Teoria dos Grafos

INTRODUÇÃO A GRAFOS

Prof. Tiago Eugenio de Melo
tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

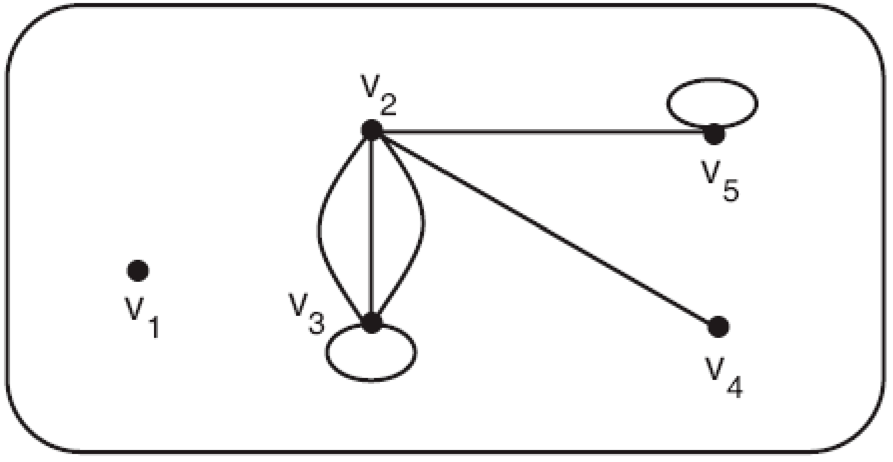
- Teoria dos Grafos (TG) é uma área do conhecimento voltada ao estudo/análise das estruturas matemáticas chamadas **grafos**.

Conceitos Iniciais

- Teoria dos Grafos (TG) é uma área do conhecimento voltada ao estudo/análise das estruturas matemáticas chamadas **grafos**.
- Um grafo pode ser informalmente definido como um conjunto de objetos chamados <u>vértices</u> e um conjunto de <u>arestas</u> que unem pares desses objetos.

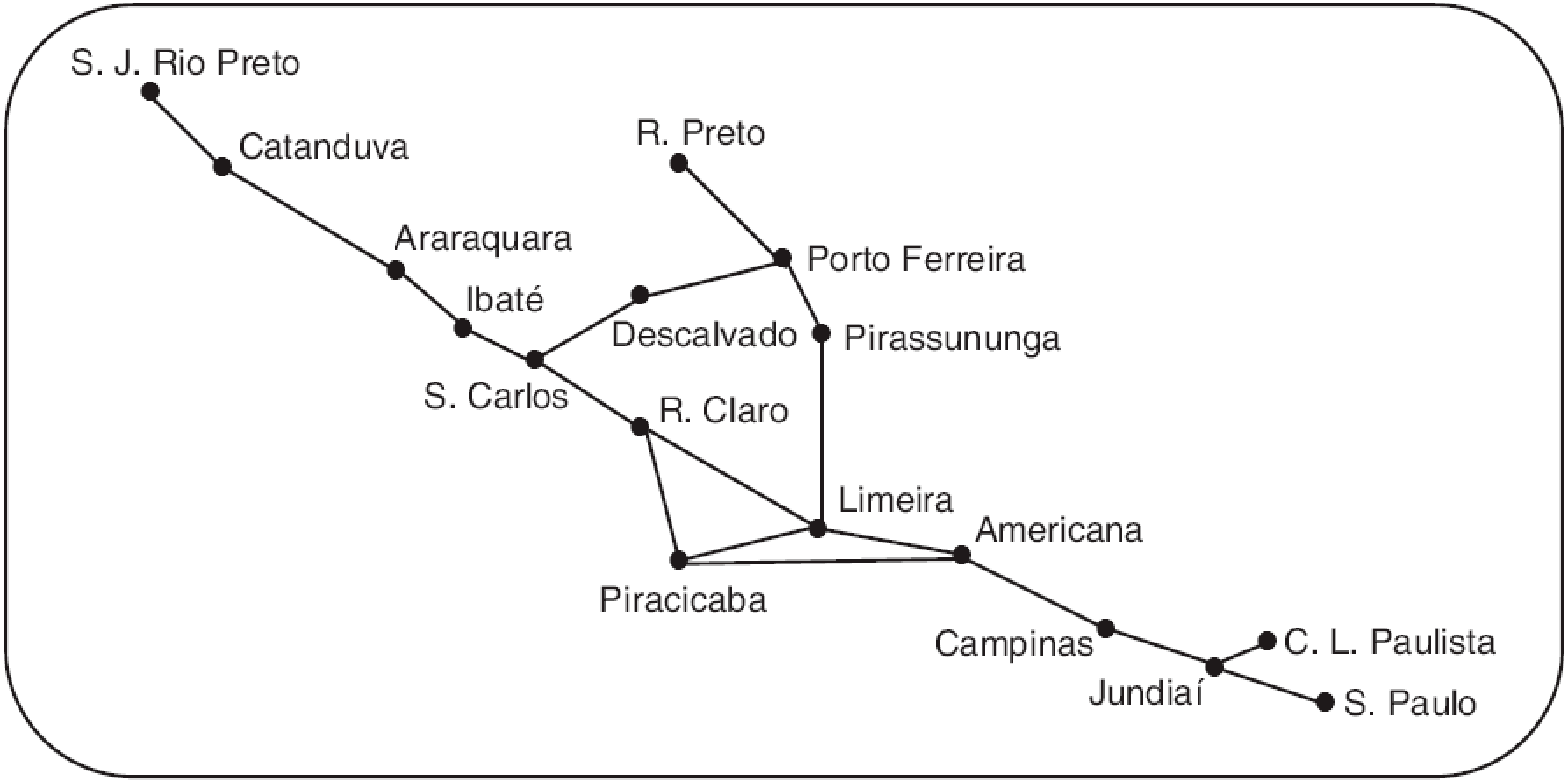
Conceitos Iniciais

- Grafo com cinco vértices {v1, v2, v3, v4, v5} e sete arestas, três das quais são paralelas e duas são loops.



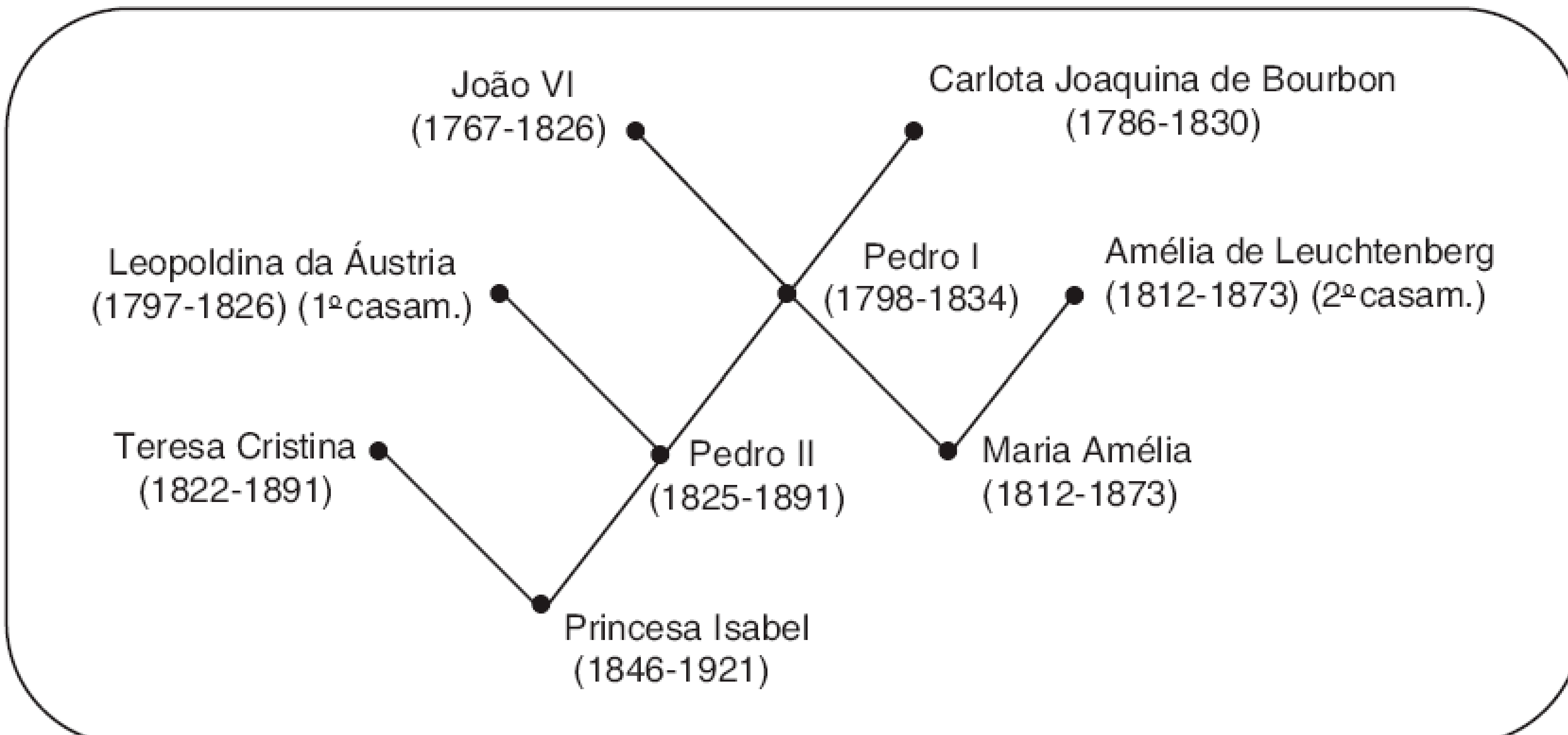
Exemplos

- Grafos podem ser usados para representar mapas.



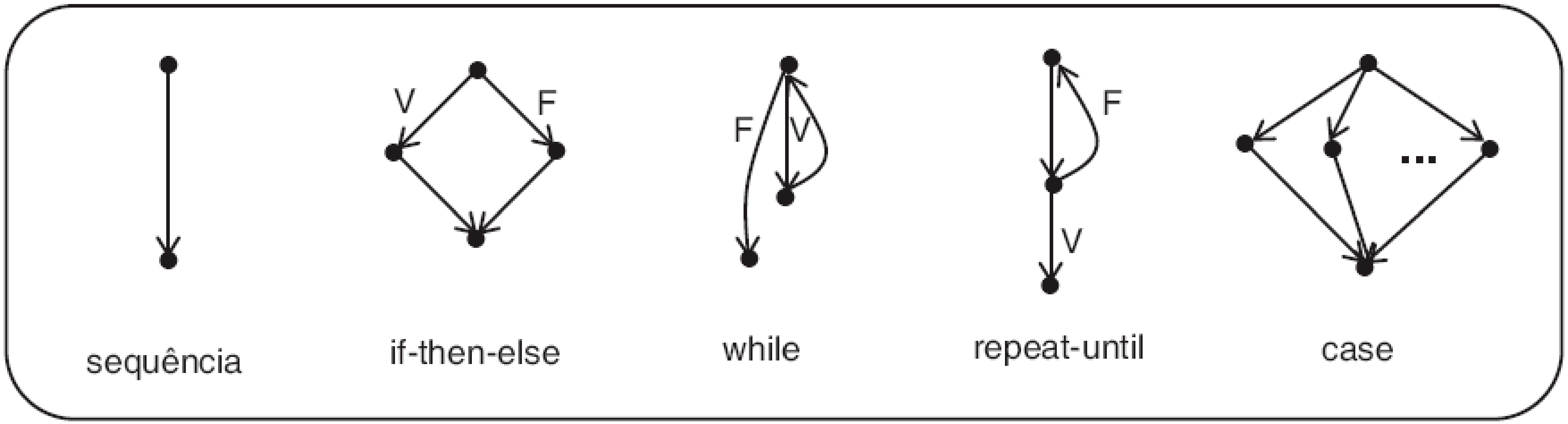
Exemplos

- Grafo como representação de relações familiares.



Exemplos

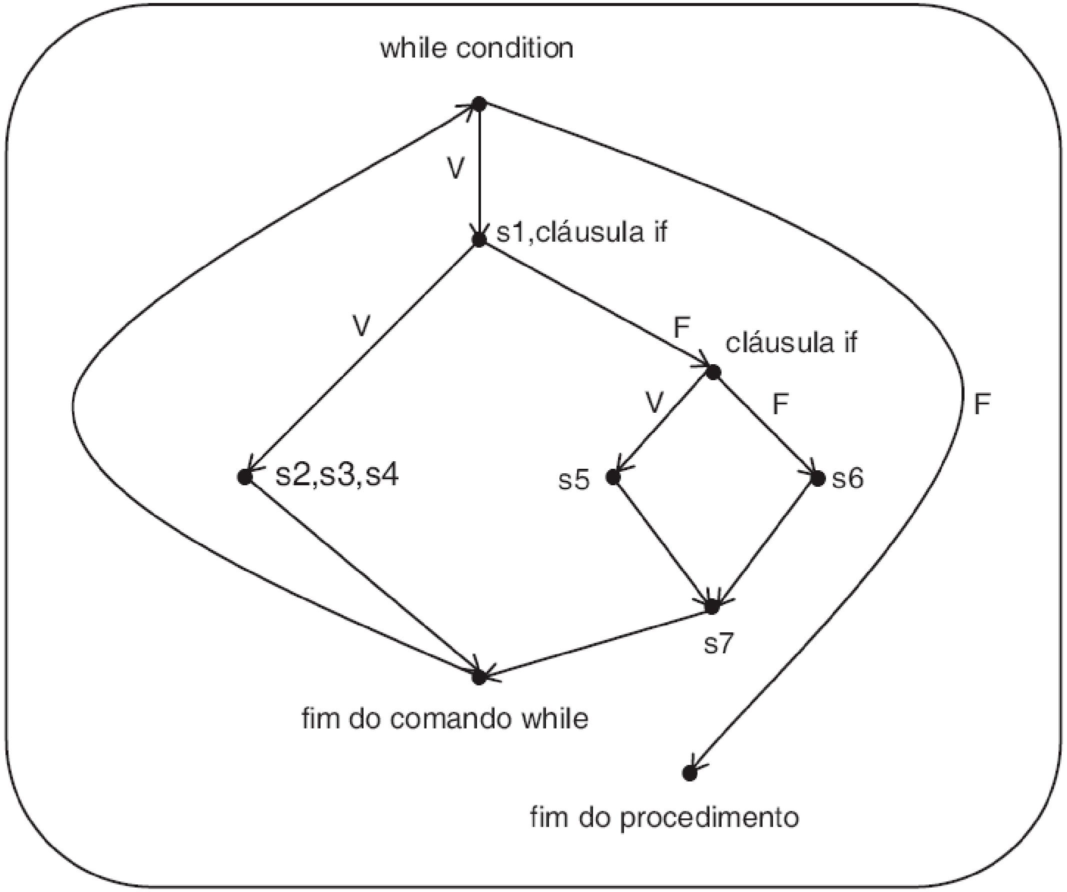
- Modelar um algoritmo ou um programa usando um grafo.



Exemplos

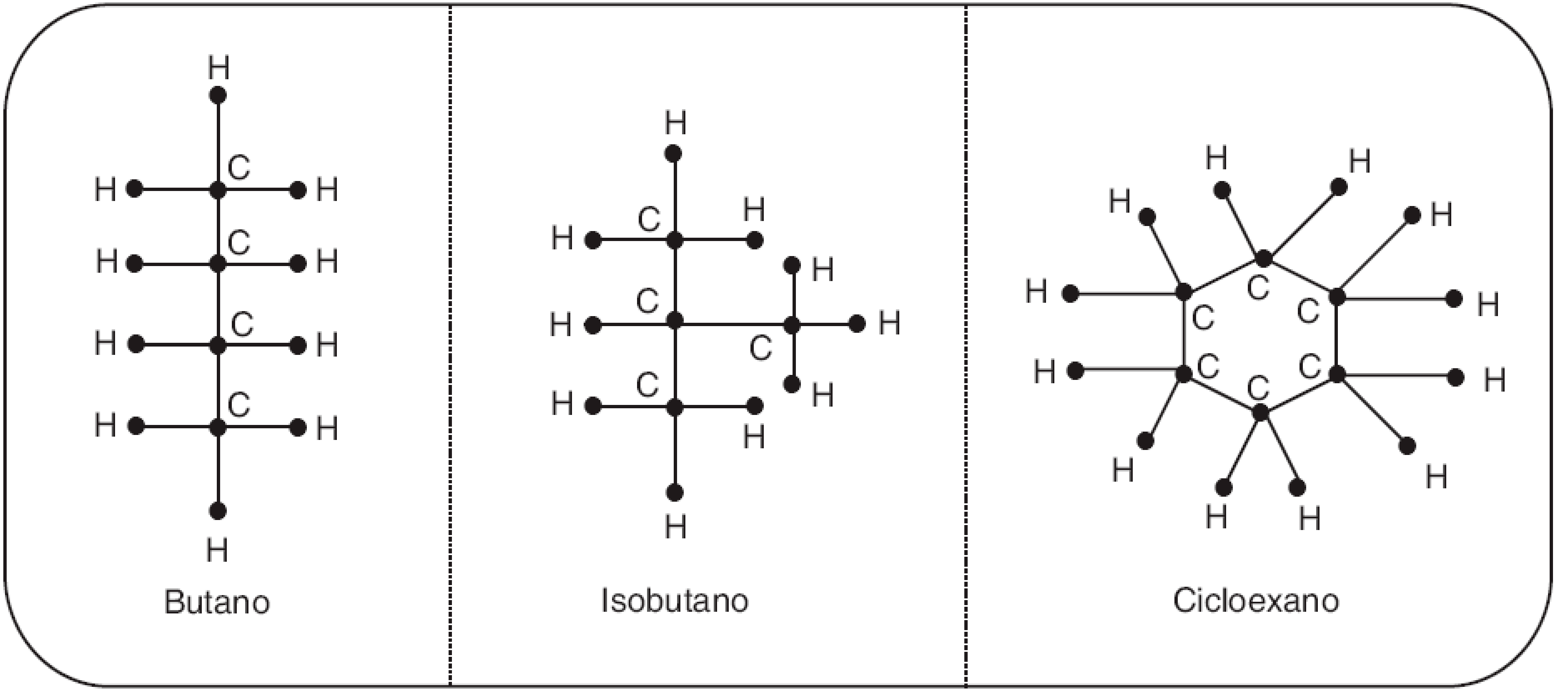
- Modelar um algoritmo ou um programa usando um grafo.

```
procedure whatever (...);
  begin
    while (...)  do
      begin
       s1;
       if Flag1 = 0
            then  begin
                        s2;
                        s3;
                        s4
                    end
            else begin
                        if Flag2 = 0
                             then s5
                             else s6;
                        s7
                    end
      end
  end
```



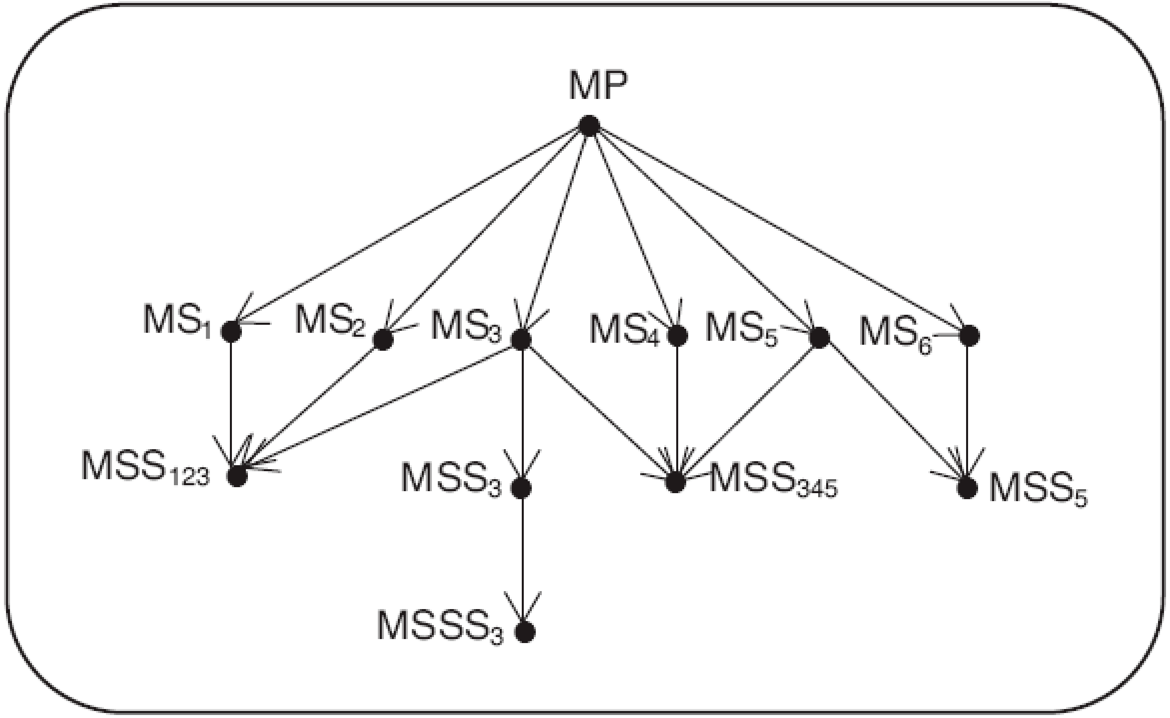
Exemplos

- Em Química, por exemplo, diagramas de moléculas podem ser tratados como grafos.



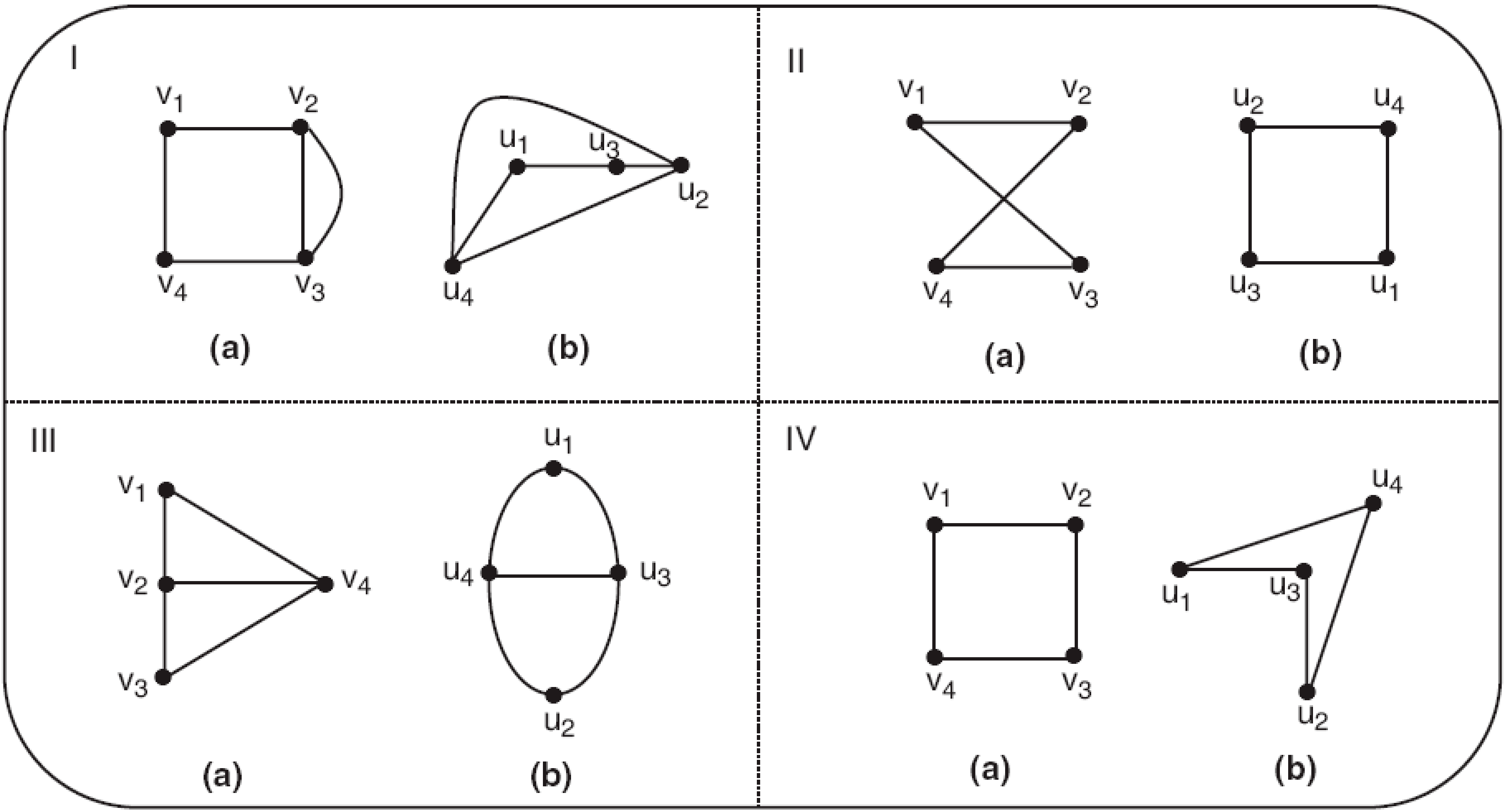
Exemplos

- Uso de grafo na representação da estruturação de chamadas a módulos, em um sistema computacional.



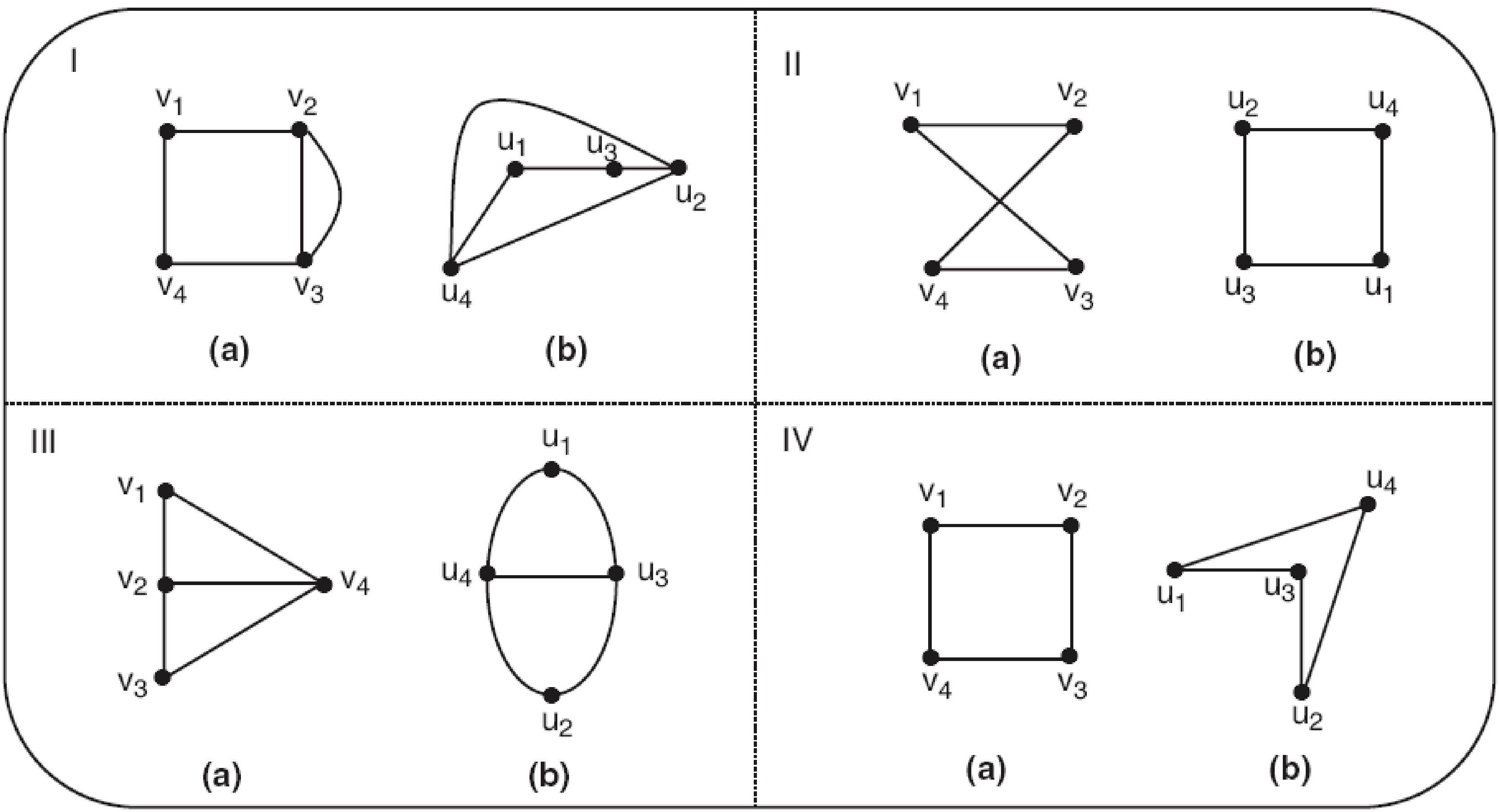
Observação

- A maneira como as arestas dos grafos são desenhadas **não** é importante.



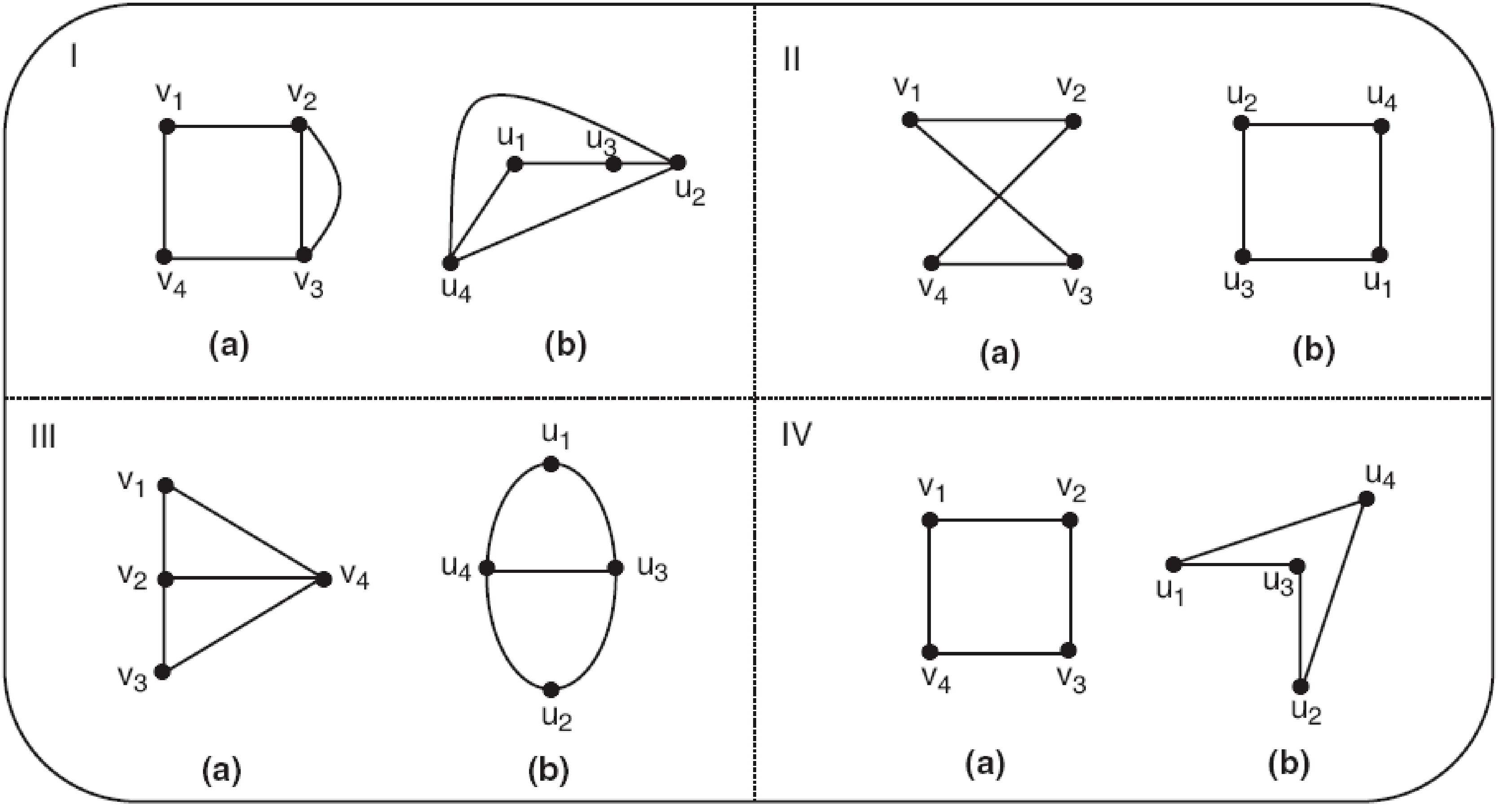
Observação

- O que é importante são os vértices do grafo e o número de arestas entre cada par de vértices (inclusive loops).



Observação

- Em cada uma das partes, I, II, III e IV, os grafos (a) e (b) são **isomorfos**.



Observação

Observação

- As arestas de um grafo podem se cruzar em outros lugares que não os vértices.

Observação

- As arestas de um grafo podem se cruzar em outros lugares que não os vértices.
- Dependendo da modelagem, o fato de as arestas se interceptarem em outros pontos que não nos vértices não tem relevância.

Observação

- As arestas de um grafo podem se cruzar em outros lugares que não os vértices.
- Dependendo da modelagem, o fato de as arestas se interceptarem em outros pontos que não nos vértices não tem relevância.
- Existem grafos, entretanto, com a seguinte propriedade: não importa como eles são desenhados no plano (com linhas não interrompidas), as arestas irão sempre se interceptar em pontos que não são os vértices do grafo.

Observação

Observação

- Grafos que podem ser desenhados no plano sem tais interseções são chamados grafos planos (**grafos planares**).

Observação

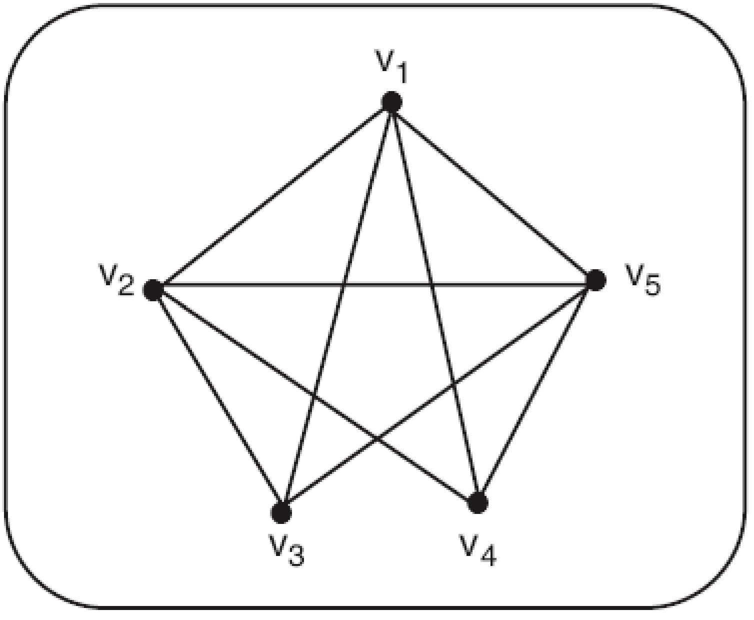
- Grafos que podem ser desenhados no plano sem tais interseções são chamados grafos planos (**grafos planares**).
- A questão de um grafo ser ou não plano é fundamental para a solução de alguns problemas que são modelados como grafos.

Observação

- Grafos que podem ser desenhados no plano sem tais interseções são chamados grafos planos (**grafos planares**).
- A questão de um grafo ser ou não plano é fundamental para a solução de alguns problemas que são modelados como grafos.
- Vários critérios podem ser usados para determinar a planaridade de um grafo.

Observação

- Um grafo não plano:



Observação

Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:

Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:
  - **Grafos direcionados** versus **grafos não direcionados**

Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:
  - **Grafos direcionados** versus **grafos não direcionados**
    - Em um grafo direcionado, cada aresta, geralmente referenciada como arco, tem uma direção associada a ela.

Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:
  - **Grafos direcionados** versus **grafos não direcionados**
    - Em um grafo direcionado, cada aresta, geralmente referenciada como arco, tem uma direção associada a ela.
    - Nos grafos não direcionados, cada aresta pode ser abordada como bidirecional;

Observação

Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:

Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:
  - **Grafos finitos** versus **grafos infinitos**:

Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:
  - **Grafos finitos** versus **grafos infinitos**:
    - Um grafo pode ter infinitos vértices, infinitas arestas ou ambos.

Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:
  - **Grafos finitos** versus **grafos infinitos**:
    - Um grafo pode ter infinitos vértices, infinitas arestas ou ambos.
    - A maioria dos estudos sobre grafos, entretanto, lida com grafos com um número finito de vértices e de arestas.

Observação

Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:

Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:
  - **Grafos rotulados** versus **grafos não rotulados**:

Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:
  - **Grafos rotulados** versus **grafos não rotulados**:
    - Em Teoria dos Grafos não é assumido que vértices ou arestas tenham rótulos (exceto para identificação).

Observação

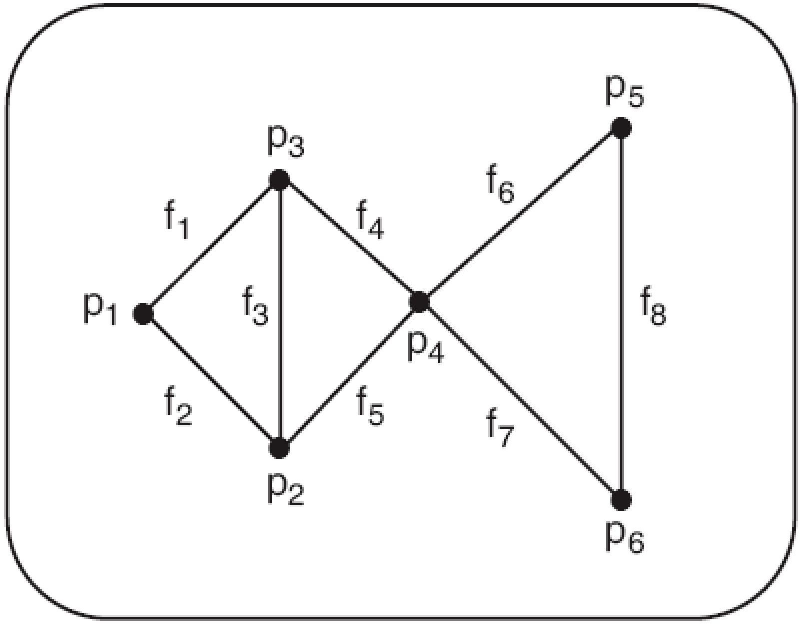
- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:
  - **Grafos rotulados** versus **grafos não rotulados**:
    - Em Teoria dos Grafos não é assumido que vértices ou arestas tenham rótulos (exceto para identificação).
    - Ainda assim, em muitas aplicações, valores são atribuídos tanto a vértices quanto a arestas.

Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:
  - **Grafos rotulados** versus **grafos não rotulados**:
    - Em Teoria dos Grafos não é assumido que vértices ou arestas tenham rótulos (exceto para identificação).
    - Ainda assim, em muitas aplicações, valores são atribuídos tanto a vértices quanto a arestas.
    - A teoria, portanto, deve poder lidar com ambos os tipos de grafos.

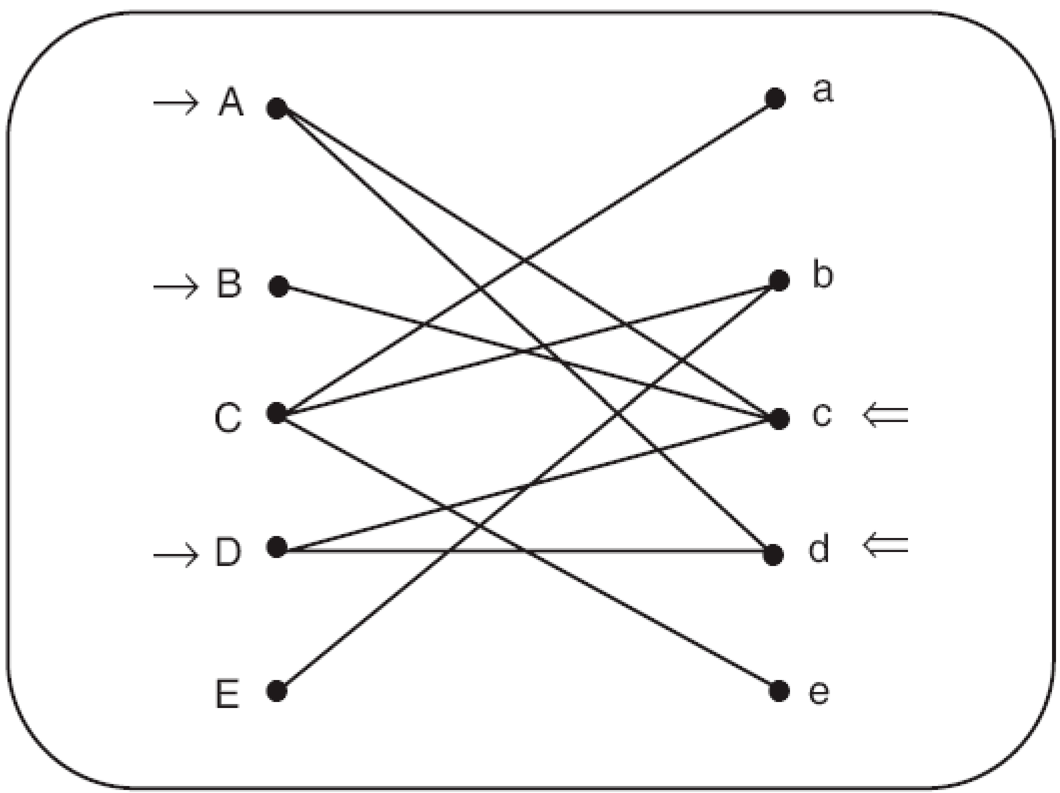
Exemplos

- Considere que uma rede de fios e postes telefônicos é modelada como o grafo da figura abaixo, onde p representa os postes e f representa os fios.



Exemplos

- Considere uma situação envolvendo cinco pessoas que estão procurando emprego, identificadas por A, B, C, D e E, e o anúncio de cinco empregos, identificados por a, b, c, d, e.



Exemplos

Exemplos

- Suponha que a área de atuação de um vendedor de produtos industriais (identificado como **caixeiro-viajante**) inclua várias cidades, com rodovias conectando certos pares dessas cidades.

Exemplos

- Suponha que a área de atuação de um vendedor de produtos industriais (identificado como **caixeiro-viajante**) inclua várias cidades, com rodovias conectando certos pares dessas cidades.
- O serviço exige que ele visite cada cidade pessoalmente.

Exemplos

- Suponha que a área de atuação de um vendedor de produtos industriais (identificado como **caixeiro-viajante**) inclua várias cidades, com rodovias conectando certos pares dessas cidades.
- O serviço exige que ele visite cada cidade pessoalmente.
- É possível ele planejar uma viagem de carro que lhe permita, ao sair de uma cidade, visitar cada uma das cidades exatamente uma vez, voltando à cidade de partida?

Exemplos

Exemplos

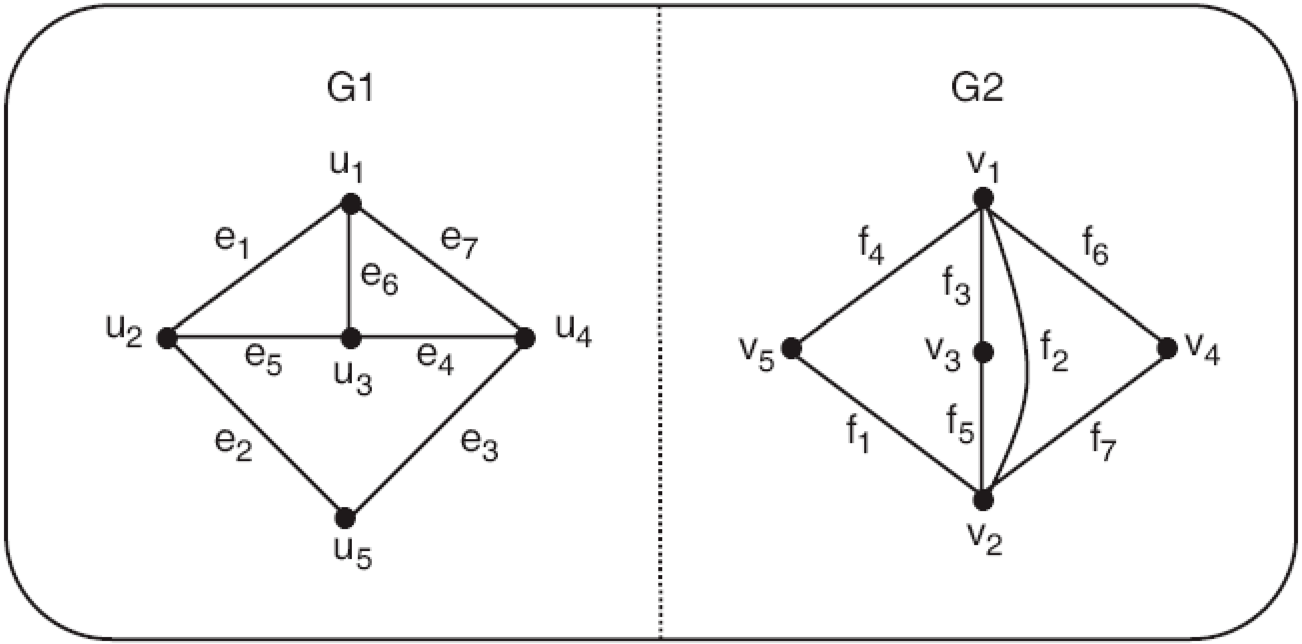
- A situação pode ser modelada por um grafo cujos vértices são as cidades envolvidas.

Exemplos

- A situação pode ser modelada por um grafo cujos vértices são as cidades envolvidas.
- Dois vértices desse grafo estarão conectados por uma aresta apenas se existir uma rodovia que conecta as cidades correspondentes (não passando por nenhuma outra cidade especificada).

Exemplos

- Caixeiro-viajante:



Exemplos

Exemplos

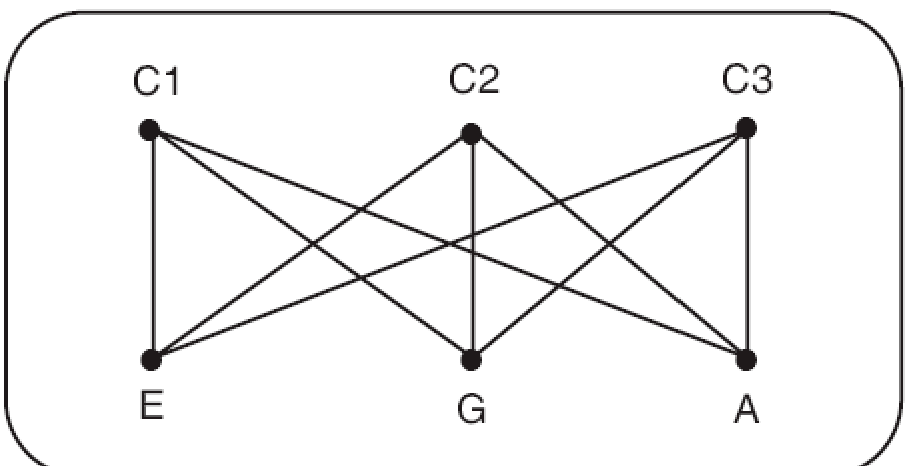
- Considere três casas e considere o problema de instalação do fornecimento de eletricidade, gás e água para cada uma delas.

Exemplos

- Considere três casas e considere o problema de instalação do fornecimento de eletricidade, gás e água para cada uma delas.
- É possível fazer essa instalação sem que as linhas de fornecimento se interceptem?

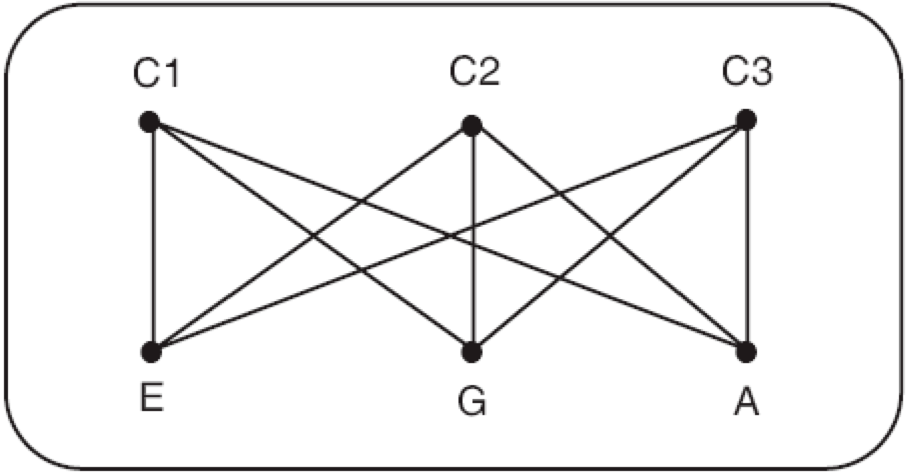
Exemplos

- Considere três casas e considere o problema de instalação do fornecimento de eletricidade, gás e água para cada uma delas.
- É possível fazer essa instalação sem que as linhas de fornecimento se interceptem?



Exemplos

- Uma vez modelado, o problema consiste em determinar se o grafo pode ser desenhado de maneira tal que duas arestas quaisquer não se interceptam.



Exemplos

Exemplos

- Considere seis emissoras de rádio C1, C2, C3, C4, C5 e C6 que solicitaram canais de frequência ao Ministério das Comunicações.

Exemplos

- Considere seis emissoras de rádio C1, C2, C3, C4, C5 e C6 que solicitaram canais de frequência ao Ministério das Comunicações.
- Se os transmissores de duas emissoras estão a menos 200 km de distância um do outro, eles não podem ter a mesma frequência, uma vez que haverá muita interferência.

Exemplos

- Considere seis emissoras de rádio C1, C2, C3, C4, C5 e C6 que solicitaram canais de frequência ao Ministério das Comunicações.
- Se os transmissores de duas emissoras estão a menos 200 km de distância um do outro, eles não podem ter a mesma frequência, uma vez que haverá muita interferência.
- O Ministério deseja atribuir o menor número possível de frequências distintas, levando em consideração o problema da interferência.

Exemplos

Exemplos

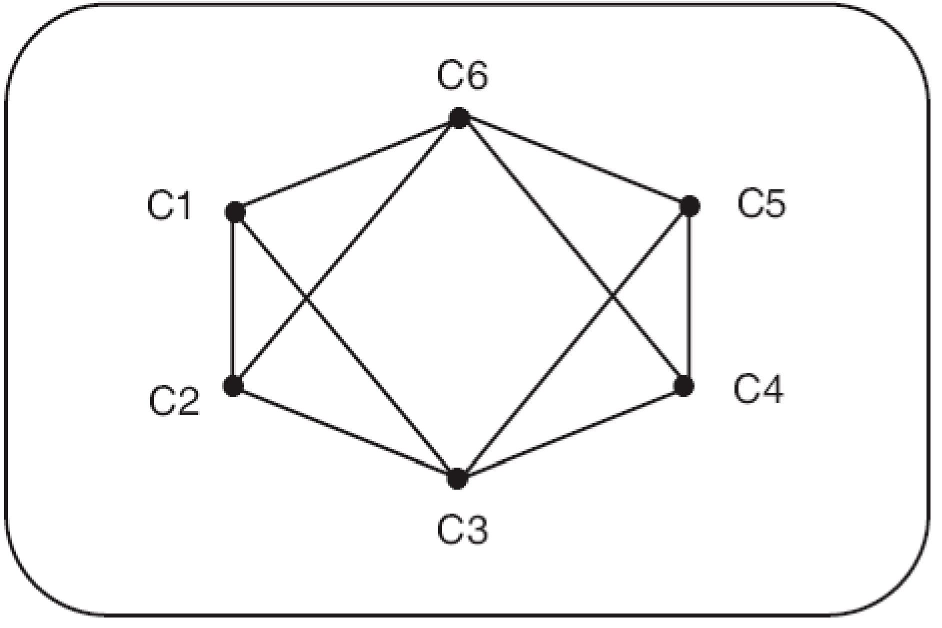
- Os vértices Ci e Cj são unidos por uma aresta se as duas emissoras Ci e Cj têm seus transmissores a uma distância menor 200km.

Exemplos

- Os vértices Ci e Cj são unidos por uma aresta se as duas emissoras Ci e Cj têm seus transmissores a uma distância menor 200km.
- No grafo, por exemplo, a emissora C6 tem seu transmissor a uma distância menor que 200 km daqueles das emissoras C1, C2, C4 e C5.

Exemplos

- Os vértices Ci e Cj são unidos por uma aresta se as duas emissoras Ci e Cj têm seus transmissores a uma distância menor 200km.
- No grafo, por exemplo, a emissora C6 tem seu transmissor a uma distância menor que 200 km daqueles das emissoras C1, C2, C4 e C5.



Exemplos

Exemplos

- Suponha, agora, que se deseje atribuir diferentes cores aos vértices de G, de tal maneira que nunca dois vértices de mesma cor estejam unidos por uma aresta.

Exemplos

- Suponha, agora, que se deseje atribuir diferentes cores aos vértices de G, de tal maneira que nunca dois vértices de mesma cor estejam unidos por uma aresta.
- Representando as diferentes frequências de canais por meio de diferentes cores, o ministro deseja encontrar o menor número de cores com as quais os vértices possam ser coloridos.

Exemplos

- Suponha, agora, que se deseje atribuir diferentes cores aos vértices de G, de tal maneira que nunca dois vértices de mesma cor estejam unidos por uma aresta.
- Representando as diferentes frequências de canais por meio de diferentes cores, o ministro deseja encontrar o menor número de cores com as quais os vértices possam ser coloridos.
- Para o exemplo em questão, o número é três.

Exemplos

- Suponha, agora, que se deseje atribuir diferentes cores aos vértices de G, de tal maneira que nunca dois vértices de mesma cor estejam unidos por uma aresta.
- Representando as diferentes frequências de canais por meio de diferentes cores, o ministro deseja encontrar o menor número de cores com as quais os vértices possam ser coloridos.
- Para o exemplo em questão, o número é três.
- Pode-se, por exemplo, colorir C1 e C4 de vermelho, C2 e C5 de azul e C3 e C6 de amarelo.

Exemplos

Exemplos

- Uma companhia tem filiais em cada uma das cidades C1, C2, ..., C6.

Exemplos

- Uma companhia tem filiais em cada uma das cidades C1, C2, ..., C6.
- O valor da passagem aérea de um voo direto entre as cidades Ci e Cj é dado pela posição (i,j) na matriz a seguir.

Exemplos

- Uma companhia tem filiais em cada uma das cidades C1, C2, ..., C6.
- O valor da passagem aérea de um voo direto entre as cidades Ci e Cj é dado pela posição (i,j) na matriz a seguir.

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplos

- A presença do símbolo ∞ em uma posição da matriz indica a inexistência de voo direto entre as cidades representadas pela linha e pela coluna em que tal símbolo se encontra.

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplos

Exemplos

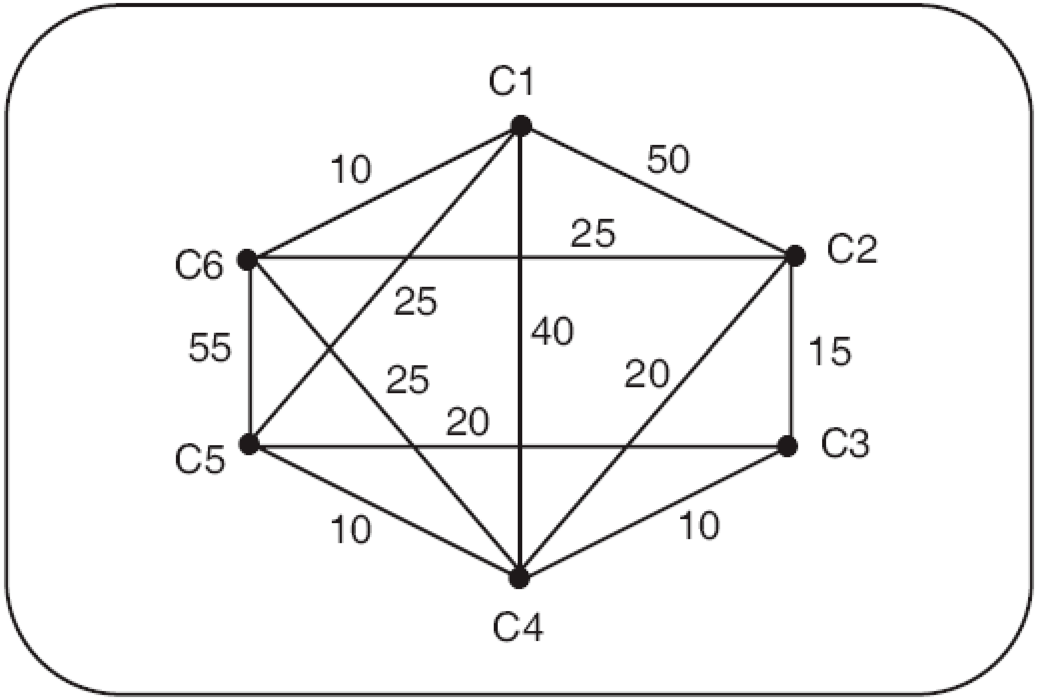
- A companhia está interessada no cálculo de uma tabela das tarifas mais baratas entre pares de cidades (mesmo que exista um vôo direto entre duas cidades, este pode não ser a rota mais barata).

Exemplos

- A companhia está interessada no cálculo de uma tabela das tarifas mais baratas entre pares de cidades (mesmo que exista um vôo direto entre duas cidades, este pode não ser a rota mais barata).
- Essa situação pode ser representada por um grafo ponderado, ou seja, um grafo com pesos associados às arestas que, no caso, representam as tarifas associadas aos voos diretos, como informados na matriz.

Exemplos

- Aquele problema pode ser representado como um grafo.



Exemplos

Exemplos

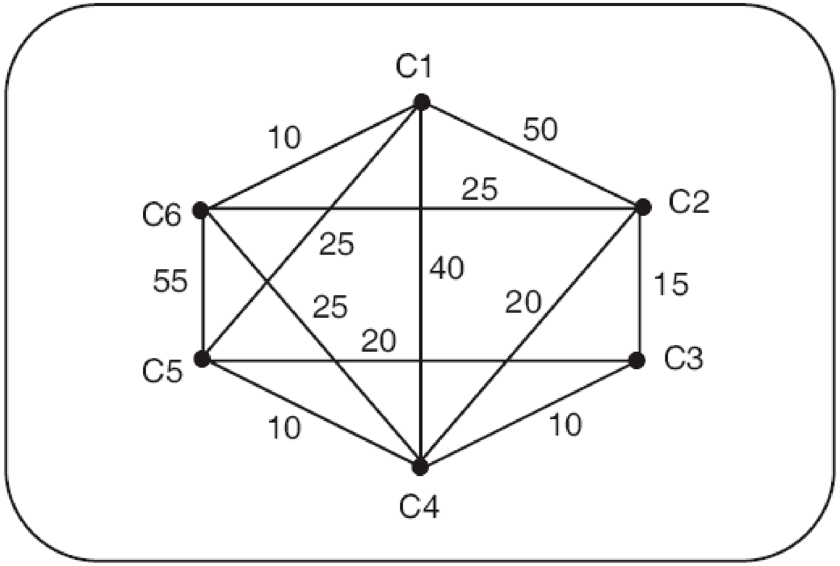
- O problema pode, então, ser resolvido usando o algoritmo de Dijkstra.

Exemplos

- O problema pode, então, ser resolvido usando o algoritmo de Dijkstra.
- Esse tipo de problema é chamado de **problema do caminho mais curto** e tem um grande número de aplicações, nas mais variadas áreas de conhecimento.

Exemplos

- O problema pode, então, ser resolvido usando o algoritmo de Dijkstra.
- Esse tipo de problema é chamado de **problema do caminho mais curto** e tem um grande número de aplicações, nas mais variadas áreas de conhecimento.



Exercícios

- Explique a diferença entre os problemas bem conhecidos na Computação: caixeiro-viajante e o problema resolvido pelo algoritmo proposto por Dijkstra.