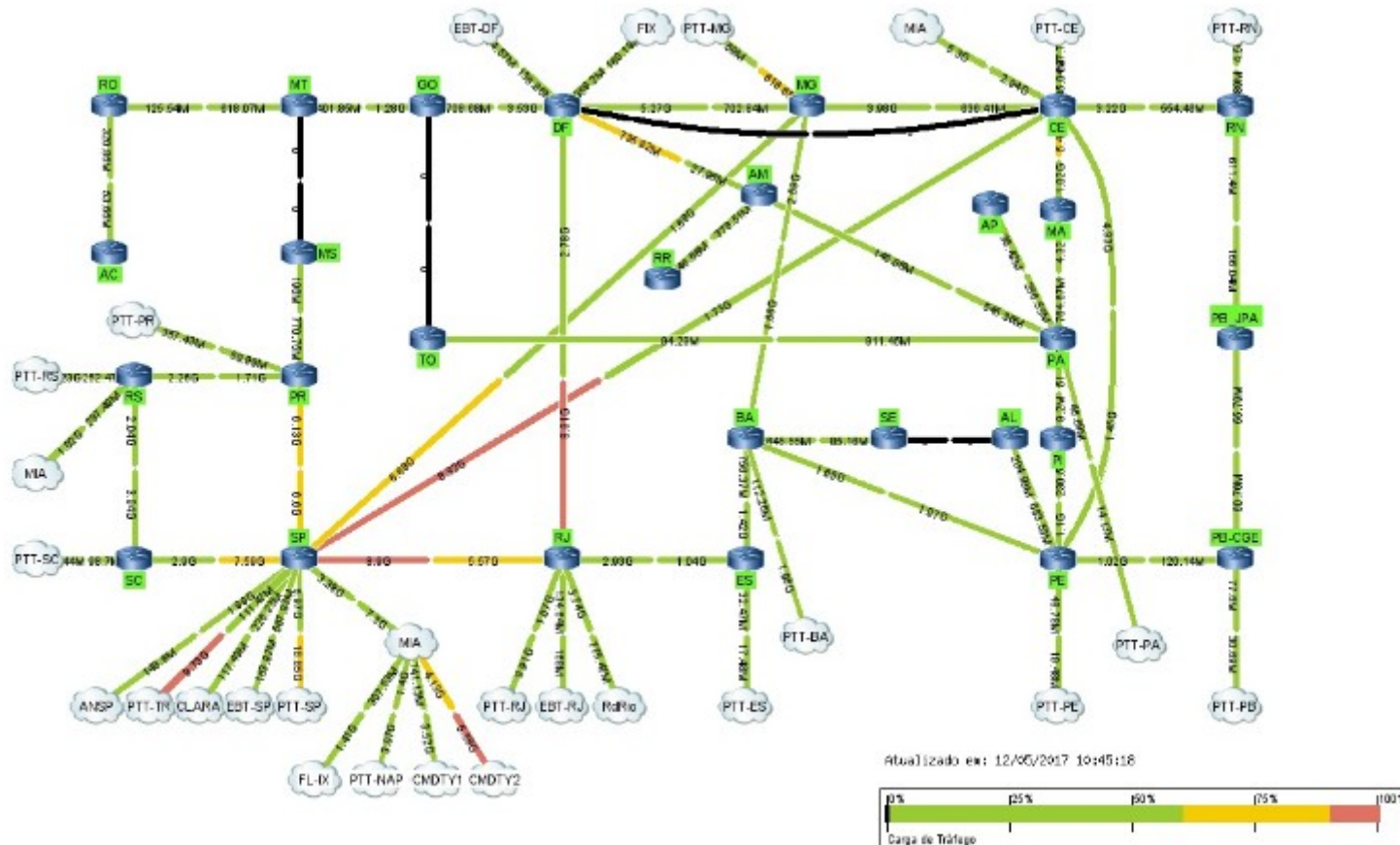
Contexto



Contexto



Contexto

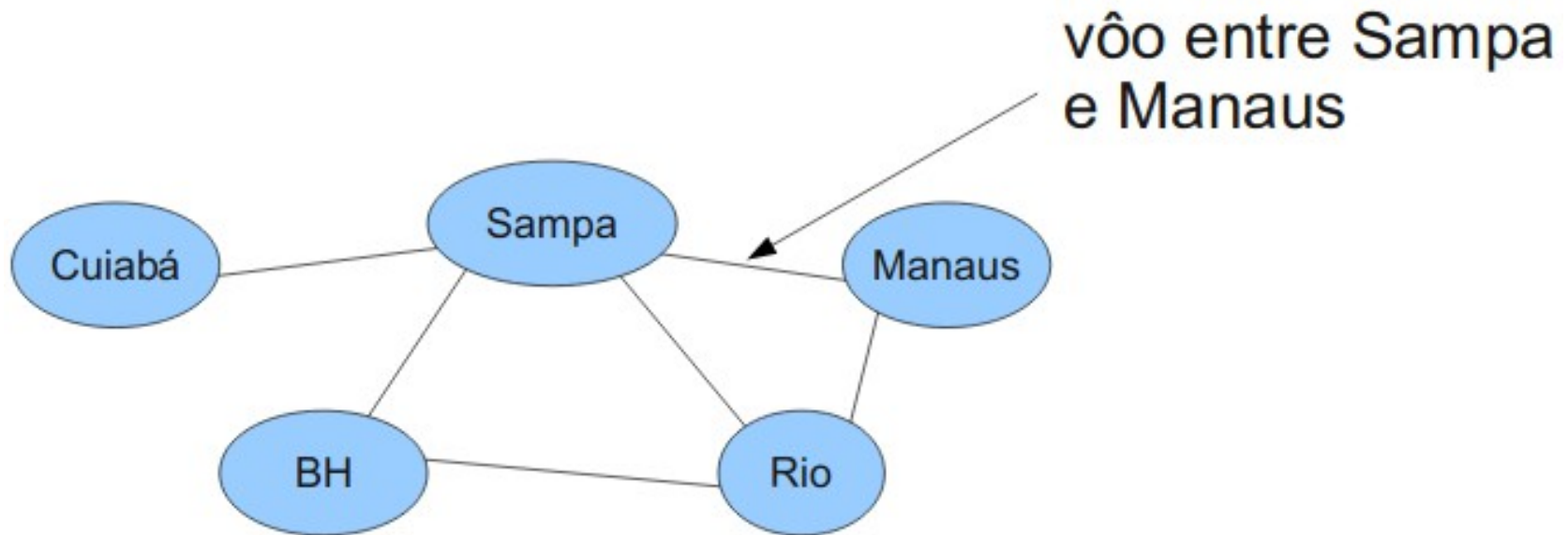


<https://memoria.rnp.br/ceo/trafego/panorama.php>



Contexto

- Transporte aéreo



Contexto

- Transporte aéreo



Contexto

- Transporte aéreo



Contexto

- Transporte aéreo



Existem vôos para todas as cidades?



Contexto

- Transporte aéreo



Existem vôos para todas as cidades?
Qual menor caminho entre duas



Contexto

- Transporte aéreo



Existem vôos para todas as cidades?
Qual menor caminho entre duas cidades?



Contexto

- Transporte aéreo



Existem vôos para todas as cidades?

Qual menor caminho entre duas cidades?

Qual é o trajeto com o menor número



Contexto

- Transporte aéreo



Existem vôos para todas as cidades?

Qual menor caminho entre duas cidades?

Qual é o trajeto com o menor número de paradas (conexões)?



HISTÓRICO

Histórico



Edsger Dijkstra

- “A Ciência da Computação tem tanto a ver com o computador como a Astronomia com o telescópio, a Biologia com o microscópio, ou a Química com os tubos de ensaio. A Ciência não estuda ferramentas, mas o que fazemos e o que descobrimos com elas.”

Histórico

Histórico

- Um grafo é uma estrutura de abstração muito útil na representação e solução de problemas computacionais, por representarem relações de interdependência entre elementos de um conjunto.

Histórico

- Um grafo é uma estrutura de abstração muito útil na representação e solução de problemas computacionais, por representarem relações de interdependência entre elementos de um conjunto.
- O primeiro registro de uso data de 1736, por Euler.

Histórico

- Um grafo é uma estrutura de abstração muito útil na representação e solução de problemas computacionais, por representarem relações de interdependência entre elementos de um conjunto.
- O primeiro registro de uso data de 1736, por Euler.
- O problema era encontrar um caminho circular por Königsberg (atual Kaliningrado) usando cada uma das pontes sobre o rio Pregel (ou Pregolya, Pregola) exatamente uma vez.

Histórico

Histórico

- 1736: Euler e as Pontes de Königsberg

Histórico

- 1736: Euler e as Pontes de Königsberg



Histórico

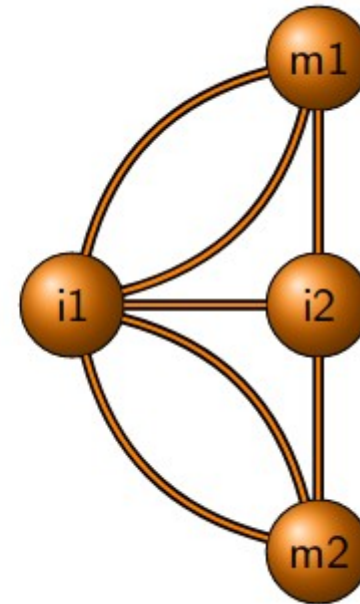
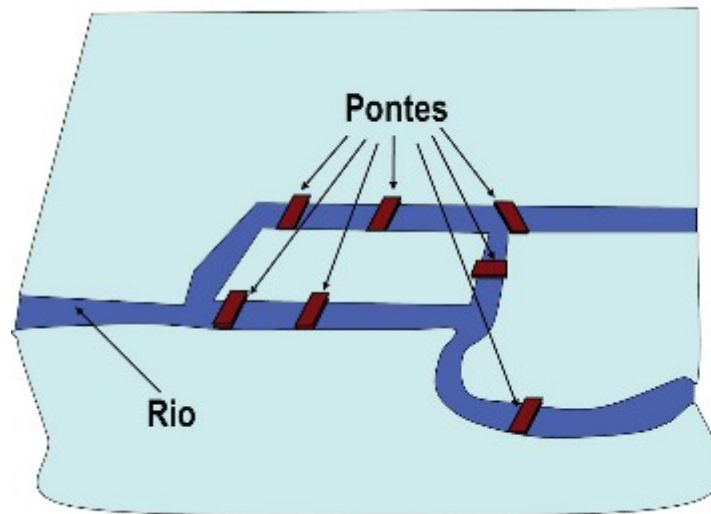
- 1736: Euler e as Pontes de Königsberg



- Partindo de uma das margens, pode-se encontrar um percurso que passe somente **uma vez em cada ponte** e retorne ao ponto de partida?

Histórico

- Pontes de Königsberg - O Grafo



INTRODUÇÃO

Introdução

Introdução

- Definição formal:

Introdução

- Definição formal:
 - Grafo $G = (V, A)$

Introdução

- Definição formal:
 - Grafo $G = (V, A)$
 - Conjunto V com n vértices (também chamado de nós): $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Introdução

- Definição formal:
 - Grafo $G = (V, A)$
 - Conjunto V com n vértices (também chamado de nós): $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.
 - Conjunto A com m arestas ou arcos $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

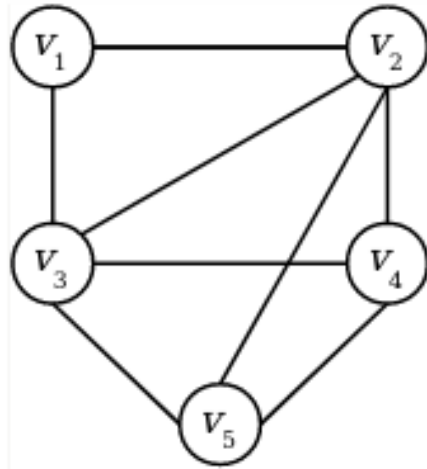
Introdução

Introdução

- Grafo Não Direcionado (GND)

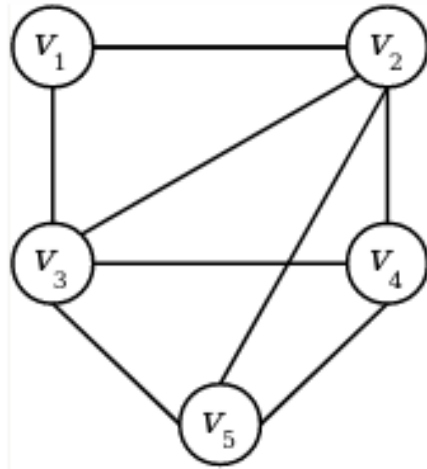
Introdução

- Grafo Não Direcionado (GND)



Introdução

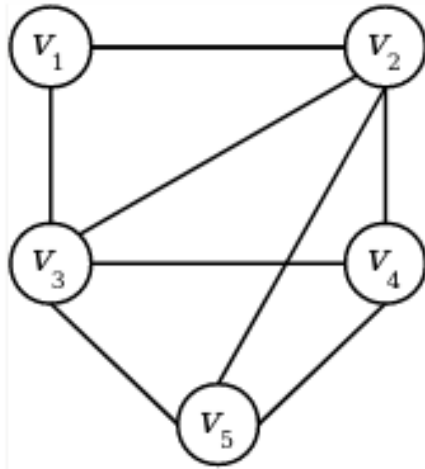
- Grafo Não Direcionado (GND)



- Ligações através de arestas.

Introdução

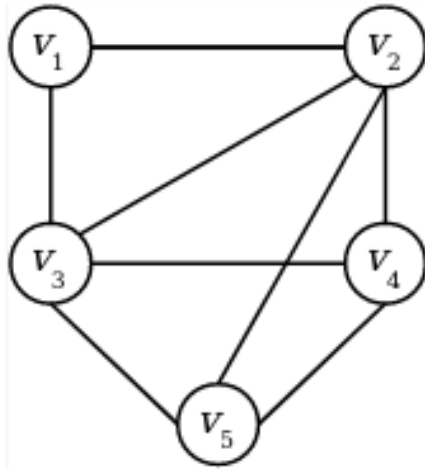
- Grafo Não Direcionado (GND)



- Ligações através de arestas.
- Se o vértice a está ligado com o vértice b , a recíproca é verdadeira.

Introdução

- Grafo Não Direcionado (GND)



- Ligações através de arestas.
- Se o vértice a está ligado com o vértice b , a recíproca é verdadeira.
- Cada aresta é representada por um conjunto $\{v_1, v_2\}$, indicando os dois vértices envolvidos.

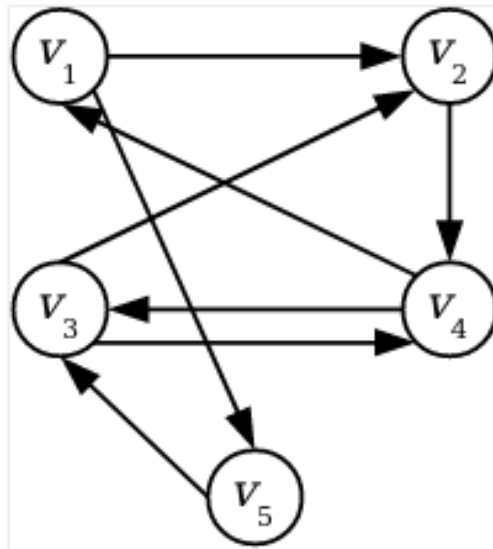
Introdução

Introdução

- Grafo Direcionado (GD)

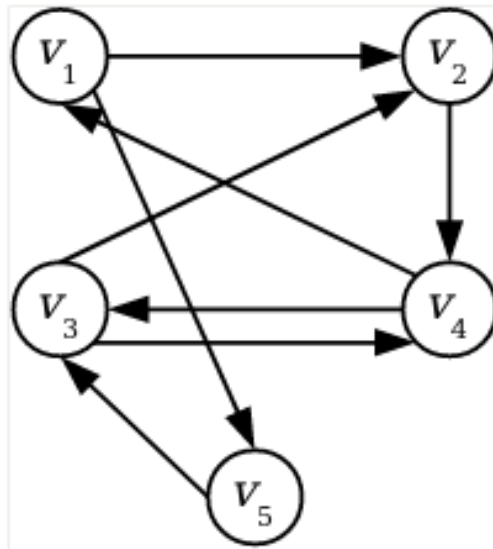
Introdução

- Grafo Direcionado (GD)



Introdução

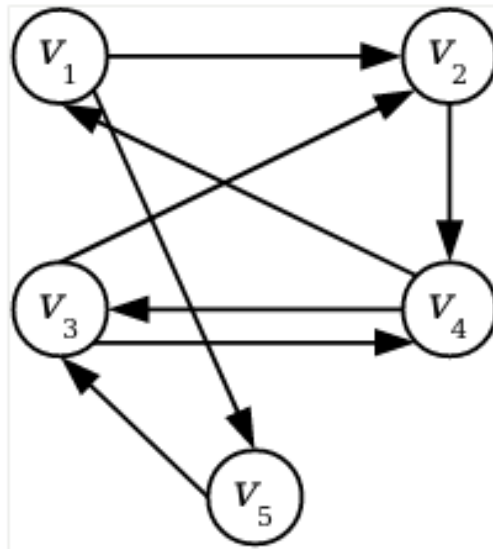
- Grafo Direcionado (GD)



- Ligações representadas pelos arcos.

Introdução

- Grafo Direcionado (GD)



- Ligações representadas pelos arcos.
- Cada arco é representado por um par ordenado (v_1 , v_2), indicando os dois vértices envolvidos.

Introdução

1. Peter Bearman, James Moody, and Katherine Stovel. Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks. *American Journal of Sociology*, 110(1):44- 99, 2004.

Introdução

- Exemplos: Redes Sociais Analógicas¹

1. Peter Bearman, James Moody, and Katherine Stovel. Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks. *American Journal of Sociology*, 110(1):44- 99, 2004.

Introdução

- Exemplos: Redes Sociais Analógicas¹
 - *Chains of Affection*

1. Peter Bearman, James Moody, and Katherine Stovel. Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks. *American Journal of Sociology*, 110(1):44- 99, 2004.

Introdução

- Exemplos: Redes Sociais Analógicas¹
 - *Chains of Affection*
 - Pesquisa com 800 estudantes de uma escola secundária americana.

1. Peter Bearman, James Moody, and Katherine Stovel. Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks. *American Journal of Sociology*, 110(1):44- 99, 2004.

Introdução

- Exemplos: Redes Sociais Analógicas¹
 - *Chains of Affection*
 - Pesquisa com 800 estudantes de uma escola secundária americana.
 - A estrutura das relações românticas e sexuais da Jefferson High School.

1. Peter Bearman, James Moody, and Katherine Stovel. Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks. *American Journal of Sociology*, 110(1):44- 99, 2004.

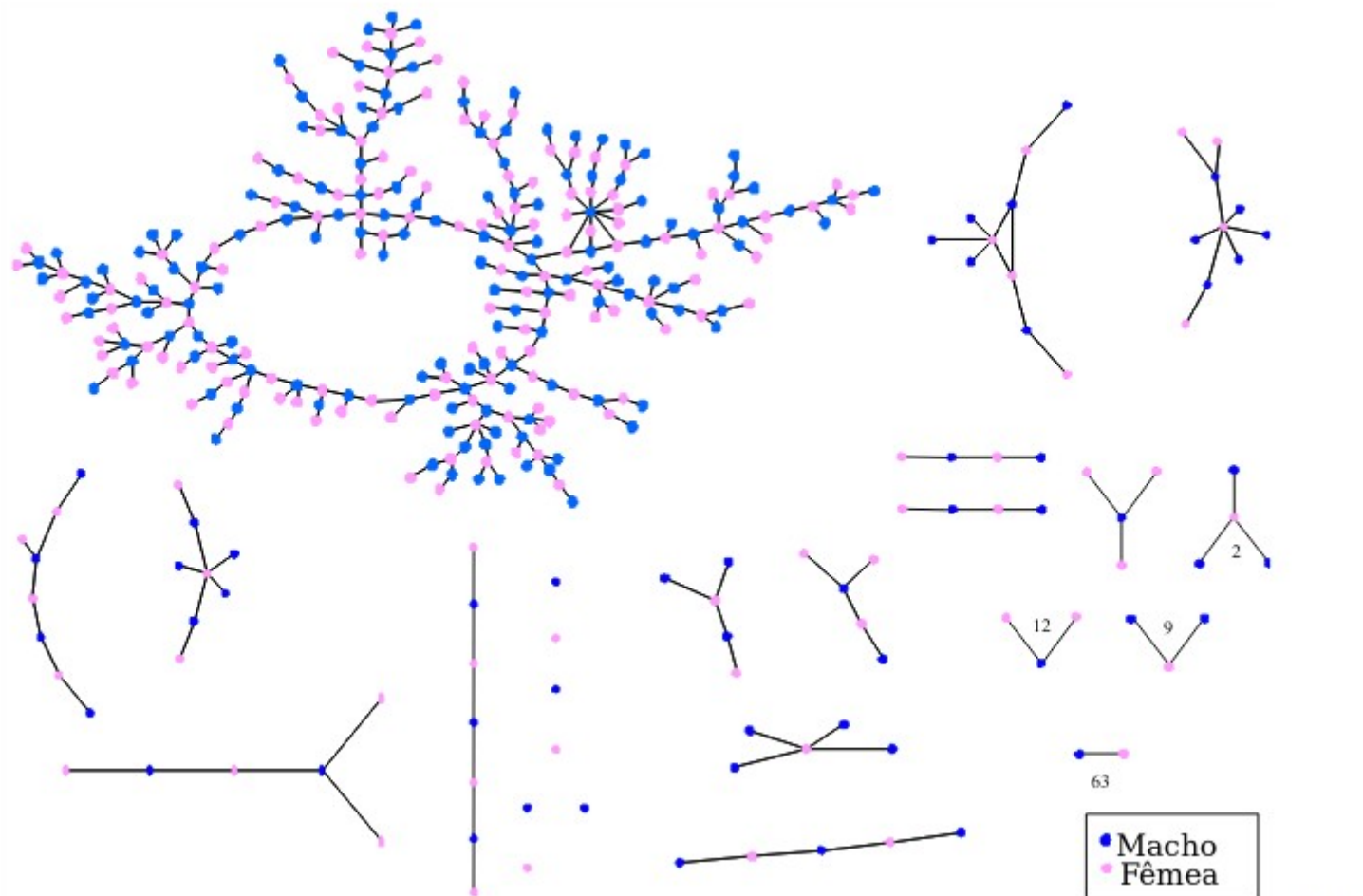
Introdução

Introdução

- Exemplos: Redes Sociais Analógicas

Introdução

- Exemplos: Redes Sociais Analógicas



TERMINOLOGIA

Terminologia

Terminologia

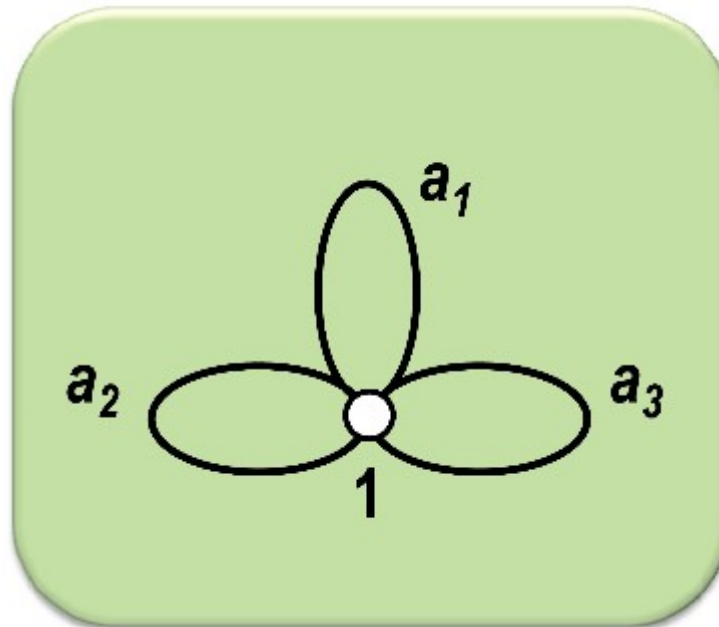
- Laço

Terminologia

- Laço
 - Uma aresta cujas duas extremidades incidem em um mesmo vértice.

Terminologia

- Laço
 - Uma aresta cujas duas extremidades incidem em um mesmo vértice.



Terminologia

Terminologia

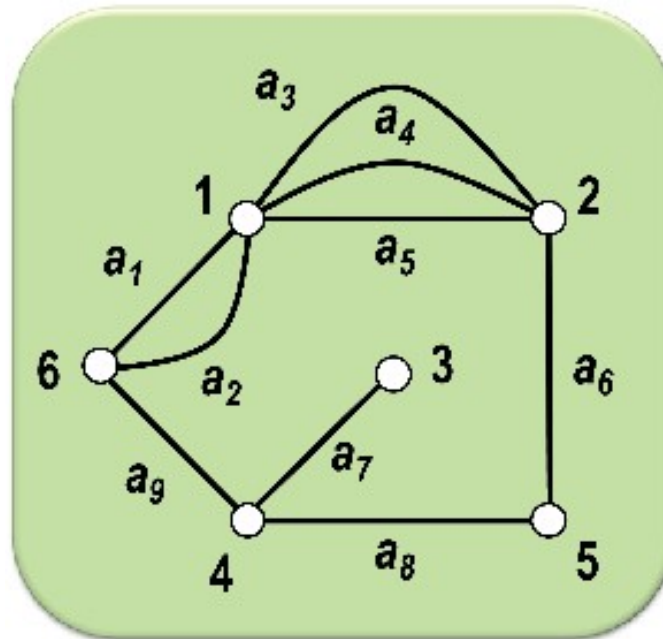
- Arestas paralelas

Terminologia

- Arestas paralelas
 - Mais de uma aresta associada ao mesmo par de vértices.

Terminologia

- Arestas paralelas
 - Mais de uma aresta associada ao mesmo par de vértices.



Terminologia

Terminologia

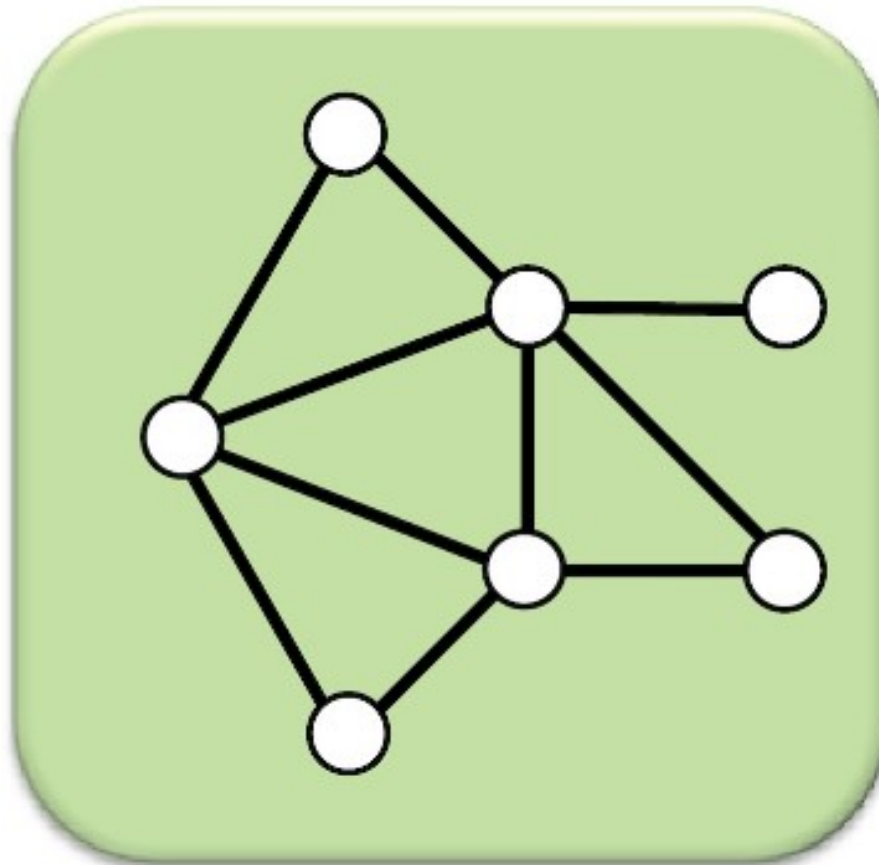
- Grafos simples

Terminologia

- Grafos simples
 - Grafo que não possui laços e nem arestas paralelas.

Terminologia

- Grafos simples
 - Grafo que não possui laços e nem arestas paralelas.



Terminologia

Terminologia

- Vértices adjacentes

Terminologia

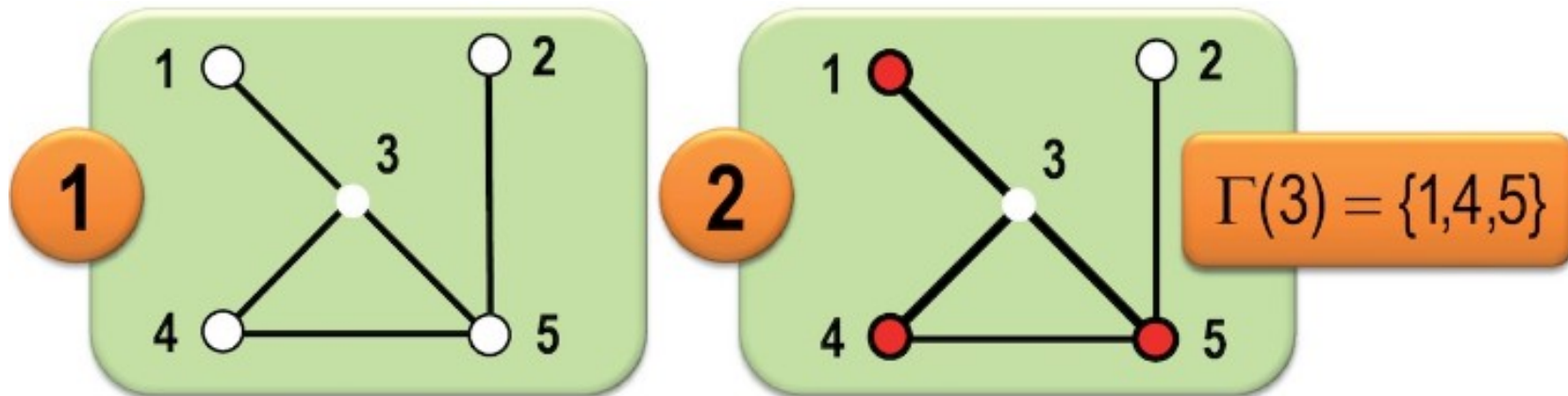
- Vértices adjacentes
 - Vértices que são os pontos finais de uma mesma aresta.

Terminologia

- Vértices adjacentes
 - Vértices que são os pontos finais de uma mesma aresta.
 - A função $\Gamma(i)$ retorna o conjunto de vértices adjacentes ao vértice i .

Terminologia

- Vértices adjacentes
 - Vértices que são os pontos finais de uma mesma aresta.
 - A função $\Gamma(i)$ retorna o conjunto de vértices adjacentes ao vértice i .



Terminologia

Terminologia

- Grau de um vértice

Terminologia

- Grau de um vértice
 - O grau $d(i)$ de um vértice i em um **grafo não direcionado** é igual ao número de arestas incidentes a i .

Terminologia

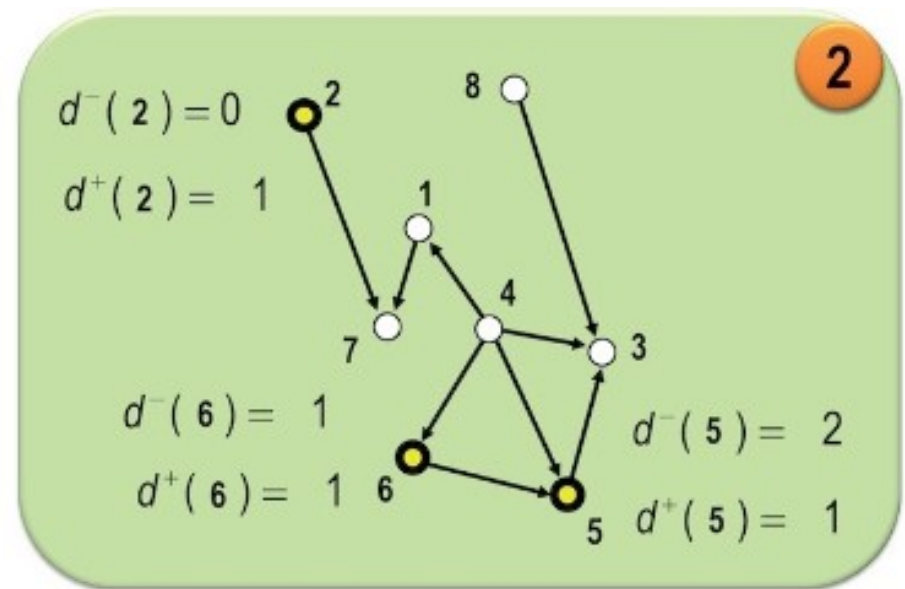
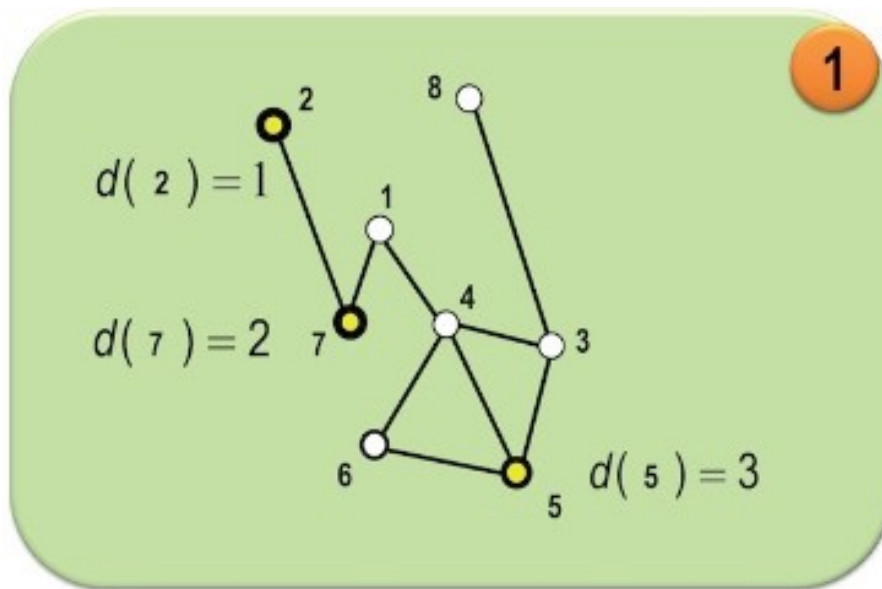
- Grau de um vértice
 - O grau $d(i)$ de um vértice i em um **grafo não direcionado** é igual ao número de arestas incidentes a i .
 - O grau de entrada $d(i)$ de um vértice i em um **grafo direcionado** é igual ao número de arestas que entram em i .

Terminologia

- Grau de um vértice
 - O grau $d(i)$ de um vértice i em um **grafo não direcionado** é igual ao número de arestas incidentes a i .
 - O grau de entrada $d(i)$ de um vértice i em um **grafo direcionado** é igual ao número de arestas que entram em i .
 - O grau de saída $d(i)$ de um vértice i em um **grafo direcionado** é igual ao número de arestas que saem de i .

Terminologia

- Grau de um vértice



Terminologia

Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

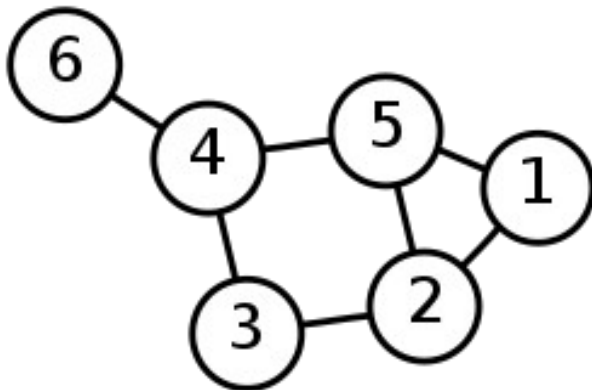
$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$

Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$

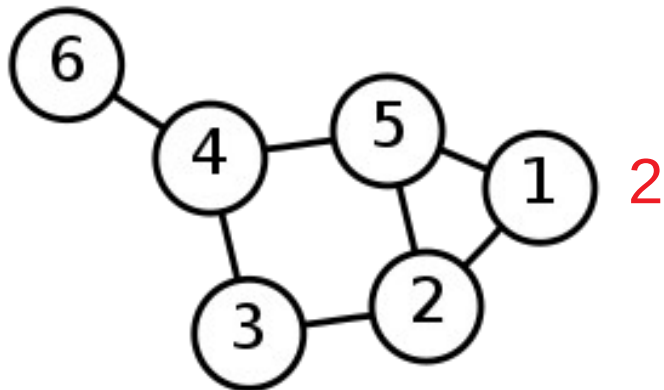


Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$

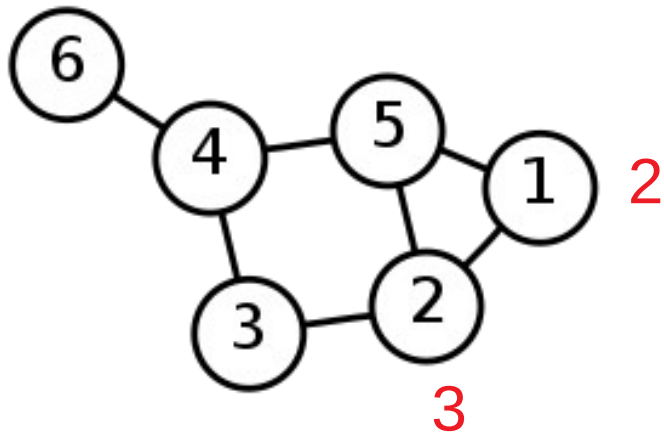


Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$

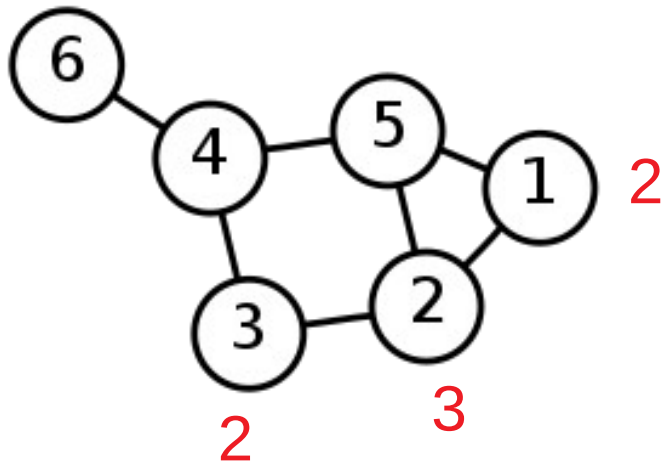


Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$

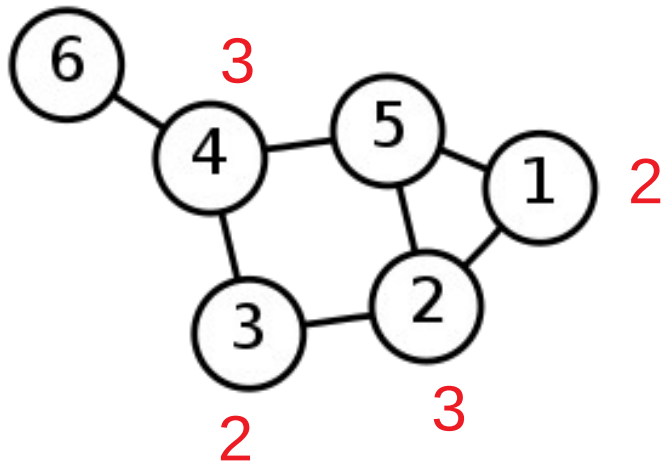


Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$

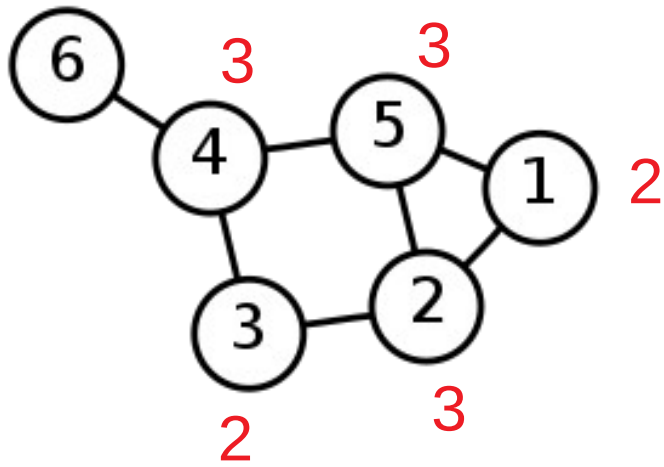


Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$

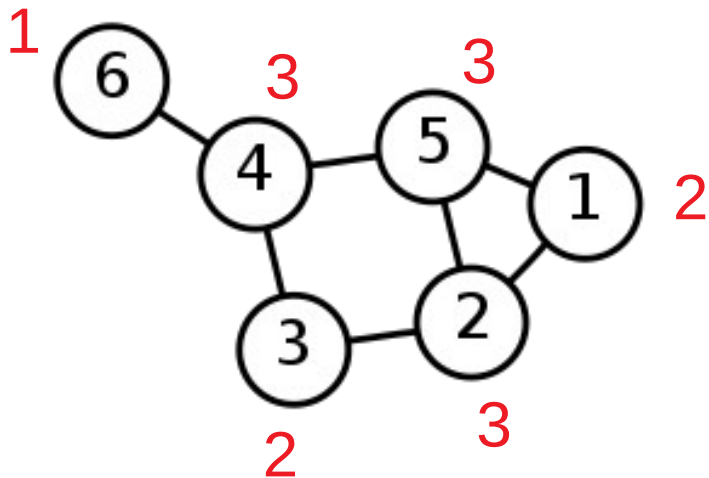


Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$

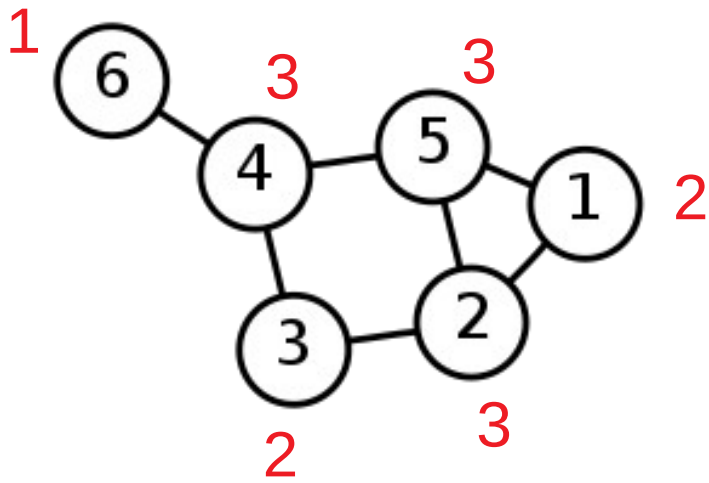


Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$



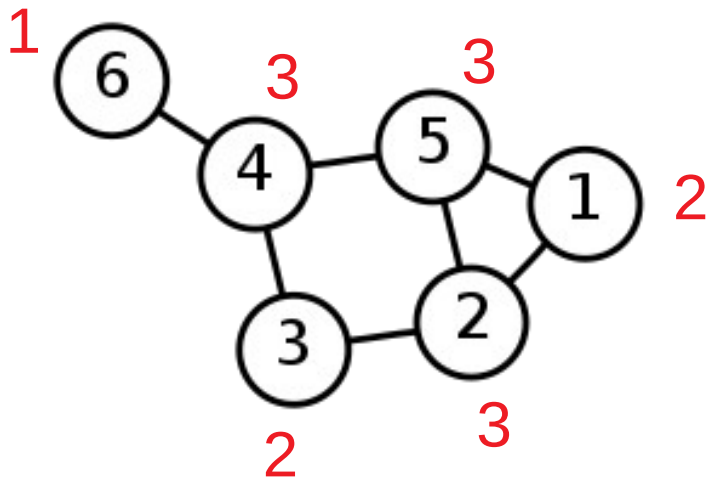
A soma será:

Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$



A soma será:

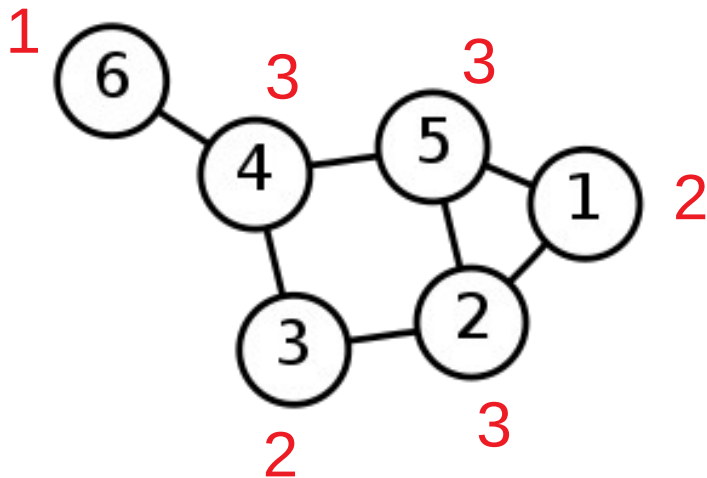
$$2 + 3 + 2 + 3 + 3 + 1 = 14$$

Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$



A soma será:

$$2 + 3 + 2 + 3 + 3 + 1 = 14$$

onde 14 é o **dobro** de 7 (arestas)

Terminologia

- Corolário:
 - O número de vértices de grau ímpar em GND é par.

Terminologia

Terminologia

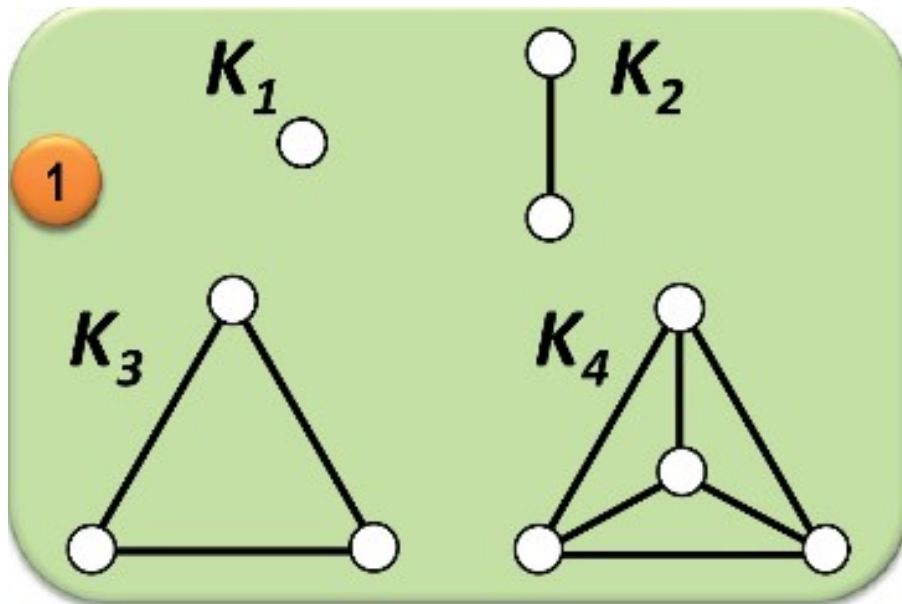
- Grafo completo

Terminologia

- Grafo completo
 - Um grafo completo com n vértices, denominado K_n , é um grafo simples contendo exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.

Terminologia

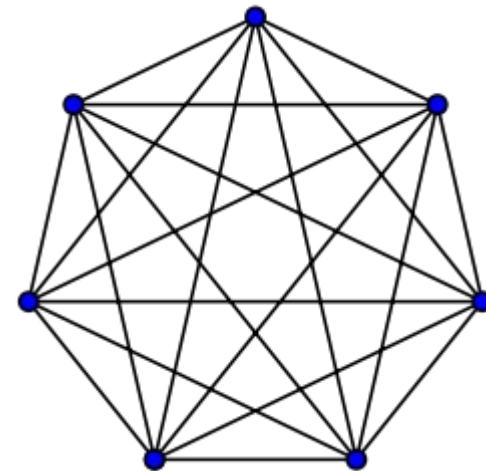
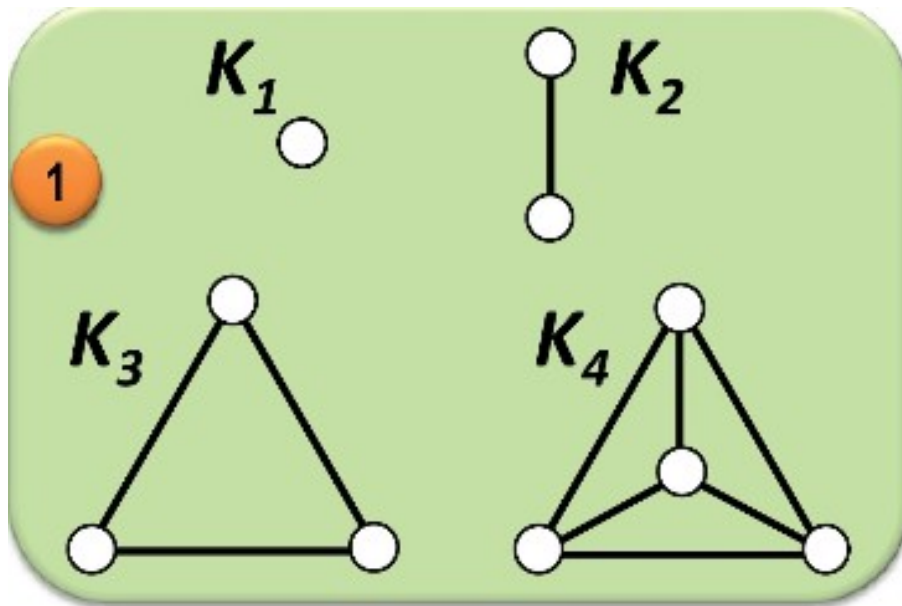
- Grafo completo
 - Um grafo completo com n vértices, denominado K_n , é um grafo simples contendo exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.



Terminologia

- Grafo completo

- Um grafo completo com n vértices, denominado K_n , é um grafo simples contendo exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.



Terminologia

Terminologia

- Grafo regular

Terminologia

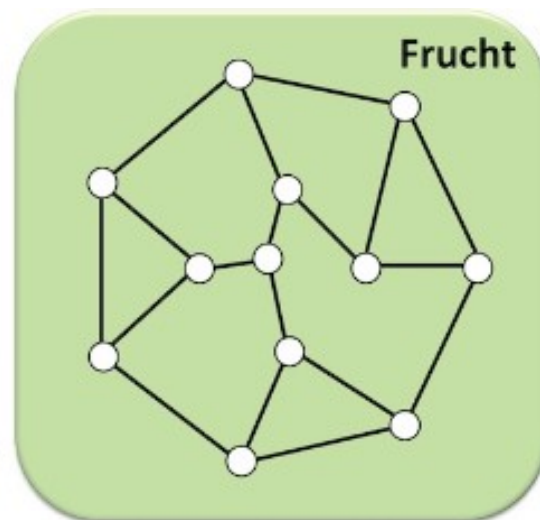
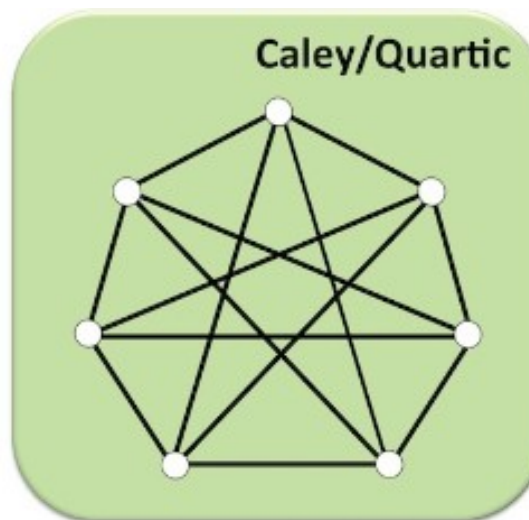
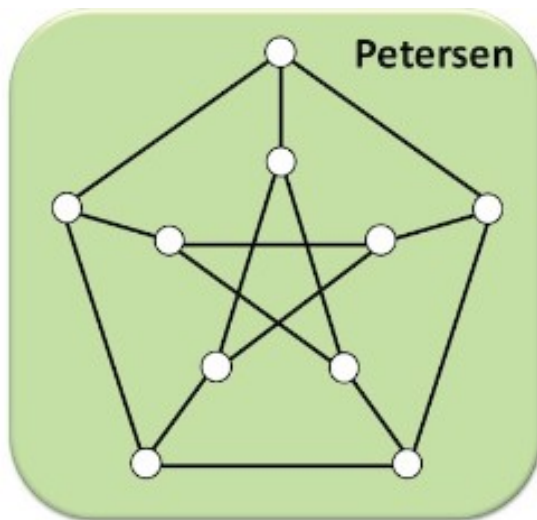
- Grafo regular
 - Grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau.

Terminologia

- Grafo regular
 - Grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau.
 - Obs.: qualquer grafo completo é regular.

Terminologia

- Grafo regular
 - Grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau.
 - Obs.: qualquer grafo completo é regular.



Terminologia

Terminologia

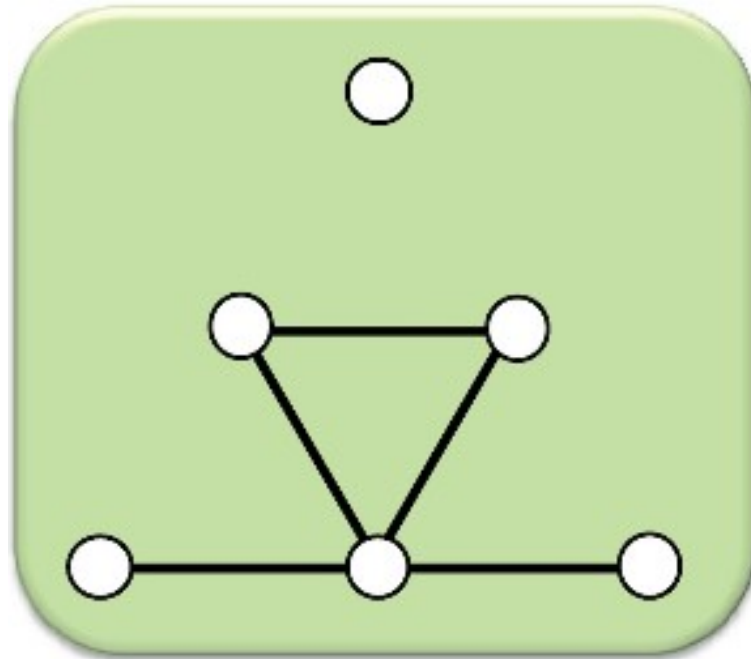
- Vértice isolado

Terminologia

- Vértice isolado
 - Vértice com nenhuma aresta incidente.

Terminologia

- Vértice isolado
 - Vértice com nenhuma aresta incidente.



Terminologia

Terminologia

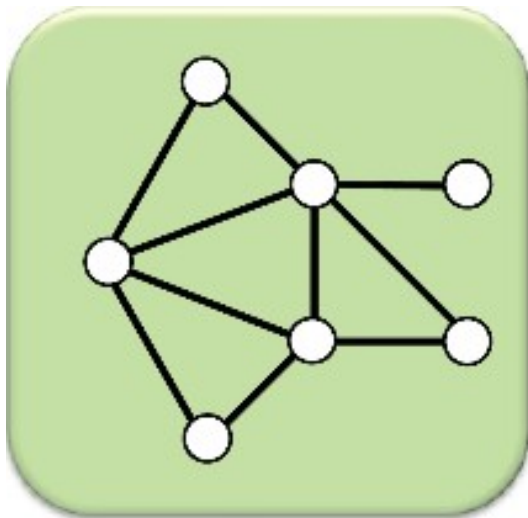
- Grafo conexo

Terminologia

- Grafo conexo
 - Para todo par de vértices i e j de G existe pelo menos um caminho entre i e j .

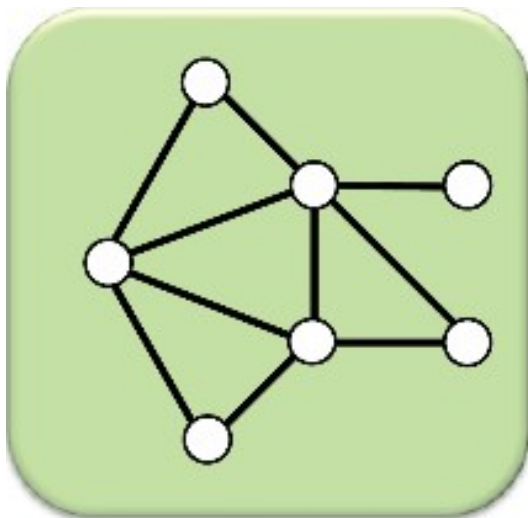
Terminologia

- Grafo conexo
 - Para todo par de vértices i e j de G existe pelo menos um caminho entre i e j .



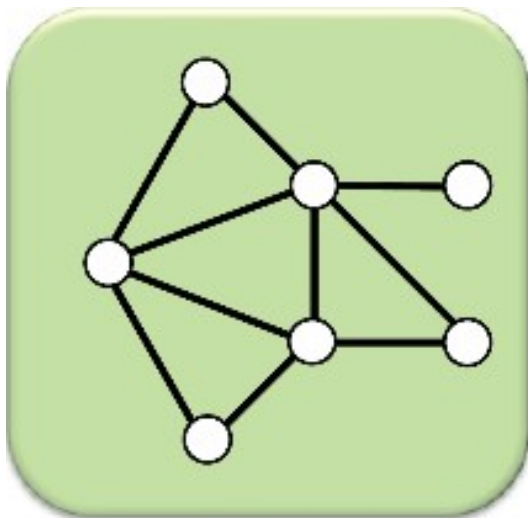
Terminologia

- Grafo conexo
 - Para todo par de vértices i e j de G existe pelo menos um caminho entre i e j .
- Grafo desconexo



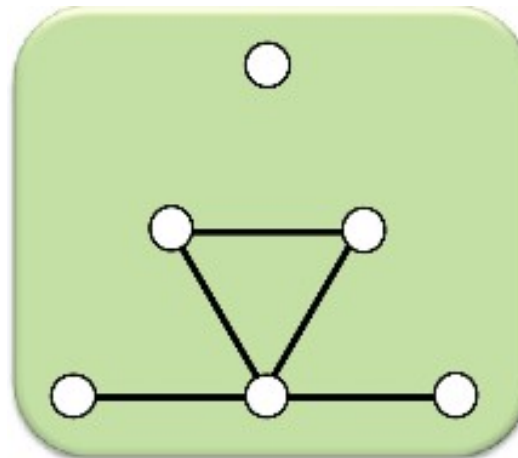
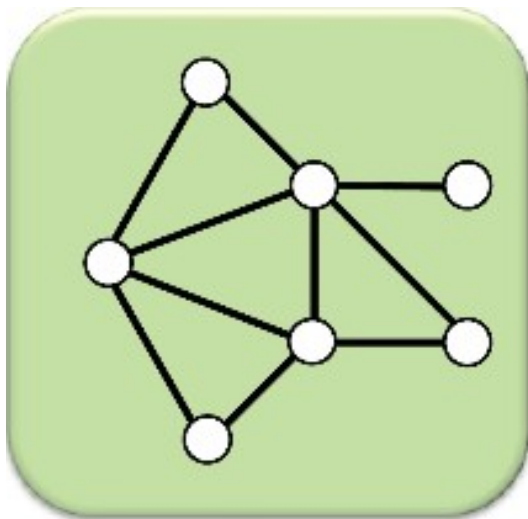
Terminologia

- Grafo conexo
 - Para todo par de vértices i e j de G existe pelo menos um caminho entre i e j .
- Grafo desconexo
 - Consiste de 2 ou mais grafos conexos, chamados componentes.



Terminologia

- Grafo conexo
 - Para todo par de vértices i e j de G existe pelo menos um caminho entre i e j .
- Grafo desconexo
 - Consiste de 2 ou mais grafos conexos, chamados componentes.



Terminologia

Terminologia

- Grafo complemento

Terminologia

- Grafo complemento
 - Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não direcionado, o complemento de G , \overline{G} , é um grafo formado da seguinte maneira:

Terminologia

- Grafo complemento
 - Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não direcionado, o complemento de G , \overline{G} , é um grafo formado da seguinte maneira:
 - Os vértices de \overline{G} são todos vértices de G ;

Terminologia

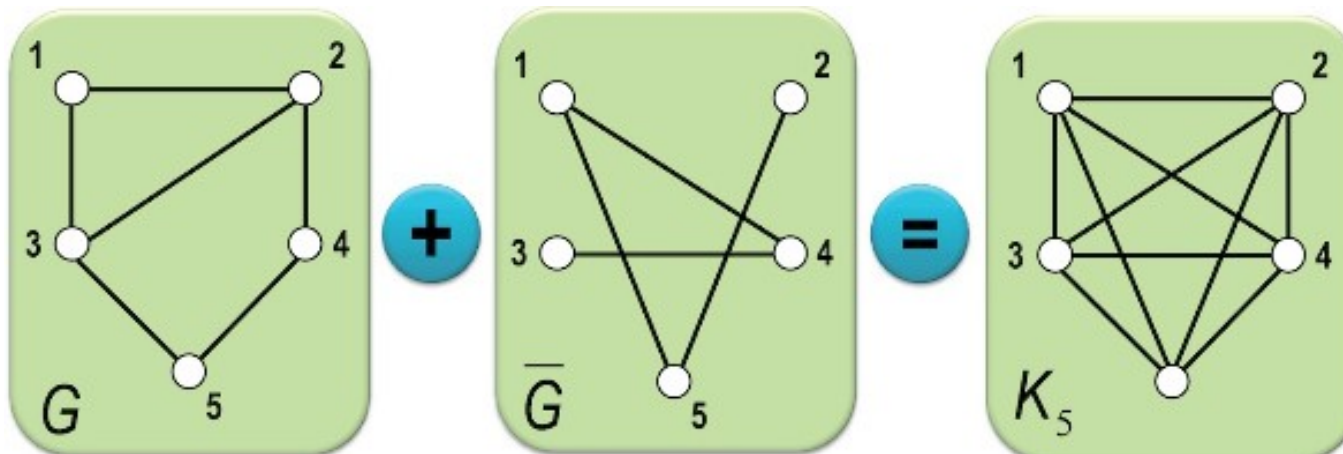
- Grafo complemento
 - Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não direcionado, o complemento de G , \overline{G} , é um grafo formado da seguinte maneira:
 - Os vértices de \overline{G} são todos vértices de G ;
 - As arestas de \overline{G} são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo.

Terminologia

- Grafo complemento

- Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não direcionado, o complemento de G , \overline{G} , é um grafo formado da seguinte maneira:

- Os vértices de \overline{G} são todos vértices de G ;
- As arestas de \overline{G} são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo.



Terminologia

Terminologia

- Grafo bipartido

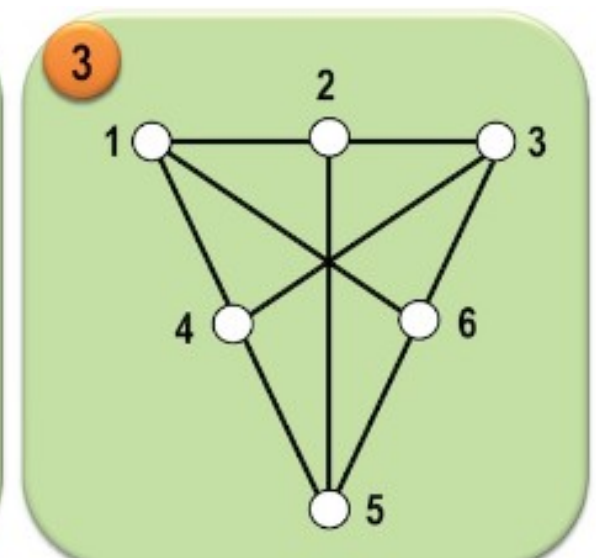
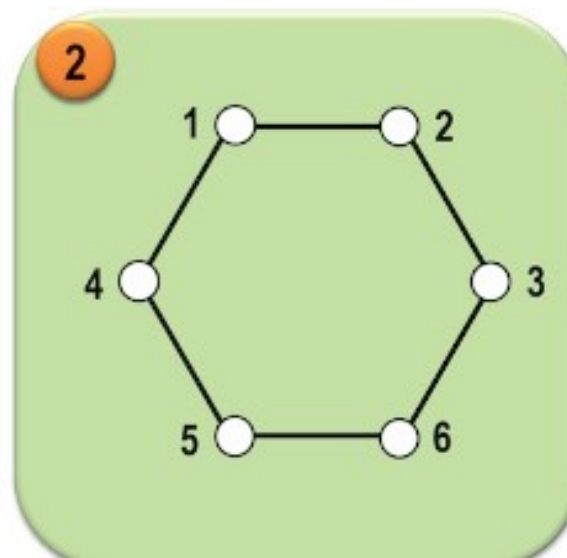
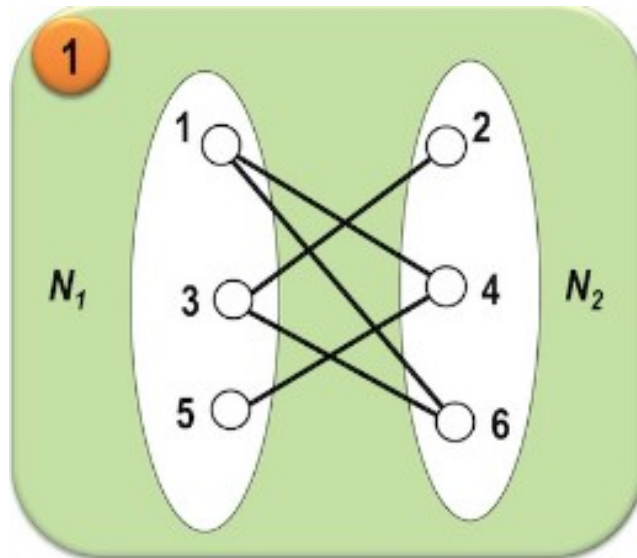
Terminologia

- Grafo bipartido
 - Um grafo é bipartido se o conjunto de vértices V pode ser particionado em 2 subconjuntos V_1 e V_2 tal que todas as arestas do grafo são incidentes a um vértice de V_1 e a um vértice de V_2 .

Terminologia

- Grafo bipartido

- Um grafo é bipartido se o conjunto de vértices V pode ser particionado em 2 subconjuntos V_1 e V_2 tal que todas as arestas do grafo são incidentes a um vértice de V_1 e a um vértice de V_2 .



Terminologia

Terminologia

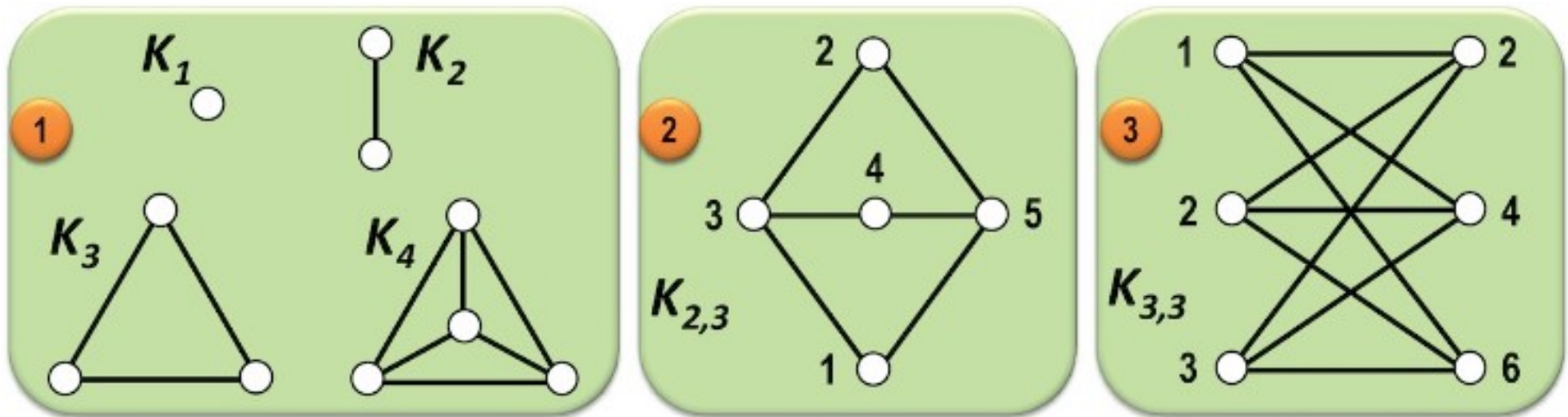
- Grafo bipartido completo

Terminologia

- Grafo bipartido completo
 - Um grafo bipartido é completo ($K_{|V_1|, |V_2|}$) se cada vértice do subconjunto V_1 é adjacente a todos os vértices do subconjunto V_2 e vice-versa.

Terminologia

- Grafo bipartido completo
 - Um grafo bipartido é completo ($K_{|V_1|,|V_2|}$) se cada vértice do subconjunto V_1 é adjacente a todos os vértices do subconjunto V_2 e vice-versa.



Exemplo de grafos completos (1) e bipartidos completos (2 e 3).

REPRESENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Representação Computacional

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências
 - Matriz $A_{n \times n}$, sendo que:

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências
 - Matriz $A_{n \times n}$, sendo que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe a aresta/arco } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências
 - Matriz $A_{n \times n}$, sendo que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe a aresta/arco } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Propriedades:

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências

- Matriz $A_{n \times n}$, sendo que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe a aresta/arco } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Propriedades:

- Simétrica para grafos não direcionados;

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências

- Matriz $A_{n \times n}$, sendo que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe a aresta/arco } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Propriedades:

- Simétrica para grafos não direcionados;
 - Consulta existência de uma aresta/arco com um acesso à memória: $O(1)$;

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências

- Matriz $A_{n \times n}$, sendo que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe a aresta/arco } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Propriedades:

- Simétrica para grafos não direcionados;
 - Consulta existência de uma aresta/arco com um acesso à memória: $O(1)$;
 - Ocupa $\Theta(n^2)$ de espaço mesmo para grafos esparsos.

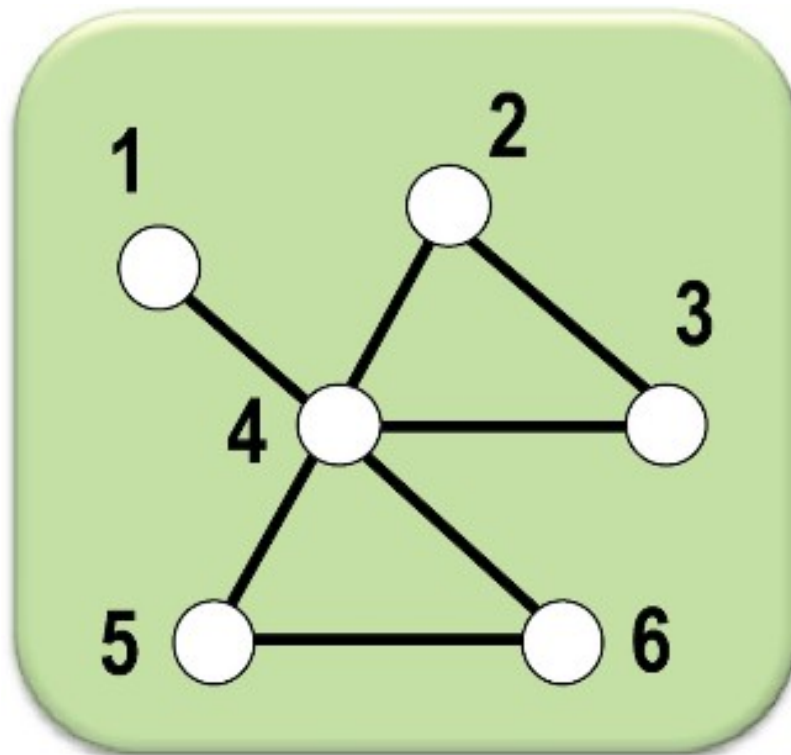
Representação Computacional

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências – Grafo Não Direcionado

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências – Grafo Não Direcionado



	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	1	1	0	0
3	0	1	0	1	0	0
4	1	1	1	0	1	1
5	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1	0

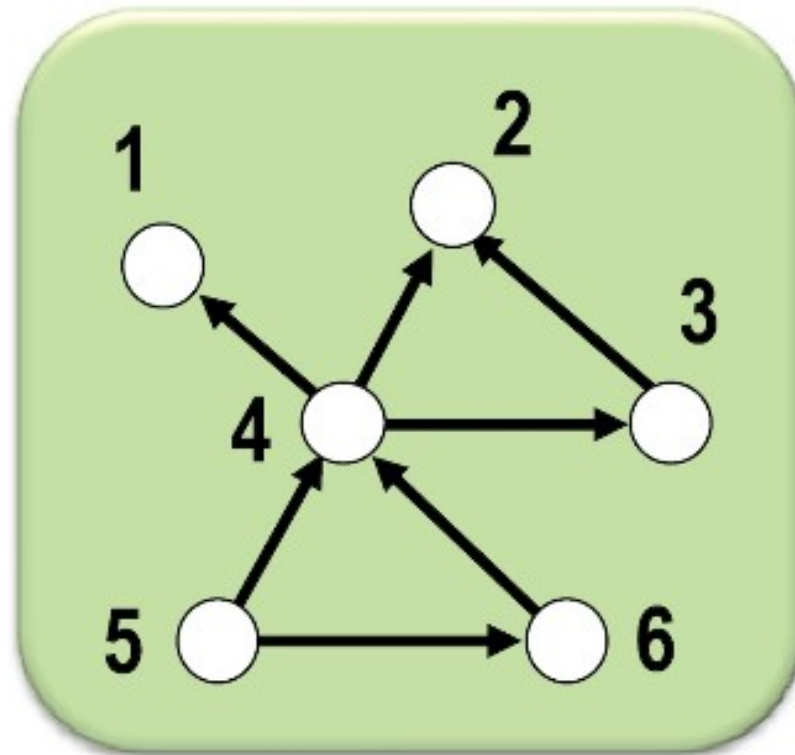
Representação Computacional

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências – Grafo Direcionado

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências – Grafo Direcionado



	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	0	0

Representação Computacional

Representação Computacional

- Listas de Adjacências:

Representação Computacional

- Listas de Adjacências:
 - Usa n listas, uma para cada vértice.

Representação Computacional

- Listas de Adjacências:
 - Usa n listas, uma para cada vértice.
 - Lista de v_i contém todos os vértices adjacentes a ele.

Representação Computacional

- Listas de Adjacências:
 - Usa n listas, uma para cada vértice.
 - Lista de v_i contém todos os vértices adjacentes a ele.
- Propriedades:

Representação Computacional

- Listas de Adjacências:
 - Usa n listas, uma para cada vértice.
 - Lista de v_i contém todos os vértices adjacentes a ele.
- Propriedades:
 - Ocupa menos memória: $O(m)$;

Representação Computacional

- Listas de Adjacências:
 - Usa n listas, uma para cada vértice.
 - Lista de v_i contém todos os vértices adjacentes a ele.
- Propriedades:
 - Ocupa menos memória: $O(m)$;
 - No entanto, a complexidade da operação de determinar uma adjacência é limitada por $O(n)$.

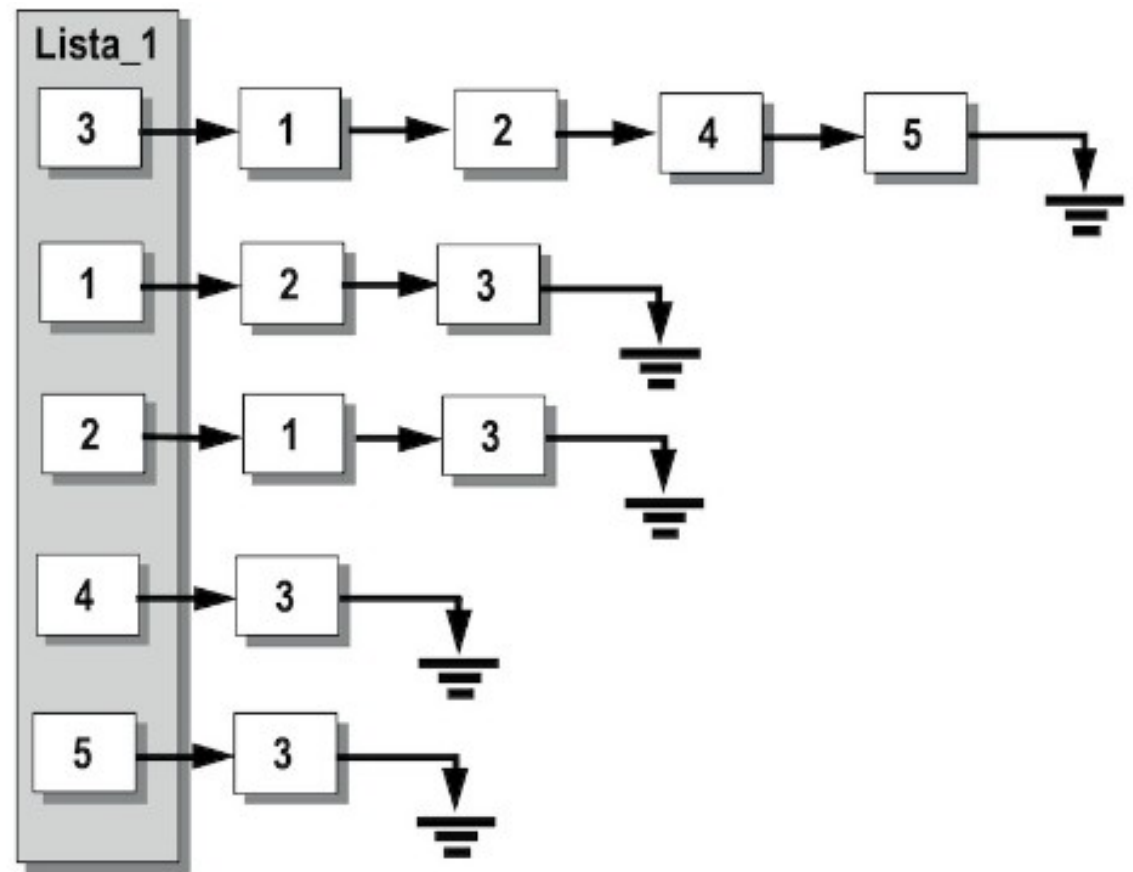
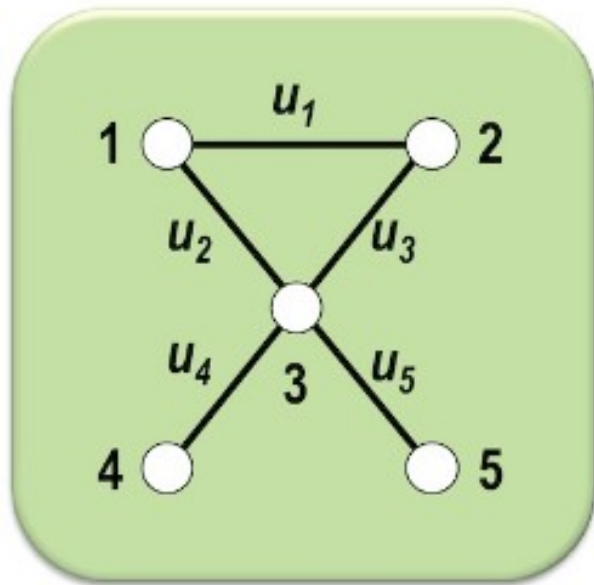
Representação Computacional

Representação Computacional

- Listas de Adjacências – Grafo Não Direcionado

Representação Computacional

- Listas de Adjacências – Grafo Não Direcionado



Exercícios

Exercícios

- Determine o número de vértices para os seguintes grafos:
 - G tem 9 arestas e todos os vértices têm grau 3;
 - G é regular com 15 arestas;
 - G tem 10 arestas com 2 vértices de grau 4 e todos os outros de grau 3.
- Dê o exemplo de um grafo sem arestas paralelas com 8 vértices com os seguintes graus: 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5 e 7.
- Dê exemplo de um grafo conexo sem loops com 7 vértices com os seguintes graus: 1, 1, 2, 3, 4, 5 e 7.