Algoritmos e Estruturas de Dados II

Grafos

Prof. Tiago Eugenio de Melo

tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

- As palavras com a fonte `Courier` indicam as palavras-reservadas da linguagem de programação.

Referências

- **Projetos de Algoritmos – com implementações em Pascal e C**. Nivio Ziviani. 2ª edição. Thomson, 2005.
- Material baseado nas notas de aula do professor Marco Antônio Moreira de Carvalho. Acessado em 01/10/2019: http://www.decom.ufop.br/marco/ensino/bcc204/material-das-aulas

REVISÃO

Revisão

Revisão

- Passeio

Revisão

- Passeio
  - Sequência finita de vértices e arestas.

Revisão

- Passeio
  - Sequência finita de vértices e arestas.
- Cadeia

Revisão

- Passeio
  - Sequência finita de vértices e arestas.
- Cadeia
  - Passeio que não repete arestas.

Revisão

- Passeio
  - Sequência finita de vértices e arestas.
- Cadeia
  - Passeio que não repete arestas.
- Caminho

Revisão

- Passeio
  - Sequência finita de vértices e arestas.
- Cadeia
  - Passeio que não repete arestas.
- Caminho
  - Uma cadeia sem repetição de vértices.

GRAFOS

Alcançabilidade

Alcançabilidade

- Um vértice w é **alcançável** a partir do vértice v se houver um caminho entre w e v.

Alcançabilidade

- Um vértice w é **alcançável** a partir do vértice v se houver um caminho entre w e v.
- Um conjunto de vértices alcançáveis a partir de v é, portanto, formado pelos sucessores de v, os sucessores dos sucessores e assim por diante.

Alcançabilidade

Alcançabilidade

- Transitividade

Alcançabilidade

- Transitividade
  - Se w é alcançável a partir de v;

Alcançabilidade

- Transitividade
  - Se w é alcançável a partir de v;
  - e se x é alcançável de w;

Alcançabilidade

- Transitividade
  - Se w é alcançável a partir de v;
  - e se x é alcançável de w;
  - então x é alcançável a partir de v.

Alcançabilidade

- Transitividade
  - Se w é alcançável a partir de v;
  - e se x é alcançável de w;
  - então x é alcançável a partir de v.
- Transitividade

Alcançabilidade

- Transitividade
  - Se w é alcançável a partir de v;
  - e se x é alcançável de w;
  - então x é alcançável a partir de v.
- Transitividade
  - A relação de alcançabilidade é **transitiva**.

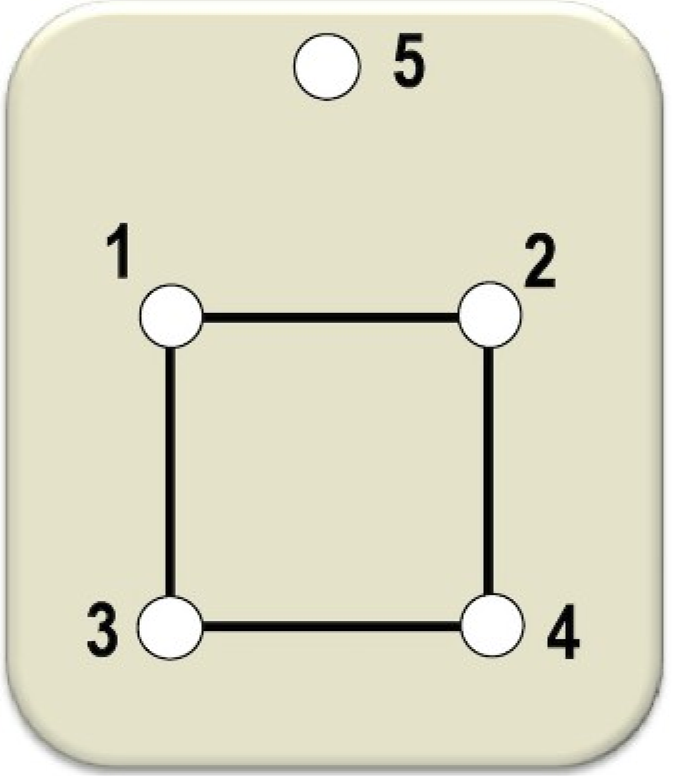
Fecho Transitivo de um Vértice – Grafo Não Direcionado

Fecho Transitivo de um Vértice – Grafo Não Direcionado

- O Fecho Transitivo de um vértice v, denotado por FT(v), é o conjunto dos vértices do grafo alcançáveis a partir de v.

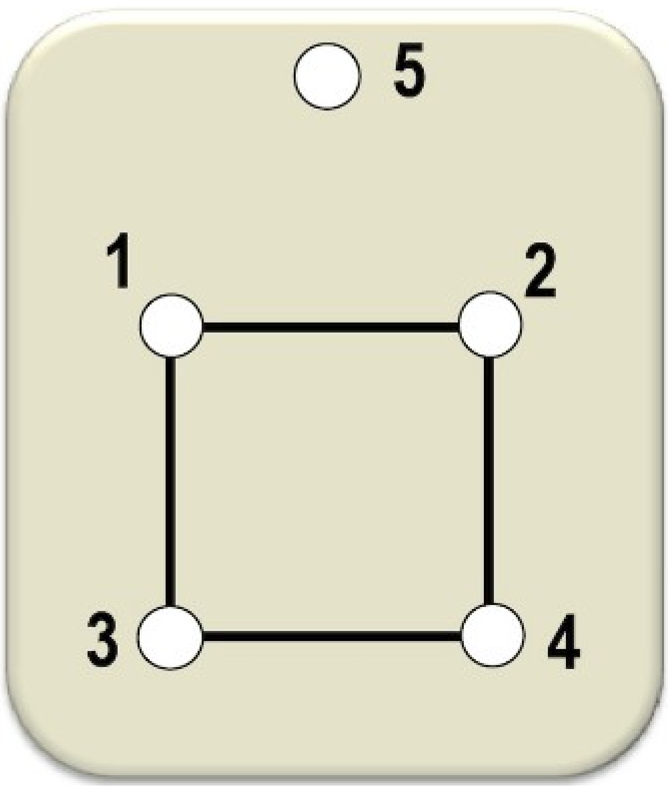
Fecho Transitivo de um Vértice – Grafo Não Direcionado

- O Fecho Transitivo de um vértice v, denotado por FT(v), é o conjunto dos vértices do grafo alcançáveis a partir de v.



Fecho Transitivo de um Vértice – Grafo Não Direcionado

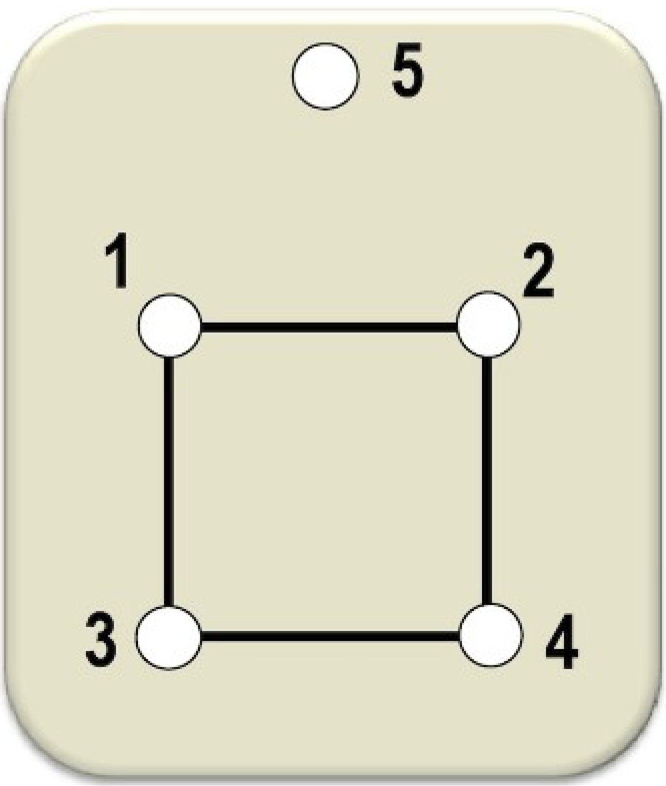
- O Fecho Transitivo de um vértice v, denotado por FT(v), é o conjunto dos vértices do grafo alcançáveis a partir de v.



FT(1) = {2, 3, 4}

Fecho Transitivo de um Vértice – Grafo Não Direcionado

- O Fecho Transitivo de um vértice v, denotado por FT(v), é o conjunto dos vértices do grafo alcançáveis a partir de v.



FT(1) = {2, 3, 4}

FT(5) = {}

Fecho Transitivo de um Vértice – Grafo Direcionado

Fecho Transitivo de um Vértice – Grafo Direcionado

- O Fecho Transitivo Direto de um vértice v, denotado por FTD(v), é o conjunto de vértices de um grafo alcançáveis a partir de v.

Fecho Transitivo de um Vértice – Grafo Direcionado

- O Fecho Transitivo Direto de um vértice v, denotado por FTD(v), é o conjunto de vértices de um grafo alcançáveis a partir de v.
- Os vértices em FTD(v) são chamados de **descendentes** ou **sucessores** de v.

Fecho Transitivo de um Vértice – Grafo Direcionado

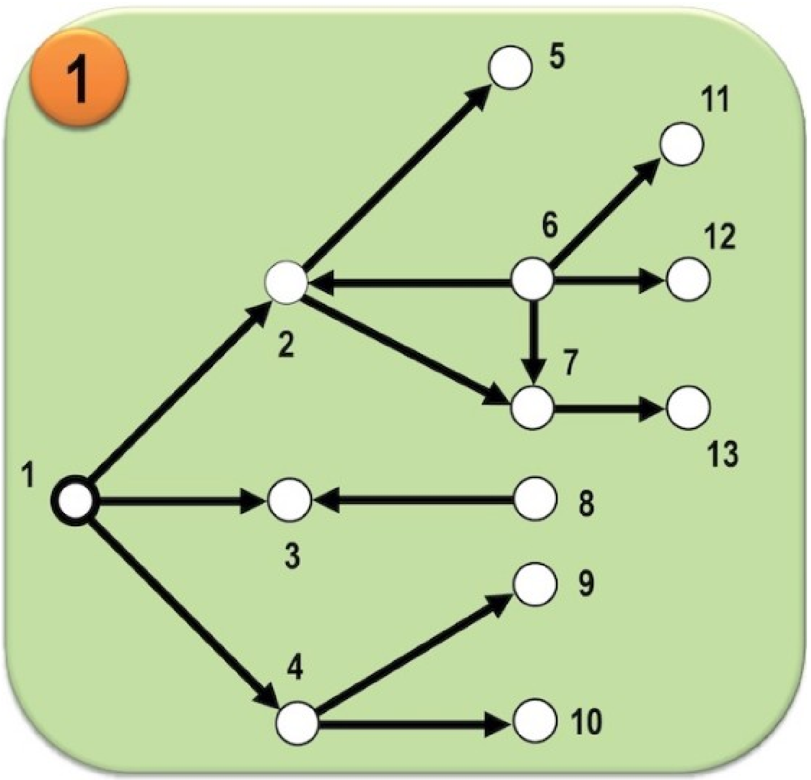
- O Fecho Transitivo Direto de um vértice v, denotado por FTD(v), é o conjunto de vértices de um grafo alcançáveis a partir de v.
- Os vértices em FTD(v) são chamados de **descendentes** ou **sucessores** de v.
- O Fecho Transitivo Indireto de um vértice v, denotado por FTI(v), é o conjunto de vértices de um grafo a partir dos quais v é alcançável.

Fecho Transitivo de um Vértice – Grafo Direcionado

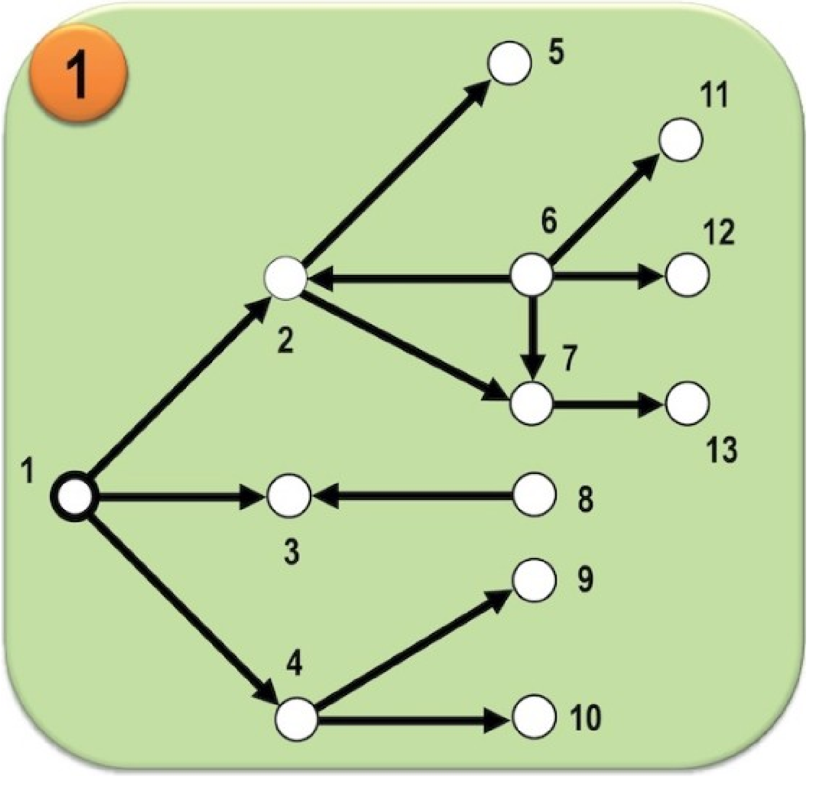
- O Fecho Transitivo Direto de um vértice v, denotado por FTD(v), é o conjunto de vértices de um grafo alcançáveis a partir de v.
- Os vértices em FTD(v) são chamados de **descendentes** ou **sucessores** de v.
- O Fecho Transitivo Indireto de um vértice v, denotado por FTI(v), é o conjunto de vértices de um grafo a partir dos quais v é alcançável.
- Os vértices em FTI(v) são chamados **ascendentes** ou **antecessores** de v.

Fecho Transitivo Direto e Indireto

Fecho Transitivo Direto e Indireto

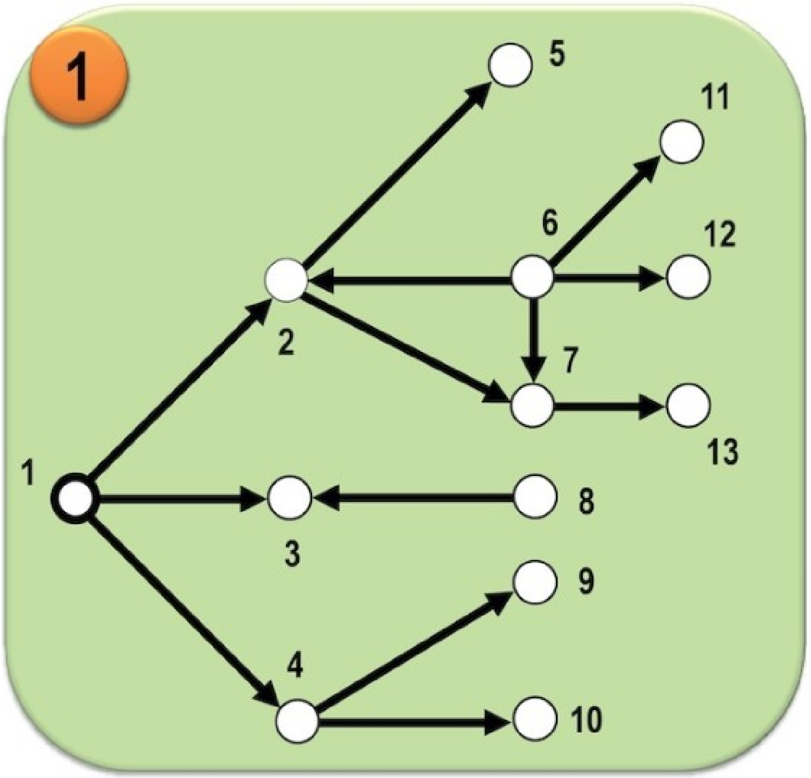


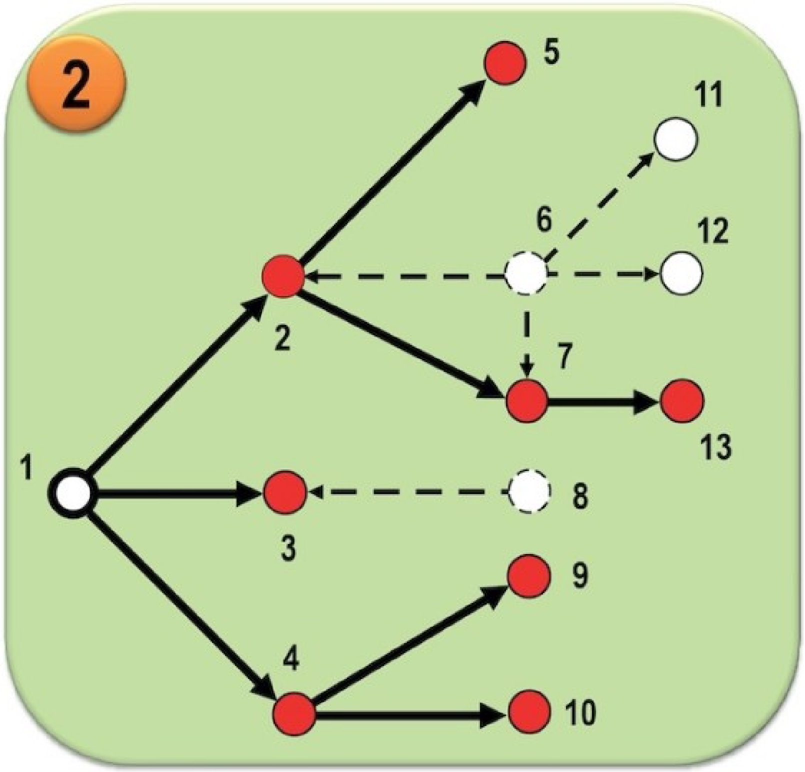
Fecho Transitivo Direto e Indireto



FTD(1) = {2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 13}

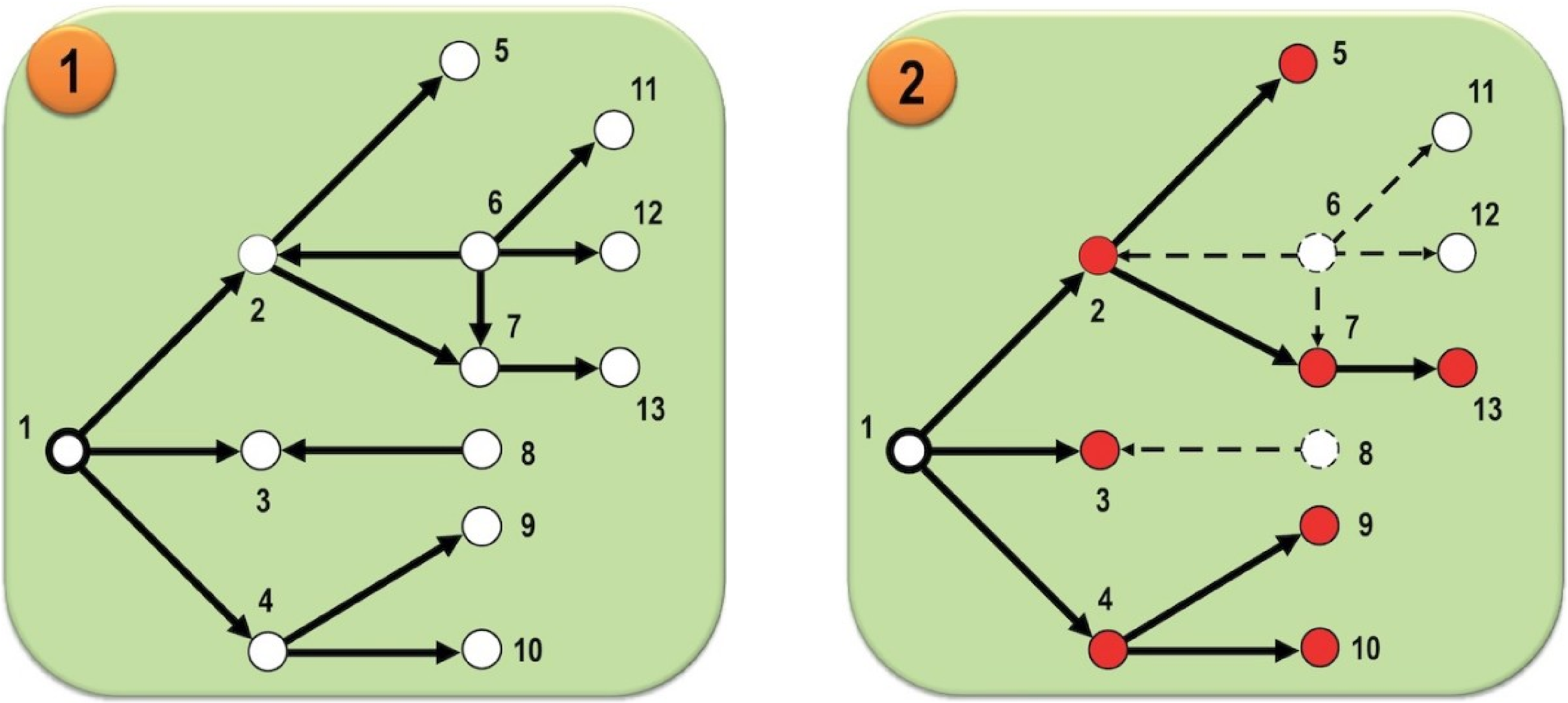
Fecho Transitivo Direto e Indireto





FTD(1) = {2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 13}

Fecho Transitivo Direto e Indireto



FTD(1) = {2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 13}
FTI(10) = {1,4}

Conectividade (Conexidade) em Grafos Não Direcionados

Conectividade (Conexidade) em Grafos Não Direcionados

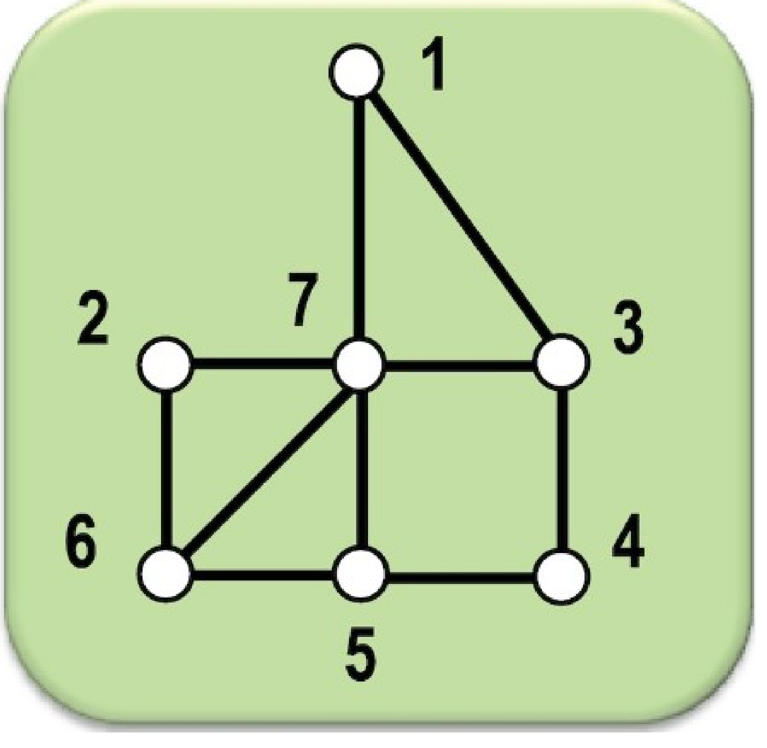
- Em um GND conexo, todos os vértices são alcançáveis a partir de qualquer outro.

Conectividade (Conexidade) em Grafos Não Direcionados

- Em um GND conexo, todos os vértices são alcançáveis a partir de qualquer outro.
- Em um GND conexo, sempre é possível fazer um passeio fechado que inclua todos os vértices.

Conectividade (Conexidade) em Grafos Não Direcionados

- Em um GND conexo, todos os vértices são alcançáveis a partir de qualquer outro.
- Em um GND conexo, sempre é possível fazer um passeio fechado que inclua todos os vértices.



Conectividade em Grafos Direcionados

Conectividade em Grafos Direcionados

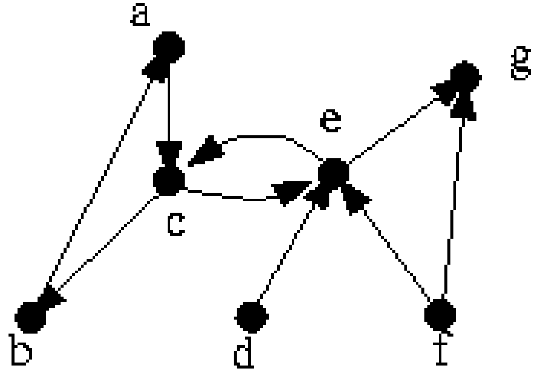
- Se G é um grafo direcionado, então ele é considerado conexo quando o seu grafo não direcionado subjacente é conexo.

Conectividade em Grafos Direcionados

- Se G é um grafo direcionado, então ele é considerado conexo quando o seu grafo não direcionado subjacente é conexo.
- O grafo não direcionado subjacente é o grafo resultante quando a orientação dos arcos de G é ignorada.

Conectividade em Grafos Direcionados

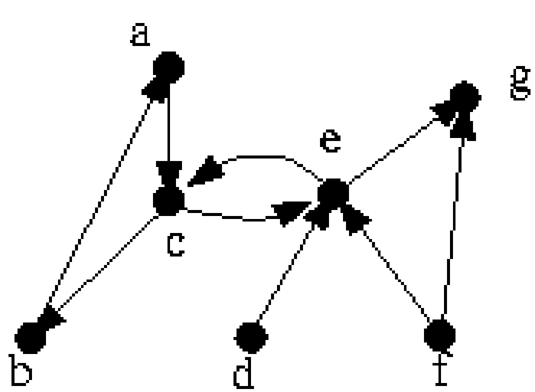
- Se G é um grafo direcionado, então ele é considerado conexo quando o seu grafo não direcionado subjacente é conexo.
- O grafo não direcionado subjacente é o grafo resultante quando a orientação dos arcos de G é ignorada.



Grafo Direcionado

Conectividade em Grafos Direcionados

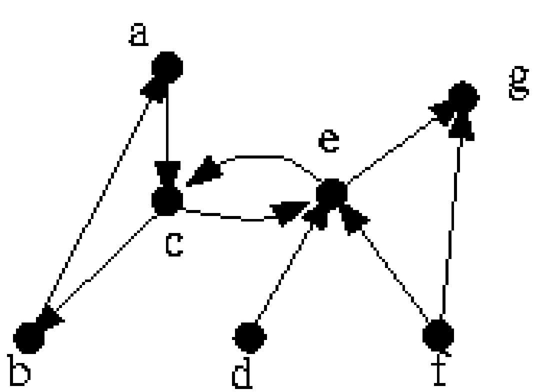
- Se G é um grafo direcionado, então ele é considerado conexo quando o seu grafo não direcionado subjacente é conexo.
- O grafo não direcionado subjacente é o grafo resultante quando a orientação dos arcos de G é ignorada.



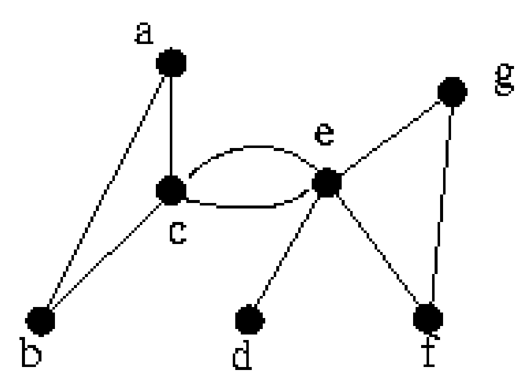
Grafo Direcionado

Conectividade em Grafos Direcionados

- Se G é um grafo direcionado, então ele é considerado conexo quando o seu grafo não direcionado subjacente é conexo.
- O grafo não direcionado subjacente é o grafo resultante quando a orientação dos arcos de G é ignorada.

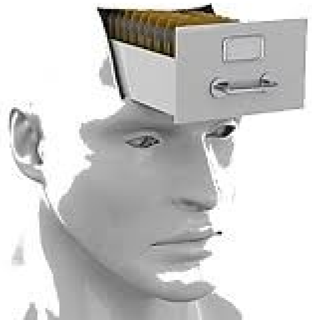


Grafo Direcionado



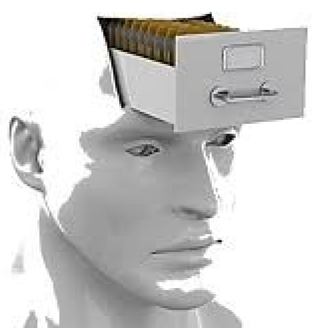
Grafo Não Direcionado Subjacente

Subgrafos Maximais



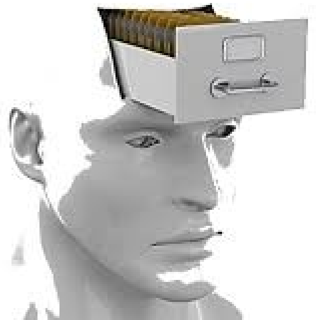
Subgrafos Maximais

- Subgrafo



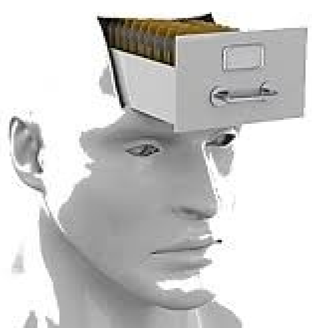
Subgrafos Maximais

- Subgrafo
  - Um grafo $G_s = (V_s, A_s)$ é considerado um **subgrafo** de um grafo $G = (V, A)$ se todos os vértices e todas as arestas de G_s estão em G, ou seja, se $V_s \subseteq V$ e $A_s \subseteq A$.



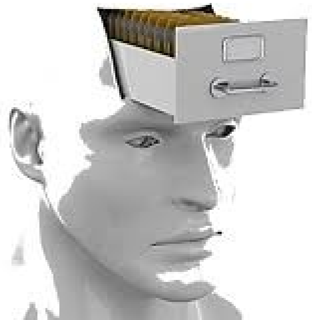
Subgrafos Maximais

- Subgrafo
  - Um grafo $G_s = (V_s, A_s)$ é considerado um **subgrafo** de um grafo $G = (V, A)$ se todos os vértices e todas as arestas de G_s estão em G, ou seja, se $V_s \subseteq V$ e $A_s \subseteq A$.
  - Propriedades:



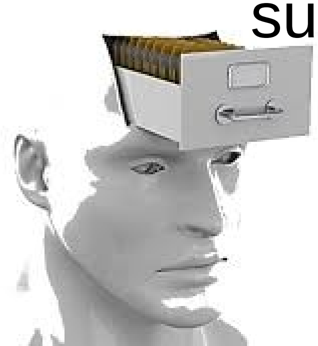
Subgrafos Maximais

- Subgrafo
  - Um grafo $G_s = (V_s, A_s)$ é considerado um **subgrafo** de um grafo $G = (V, A)$ se todos os vértices e todas as arestas de G_s estão em G, ou seja, se $V_s \subseteq V$ e $A_s \subseteq A$.
  - Propriedades:
    - Todo grafo é subgrafo de si próprio.



Subgrafos Maximais

- Subgrafo
  - Um grafo $G_s = (V_s, A_s)$ é considerado um **subgrafo** de um grafo $G = (V, A)$ se todos os vértices e todas as arestas de G_s estão em G, ou seja, se $V_s \subseteq V$ e $A_s \subseteq A$.
  - Propriedades:
    - Todo grafo é subgrafo de si próprio.
    - O subgrafo G_{s2} de um subgrafo G_s de G também é subgrafo de G.



Subgrafos Maximais

- Subgrafo Maximal
  - Um subgrafo G_S de G é dito maximal em relação a uma propriedade P se não for subgrafo de nenhum outro subgrafo de G que também possua a propriedade P.
  - O conceito de maximalidade é relacionado a uma condição de **pertinência**.

Conectividade

Conectividade

- Componentes conexos

Conectividade

- Componentes conexos
  - Um componente conexo de um grafo G é um <u>subgrafo conexo maximal</u> de G.

Conectividade

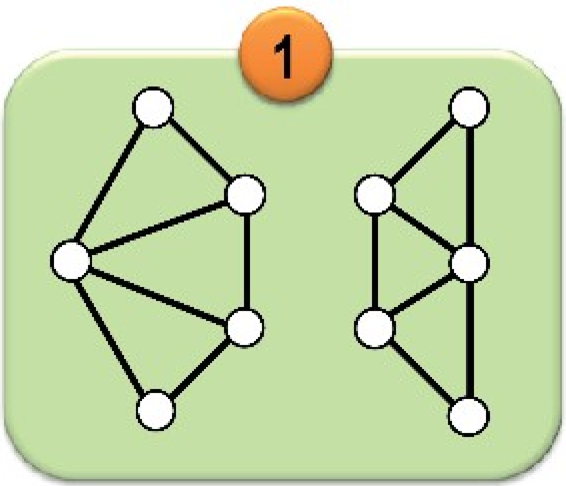
- Componentes conexos
  - Um componente conexo de um grafo G é um <u>subgrafo conexo maximal</u> de G.
  - O número de componentes conexos em G é denotado por c.

Conectividade

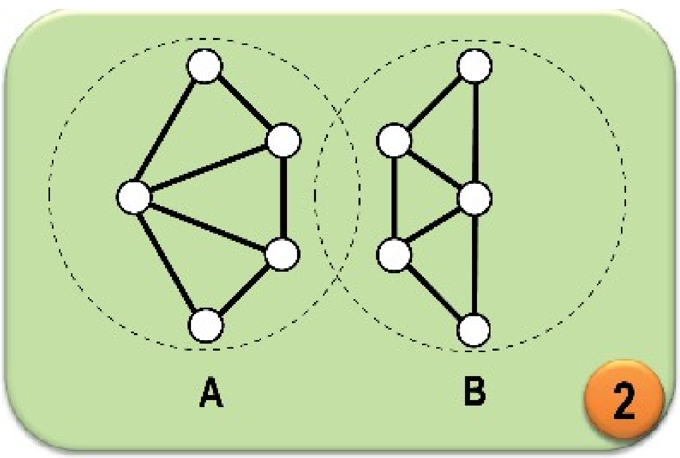
- Componentes conexos
  - Um componente conexo de um grafo G é um <u>subgrafo conexo maximal</u> de G.
  - O número de componentes conexos em G é denotado por c.
  - Grafos conexos possuem apenas um componente conexo.

Conectividade

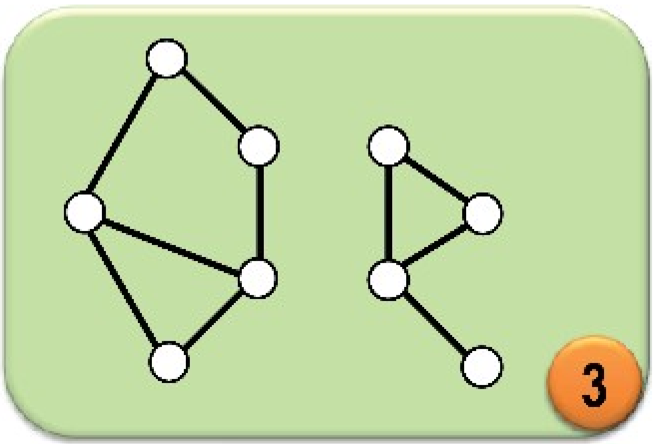
- Componentes conexos



Grafo Desconexo



Componentes Conexos



Subgrafos não maximais

Conectividade em Grafos Direcionados

Conectividade em Grafos Direcionados

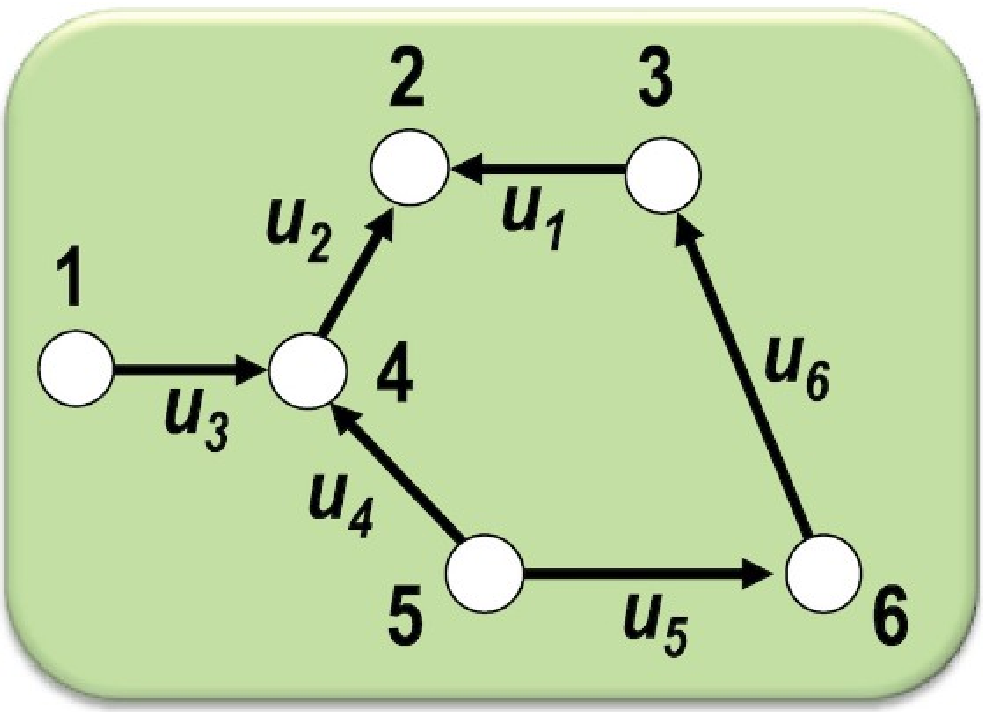
- Grafo Simplesmente Conexo: s-conexo

Conectividade em Grafos Direcionados

- Grafo Simplesmente Conexo: s-conexo
  - O grafo subjacente não direcionado obtido através da substituição de todas as arestas de G por arestas não direcionadas é um grafo conexo.

Conectividade em Grafos Direcionados

- Grafo Simplesmente Conexo: s-conexo
  - O grafo subjacente não direcionado obtido através da substituição de todas as arestas de G por arestas não direcionadas é um grafo conexo.



Conectividade em Grafos Direcionados

Conectividade em Grafos Direcionados

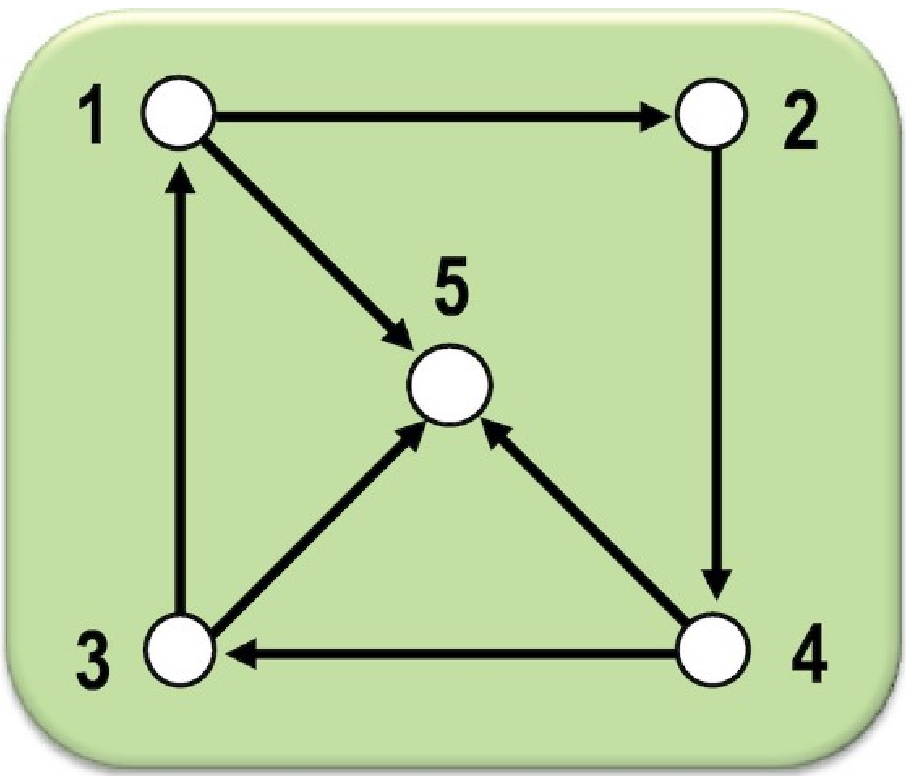
- Grafo Semi-Fortemente Conexo: sf-conexo

Conectividade em Grafos Direcionados

- Grafo Semi-Fortemente Conexo: sf-conexo
  - Para cada par de vértices (v1, v2), existe um caminho de v1 para v2 **<u>ou</u>** de v2 para v1.

Conectividade em Grafos Direcionados

- Grafo Semi-Fortemente Conexo: sf-conexo
  - Para cada par de vértices (v1, v2), existe um caminho de v1 para v2 **<u>ou</u>** de v2 para v1.



Conectividade em Grafos Direcionados

Conectividade em Grafos Direcionados

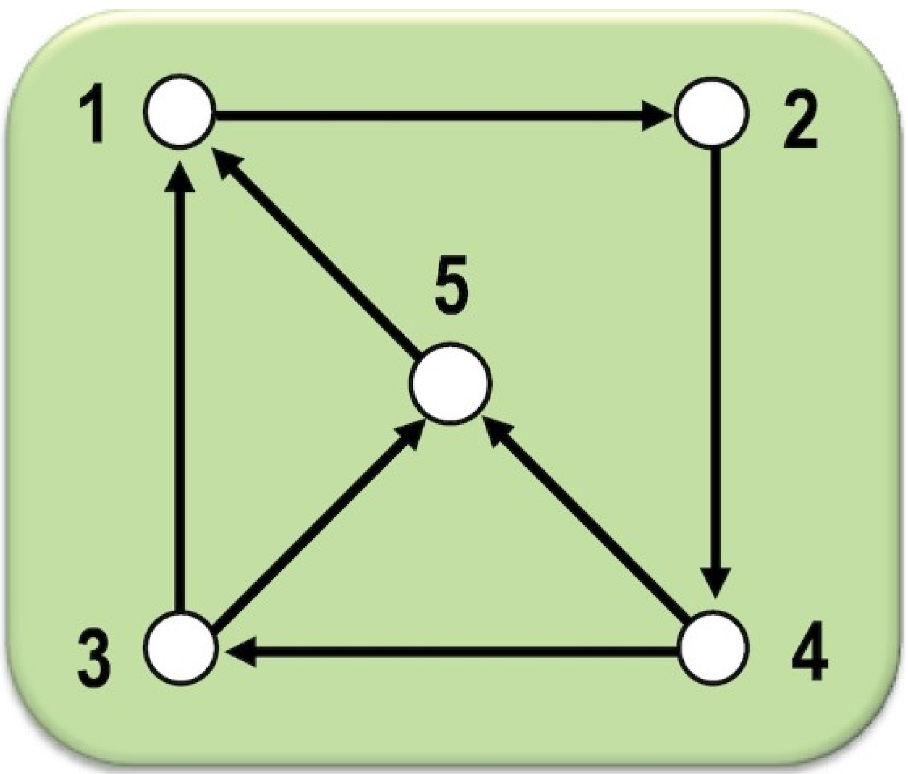
- Grafo Fortemente Conexo: f-conexo

Conectividade em Grafos Direcionados

- Grafo Fortemente Conexo: f-conexo
  - Para cada par de vértices (v1, v2), existe um caminho direcionado de v1 para v2 **e** de v2 para v1.

Conectividade em Grafos Direcionados

- Grafo Fortemente Conexo: f-conexo
  - Para cada par de vértices (v1, v2), existe um caminho direcionado de v1 para v2 <u>**e**</u> de v2 para v1.



Conectividade em Grafos Direcionados

Conectividade em Grafos Direcionados

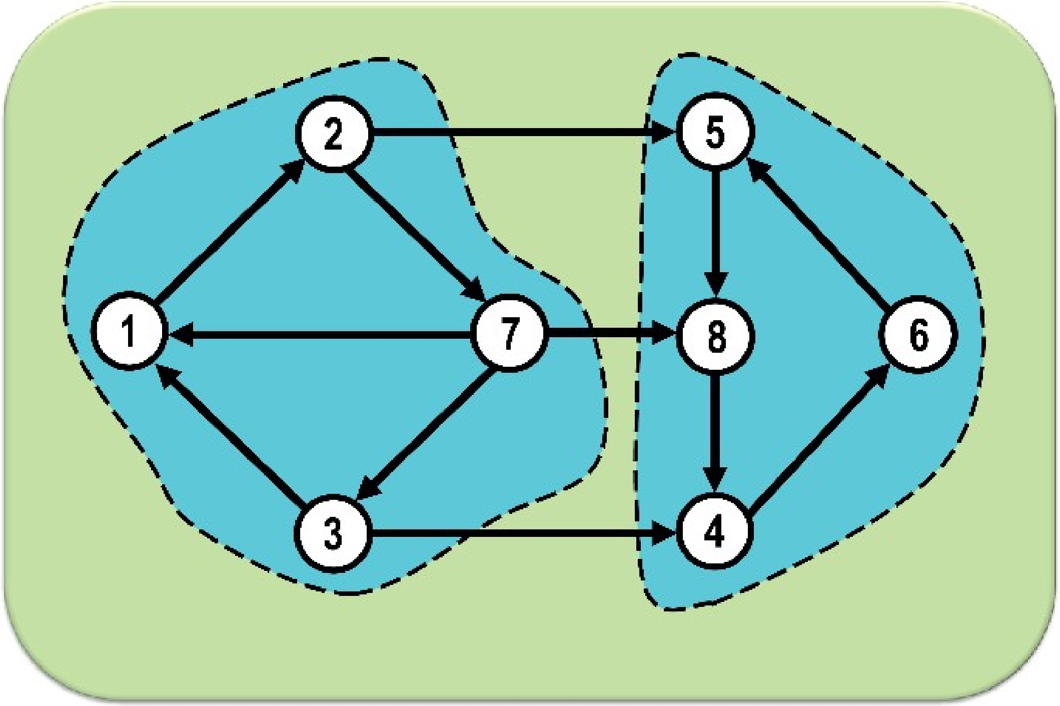
- Componentes Fortemente Conexos

Conectividade em Grafos Direcionados

- Componentes Fortemente Conexos
  - Em um grafo direcionado, componentes fortemente conexos são subgrafos maximais f-conexos.

Conectividade em Grafos Direcionados

- Componentes Fortemente Conexos
  - Em um grafo direcionado, componentes fortemente conexos são subgrafos maximais f-conexos.



Conectividade em Vértices

Conectividade em Vértices

- Definição

Conectividade em Vértices

- Definição
  - A conexidade ou conectividade em vértices k(G) de um grafo G = (V,E) é o menor número de vértices cuja remoção desconecta G ou o reduz a um único vértice.

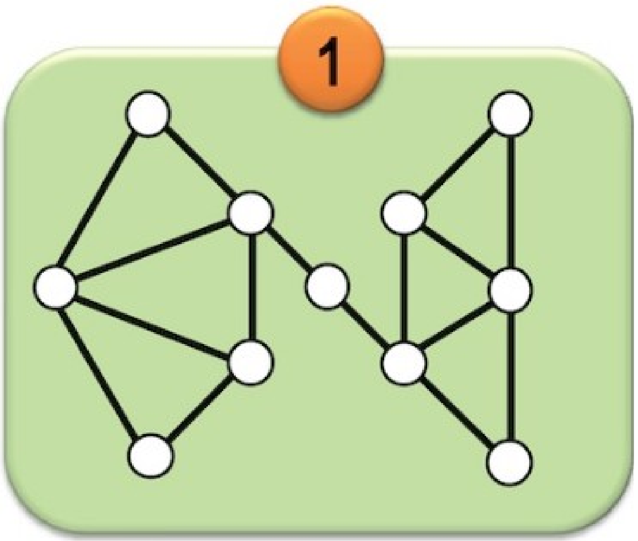
Conectividade em Vértices

Conectividade em Vértices

- Exemplos de remoções de conjuntos de vértices que desconectam o grafo.

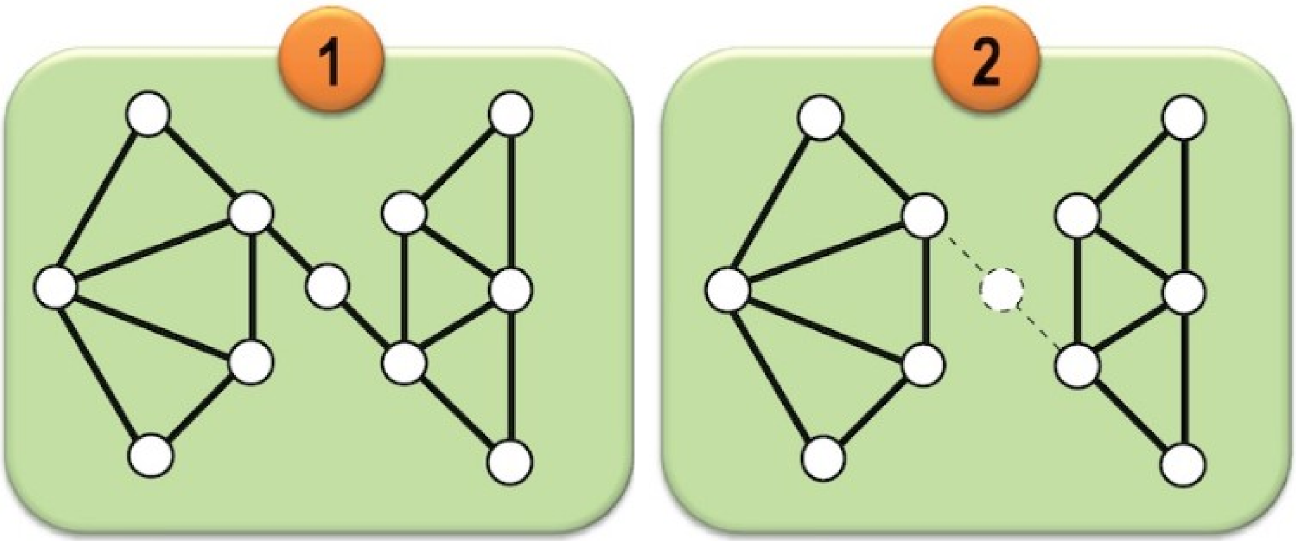
Conectividade em Vértices

- Exemplos de remoções de conjuntos de vértices que desconectam o grafo.



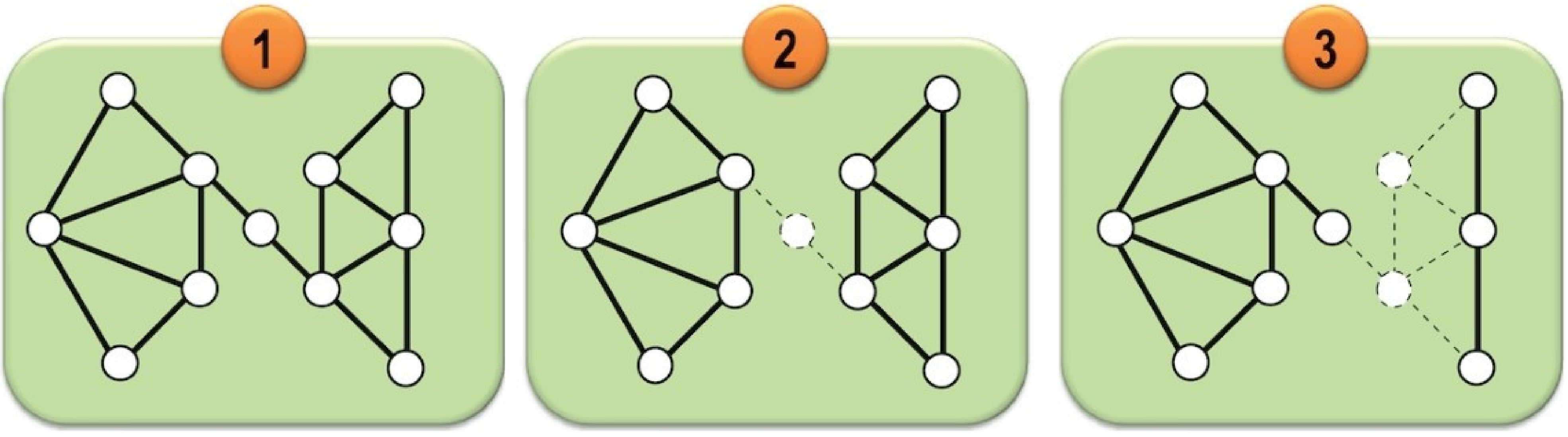
Conectividade em Vértices

- Exemplos de remoções de conjuntos de vértices que desconectam o grafo.



Conectividade em Vértices

- Exemplos de remoções de conjuntos de vértices que desconectam o grafo.



k-Conectividade

k-Conectividade

- Definição

k-Conectividade

- Definição
  - Um grafo G = (V,A) é k-conexo se e somente se para todo v, w ϵ V, $v \neq w$ existirem ao menos k caminhos disjuntos.

k-Conectividade

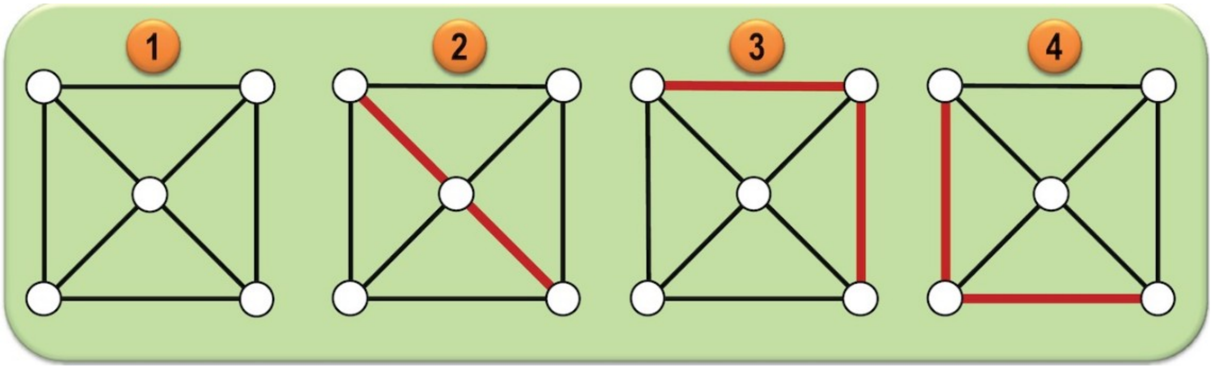
- Definição
  - Um grafo G = (V,A) é k-conexo se e somente se para todo v, w $\in$ V, v $\neq$ w existirem ao menos k caminhos disjuntos.
- Caminhos Disjuntos

k-Conectividade

- Definição
  - Um grafo G = (V,A) é k-conexo se e somente se para todo v, w ϵ V, v $\neq$ w existirem ao menos k caminhos disjuntos.
- Caminhos Disjuntos
  - Dois caminhos entre os vértices v e w de um grafo são **disjuntos** se não possuírem arestas em comum.

k-Conectividade

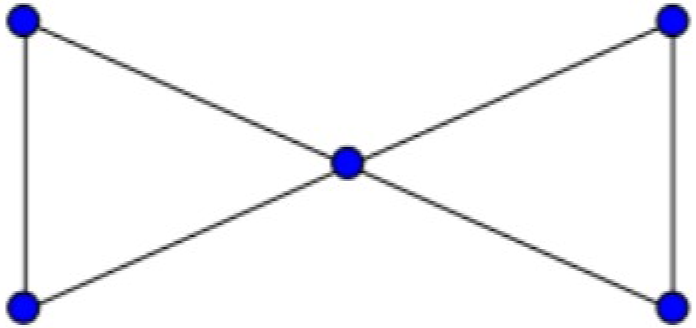
- Definição
  - Um grafo G = (V,A) é k-conexo se e somente se para todo v, w ∈ V, $v \neq w$ existirem ao menos k caminhos disjuntos.
- Caminhos Disjuntos
  - Dois caminhos entre os vértices v e w de um grafo são **disjuntos** se não possuírem arestas em comum.

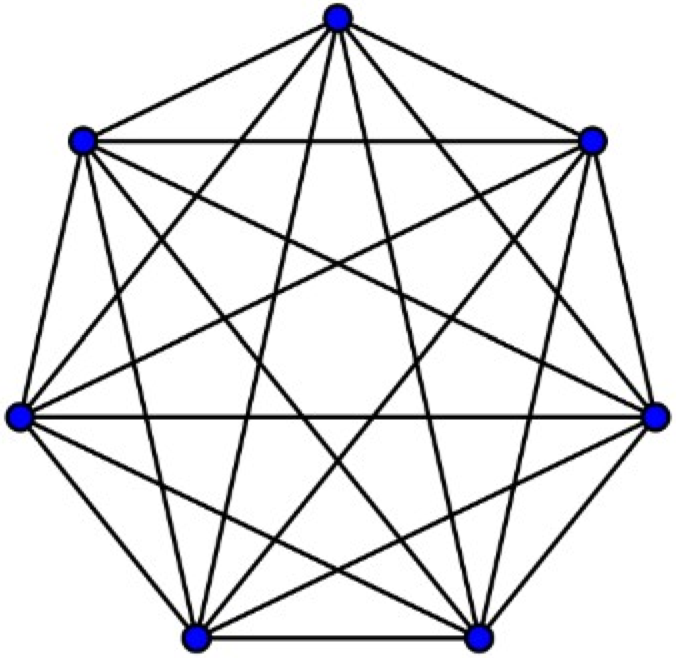


k-Conectividade

- Exemplos

Grafo borboleta: 2-conexo





K7: 6-conexo, mas também é 1-conexo, 2-conexo, 3-conexo, 4-conexo e 5-conexo.

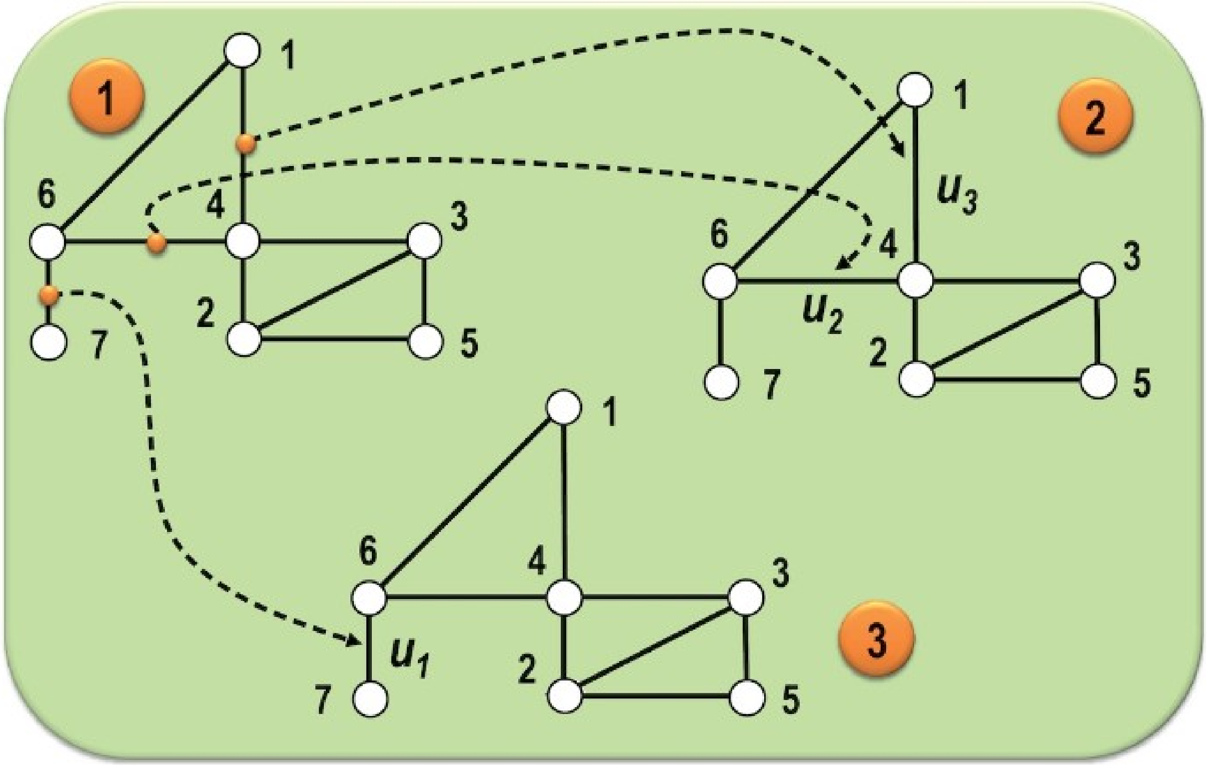
Articulação

Articulação

- Aresta de articulação (ou ponte)
  - Uma aresta de articulação de um grafo G é uma aresta cuja remoção resulta na desconexão de G.

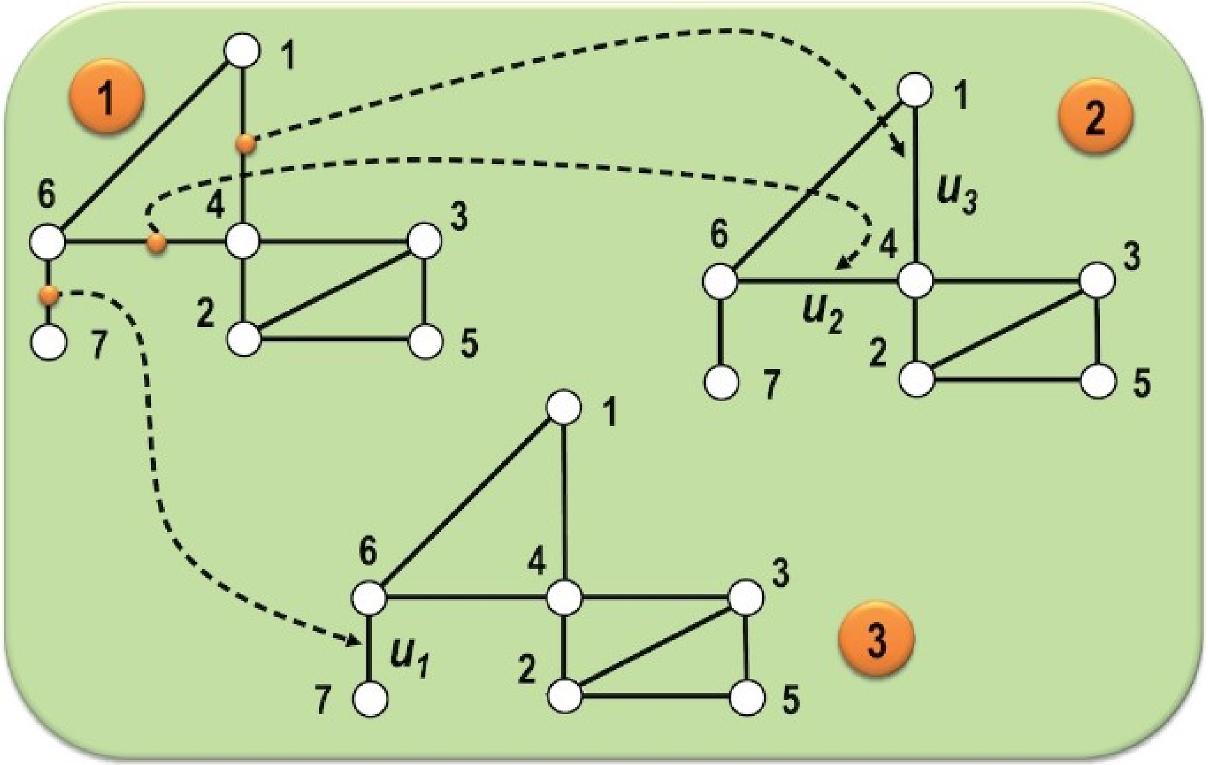
Articulação

- Aresta de articulação (ou ponte)
  - Uma aresta de articulação de um grafo G é uma aresta cuja remoção resulta na desconexão de G.



Articulação

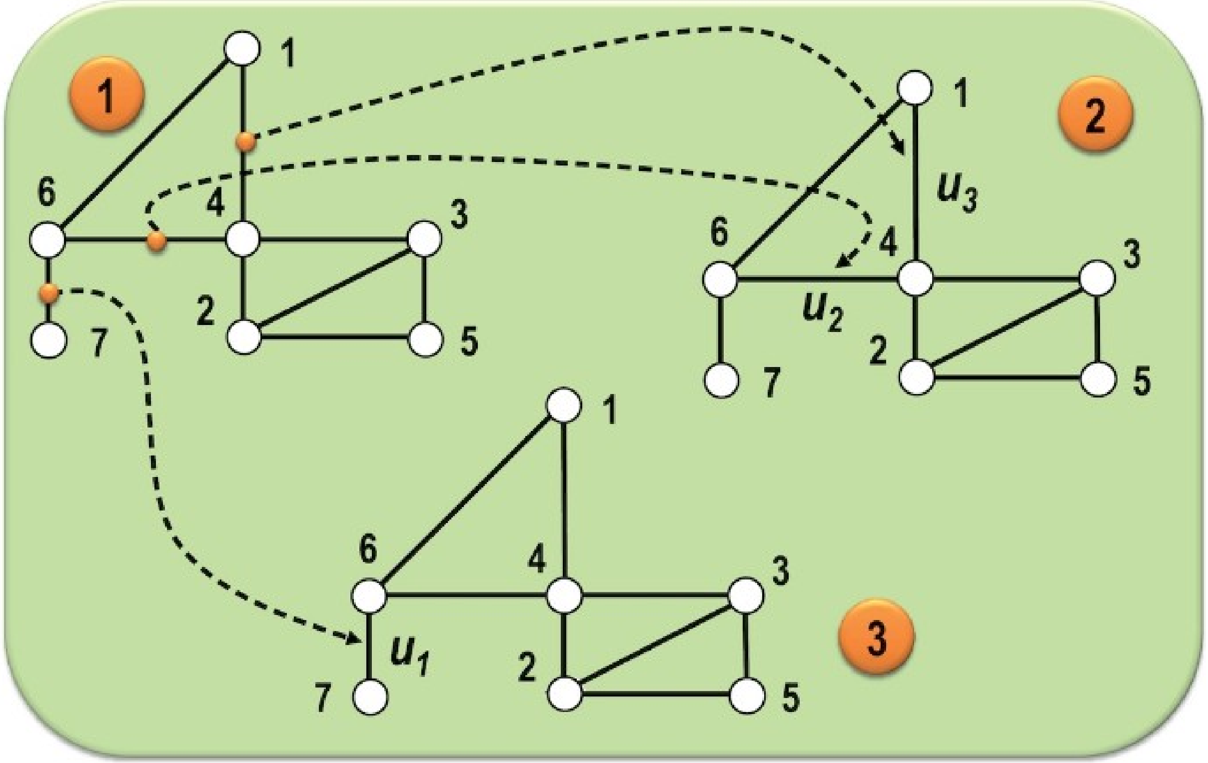
- Aresta de articulação (ou ponte)
  - Uma aresta de articulação de um grafo G é uma aresta cuja remoção resulta na desconexão de G.



A aresta u_1 é de articulação.

Articulação

- Aresta de articulação (ou ponte)
  - Uma aresta de articulação de um grafo G é uma aresta cuja remoção resulta na desconexão de G.



A aresta u_1 é de articulação. As arestas u_2 e u_3 não são.

Articulação

Articulação

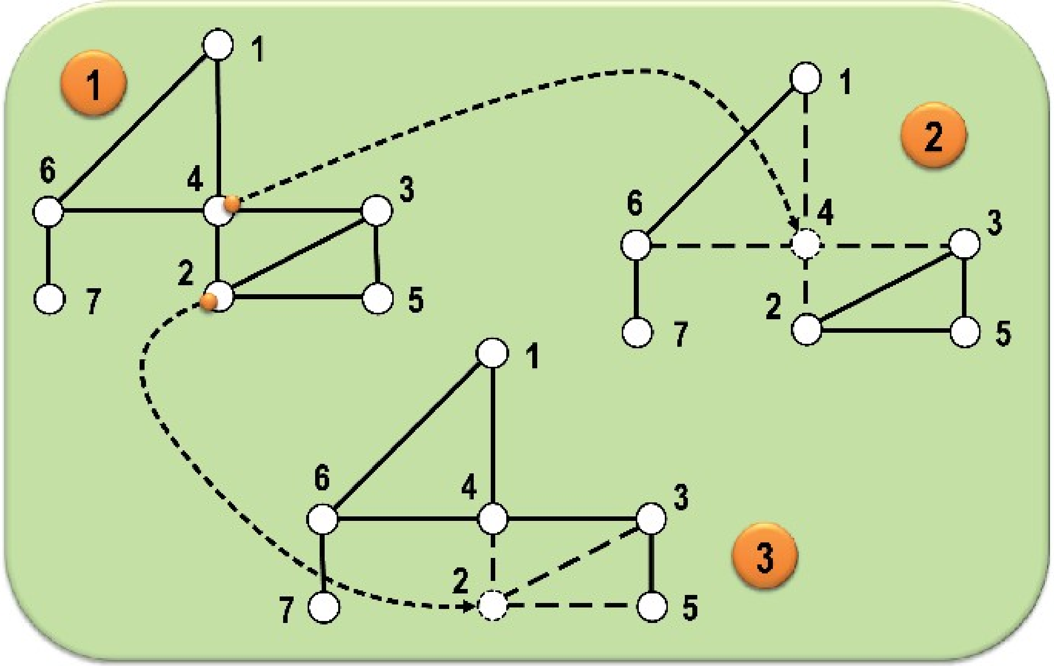
- Vértice de Articulação

Articulação

- Vértice de Articulação
  - Um vértice de articulação de um grafo G é um vértice cuja remoção resulta na desconexão de G.

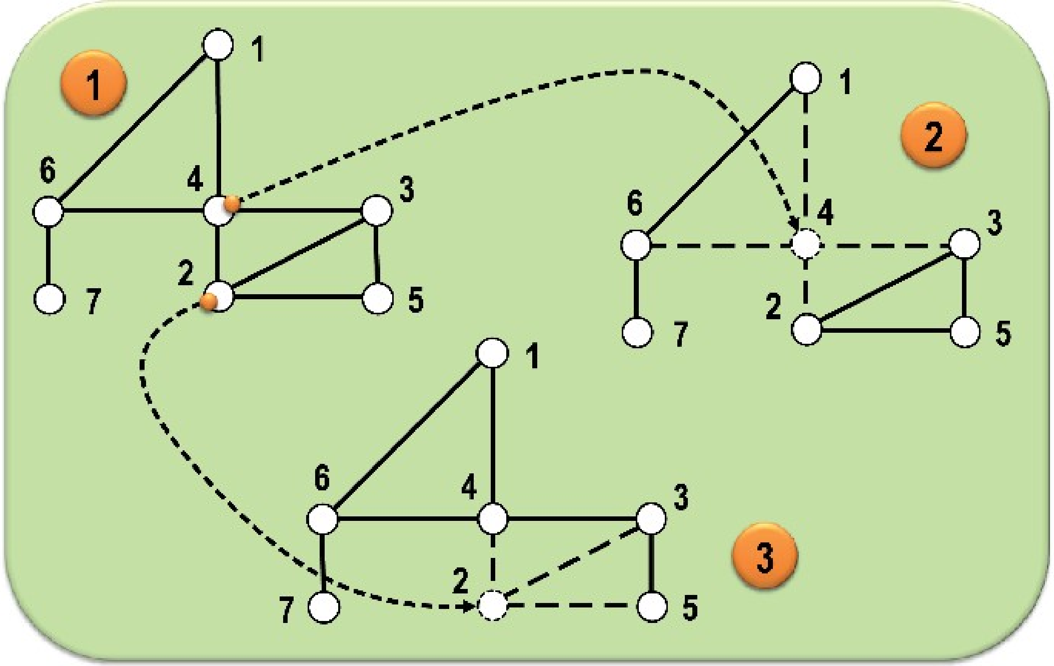
Articulação

- Vértice de Articulação
  - Um vértice de articulação de um grafo G é um vértice cuja remoção resulta na desconexão de G.



Articulação

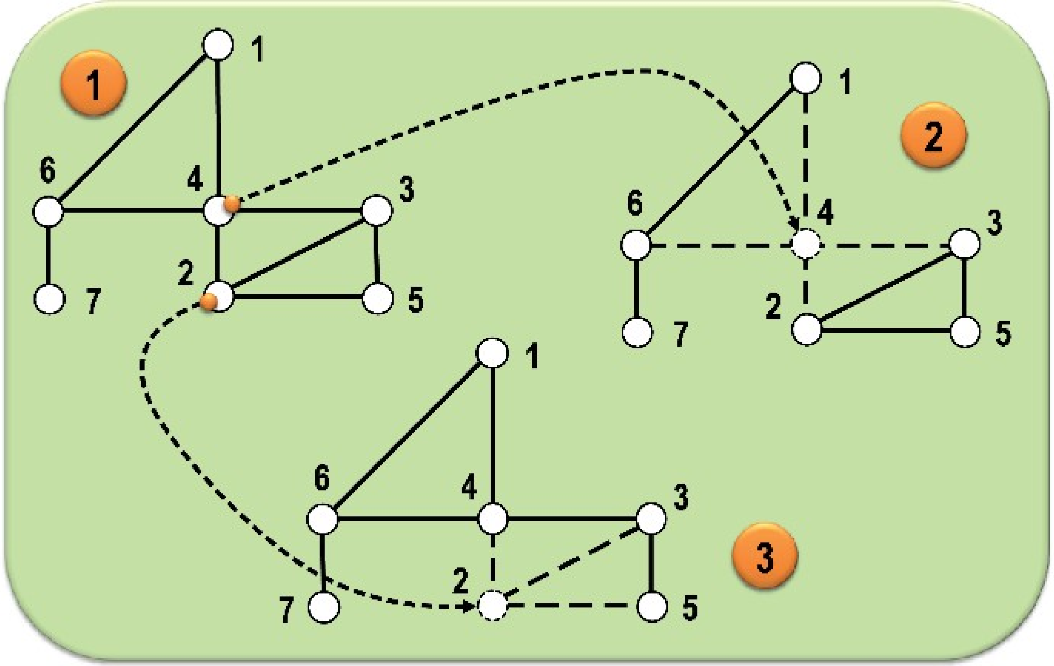
- Vértice de Articulação
  - Um vértice de articulação de um grafo G é um vértice cuja remoção resulta na desconexão de G.



O vértice 4 é de articulação.

Articulação

- Vértice de Articulação
  - Um vértice de articulação de um grafo G é um vértice cuja remoção resulta na desconexão de G.



O vértice 4 é de articulação. O vértice 2 não é de articulação.

EXERCÍCIOS

Exercícios

- Qual é a conectividade dos vértices do grafo abaixo?