Teoria dos Grafos

PASSEIOS, TRILHAS E CAMINHOS

Prof. Tiago Eugenio de Melo
tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

Observações

- As definições e teorias apresentadas aqui foram baseadas no livro *Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação* (LTC, 2018).

Observações

- As definições e teorias apresentadas aqui foram baseadas no livro *Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação* (LTC, 2018).
- A numeração das definições e teoremas seguem as mesmas referências adotadas no livro para facilitar a localização.

CONCEITOS INICIAIS

Conceitos Iniciais

- Muitos problemas em Teoria dos Grafos estão relacionados com a possibilidade de se chegar a um vértice do grafo a partir de outro vértice, seguindo uma sequência de arestas.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.1**
  - Um **passeio** em um grafo é uma sequência finita:

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$$

Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.2**

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.2**
  - Considere o grafo G = (V,E) e um passeio em G dado pela sequência:

    $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.2**
  - Considere o grafo G = (V,E) e um passeio em G dado pela sequência:

    $$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$$

  - O inteiro k, que é o número de arestas do passeio, é chamado **comprimento** de W.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.3**
  - Um **passeio trivial** em um grafo G é um passeio com nenhuma aresta.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.3**
  - Um **passeio trivial** em um grafo G é um passeio com <u>nenhuma aresta</u>.
  - Dado um grafo $G = (V,E)$, para qualquer vértice $v \in V$, o passeio $W = v$ é um passeio trivial e tem comprimento 0.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.4**
  - Seja G = (V,E) um grafo.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.4**
  - Seja $G = (V,E)$ um grafo.
  - Dados dois vértices $u \in V$, $v \in V$ em G, um passeio $u-v$ é **fechado** se $u = v$ e **aberto** de $u \neq v$.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.5**
  - Seja G = (V,E) um grafo e considere o passeio $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.5**
  - Seja G = (V,E) um grafo e considere o passeio $W = v_0 e_1 v_1 e_2 ... v_{k-1} e_k v_k$
  - Se as arestas e1, e2, ..., ek de W são distintas, então W é chamado **trilha**.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.5**
  - Seja G = (V,E) um grafo e considere o passeio $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$
  - Se as <u>arestas</u> e1, e2, ..., ek de W são distintas, então W é chamado **trilha**.
  - Uma trilha que começa e termina no mesmo vértice v é chamada **trilha fechada** ou circuito, caso contrário, é uma **trilha aberta**.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.6**
  - Seja G = (V,E) um grafo e considere a trilha
    $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.6**
  - Seja G = (V,E) um grafo e considere a trilha $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$
  - Se os vértices v0, v1, ..., vk de W são distintos, então W é chamado **caminho**.

Conceitos Iniciais

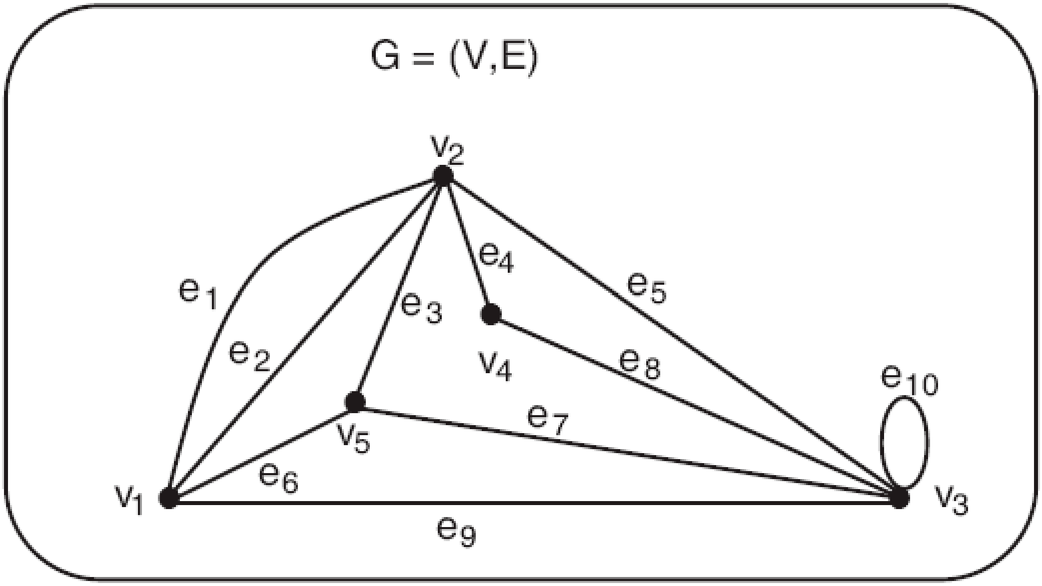
- **Definição 4.6**
  - Seja G = (V,E) um grafo e considere a trilha $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$
  - Se os vértices v0, v1, ..., vk de W são distintos, então W é chamado **caminho**.
  - Um caminho que começa e termina no mesmo vértice é chamado **caminho fechado ou ciclo**.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.6**
  - Seja G = (V,E) um grafo e considere a trilha $W = v_0 e_1 v_1 e_2 ... v_{k-1} e_k v_k$
  - Se os vértices v0, v1, ..., vk de W são distintos, então W é chamado **caminho**.
  - Um caminho que começa e termina no mesmo vértice é chamado **caminho fechado ou ciclo**.
  - Um caminho que não é fechado é chamado **caminho aberto**.

Exemplo

Grafo G = (V,E) em que V = {v1, v2, v3, v4, v5} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7,e8, e9, e10}

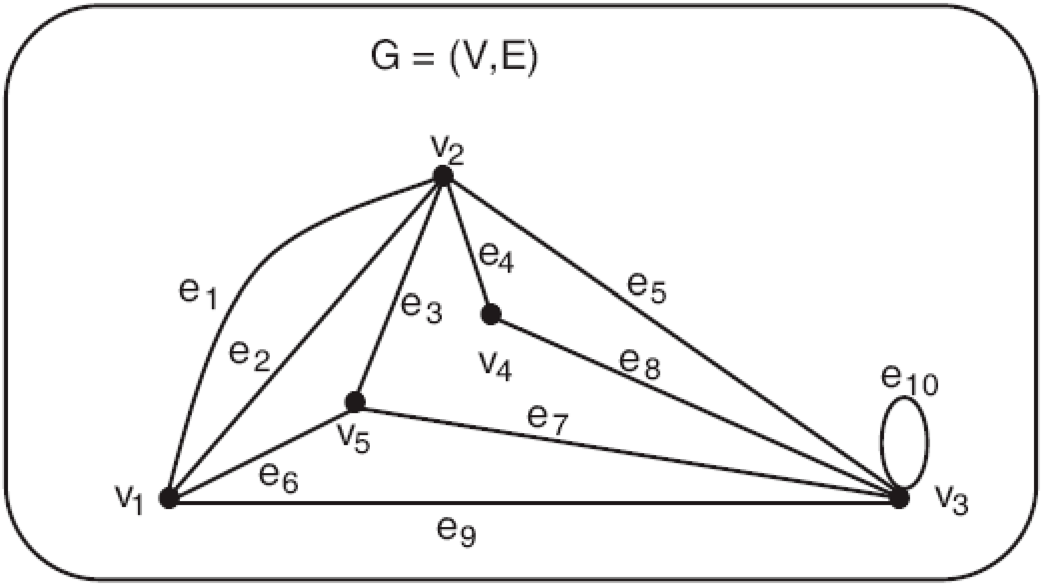


$W_1 = v_1 e_1 v_2 e_5 v_3 e_{10} v_3 e_5 v_2 e_3 v_5$

é um passeio aberto de tamanho 5 de v1 a v5.

Exemplo

Grafo G = (V,E) em que V = {v1, v2, v3, v4, v5} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7,e8, e9, e10}

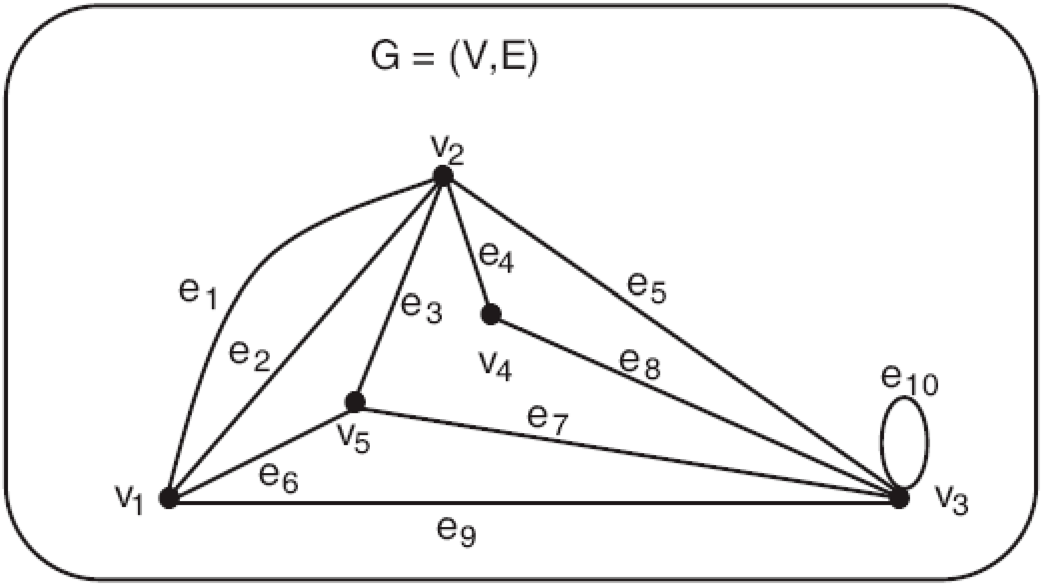


$$W_2 = v_1 e_1 v_2 e_1 v_1 e_1 v_2$$

é um passeio aberto de tamanho 3 de v1 a v2.

Exemplo

Grafo G = (V,E) em que V = {v1, v2, v3, v4, v5} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7,e8, e9, e10}

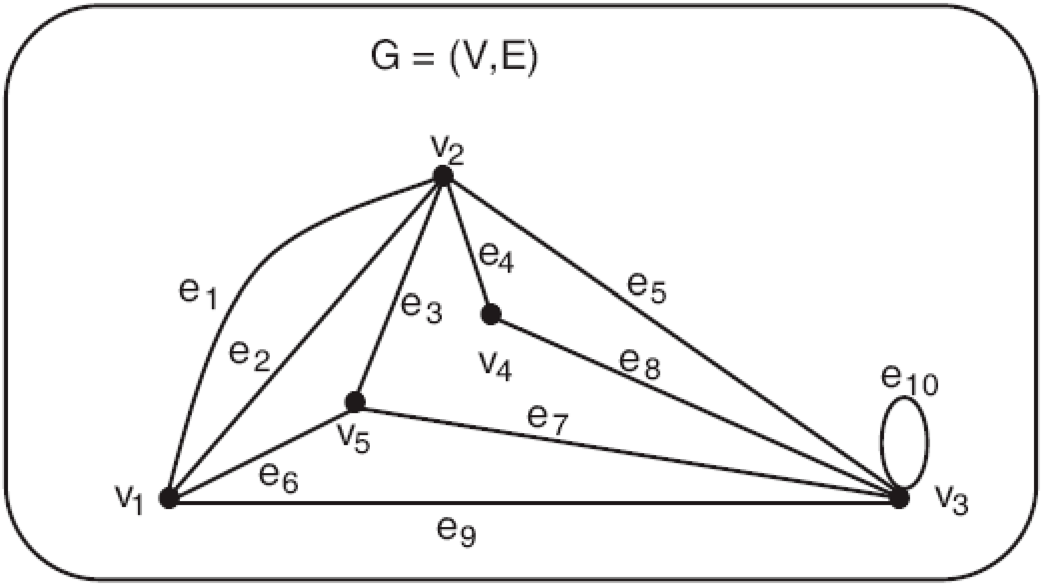


$$W_3 = v_1 v_5 v_2 v_4 v_3 v_1$$

é um passeio fechado de tamanho 5.

Exemplo

Grafo G = (V,E) em que V = {v1, v2, v3, v4, v5} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7,e8, e9, e10}

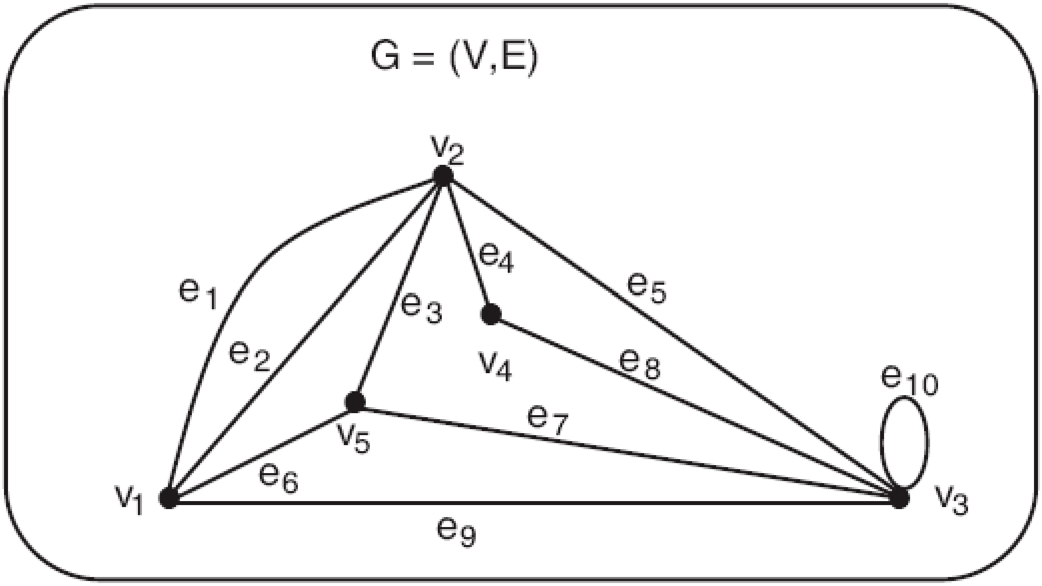


$$W_4 = v_2 v_4 v_3 v_5 v_1$$

é um caminho de comprimento 4.

Exemplo

Grafo G = (V,E) em que V = {v1, v2, v3, v4, v5} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7,e8, e9, e10}

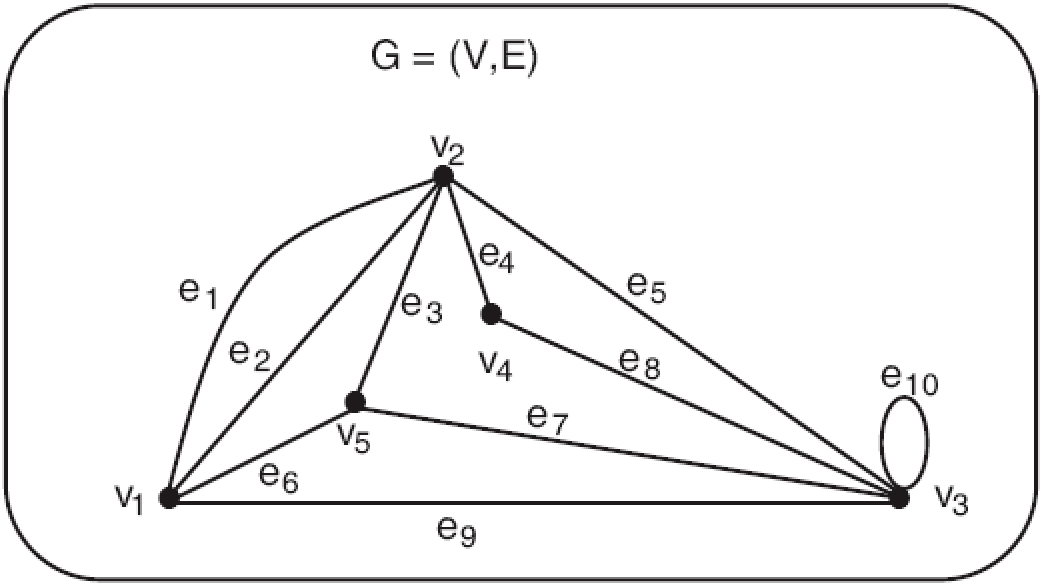


W1 e W2 não são trilhas.

$$W_1 = v_1 e_1 v_2 e_5 v_3 e_{10} v_3 e_5 v_2 e_3 v_5 \qquad W_2 = v_1 e_1 v_2 e_1 v_1 e_1 v_2$$

Exemplo

Grafo G = (V,E) em que V = {v1, v2, v3, v4, v5} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7,e8, e9, e10}

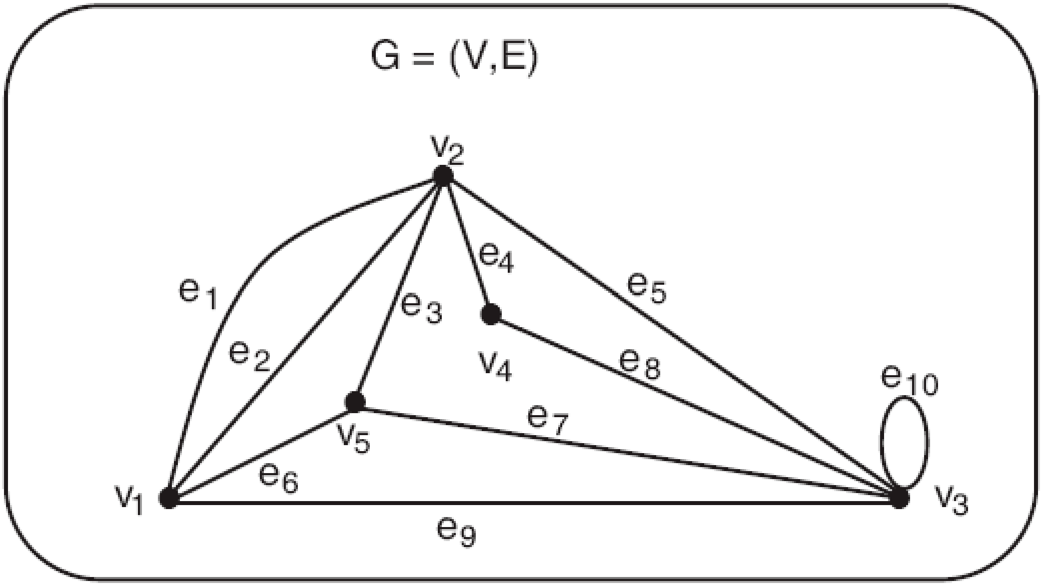


W3 é uma trilha fechada.

$$W_3 = v_1 v_5 v_2 v_4 v_3 v_1$$

Exemplo

Grafo G = (V,E) em que V = {v1, v2, v3, v4, v5} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7,e8, e9, e10}



W3 é um ciclo.

$$W_3 = v_1 v_5 v_2 v_4 v_3 v_1$$

CONECTIVIDADE EM GRAFOS

Conectividade em Grafos

- **Definição 4.7**
  - Seja $G = (V,E)$ um grafo.

Conectividade em Grafos

- **Definição 4.7**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - Diz-se que o vértice u está **conectado** ao vértice v em G se existir um caminho de u a v em G.

Conectividade em Grafos

Conectividade em Grafos

- Consequências da Definição 4.7:

Conectividade em Grafos

- Consequências da Definição 4.7:
  - Se u está conectado a v, então v está conectado a u (pelo caminho inverso).

Conectividade em Grafos

- Consequências da Definição 4.7:
  - Se u está conectado a v, então v está conectado a u (pelo caminho inverso).
  - Qualquer vértice u está conectado a si próprio pelo caminho trivial P = u.

Conectividade em Grafos

- Consequências da Definição 4.7:
  - Se u está conectado a v, então v está conectado a u (pelo caminho inverso).
  - Qualquer vértice u está conectado a si próprio pelo caminho trivial P = u.
  - Se u está conectado a v e v está conectado a w, então u está conectado a w.

Conectividade em Grafos

- **Definição 4.8**
  - Seja G = (V,E) um grafo.

Conectividade em Grafos

- **Definição 4.8**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - Diz-se que G é conexo se quaisquer dois de seus vértices estão conectados.

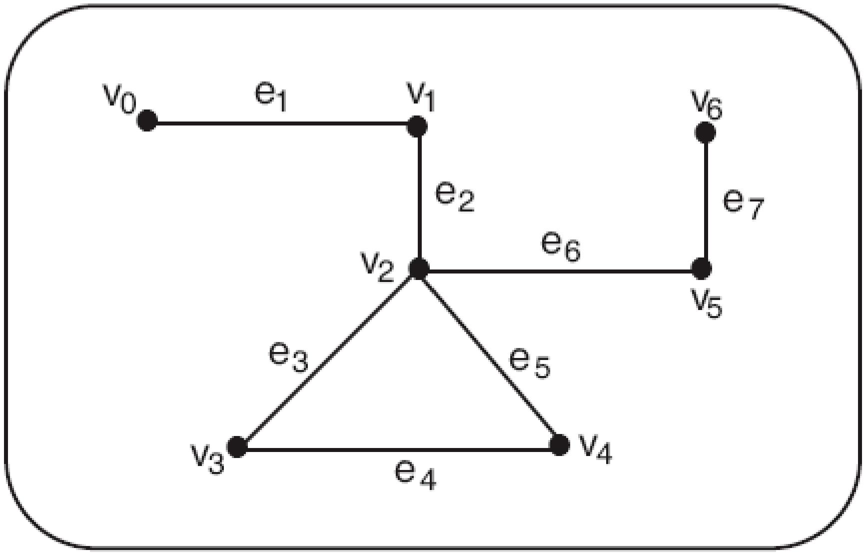
Conectividade em Grafos

- **Definição 4.8**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - Diz-se que G é conexo se quaisquer dois de seus vértices estão conectados.
  - Um grafo que não é conexo é chamado desconexo.

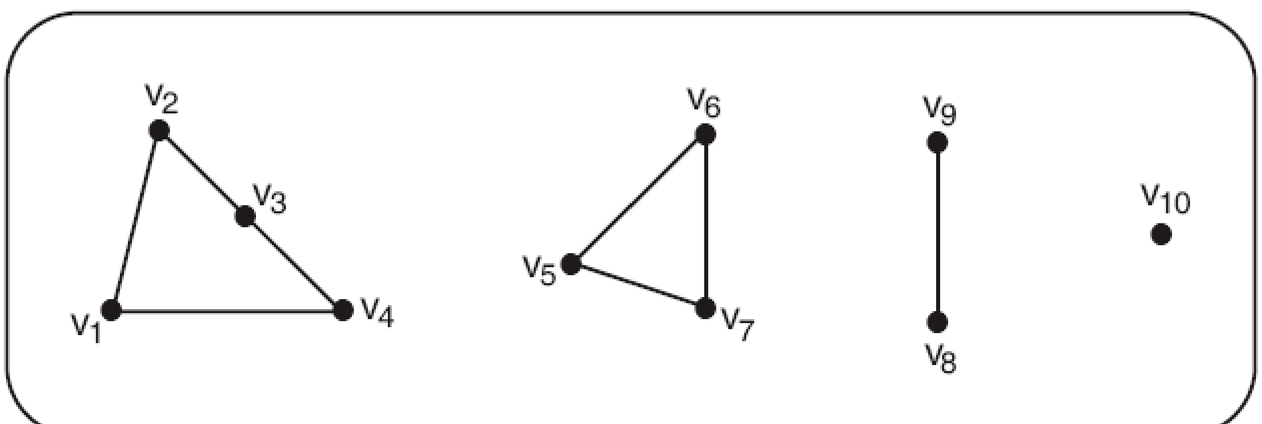
Conectividade em Grafos

- **Definição 4.8**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - Diz-se que G é conexo se quaisquer dois de seus vértices estão conectados.
  - Um grafo que não é conexo é chamado desconexo.
  - Em um grafo conexo, é sempre possível ir de qualquer vértice do grafo a qualquer outro, seguindo as arestas do grafo.

Exemplo



Grafo conexo.



Grafo desconexo com dez vértices e oito arestas.

Conectividade em Grafos

- **Definição 4.9**
  - Seja G = (V,E) um grafo.

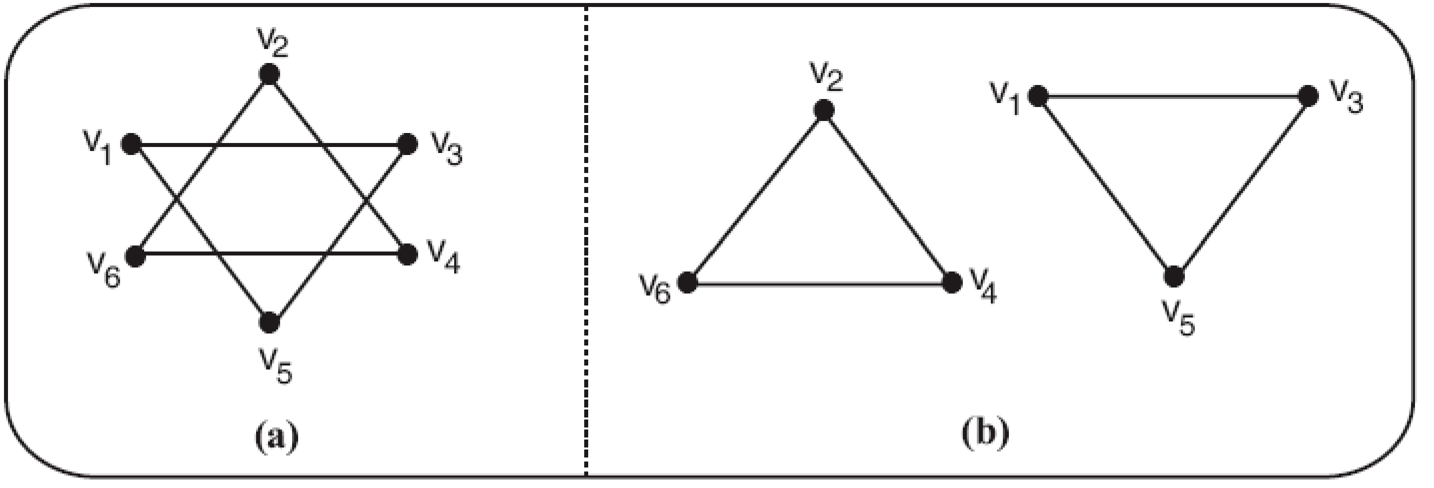
Conectividade em Grafos

- **Definição 4.9**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - Dado qualquer vértice u de G, seja C(u) o conjunto de todos os vértices de G que estão conectados a u.

Conectividade em Grafos

- **Definição 4.9**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - Dado qualquer vértice u de G, seja C(u) o conjunto de todos os vértices de G que estão conectados a u.
  - O subgrafo de G induzido por C(u) é chamado de componente conexo contendo u ou simplesmente de componente contendo u.

Exemplo



(a) Grafo G. (b) Os dois componentes conexos de G.

Conectividade em Grafos

- **Teorema 4.3**
  - Qualquer grafo conexo G, com n vértices, deve ter pelo menos n−1 arestas.

Conectividade em Grafos

- **Teorema 4.4**
  - Se um grafo simples com n vértices tem **mais** do que $\binom{n-1}{2}$ arestas, então deve ser conexo.

Exemplo

Exemplo

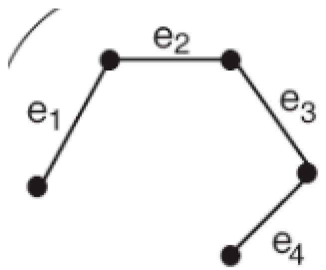
- Considere um grafo G com 5 vértices.

Exemplo

- Considere um grafo G com 5 vértices.
- Quantas arestas seriam necessárias para que ele seja conexo?

Exemplo

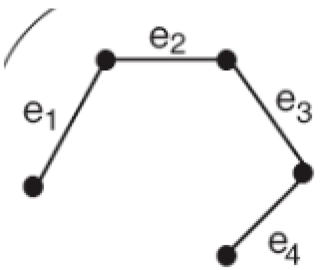
- Considere um grafo G com 5 vértices.
- Quantas arestas seriam necessárias para que ele seja conexo?



(a)

Exemplo

- Considere um grafo G com 5 vértices.
- Quantas arestas seriam necessárias para que ele seja conexo?

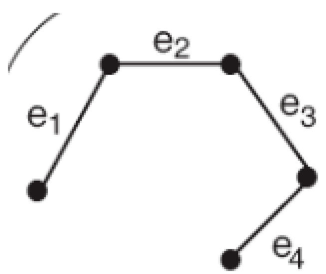


(a)

4 arestas

Exemplo

- Considere um grafo G com 5 vértices.
- Quantas arestas seriam necessárias para que ele seja conexo?



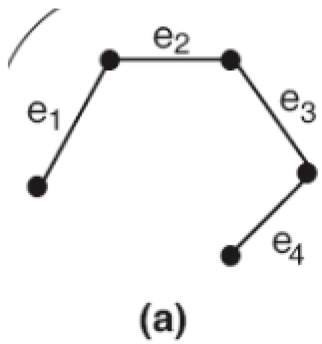
(a)

4 arestas

- 4 arestas garantem a conectividade?

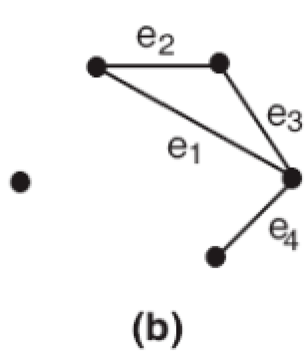
Exemplo

- Considere um grafo G com 5 vértices.
- Quantas arestas seriam necessárias para que ele seja conexo?



4 arestas

- 4 arestas garantem a conectividade?



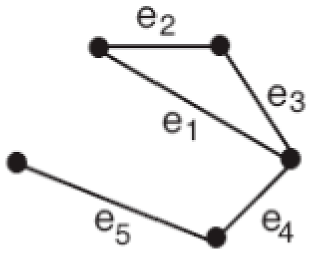
Exemplo

Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e5?

Exemplo

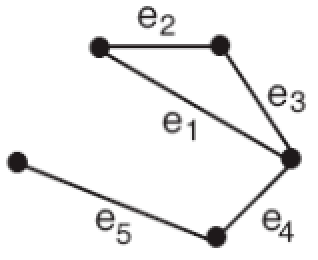
- E se fosse adicionada a aresta e5?



(c)

Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e5?

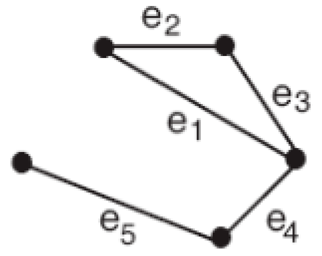


(c)

- 5 arestas garantem a conectividade?

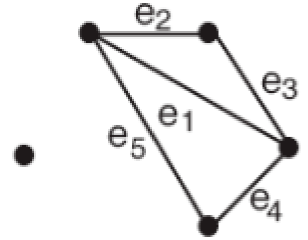
Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e5?



(c)

- 5 arestas garantem a conectividade?



(d)

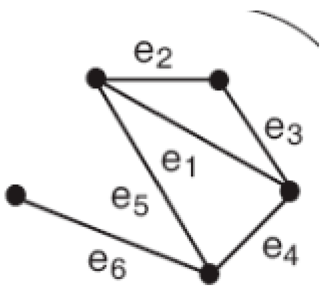
Exemplo

Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e6?

Exemplo

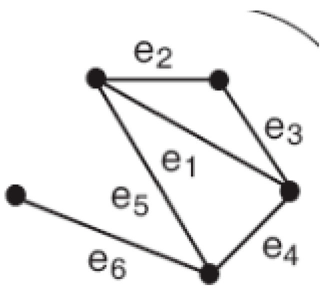
- E se fosse adicionada a aresta e6?



(e)

Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e6?

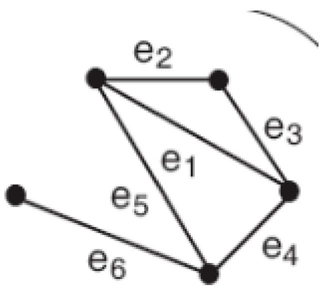


(e)

- 6 arestas garantem a conectividade?

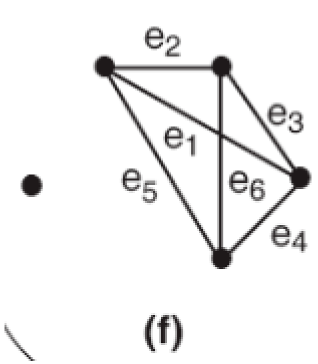
Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e6?



(e)

- 6 arestas garantem a conectividade?



(f)

Exemplo

Exemplo

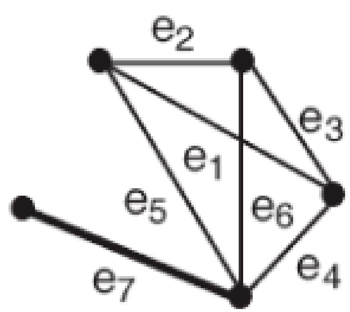
- E se fosse adicionada a aresta e7?

Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e7?
- Existem 4 possibilidades:

Exemplo

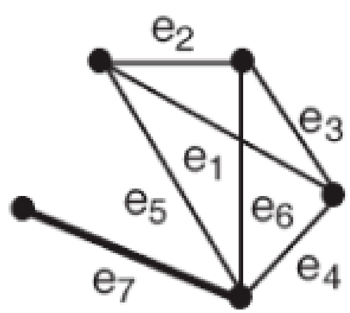
- E se fosse adicionada a aresta e7?
- Existem 4 possibilidades:



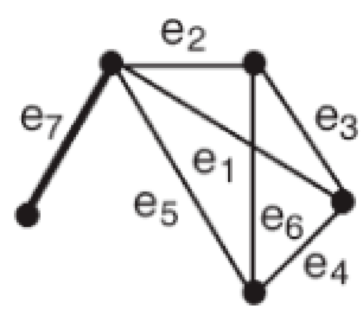
(g)

Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e7?
- Existem 4 possibilidades:



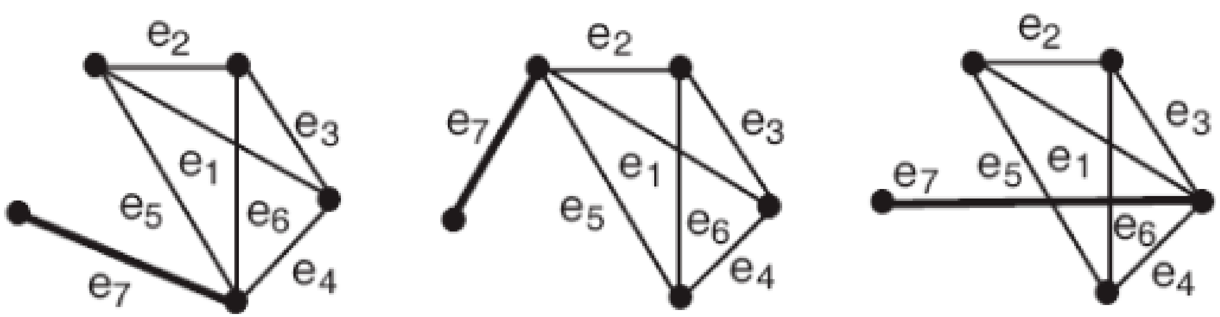
(g)



(h)

Exemplo

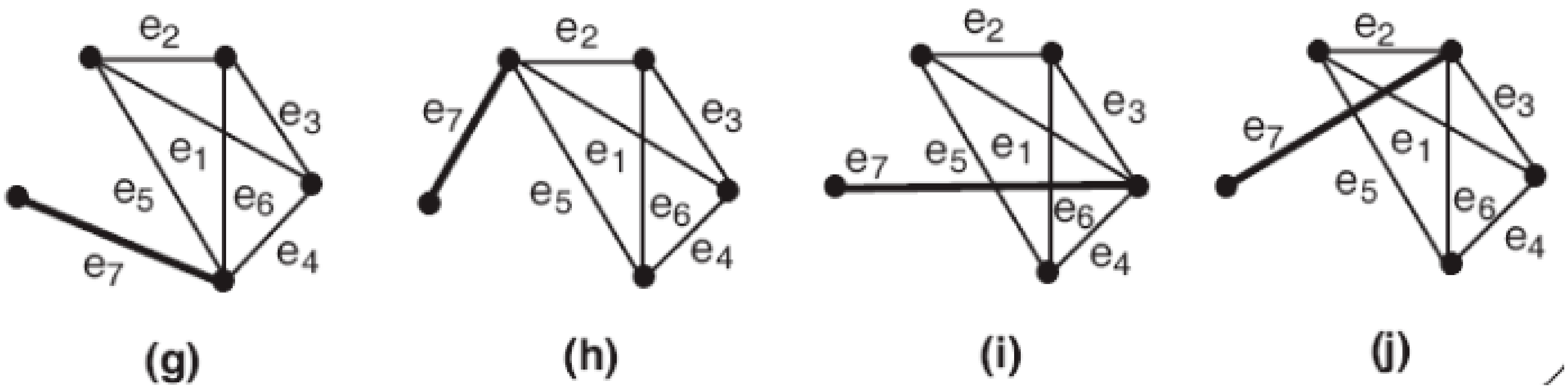
- E se fosse adicionada a aresta e7?
- Existem 4 possibilidades:



(g) (h) (i)

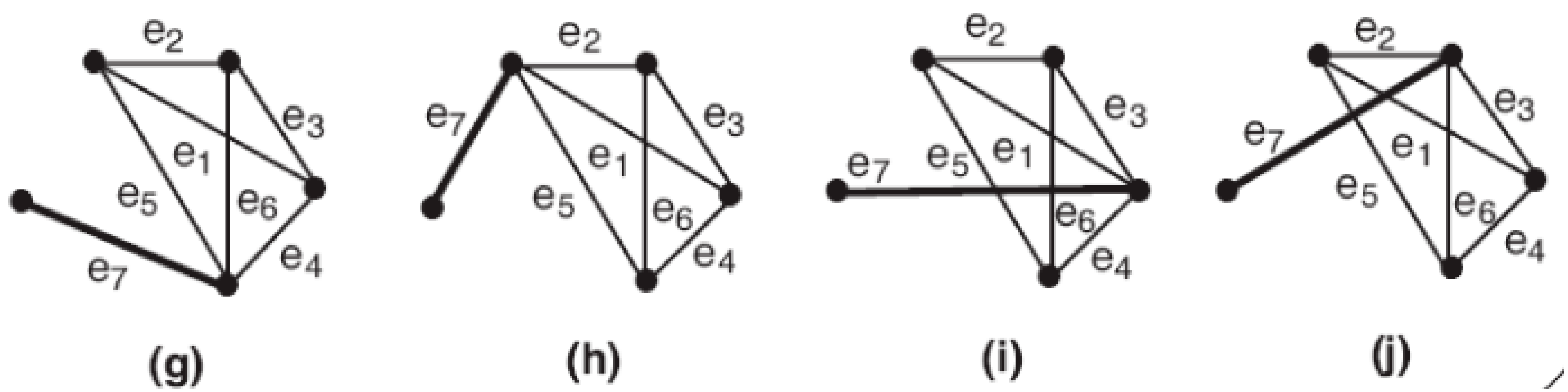
Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e7?
- Existem 4 possibilidades:



Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e7?
- Existem 4 possibilidades:



- Qualquer que seja a posição da nova aresta, o resultado final é um <u>grafo conexo</u>.

CONCEITOS SUBJACENTES

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.10**
  - Seja G = (V,E) um grafo.

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.10**
  - Seja $G = (V,E)$ um grafo.
  - Para quaisquer dois vértices u e v conectados por um caminho em G, a distância entre u e v, denotada por $d(u,v)$, é definida como o comprimento do caminho mais curto entre u e v.

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.10**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - Para quaisquer dois vértices u e v conectados por um caminho em G, a distância entre u e v, denotada por d(u,v), é definida como o comprimento do caminho mais curto entre u e v.
  - Se não existe caminho entre u e v, define-se a distância d(u,v) = ∞.

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.11**
  - Seja G = (V,E) um grafo conectado.

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.11**
  - Seja G = (V,E) um grafo conectado.
  - (1) Para cada $v \in V$, a **excentricidade** de v, denotada por exc(v) é definida como: $exc(v) = \max\{d(u,v) \mid u \in V, u \neq v\}$

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.11**
  - Seja G = (V,E) um grafo conectado.
  - (1) Para cada $v \in V$, a **excentricidade** de v, denotada por exc(v) é definida como: $exc(v) = \max\{d(u,v) \mid u \in V, u \neq v\}$
  - (2) O **raio** de G, denotado por raio(G), é definido por: $raio(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}$

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.11**
  - Seja G = (V,E) um grafo conectado.
  - (1) Para cada $v \in V$, a **excentricidade** de v, denotada por exc(v) é definida como: $exc(v) = \max\{d(u,v) \mid u \in V, u \neq v\}$
  - (2) O **raio** de G, denotado por raio(G), é definido por: $raio(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}$
  - (3) O **diâmetro** de G, denotado por diâmetro(G), é definido como: $diâmetro(G) = \max\{e(v) \mid v \in V\}$. Assim, $diâmetro(G) = \max\{d(u,v) \mid u,v \in V\}$.

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.11**
  - Seja $G = (V,E)$ um grafo conectado.
  - (1) Para cada $v \in V$, a **excentricidade** de v, denotada por exc(v) é definida como: $exc(v) = \max\{d(u,v) \mid u \in V, u \neq v\}$
  - (2) O **raio** de G, denotado por raio(G), é definido por: $raio(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}$
  - (3) O **diâmetro** de G, denotado por diâmetro(G), é definido como: $diâmetro(G) = \max\{e(v) \mid v \in V\}$. Assim, $diâmetro(G) = \max\{d(u,v) \mid u,v \in V\}$.
  - (4) Um vértice $v \in V$ é um vértice central de G se sua excentricidade for igual ao raio de G.

Conceitos Subjacentes

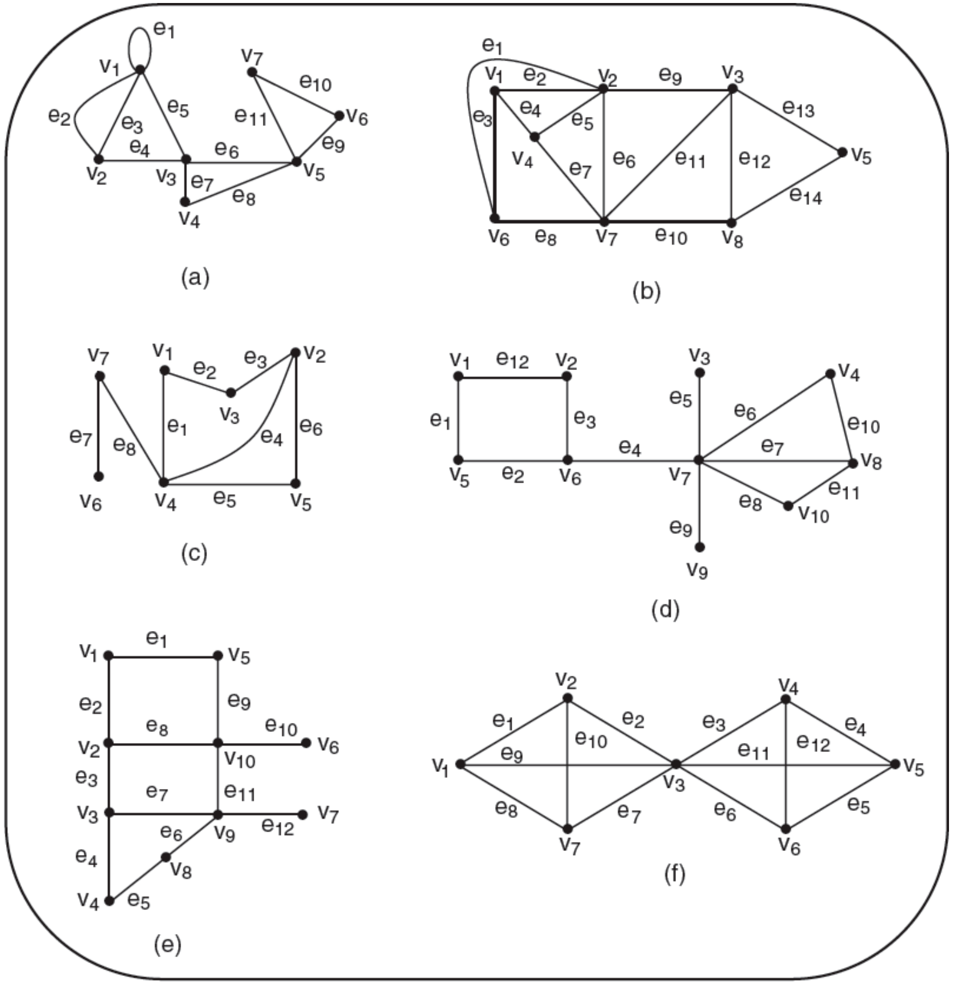
- **Definição 4.11**
  - Seja $G = (V,E)$ um grafo conectado.
  - (1) Para cada $v \in V$, a **excentricidade** de v, denotada por exc(v) é definida como: $exc(v) = \max\{d(u,v) \mid u \in V, u \neq v\}$
  - (2) O **raio** de G, denotado por raio(G), é definido por: $raio(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}$
  - (3) O **diâmetro** de G, denotado por diâmetro(G), é definido como: $diâmetro(G) = \max\{e(v) \mid v \in V\}$. Assim, $diâmetro(G) = \max\{d(u,v) \mid u,v \in V\}$.
  - (4) Um vértice $v \in V$ é um vértice central de G se sua excentricidade for igual ao raio de G.
  - (5) O **centro** de um grafo (i.e., centro(G)) é o conjunto de todos os vértices centrais de G.

Exercícios

- Qual é a diferença entre caminho e trilha? Desenhe um exemplo de cada que mostre a diferença.
- Dado um grafo G com n vértices. Qual é o número mínimo de arestas para que ele seja conexo?

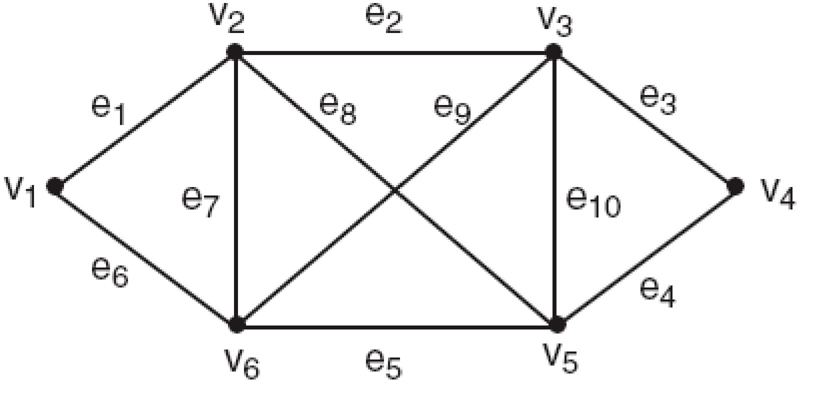
Exercícios

- Para cada um dos grafos a seguir, dê três exemplos de passeios, trilhas e caminhos.



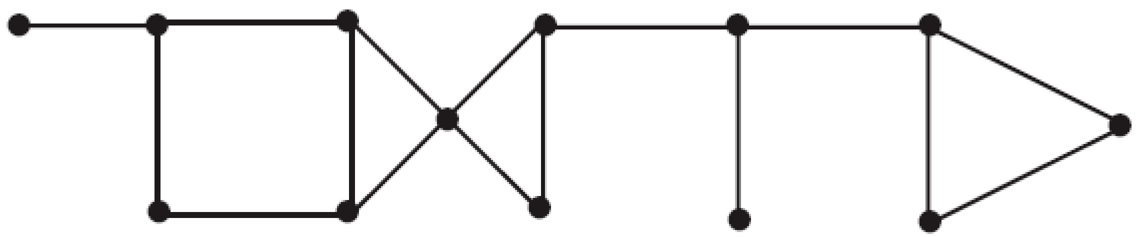
Exercícios

- Encontre, para o grafo a seguir:
  - quatro caminhos diferentes de v1 a v4.
  - quatro diferentes trilhas de v1 a v4, que não sejam caminhos.
  - quatro diferentes passeios de v1 a v4, que não sejam trilhas.



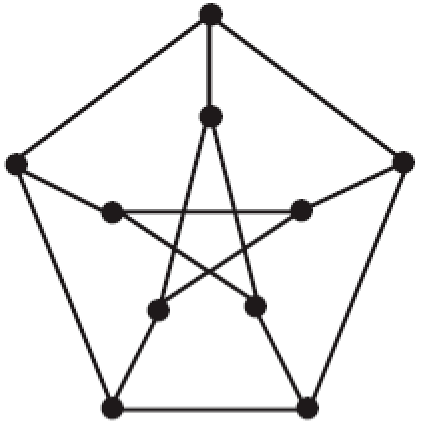
Exercícios

- Considere o grafo abaixo:
  - encontre um passeio fechado de comprimento 6. Seu passeio é uma trilha?
  - encontre um passeio aberto de comprimento 12. Seu passeio é um caminho?
  - encontre uma trilha fechada de comprimento 6. Sua trilha é um ciclo?
  - qual o comprimento do mais longo ciclo em G?
  - qual o comprimento do caminho mais longo em G? Quantos caminhos em G têm esse comprimento?



Exercícios

- No grafo de Petersen a seguir:
  - Encontre uma trilha de comprimento 5.
  - Encontre um caminho de comprimento 9.
  - Encontre ciclos de comprimentos 5, 6, 8 e 9.



Exercícios

- Mostre que não é possível ter um grupo de sete pessoas tal que cada pessoa no grupo conhece exatamente três outras pessoas no grupo.

Exercícios

- Encontre o diâmetro do grafo a seguir.