Teoria dos Grafos

PROPRIEDADES DE GRAFOS

Prof. Tiago Eugenio de Melo
tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

Observações

- As definições e teorias apresentadas aqui foram baseadas no livro *Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação* (LTC, 2018).

Observações

- As definições e teorias apresentadas aqui foram baseadas no livro *Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação* (LTC, 2018).
- A numeração das definições e teoremas seguem as mesmas referências adotadas no livro para facilitar a localização.

CONCEITOS INICIAIS

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.1**
  - Um grafo G = (V(G),E(G)) ou **G = (V,E)** consiste em dois conjuntos finitos:

Conceitos Iniciais

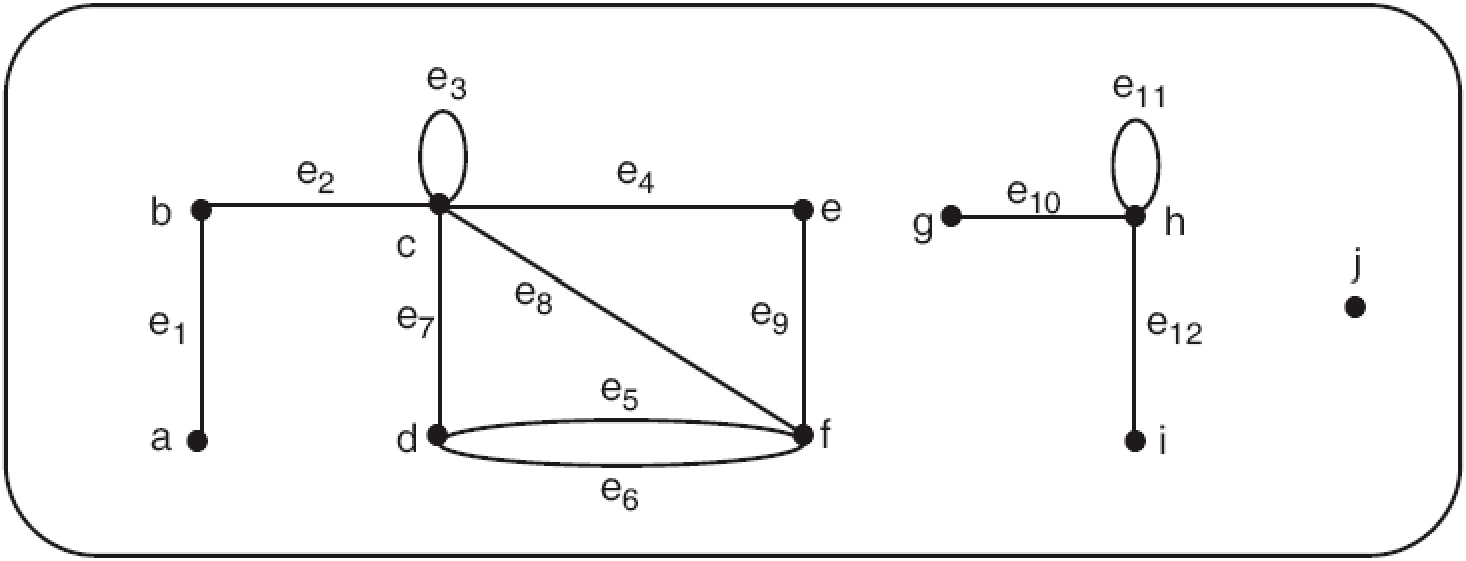
- **Definição 3.1**
  - Um grafo G = (V(G),E(G)) ou **G = (V,E)** consiste em dois conjuntos finitos:
    - V(G), (ou V), que é o conjunto de vértices do grafo, o qual é um <u>conjunto não vazio</u> de elementos chamados vértices.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.1**
  - Um grafo G = (V(G),E(G)) ou **G = (V,E)** consiste em dois conjuntos finitos:
    - V(G), (ou V), que é o conjunto de vértices do grafo, o qual é um <u>conjunto não vazio</u> de elementos chamados vértices.
    - E(G), (ou E), que é o conjunto de arestas do grafo, o qual é um conjunto (que pode ser vazio) de elementos chamados arestas.

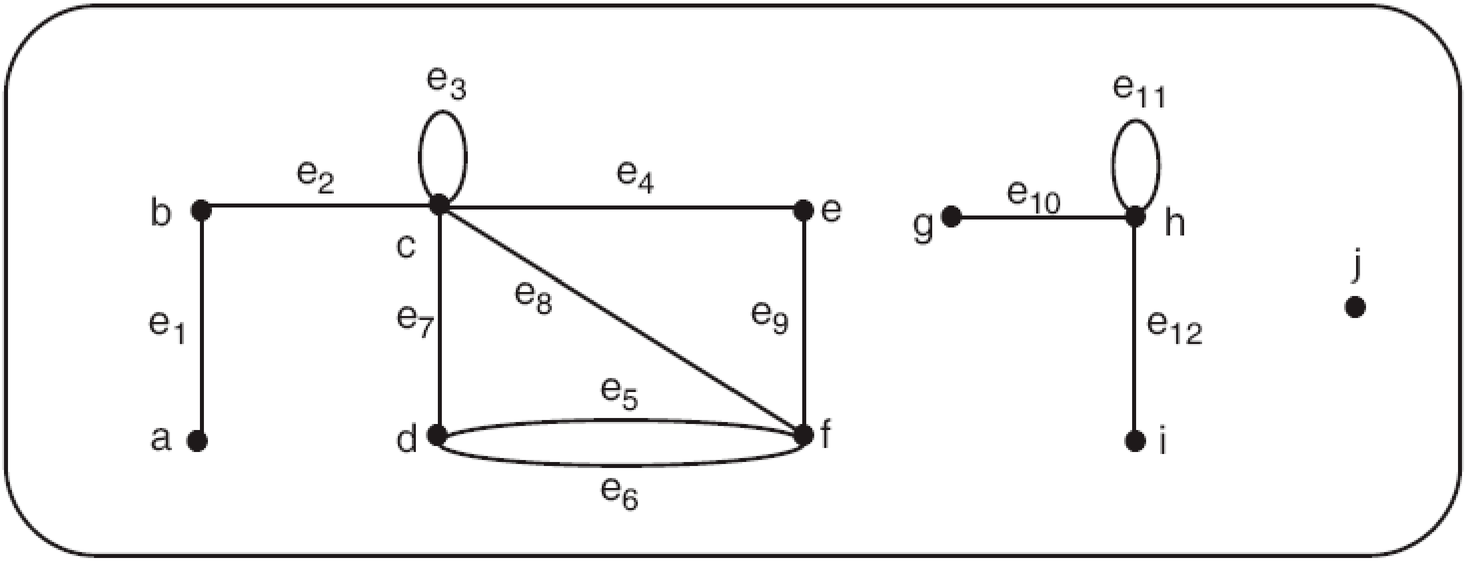
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**
  - Seja o grafo G = (V,E) tal que V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12}.



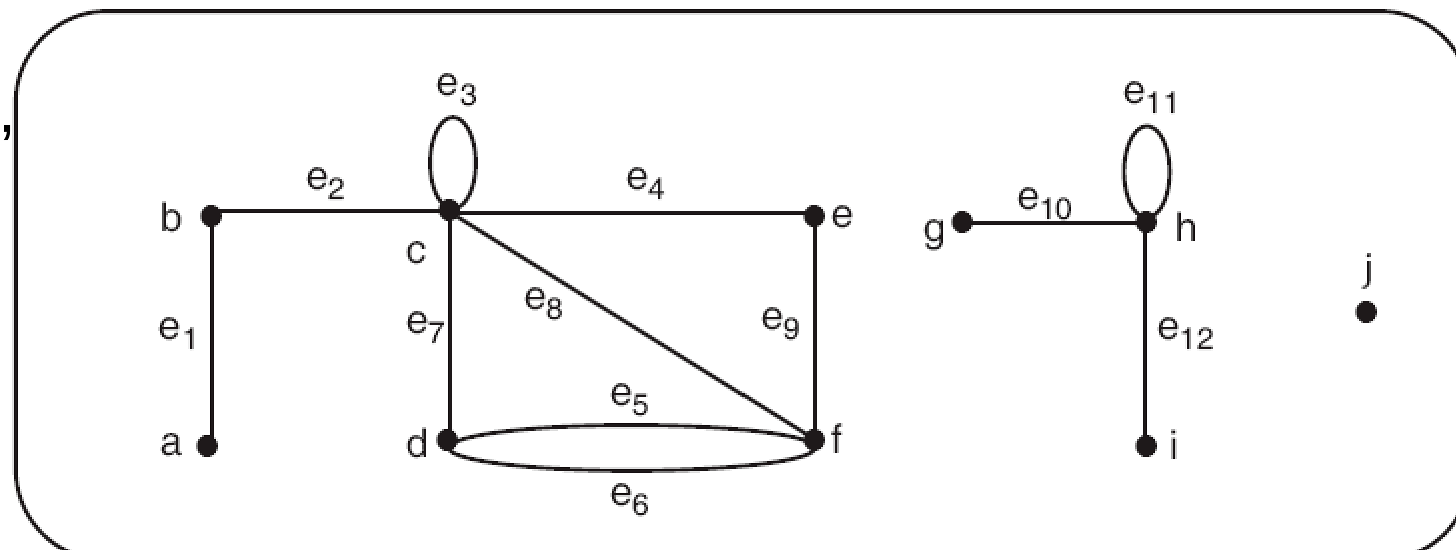
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**
  - Seja o grafo G = (V,E) tal que V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12}.
  - Arestas:



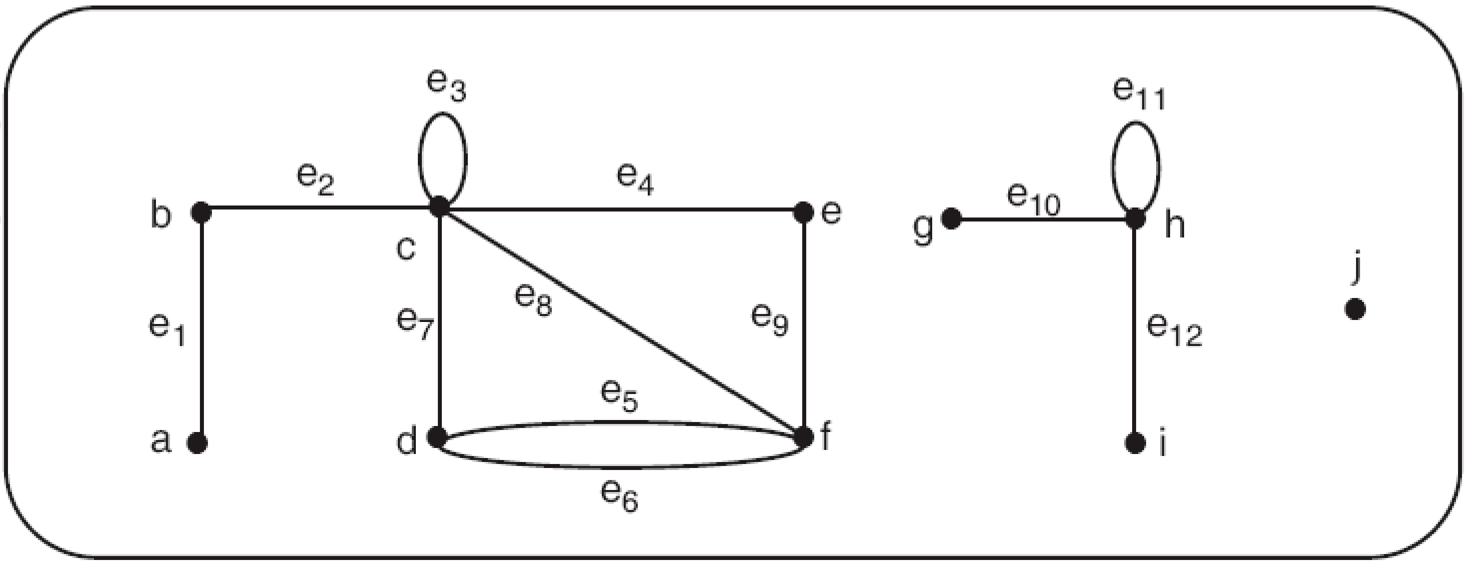
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**
  - Seja o grafo G = (V,E) tal que V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12}.
  - Arestas:
    - e1 ↔ (a,



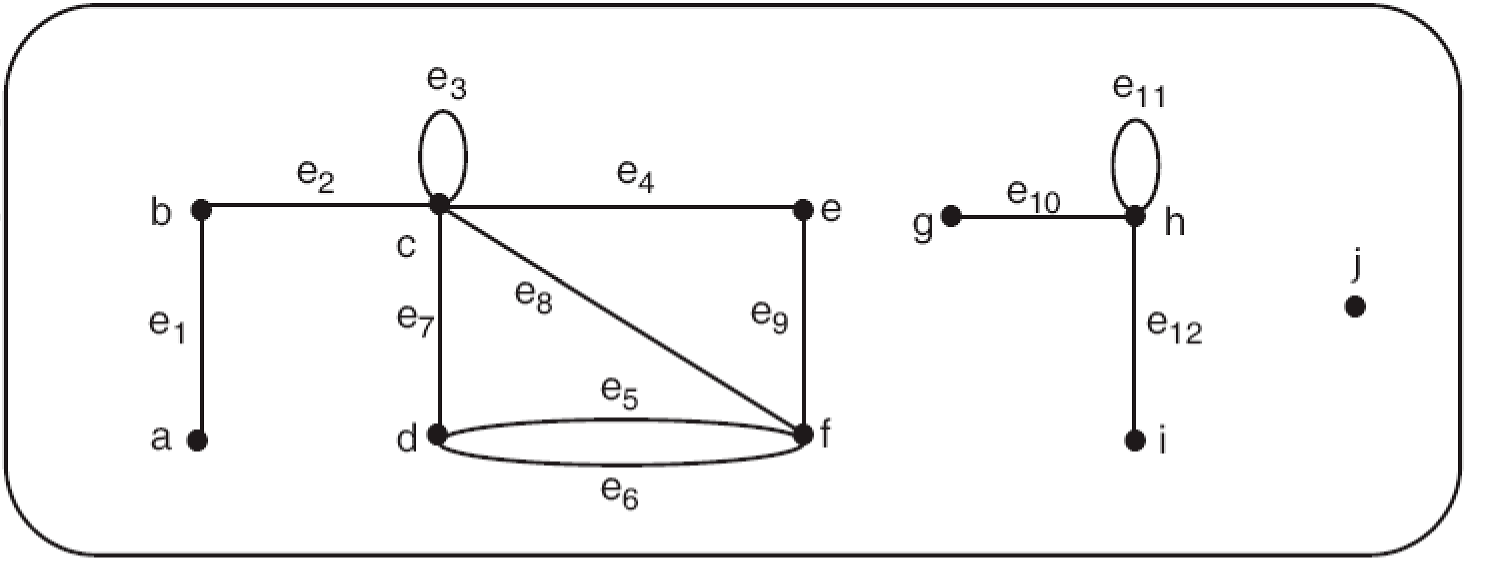
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**
  - Seja o grafo G = (V,E) tal que V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12}.
  - Arestas:
    - e1 ↔ (a,
    - e2 ↔ (b,



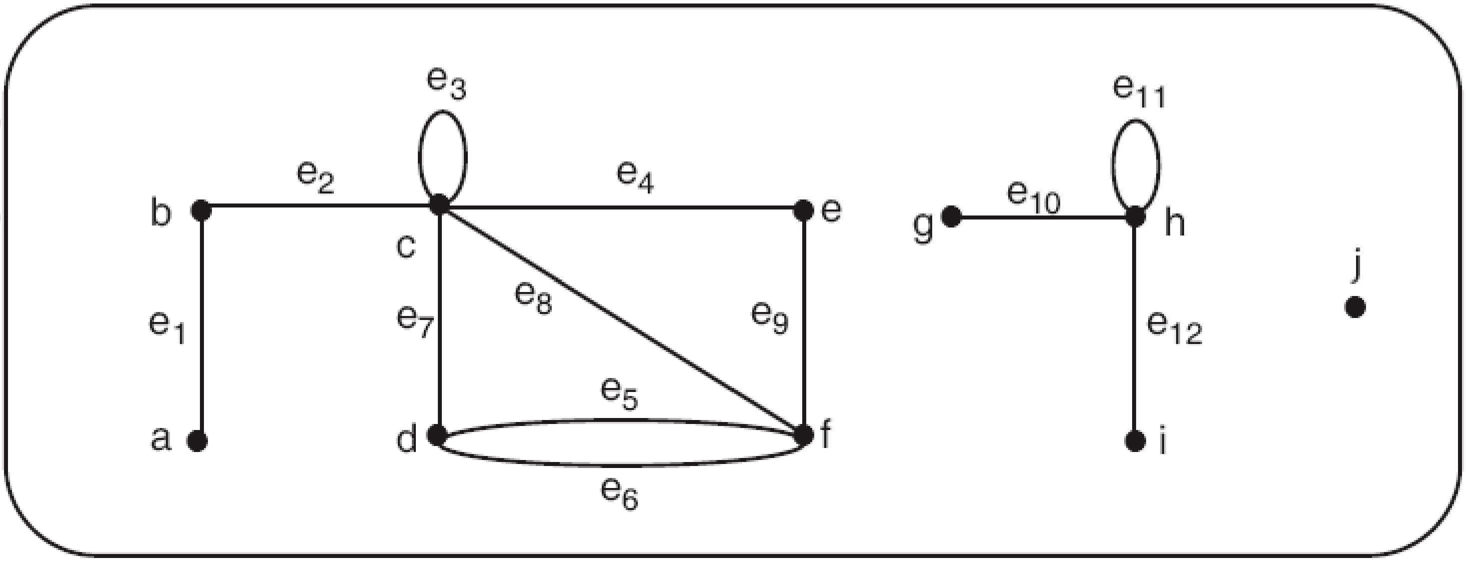
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**
  - Seja o grafo G = (V,E) tal que V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12}.
  - Arestas:
    - e1 ↔ (a,
    - e2 ↔ (b,
    - e3 ↔ (c,



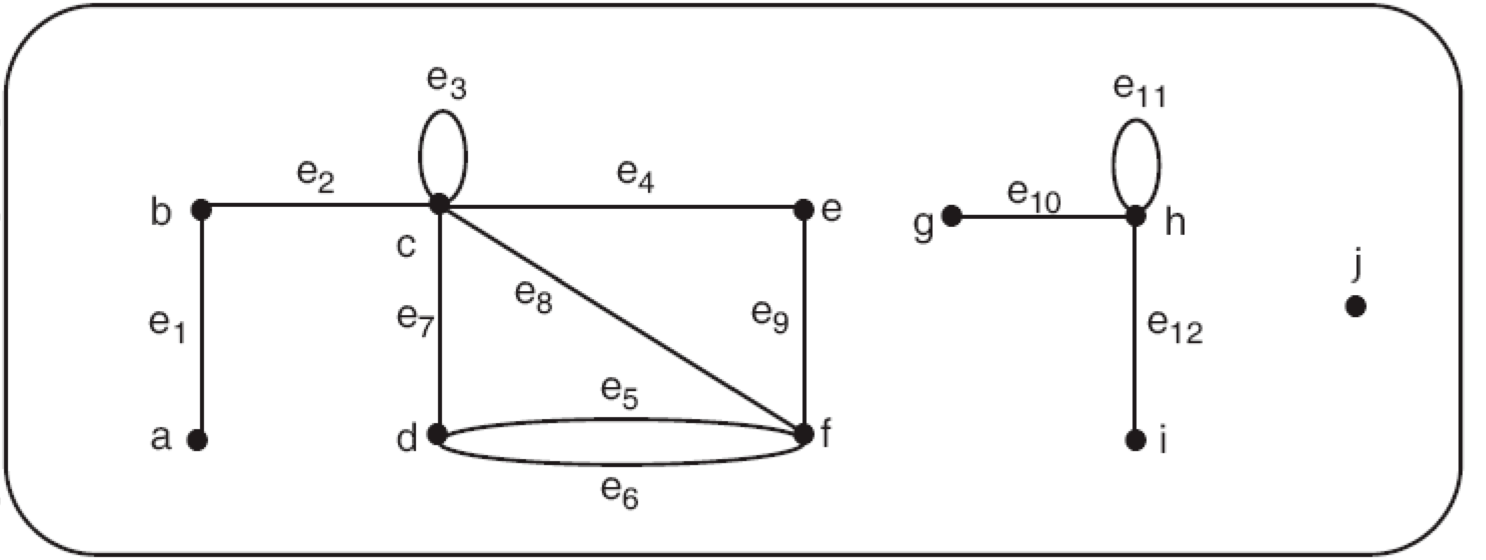
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**
  - Seja o grafo G = (V,E) tal que V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12}.
  - Arestas:
    - e1 ↔ (a,
    - e2 ↔ (b,
    - e3 ↔ (c,
    - e4 ↔ (c,



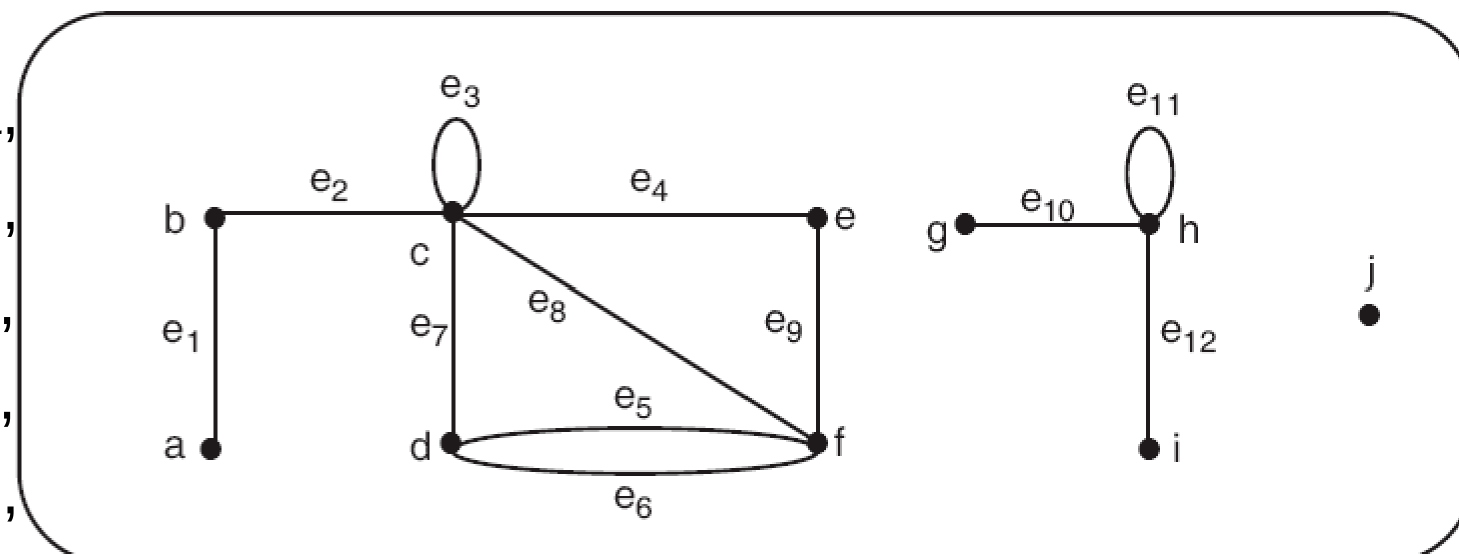
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**
  - Seja o grafo G = (V,E) tal que V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12}.
  - Arestas:
    - e1 ↔ (a,
    - e2 ↔ (b,
    - e3 ↔ (c,
    - e4 ↔ (c,
    - e5 ↔ (d,



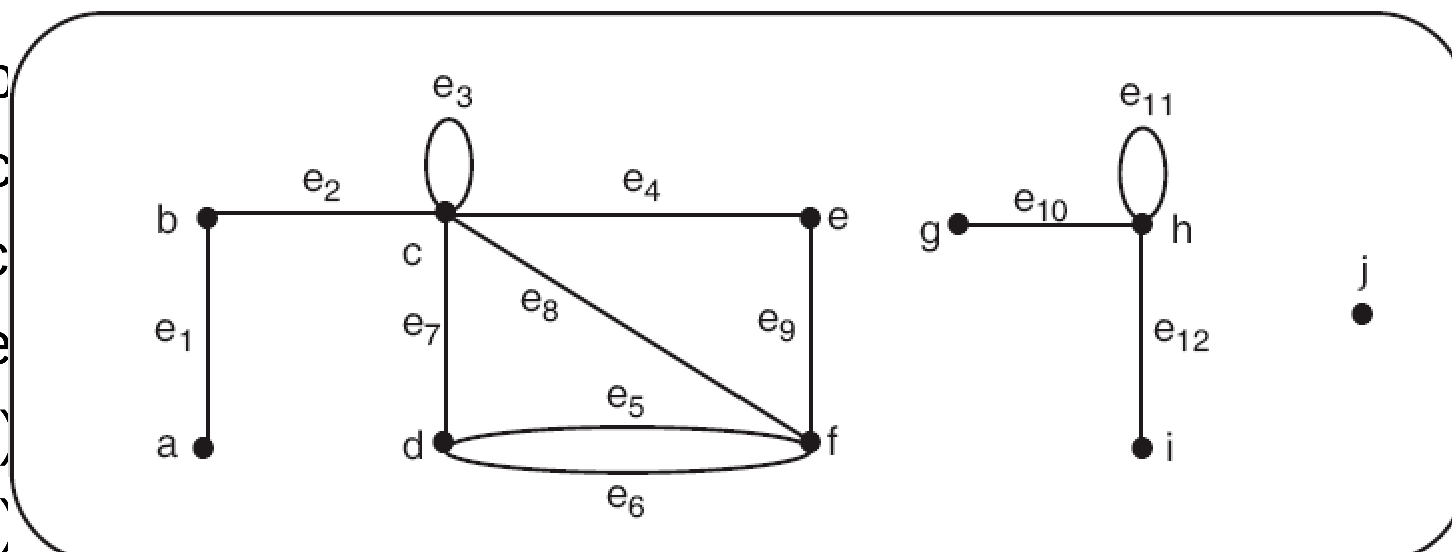
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**
  - Seja o grafo G = (V,E) tal que V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12}.
  - Arestas:
    - e1 ↔ (a,
    - e2 ↔ (b,
    - e3 ↔ (c,
    - e4 ↔ (c,
    - e5 ↔ (d,
    - e6 ↔ (d,f)



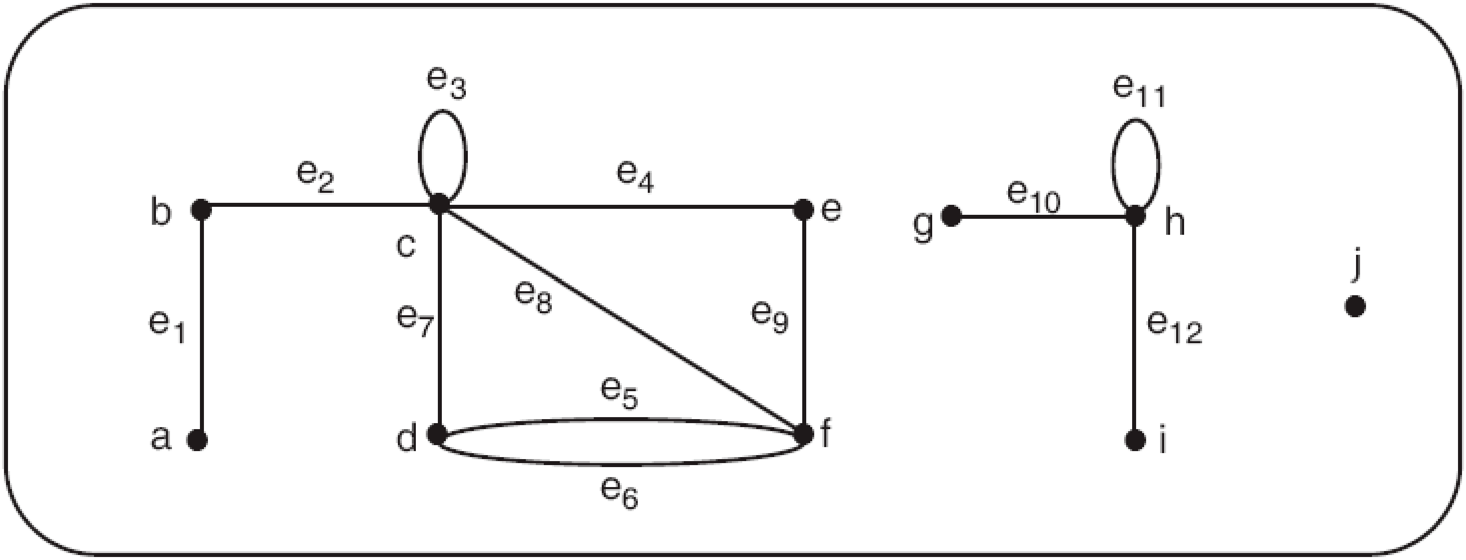
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**
  - Seja o grafo G = (V,E) tal que V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12}.
  - Arestas:
    - e1 ↔ (a,b
    - e2 ↔ (b,c
    - e3 ↔ (c,c
    - e4 ↔ (c,e
    - e5 ↔ (d,f)
    - e6 ↔ (d,f)
    - e7 ↔ (c,d)



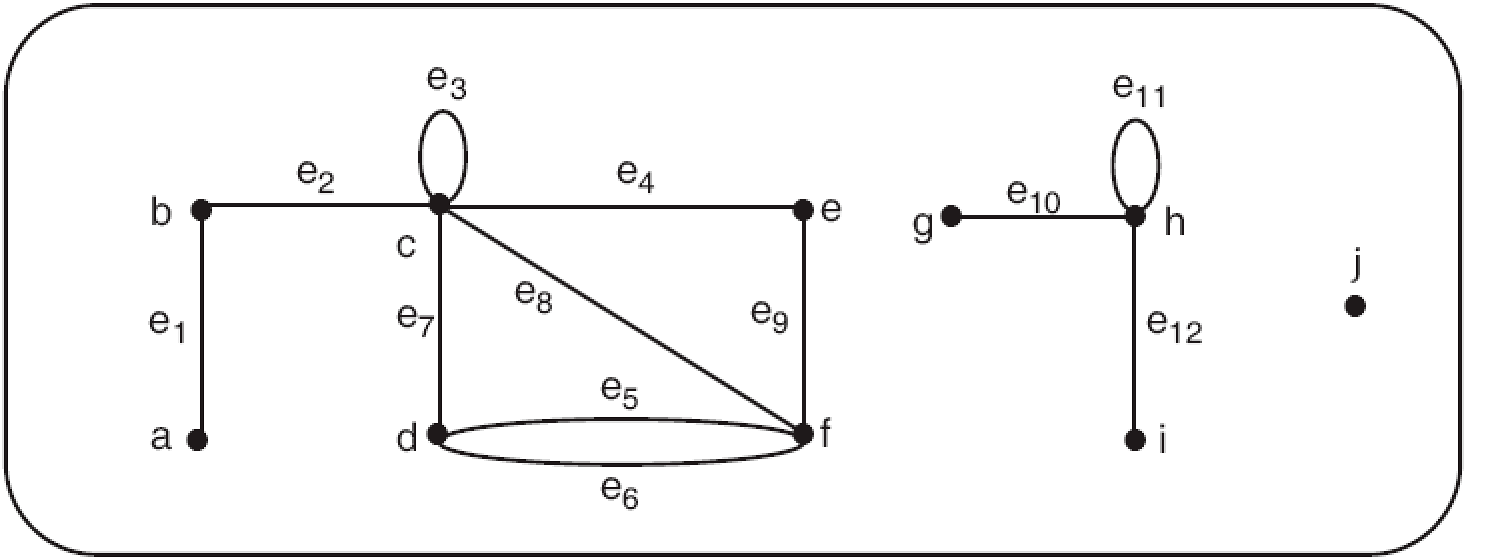
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**
  - Seja o grafo G = (V,E) tal que V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12}.
  - Arestas:
    - e1 ↔ (a,b)
    - e2 ↔ (b,c)
    - e3 ↔ (c,c)
    - e4 ↔ (c,e)
    - e5 ↔ (d,f)
    - e6 ↔ (d,f)
    - e7 ↔ (c,d)
    - e8 ↔ (c,f)



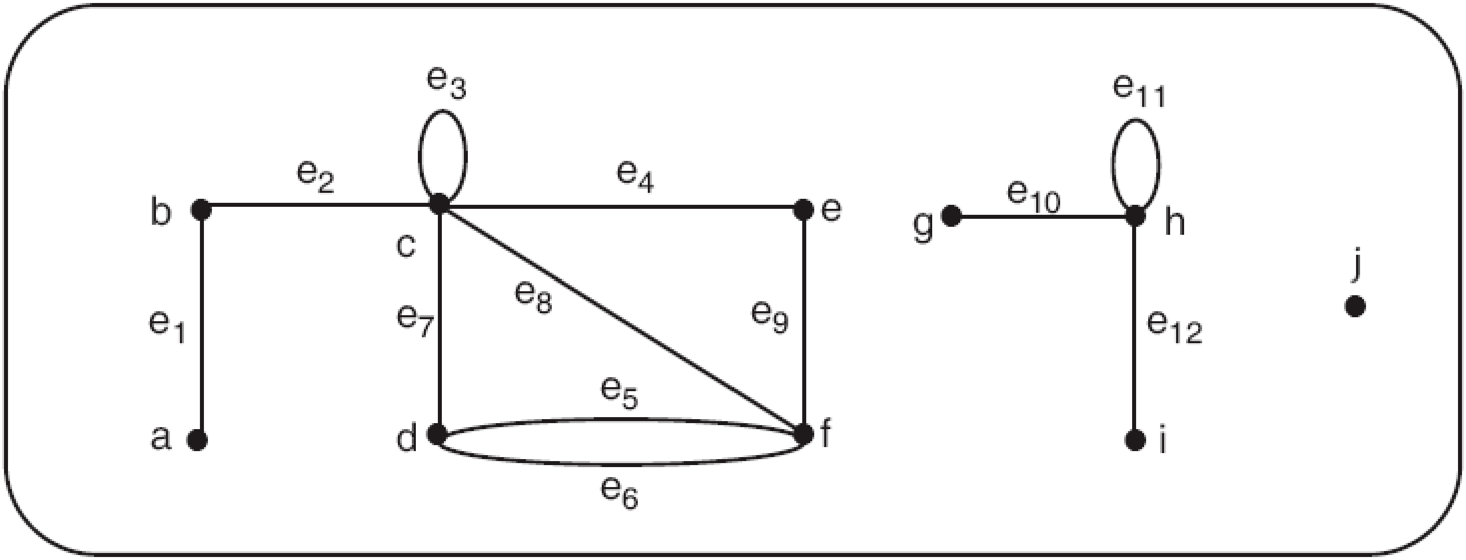
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**
  - Seja o grafo G = (V,E) tal que V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} e
    E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12}.
  - Arestas:
    - e1 ↔ (a,b)
    - e2 ↔ (b,c)
    - e3 ↔ (c,c)
    - e4 ↔ (c,e)
    - e5 ↔ (d,f)
    - e6 ↔ (d,f)
    - e7 ↔ (c,d)
    - e8 ↔ (c,f)
    - e9 ↔ (e,f)



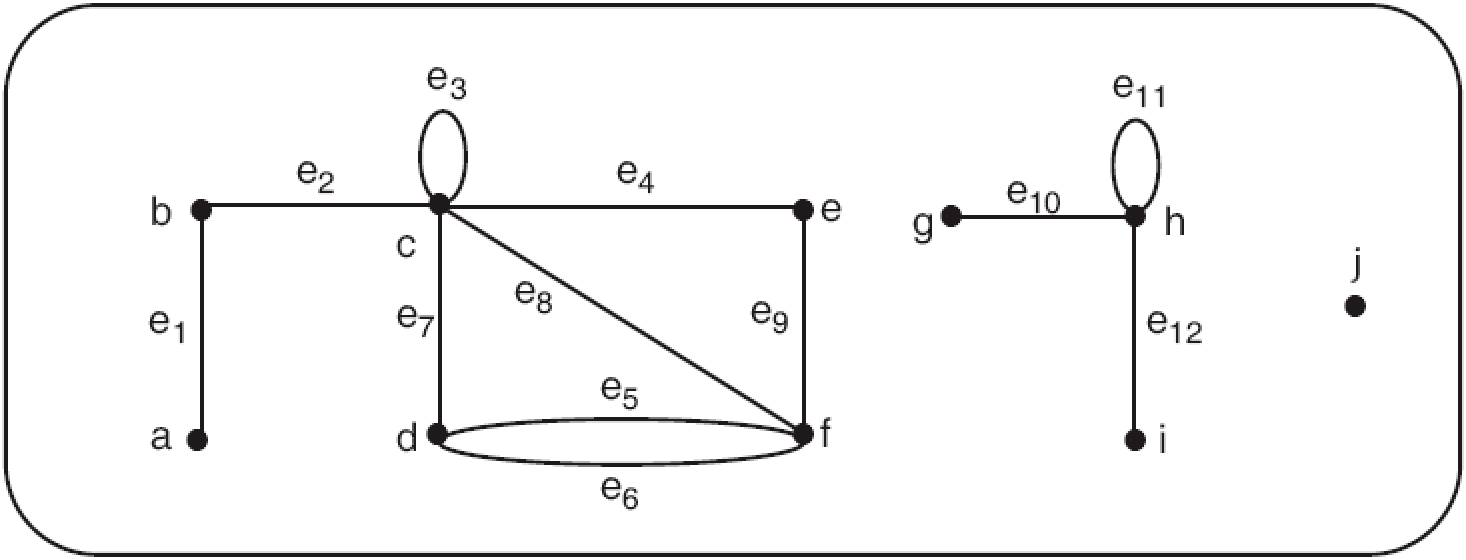
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**
  - Seja o grafo G = (V,E) tal que V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} e
    E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12}.
  - Arestas:
    - e1 ↔ (a,b)
    - e2 ↔ (b,c)
    - e3 ↔ (c,c)
    - e4 ↔ (c,e)
    - e5 ↔ (d,f)
    - e6 ↔ (d,f)
    - e7 ↔ (c,d)
    - e8 ↔ (c,f)
    - e9 ↔ (e,f)
    - e10 ↔ (g,h)



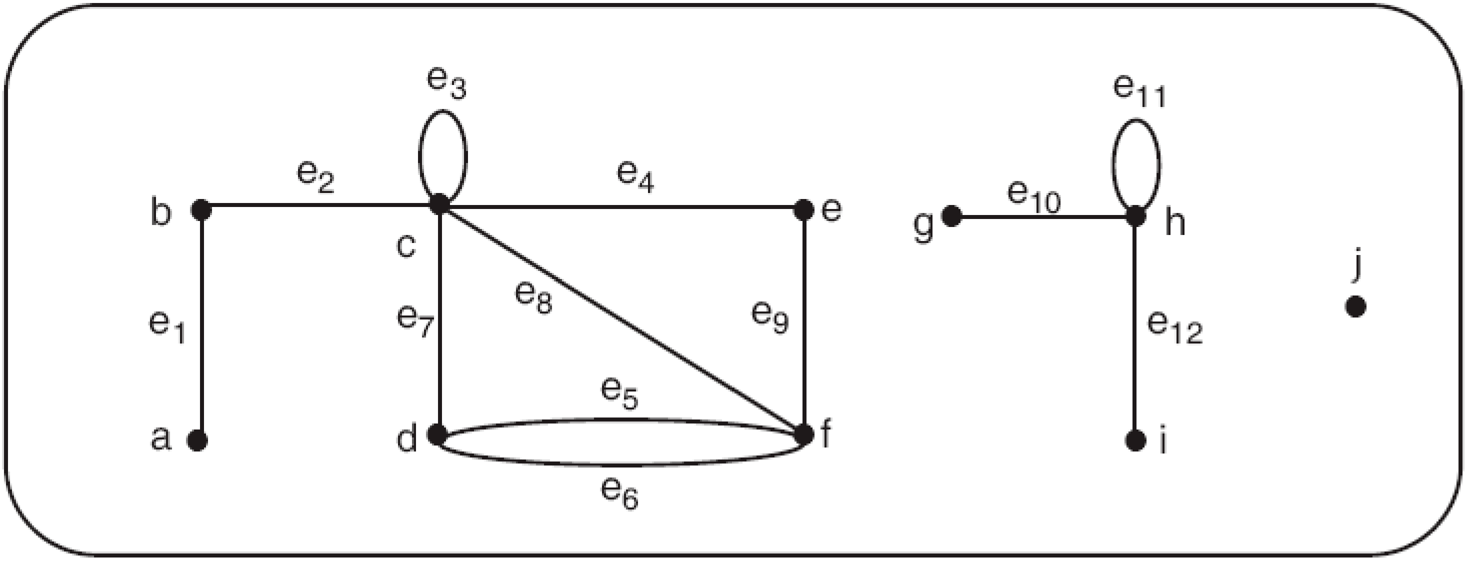
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**
  - Seja o grafo G = (V,E) tal que V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} e
    E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12}.
  - Arestas:
    - e1 ↔ (a,b)
    - e2 ↔ (b,c)
    - e3 ↔ (c,c)
    - e4 ↔ (c,e)
    - e5 ↔ (d,f)
    - e6 ↔ (d,f)
    - e7 ↔ (c,d)
    - e8 ↔ (c,f)
    - e9 ↔ (e,f)
    - e10 ↔ (g,h)
    - e11 ↔ (h,h)



Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**
  - Seja o grafo G = (V,E) tal que V = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} e E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12}.
  - Arestas:
    - e1 ↔ (a,b)
    - e2 ↔ (b,c)
    - e3 ↔ (c,c)
    - e4 ↔ (c,e)
    - e5 ↔ (d,f)
    - e6 ↔ (d,f)
    - e7 ↔ (c,d)
    - e8 ↔ (c,f)
    - e9 ↔ (e,f)
    - e10 ↔ (g,h)
    - e11 ↔ (h,h)
    - e12 ↔ (h,i)



Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- De acordo com a Definição 3.1, é possível que o conjunto de arestas E seja vazio.

Conceitos Iniciais

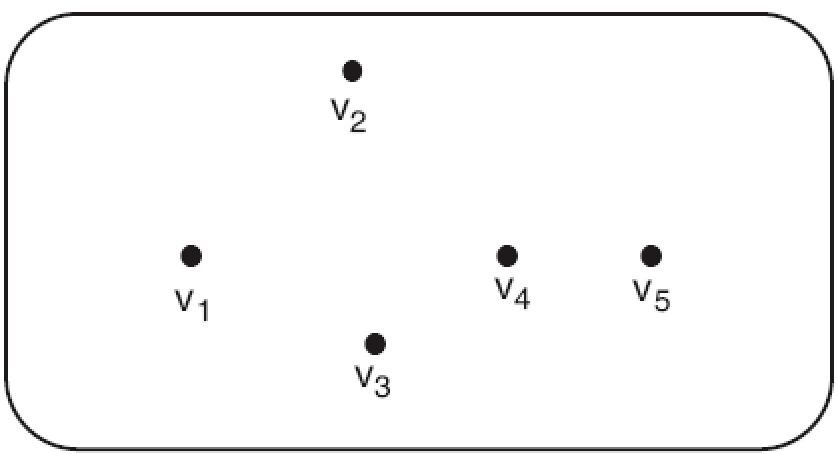
- De acordo com a Definição 3.1, é possível que o conjunto de arestas E seja vazio.
- Um grafo cujo conjunto de arestas é vazio é chamado de **grafo nulo**.

Conceitos Iniciais

- De acordo com a Definição 3.1, é possível que o conjunto de arestas E seja vazio.
- Um grafo cujo conjunto de arestas é vazio é chamado de **grafo nulo**.
- A figura abaixo mostra o diagrama de um grafo nulo com cinco vértices.

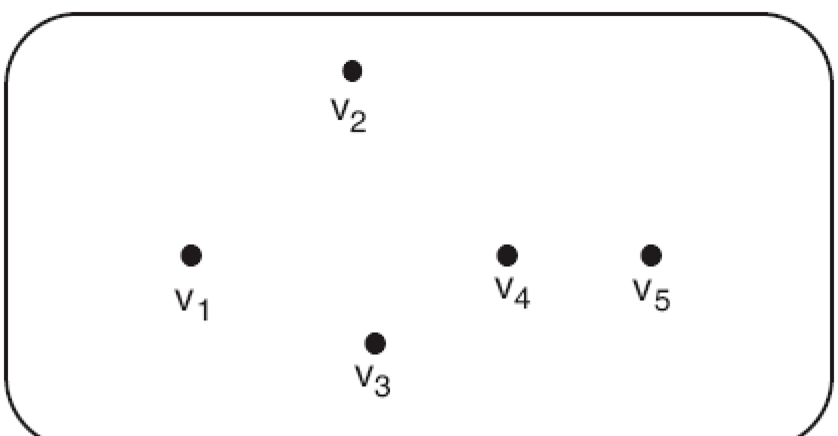
Conceitos Iniciais

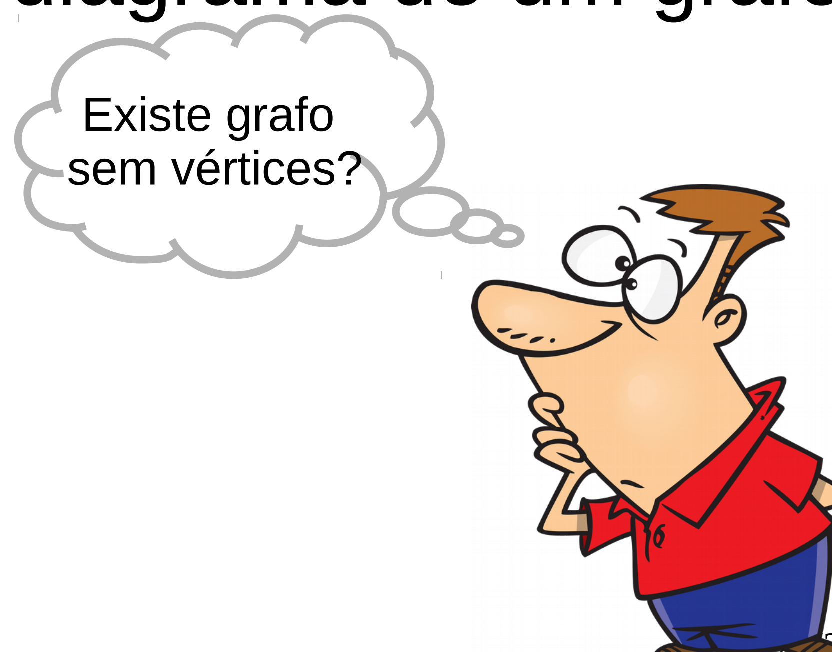
- De acordo com a Definição 3.1, é possível que o conjunto de arestas E seja vazio.
- Um grafo cujo conjunto de arestas é vazio é chamado de **grafo nulo**.
- A figura abaixo mostra o diagrama de um grafo nulo com cinco vértices.



Conceitos Iniciais

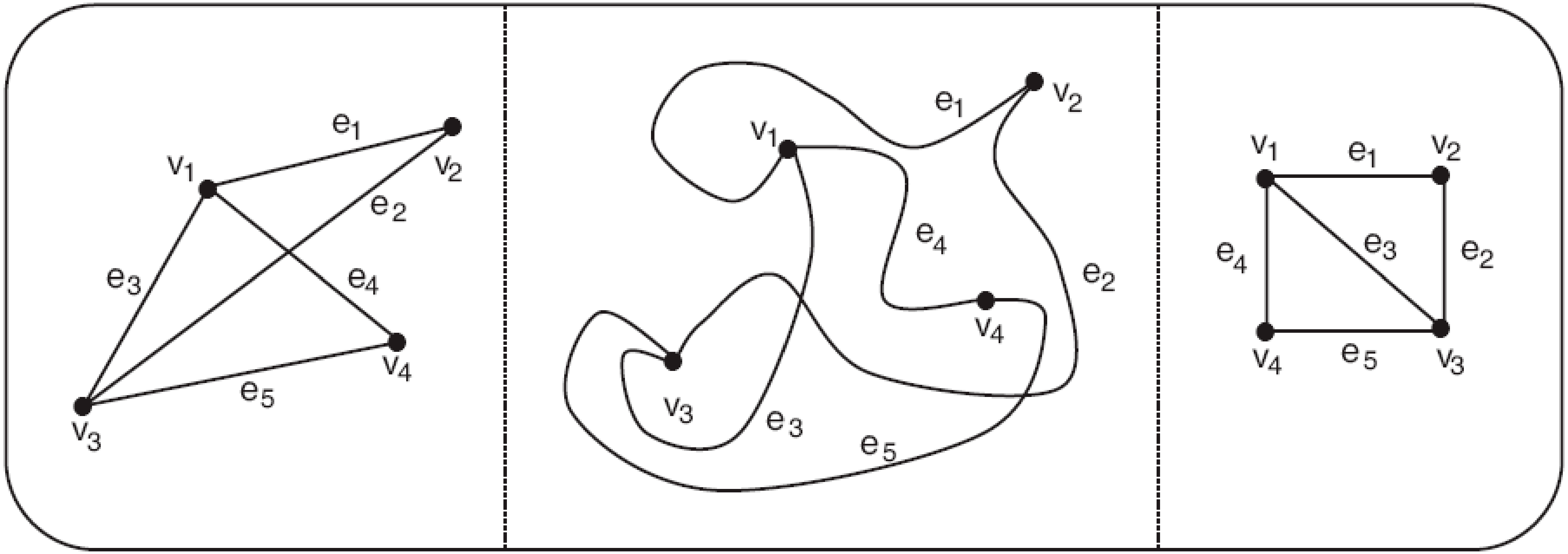
- De acordo com a Definição 3.1, é possível que o conjunto de arestas E seja vazio.
- Um grafo cujo conjunto de arestas é vazio é chamado de **grafo nulo**.
- A figura abaixo mostra o diagrama de um grafo nulo com cinco vértices.





Conceitos Iniciais

- A maneira como vértices e arestas são posicionados e desenhados em um grafo não é relevante.



Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**
  - Seja G = (V,E) um grafo.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - (a) Se duas (ou mais) arestas de G têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas de **arestas paralelas**.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - (a) Se duas (ou mais) arestas de G têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas de **arestas paralelas**.
  - (b) Um vértice de G que não é extremidade de nenhuma aresta é chamado **isolado**. Adotaremos que o vértice do grafo que for vértice-extremidade apenas de loops será isolado também.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - (a) Se duas (ou mais) arestas de G têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas de **arestas paralelas**.
  - (b) Um vértice de G que não é extremidade de nenhuma aresta é chamado **isolado**. Adotaremos que o vértice do grafo que for vértice-extremidade apenas de loops será isolado também.
  - (c) Dois vértices que estão unidos por uma aresta são chamados de **adjacentes** ou **vizinhos**.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - (a) Se duas (ou mais) arestas de G têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas de **arestas paralelas**.
  - (b) Um vértice de G que não é extremidade de nenhuma aresta é chamado **isolado**. Adotaremos que o vértice do grafo que for vértice-extremidade apenas de loops será isolado também.
  - (c) Dois vértices que estão unidos por uma aresta são chamados de **adjacentes** ou **vizinhos**.
  - (d) Duas arestas distintas `ei` e `ej` são adjacentes se elas têm um vértice em comum.

Conceitos Iniciais

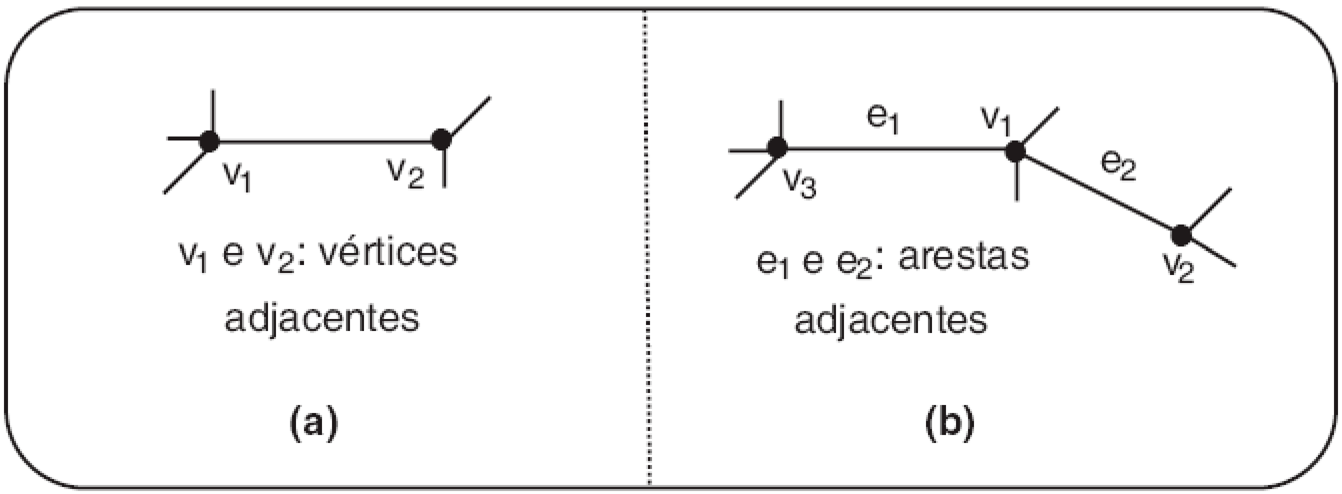
- **Definição 3.2**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - (a) Se duas (ou mais) arestas de G têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas de **arestas paralelas**.
  - (b) Um vértice de G que não é extremidade de nenhuma aresta é chamado **isolado**. Adotaremos que o vértice do grafo que for vértice-extremidade apenas de loops será isolado também.
  - (c) Dois vértices que estão unidos por uma aresta são chamados de **adjacentes** ou **vizinhos**.
  - (d) Duas arestas distintas `ei` e `ej` são adjacentes se elas têm um vértice em comum.
  - (e) O conjunto de todos os vizinhos de um vértice fixo v de G é chamado de **conjunto vizinhança de v** e é notado por N(v).

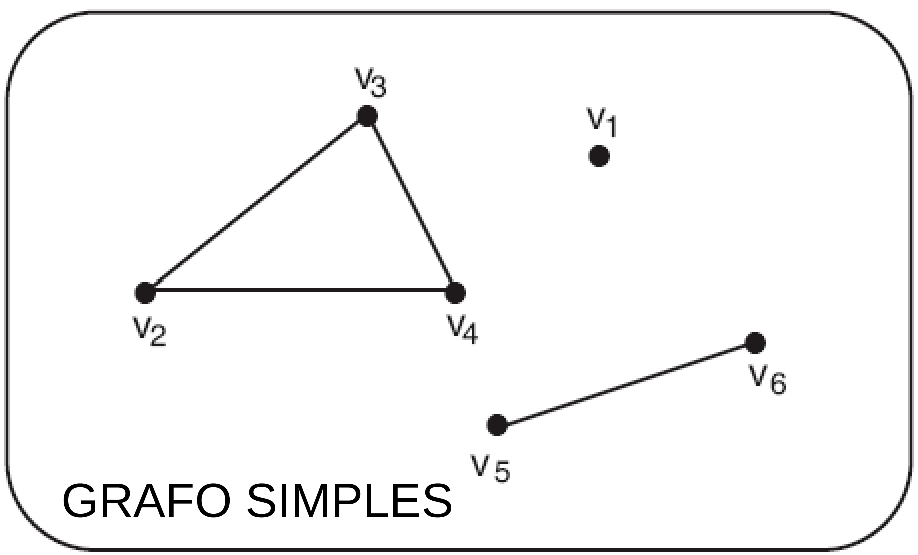
Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - (a) Se duas (ou mais) arestas de G têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas de **arestas paralelas**.
  - (b) Um vértice de G que não é extremidade de nenhuma aresta é chamado **isolado**. Adotaremos que o vértice do grafo que for vértice-extremidade apenas de loops será isolado também.
  - (c) Dois vértices que estão unidos por uma aresta são chamados de **adjacentes** ou **vizinhos**.
  - (d) Duas arestas distintas `ei` e `ej` são adjacentes se elas têm um vértice em comum.
  - (e) O conjunto de todos os vizinhos de um vértice fixo v de G é chamado de **conjunto vizinhança de v** e é notado por N(v).
  - (f) Um grafo é chamado **simples** se <u>não tem loops</u> e <u>não tem arestas paralelas</u>.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**





Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**
  - Seja G = (V,E) um grafo.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - (a) Diz-se que uma aresta e é incidente no vértice v se v for um vértice-extremidade de e. Nesse caso, diz-se também que v é incidente em e.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - (a) Diz-se que uma aresta e é incidente no vértice v se v for um vértice-extremidade de e. Nesse caso, diz-se também que v é incidente em e.
  - (b) Duas arestas que são incidentes em um mesmo vértice são adjacentes.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - (a) Diz-se que uma aresta e é incidente no vértice v se v for um vértice-extremidade de e. Nesse caso, diz-se também que v é incidente em e.
  - (b) Duas arestas que são incidentes em um mesmo vértice são adjacentes.
  - (c) O grau de um vértice v, notado por d(v), é o número de arestas de G que são incidentes em v, contando cada loop duas vezes. É, pois, o número de vezes que v é vértice-extremidade de uma aresta.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - (a) Diz-se que uma aresta e é incidente no vértice v se v for um vértice-extremidade de e. Nesse caso, diz-se também que v é incidente em e.
  - (b) Duas arestas que são incidentes em um mesmo vértice são adjacentes.
  - (c) O grau de um vértice v, notado por d(v), é o número de arestas de G que são incidentes em v, contando cada loop duas vezes. É, pois, o número de vezes que v é vértice-extremidade de uma aresta.
  - Um vértice de grau 0 é um vértice isolado, e um vértice de grau 1 é um **vértice final**.

Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**
  - (d) Um vértice de um grafo é um vértice par ou ímpar se o seu grau for um número par ou ímpar, respectivamente.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**
  - (d) Um vértice de um grafo é um vértice par ou ímpar se o seu grau for um número par ou ímpar, respectivamente.
  - (e) A sequência de graus de um grafo consiste na sequência dos graus de seus vértices, escritos em ordem crescente, com repetições, se for o caso.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**
  - (d) Um vértice de um grafo é um vértice par ou ímpar se o seu grau for um número par ou ímpar, respectivamente.
  - (e) A sequência de graus de um grafo consiste na sequência dos graus de seus vértices, escritos em ordem crescente, com repetições, se for o caso.
  - (f) O número dado por $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$ é chamado de **grau mínimo de G**. O número dado por $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$ é chamado **grau máximo de G**.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**
  - (d) Um vértice de um grafo é um vértice par ou ímpar se o seu grau for um número par ou ímpar, respectivamente.
  - (e) A sequência de graus de um grafo consiste na sequência dos graus de seus vértices, escritos em ordem crescente, com repetições, se for o caso.
  - (f) O número dado por $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$ é chamado de **grau mínimo de G**. O número dado por $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$ é chamado **grau máximo de G**.
  - (g) O número dado pela fórmula (3.1) é o **grau médio do grafo G**.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**
  - (d) Um vértice de um grafo é um vértice par ou ímpar se o seu grau for um número par ou ímpar, respectivamente.
  - (e) A sequência de graus de um grafo consiste na sequência dos graus de seus vértices, escritos em ordem crescente, com repetições, se for o caso.
  - (f) O número dado por $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$ é chamado de **grau mínimo de G**. O número dado por $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$ é chamado **grau máximo de G**.
  - (g) O número dado pela fórmula (3.1) é o **grau médio do grafo G**.

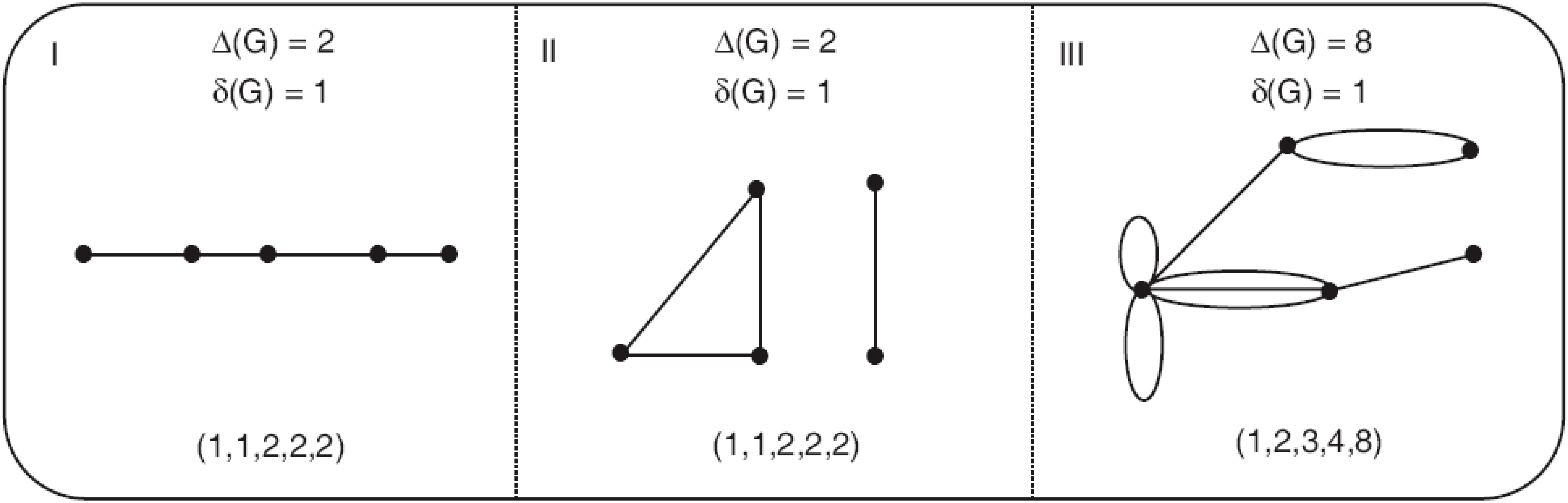
$$d(G) = \frac{1}{|V|}\sum_{v \in V} d(v) \qquad (3.1)$$

Conceitos Iniciais

- Exemplo:

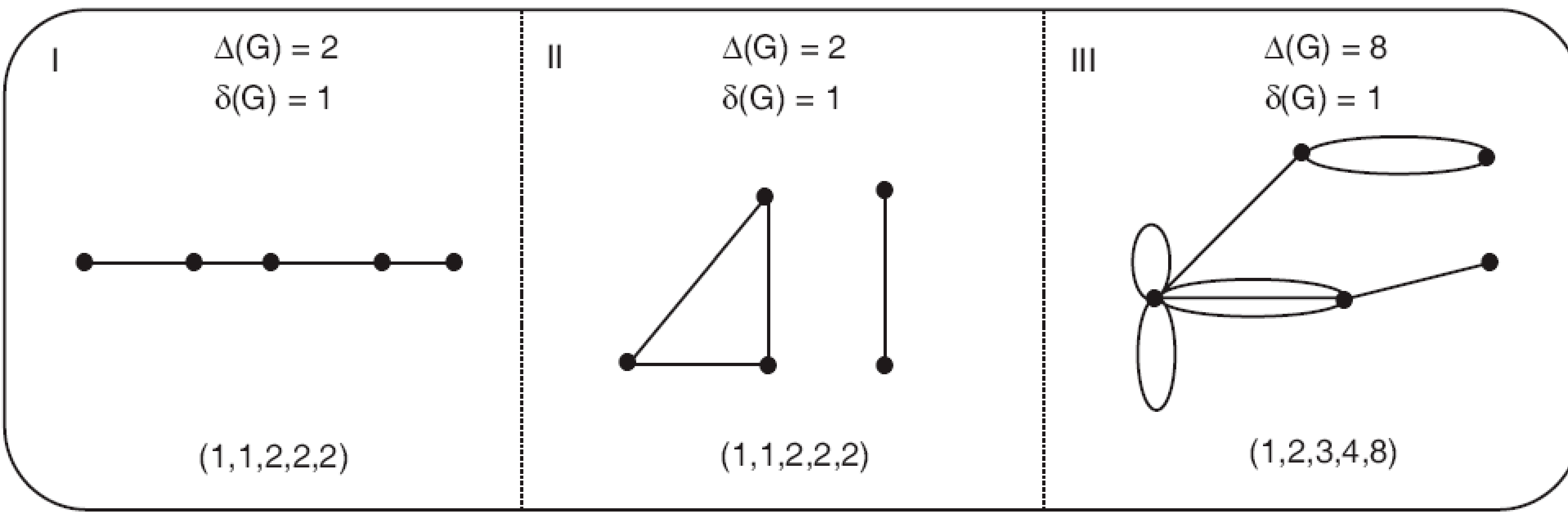
Conceitos Iniciais

- Exemplo:



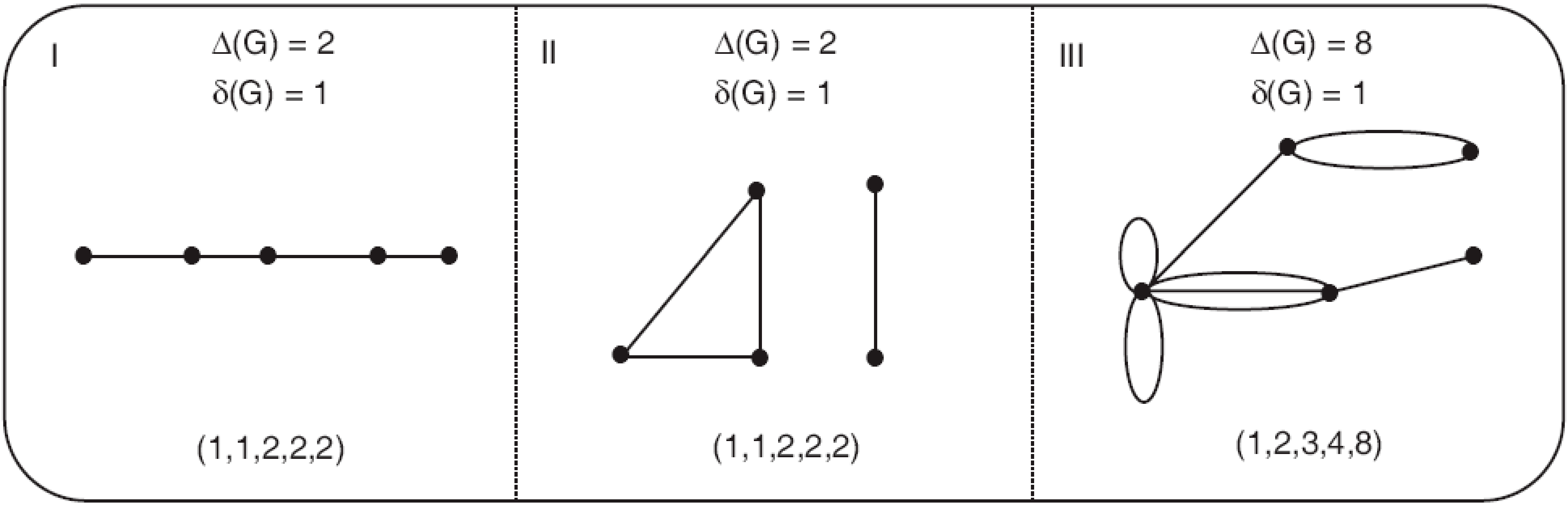
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - Os grafos em I e II têm dois vértices finais e três vértices de grau 2.



Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - Os grafos em I e II têm dois vértices finais e três vértices de grau 2.
  - O grafo em III tem 1 vértice final, 1 de grau 2, 1 de grau 3, 1 de grau 4 e 1 de grau 8.

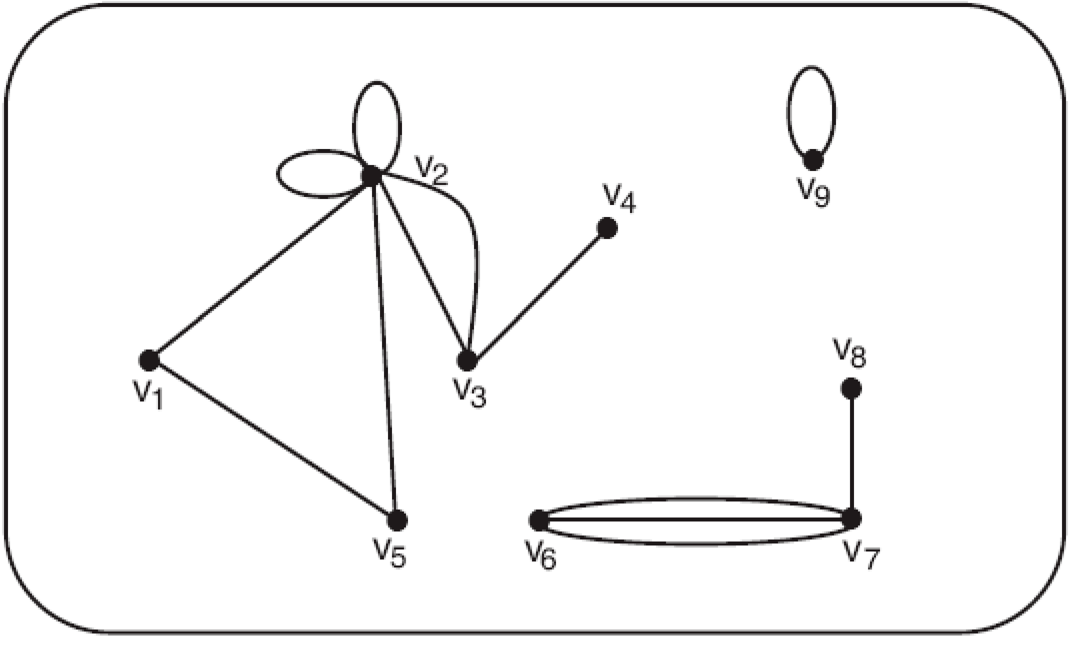


Conceitos Iniciais

- Exemplo:

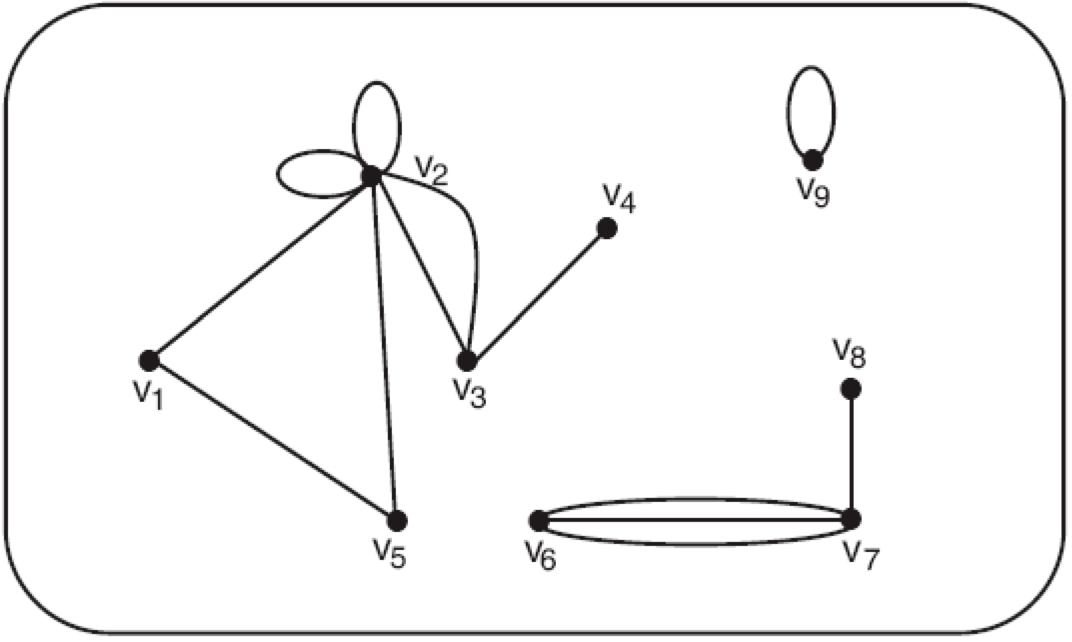
Conceitos Iniciais

- Exemplo:



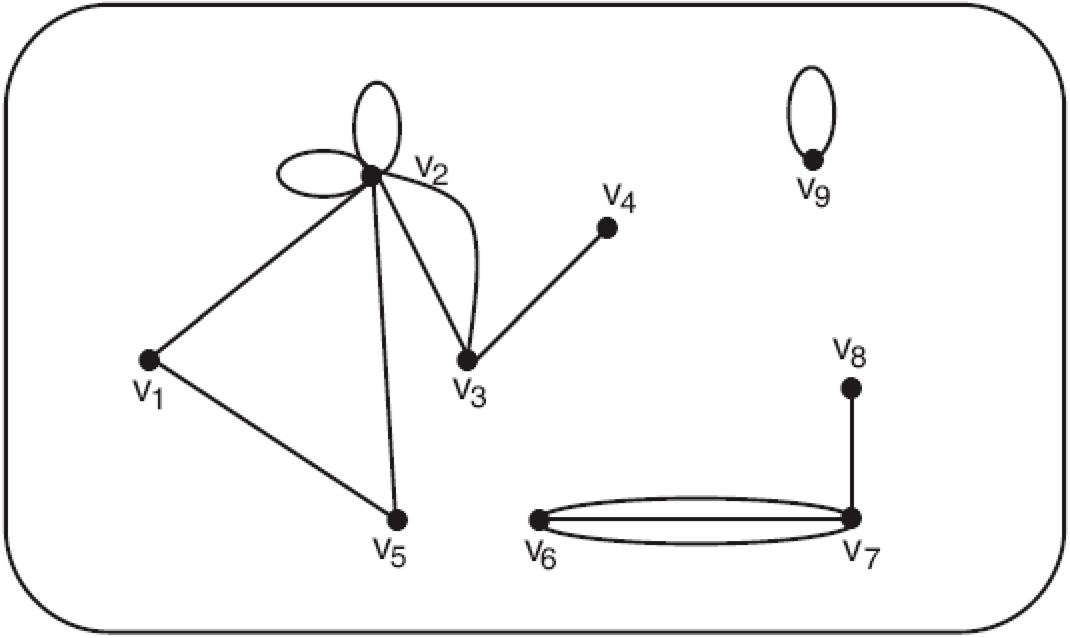
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - Os vértices v1 e v2 são adjacentes.



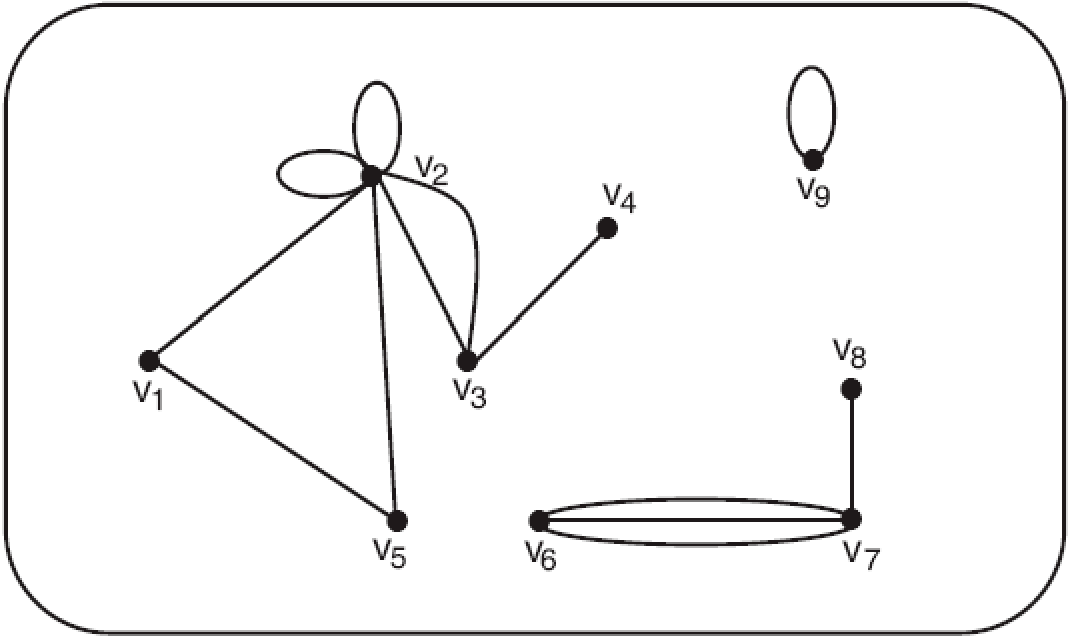
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - Os vértices v1 e v2 são adjacentes.
  - Os vértices v1 e v3 não são adjacentes.



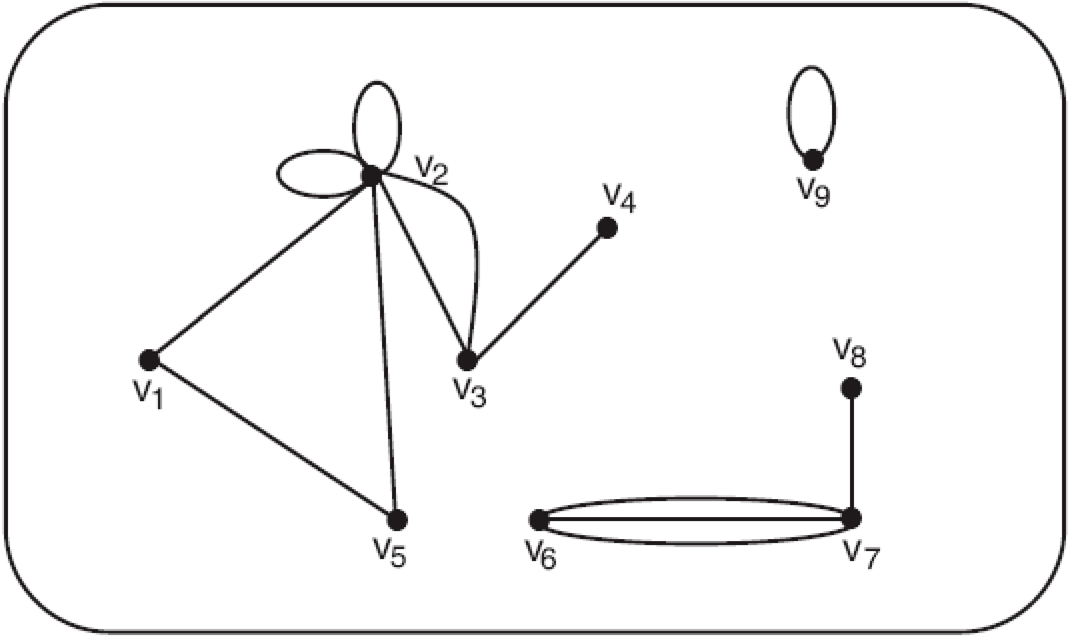
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - Os vértices v1 e v2 são adjacentes.
  - Os vértices v1 e v3 não são adjacentes.
  - As arestas (v1,v2) e (v2,v3) são adjacentes.



Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - Os vértices v1 e v2 são adjacentes.
  - Os vértices v1 e v3 não são adjacentes.
  - As arestas (v1,v2) e (v2,v3) são adjacentes.
  - As arestas (v1,v2) e (v3,v4) não são adjacentes.

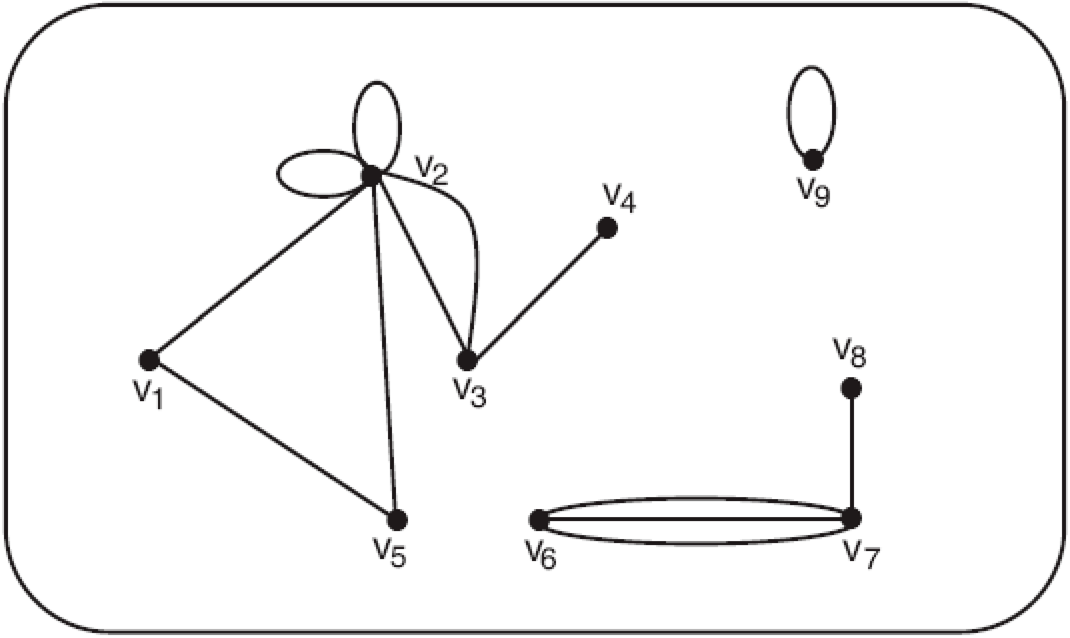


Conceitos Iniciais

- Exemplo:

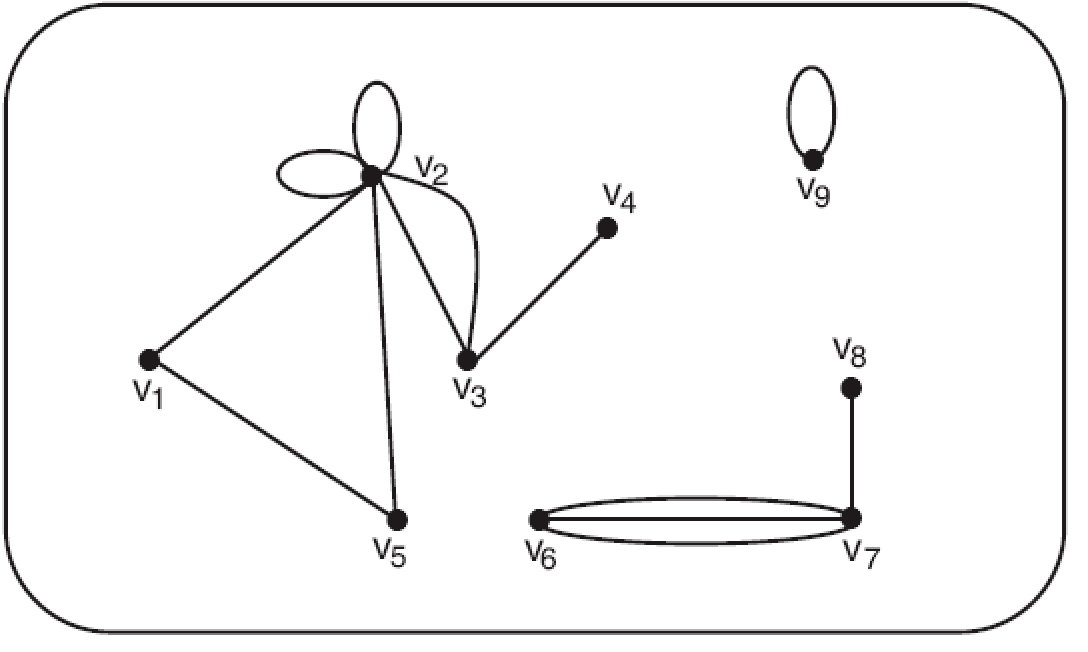
Conceitos Iniciais

- Exemplo:



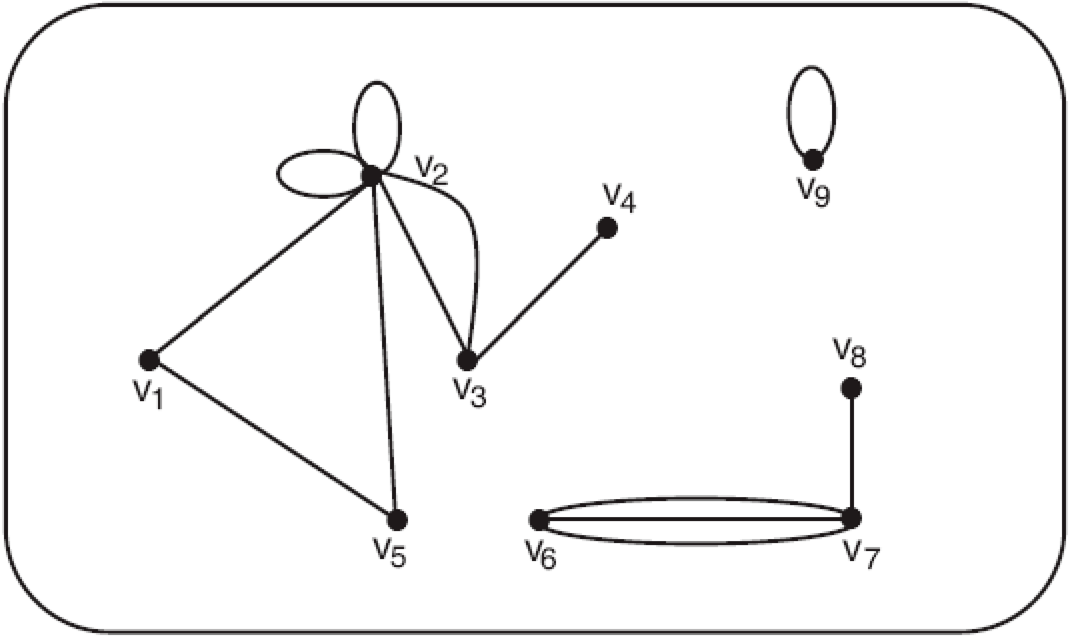
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - A aresta (v3,v4) é incidente nos vértices v3 e v4; os vértices v3 e v4 são incidentes com a aresta (v3,v4).



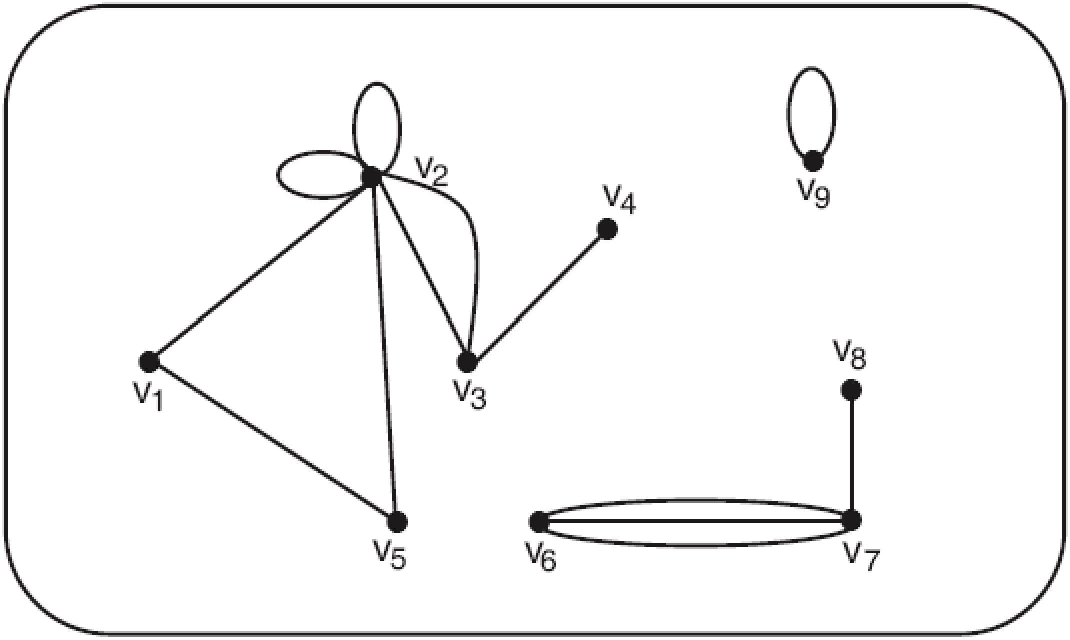
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - A aresta (v3,v4) é incidente nos vértices v3 e v4; os vértices v3 e v4 são incidentes com a aresta (v3,v4).
  - Os graus dos vários vértices são:



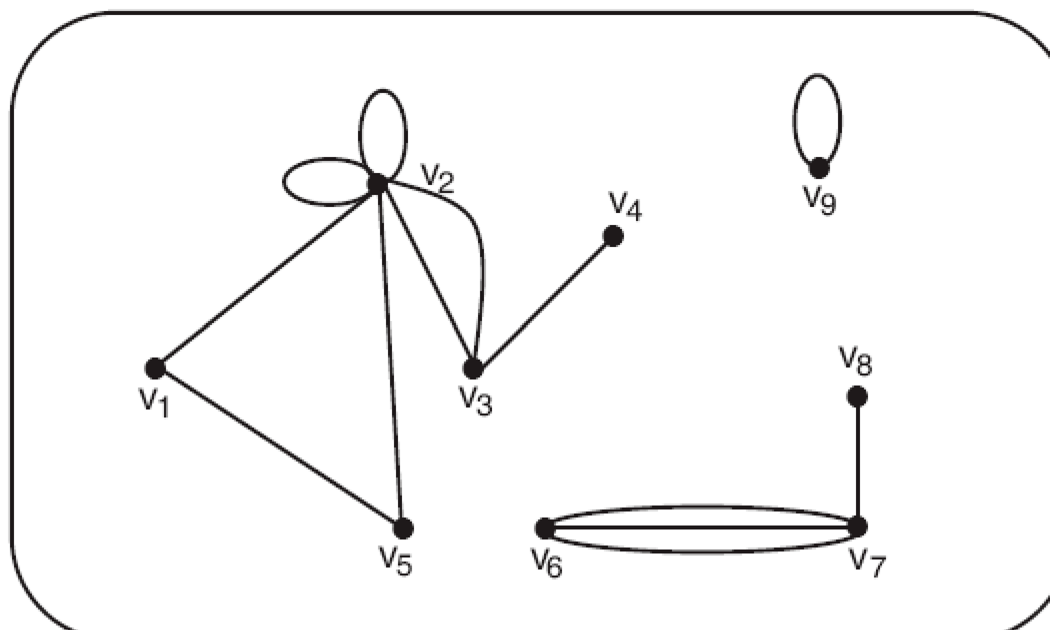
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - A aresta (v3,v4) é incidente nos vértices v3 e v4; os vértices v3 e v4 são incidentes com a aresta (v3,v4).
  - Os graus dos vários vértices são:
    - d(v1) = 2



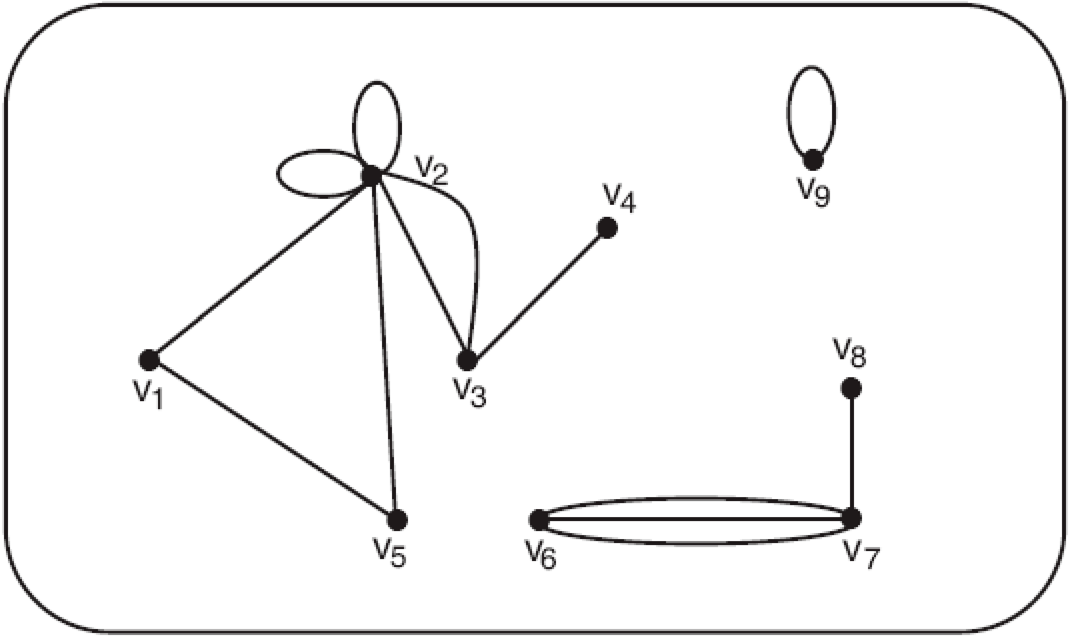
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  – A aresta (v3,v4) é incidente nos vértices v3 e v4; os vértices v3 e v4 são incidentes com a aresta (v3,v4).
  – Os graus dos vários vértices são:
    - d(v1) = 2
    - d(v2) = 8



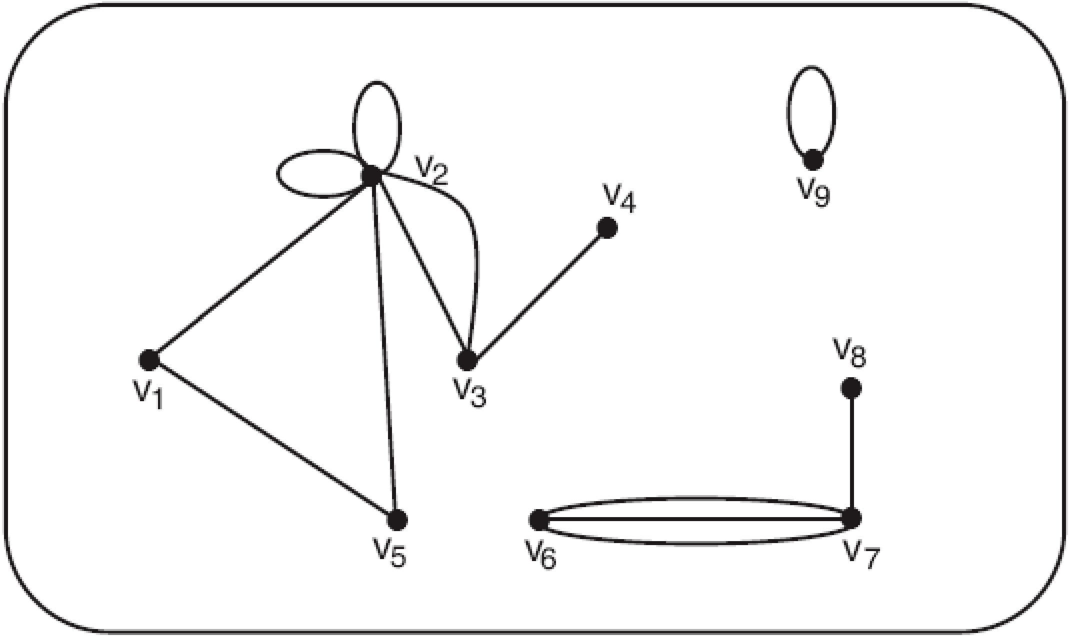
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - A aresta (v3,v4) é incidente nos vértices v3 e v4; os vértices v3 e v4 são incidentes com a aresta (v3,v4).
  - Os graus dos vários vértices são:
    - d(v1) = 2
    - d(v2) = 8
    - d(v3) = 3



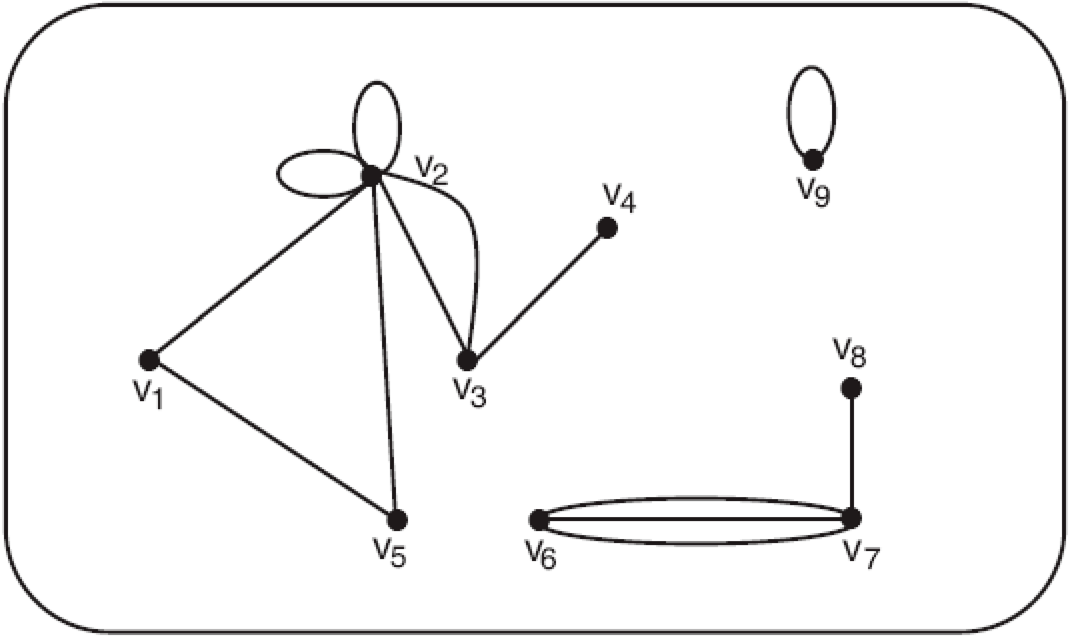
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - A aresta (v3,v4) é incidente nos vértices v3 e v4; os vértices v3 e v4 são incidentes com a aresta (v3,v4).
  - Os graus dos vários vértices são:
    - d(v1) = 2
    - d(v2) = 8
    - d(v3) = 3
    - d(v4) = 1



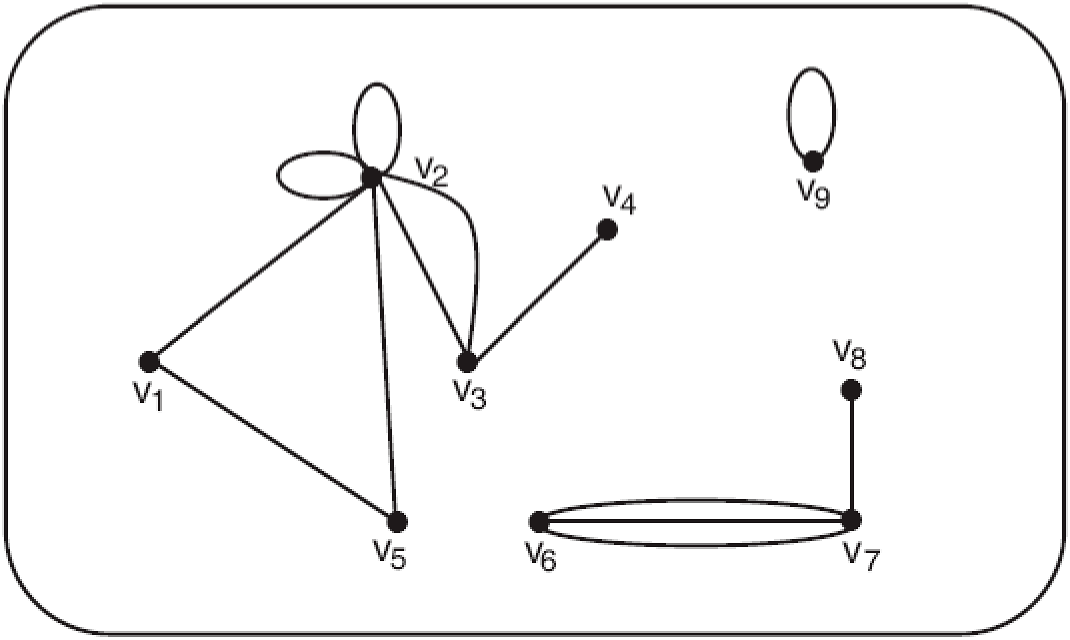
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - A aresta (v3,v4) é incidente nos vértices v3 e v4; os vértices v3 e v4 são incidentes com a aresta (v3,v4).
  - Os graus dos vários vértices são:
    - d(v1) = 2
    - d(v2) = 8
    - d(v3) = 3
    - d(v4) = 1
    - d(v5) = 2



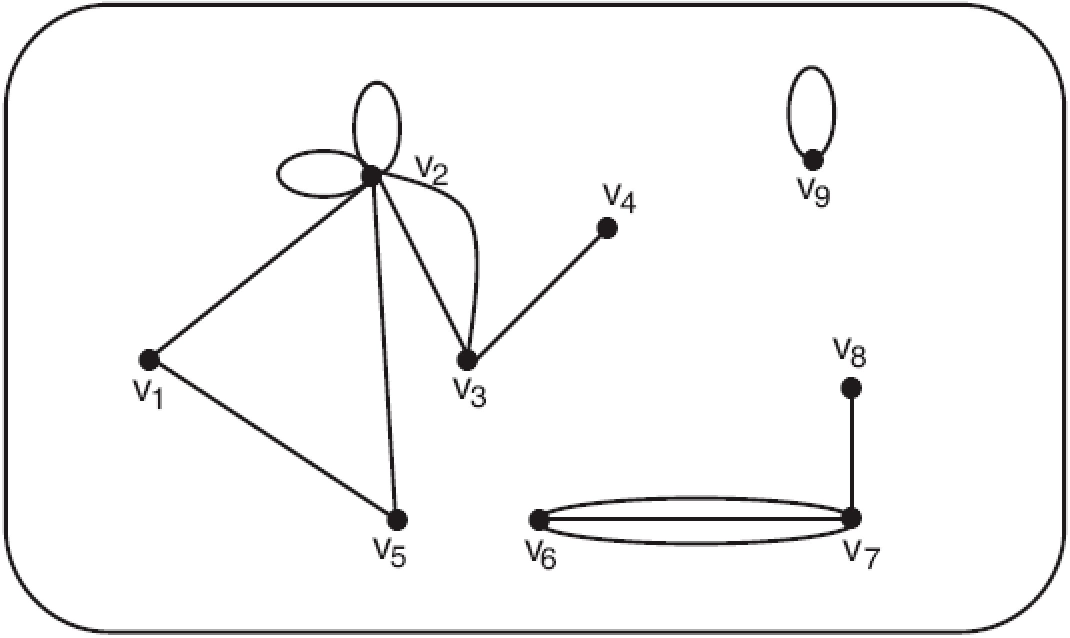
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - A aresta (v3,v4) é incidente nos vértices v3 e v4; os vértices v3 e v4 são incidentes com a aresta (v3,v4).
  - Os graus dos vários vértices são:
    - d(v1) = 2
    - d(v2) = 8
    - d(v3) = 3
    - d(v4) = 1
    - d(v5) = 2
    - d(v6) = 3



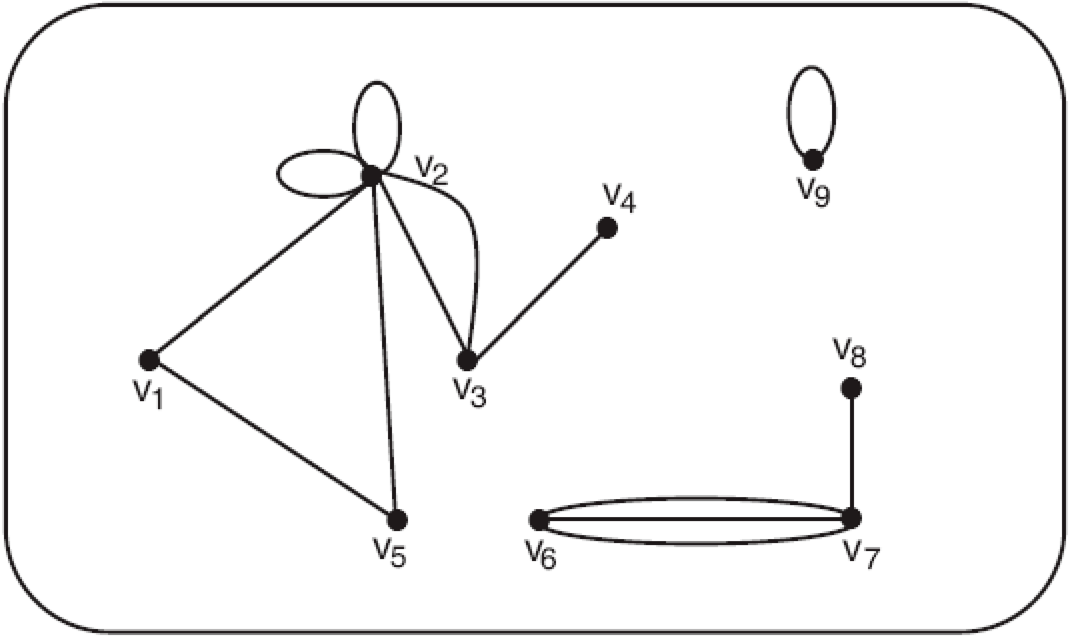
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - A aresta (v3,v4) é incidente nos vértices v3 e v4; os vértices v3 e v4 são incidentes com a aresta (v3,v4).
  - Os graus dos vários vértices são:
    - d(v1) = 2
    - d(v2) = 8
    - d(v3) = 3
    - d(v4) = 1
    - d(v5) = 2
    - d(v6) = 3
    - d(v7) = 4



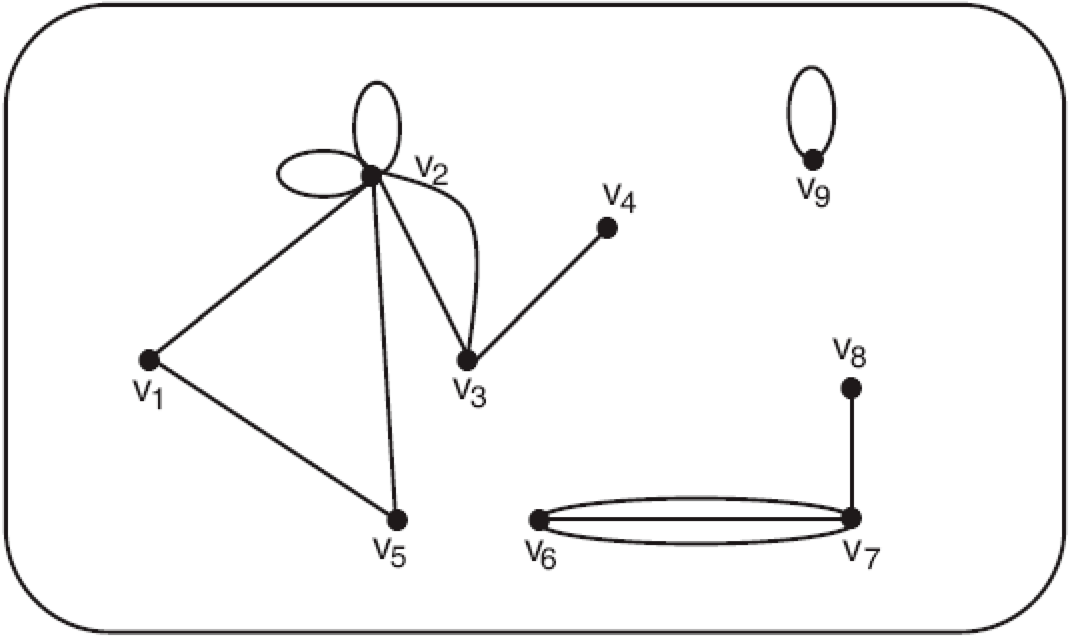
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - A aresta (v3,v4) é incidente nos vértices v3 e v4; os vértices v3 e v4 são incidentes com a aresta (v3,v4).
  - Os graus dos vários vértices são:
    - d(v1) = 2
    - d(v2) = 8
    - d(v3) = 3
    - d(v4) = 1
    - d(v5) = 2
    - d(v6) = 3
    - d(v7) = 4
    - d(v8) = 1



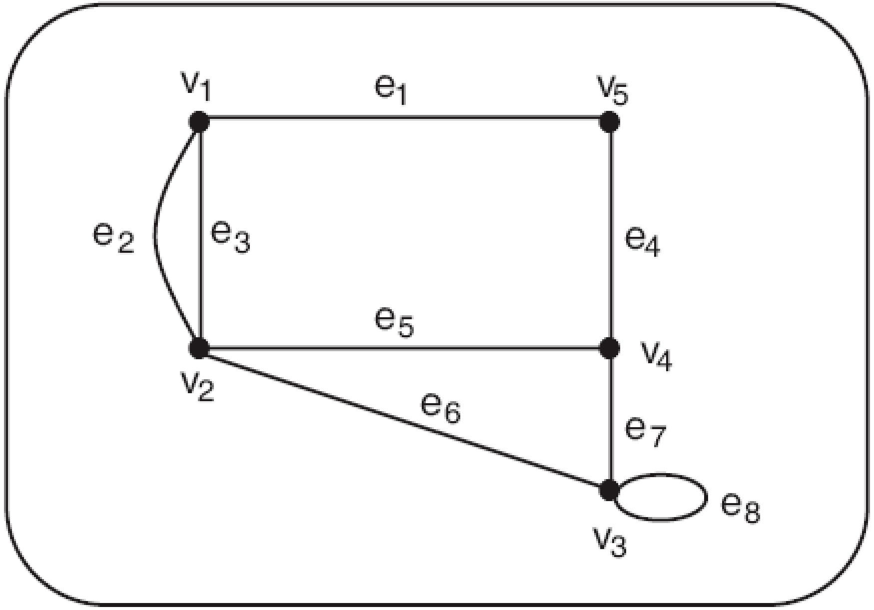
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - A aresta (v3,v4) é incidente nos vértices v3 e v4; os vértices v3 e v4 são incidentes com a aresta (v3,v4).
  - Os graus dos vários vértices são:
    - d(v1) = 2
    - d(v2) = 8
    - d(v3) = 3
    - d(v4) = 1
    - d(v5) = 2
    - d(v6) = 3
    - d(v7) = 4
    - d(v8) = 1
    - d(v9) = 2



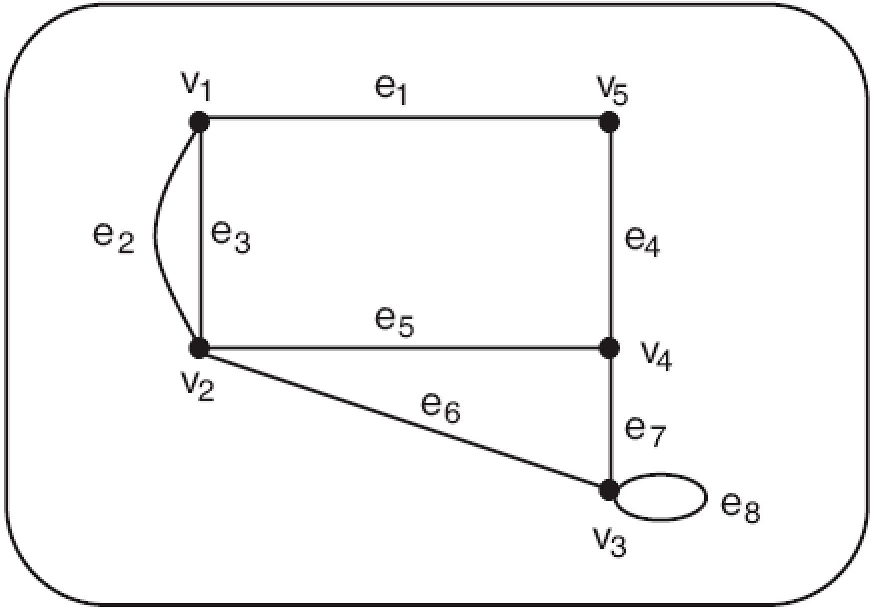
Conceitos Iniciais

- Exemplo:



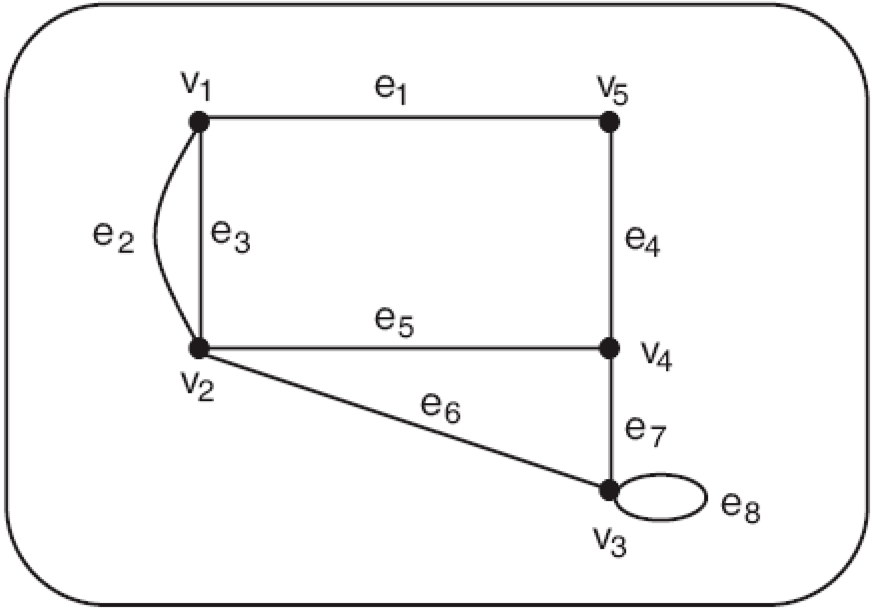
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - O grafo G é definido por cinco vértices e oito arestas.



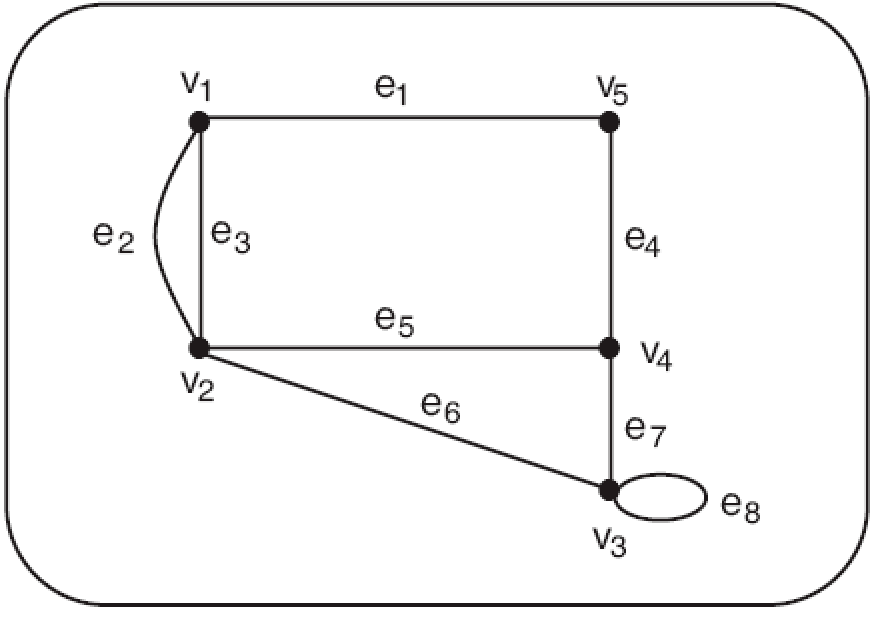
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - O grafo G é definido por cinco vértices e oito arestas.
  - d(v1) = 3



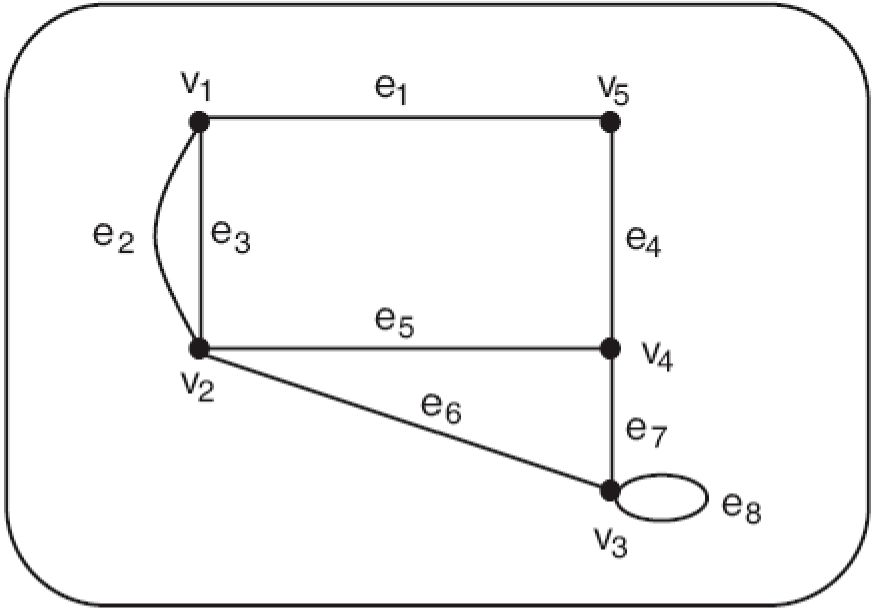
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - O grafo G é definido por cinco vértices e oito arestas.
  - d(v1) = 3
  - d(v2) = 4



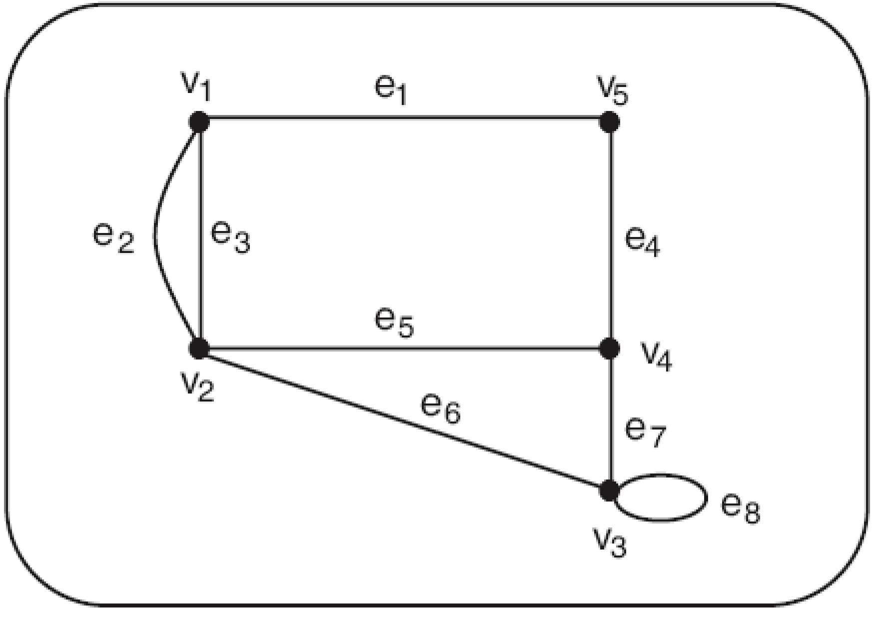
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - O grafo G é definido por cinco vértices e oito arestas.
  - d(v1) = 3
  - d(v2) = 4
  - d(v3) = 4



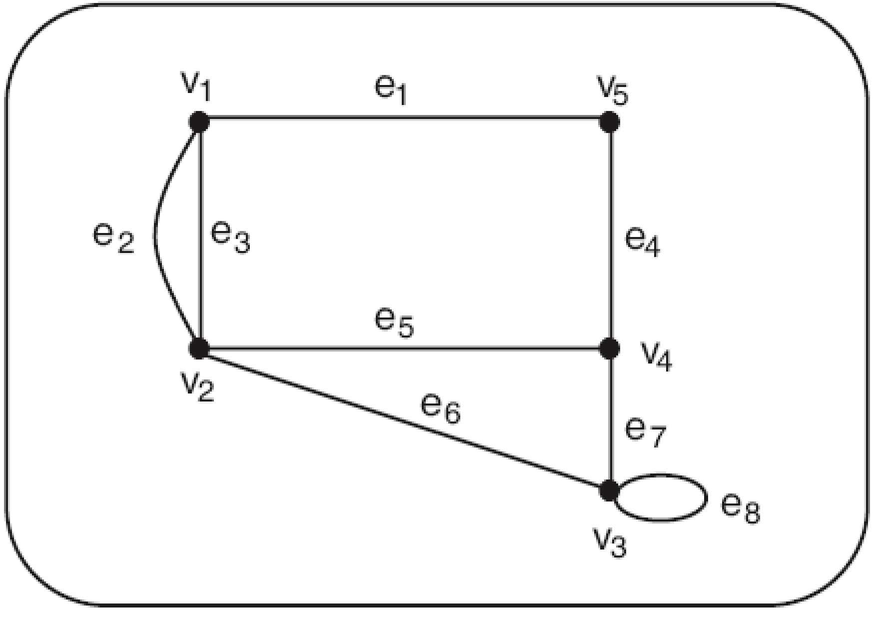
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - O grafo G é definido por cinco vértices e oito arestas.
  - d(v1) = 3
  - d(v2) = 4
  - d(v3) = 4
  - d(v4) = 3



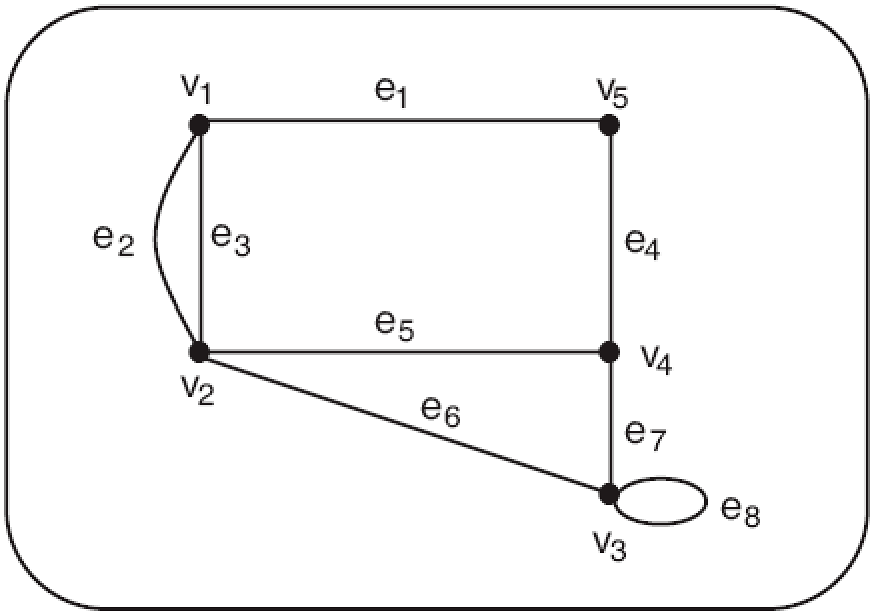
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - O grafo G é definido por cinco vértices e oito arestas.
  - d(v1) = 3
  - d(v2) = 4
  - d(v3) = 4
  - d(v4) = 3
  - d(v5) = 2



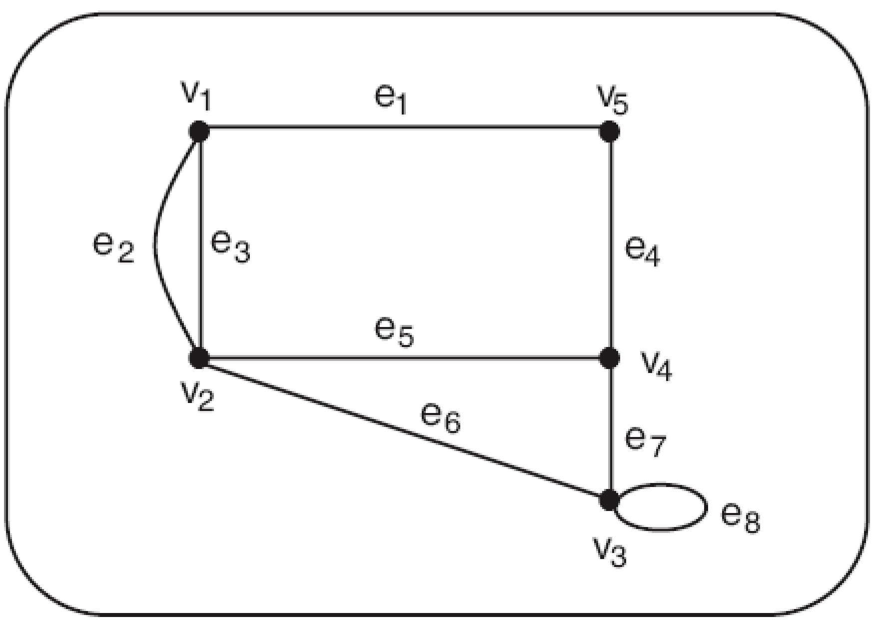
Conceitos Iniciais

- Exemplo:



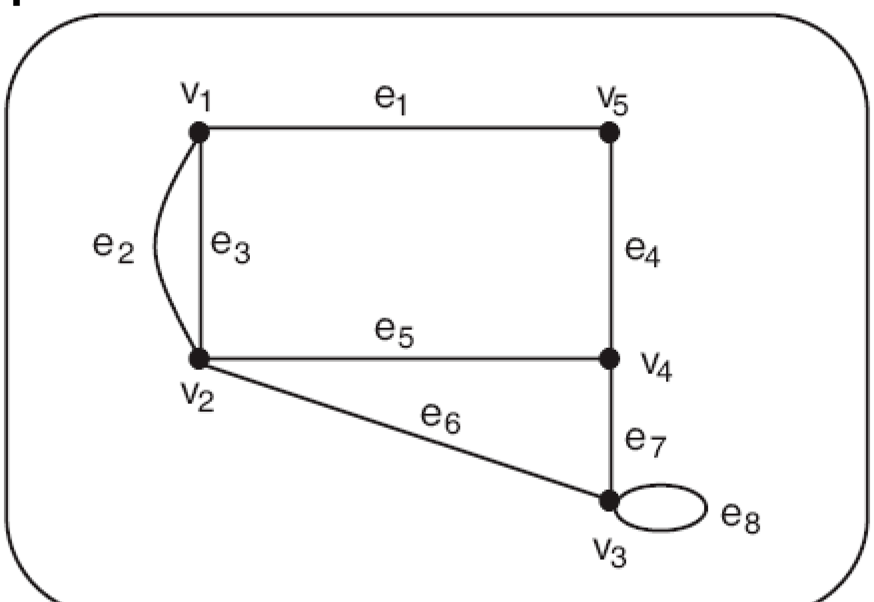
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - Note que d(v1) + d(v2) + d(v3) + d(v4) + d(v5) = 3 + 4 + 4 + 3 + 2 = 16 = 2 × 8 = 2 × número de arestas do grafo.



Conceitos Iniciais

- Exemplo:
  - Note que d(v1) + d(v2) + d(v3) + d(v4) + d(v5) = 3 + 4 + 4 + 3 + 2 = 16 = 2 × 8 = 2 × número de arestas do grafo.
  - Esse resultado não é coincidência e é estabelecido pelo Teorema 3.1.



Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- **Teorema 3.1**

Conceitos Iniciais

- **Teorema 3.1**
  - Para um grafo G = (V,E), tal que V = {v1,v2, ..., vn} (|V| = n) e E = {e1,e2, ..., em} (|E| = m), tem-se:

Conceitos Iniciais

- **Teorema 3.1**
  - Para um grafo G = (V,E), tal que V = {v1,v2, ..., vn} (|V| = n) e E = {e1,e2, ..., em} (|E| = m), tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2 \times m \qquad (3.2)$$

Conceitos Iniciais

- **Teorema 3.1**
  - Para um grafo G = (V,E), tal que V = {v1,v2, ..., vn} (|V| = n) e E = {e1,e2, ..., em} (|E| = m), tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2 \times m \qquad (3.2)$$

- **Prova**

Conceitos Iniciais

- **Teorema 3.1**
  - Para um grafo G = (V,E), tal que V = {v1,v2, ..., vn} (|V| = n) e E = {e1,e2, ..., em} (|E| = m), tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2 \times m \qquad (3.2)$$

- **Prova**
  - Uma vez que cada aresta contribui com dois graus, a soma dos graus de todos os vértices em G é igual a duas vezes o número de arestas em G.

Conceitos Iniciais

- **Corolário do Teorema 3.1**
  - Para um grafo G = (V,E), tal que V = {v1,v2, ..., vn} (|V| = n) e E = {e1,e2, ..., em} (|E| = m), a desigualdade mostrada em (3.3) é válida.

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G) \qquad (3.3)$$

Conceitos Iniciais

- **Teorema 3.2**
  - Em um grafo G = (V,E), tal que V = {v1, v2, ..., vn} e |E| = |{e1, e2, ..., em}|= m, o número de vértices ímpares é sempre par.

Conceitos Iniciais

- **Prova do Teorema 3.2:**

Conceitos Iniciais

- **Prova do Teorema 3.2:**
  - O conjunto total de vértices V de G pode ser escrito como $V = P \cup I$, tal que P é o conjunto dos vértices pares e I, o conjunto dos vértices ímpares. Com base no resultado estabelecido pelo Teorema 3.1, pode-se escrever que:

Conceitos Iniciais

- **Prova do Teorema 3.2:**
  - O conjunto total de vértices V de G pode ser escrito como V = P ∪ I, tal que P é o conjunto dos vértices pares e I, o conjunto dos vértices ímpares. Com base no resultado estabelecido pelo Teorema 3.1, pode-se escrever que:

$$2 \times m = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{u \in P} d(u) + \sum_{w \in I} d(w)$$

Conceitos Iniciais

- **Prova do Teorema 3.2:**
  - O conjunto total de vértices V de G pode ser escrito como V = P ∪ I, tal que P é o conjunto dos vértices pares e I, o conjunto dos vértices ímpares. Com base no resultado estabelecido pelo Teorema 3.1, pode-se escrever que:

$$2 \times m = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{u \in P} d(u) + \sum_{w \in I} d(w)$$

  - Assim, tem-se:

Conceitos Iniciais

- **Prova do Teorema 3.2:**
  - O conjunto total de vértices V de G pode ser escrito como V = P ∪ I, tal que P é o conjunto dos vértices pares e I, o conjunto dos vértices ímpares. Com base no resultado estabelecido pelo Teorema 3.1, pode-se escrever que:

$$2 \times m = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{u \in P} d(u) + \sum_{w \in I} d(w)$$

  - Assim, tem-se:

$$\sum_{w \in I} d(w) = 2 \times m - \sum_{u \in P} d(u)$$

Conceitos Iniciais

- **Prova do Teorema 3.2 (cont.):**
  - A diferença anterior é um número par, uma vez que é a diferença de dois números pares. Como cada um dos termos na soma $\sum_{w \in I} d(w)$ é ímpar (uma vez que cada um deles é o grau de um vértice ímpar), e como essa soma é par, deve existir um número par desses termos (uma vez que uma soma de um número ímpar de números ímpares é sempre ímpar).

Conceitos Iniciais

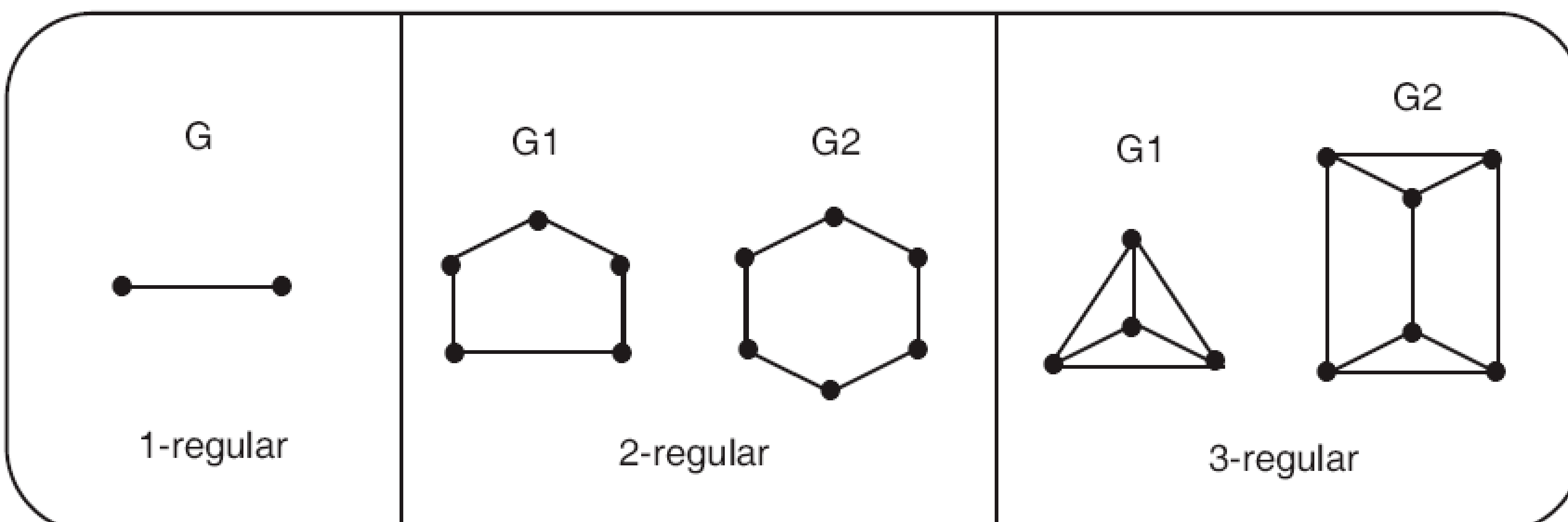
- **Definição 3.4**

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.4**
  - Seja o grafo G = (V,E).

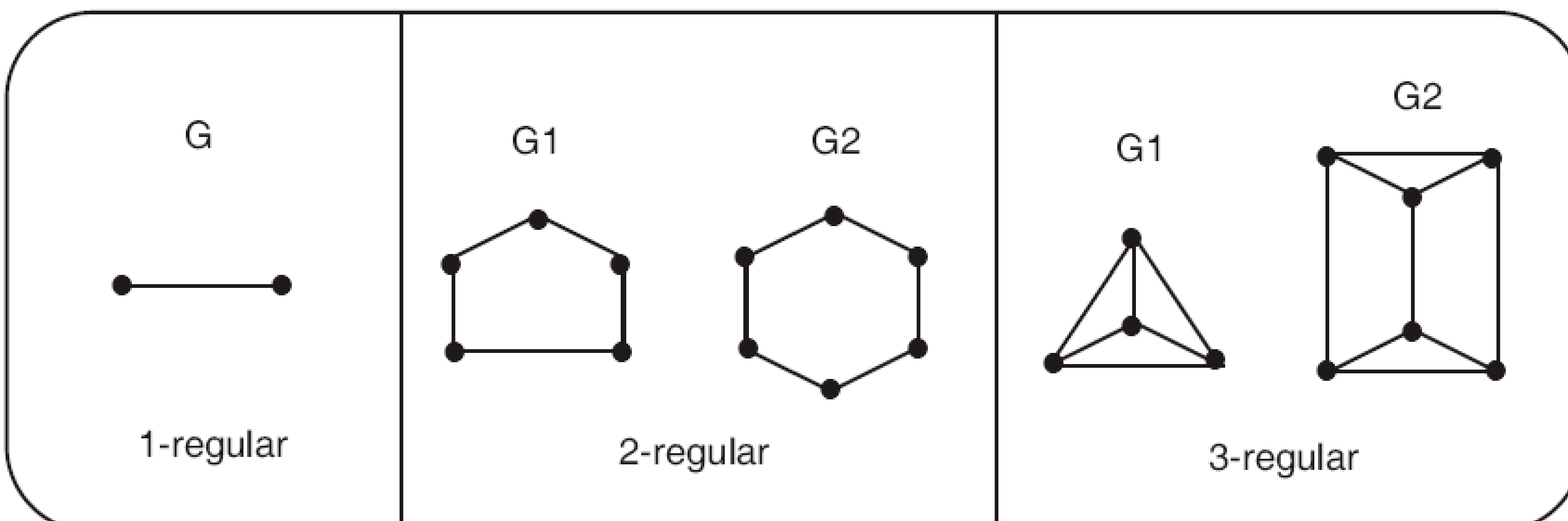
Conceitos Iniciais

- **Definição 3.4**
  - Seja o grafo G = (V,E).



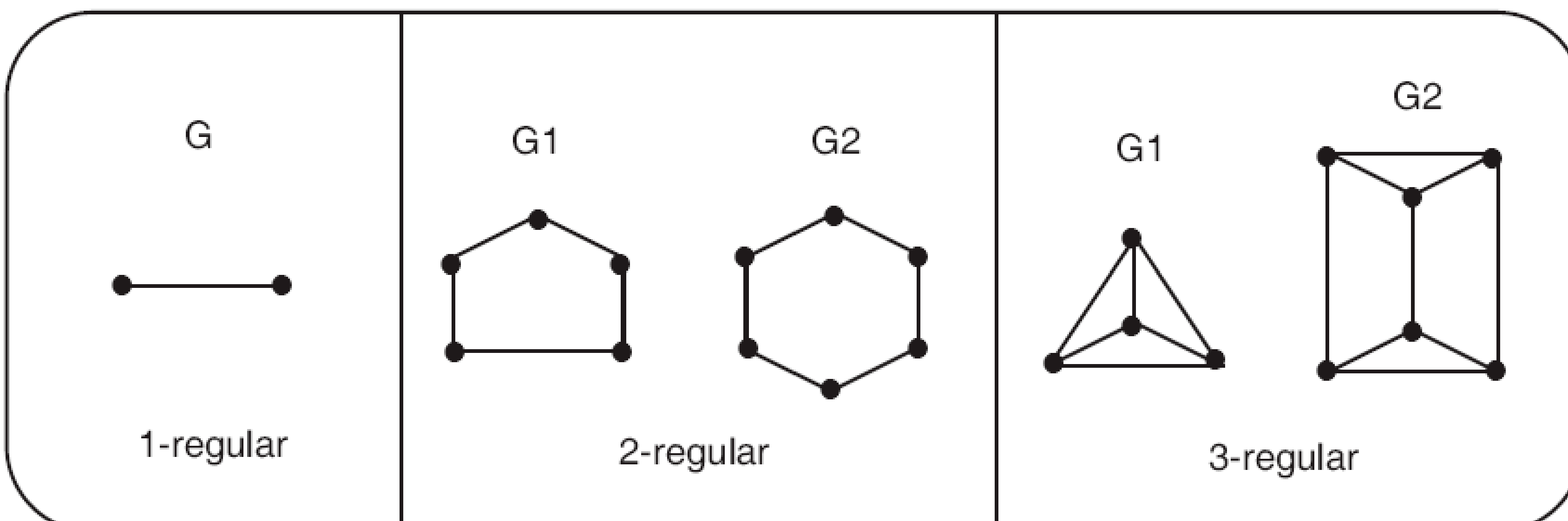
Conceitos Iniciais

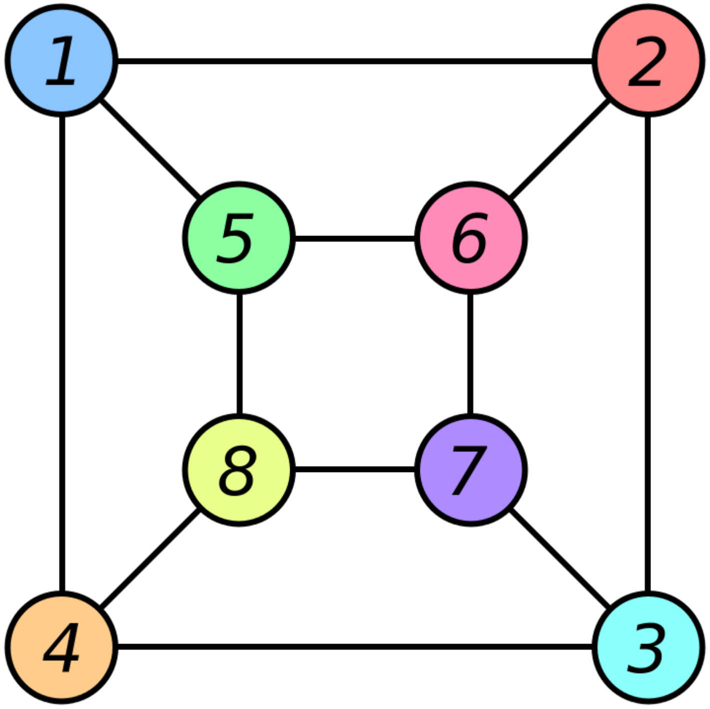
- **Definição 3.4**
  - Seja o grafo G = (V,E).
  - Se para algum inteiro positivo k, d(v) = k para todo vértice v ∈ V, então G é chamado de **k-regular**.



Conceitos Iniciais

- **Definição 3.4**
  - Seja o grafo G = (V,E).
  - Se para algum inteiro positivo k, d(v) = k para todo vértice v ∈ V, então G é chamado de **k-regular**.
  - Um grafo regular é um grafo que é k-regular para algum k.





ISOMORFISMO

Isomorfismo

Isomorfismo

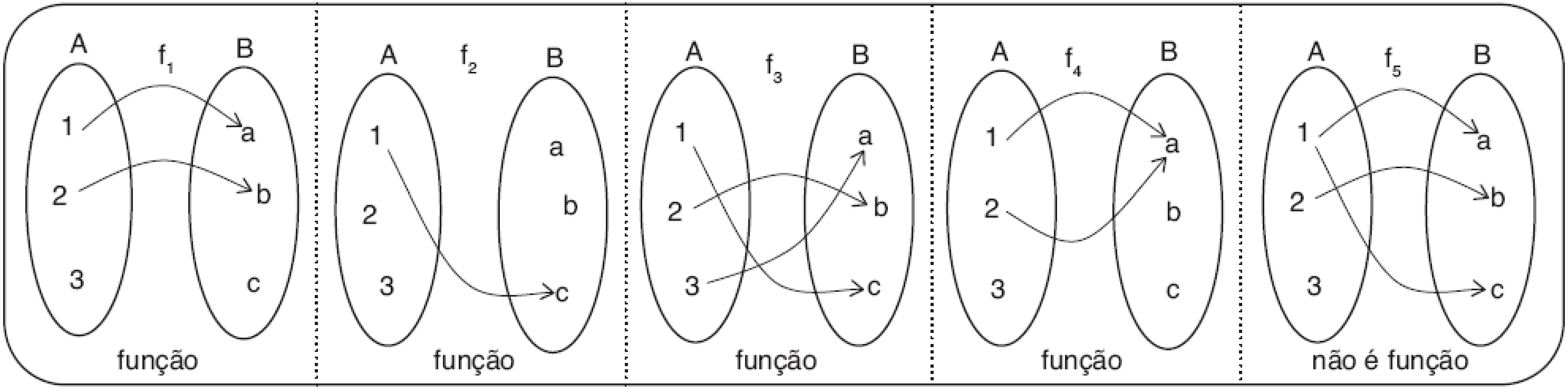
- Frequentemente, acontece de dois grafos terem a mesma estrutura e diferirem apenas na maneira como seus vértices e arestas são rotulados ou, então, apenas na maneira como são representados geometricamente.

Isomorfismo

- Frequentemente, acontece de dois grafos terem a mesma estrutura e diferirem apenas na maneira como seus vértices e arestas são rotulados ou, então, apenas na maneira como são representados geometricamente.
- Para muitos propósitos, esses dois grafos são essencialmente o mesmo grafo.

Isomorfismo

- Função
  - O conjunto f é uma função do conjunto A no conjunto B se e somente se f for um subconjunto do conjunto de pares ordenados A × B e se <a,b> ∈ f e <a,c> ∈ f implica b = c.



Isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} f: & A & \to & B \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & \text{D} & & \text{CD} \\ & \text{DOMÍNIO} & & \text{CONTRADOMÍNIO} \end{array}$$

Isomorfismo

- Função

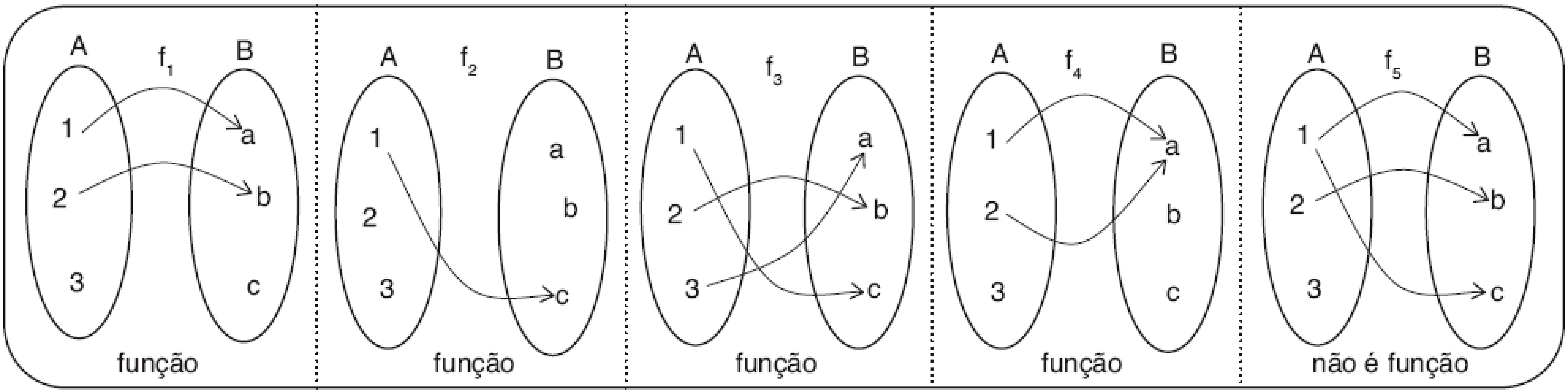


Tabela 1.1 Domínio e contradomínio de funções (S: sim; N: não)

Função	Domínio	Contradomínio	Total?	Sobrejetora?
f_1	{1,2}	{a,b}	N	N
f_2	{1}	{c}	N	N
f_3	{1,2,3}	{a,b,c}	S	S
f_4	{1,2}	{a}	N	N

Isomorfismo

Isomorfismo

- Função

Isomorfismo

- Função
  - Uma função total f:A→B é **injetora** (ou um-a-um) se associa elementos distintos de A a elementos distintos de B.

Isomorfismo

- Função
  - Uma função total $f:A \rightarrow B$ é **injetora** (ou um-a-um) se associa elementos distintos de A a elementos distintos de B.
  - f é injetora se e só se $f(x1) = f(x2) \rightarrow x1 = x2$.

Isomorfismo

- Função
  - Uma função total $f: A \to B$ é **injetora** (ou um-a-um) se associa elementos distintos de A a elementos distintos de B.
  - f é injetora se e só se $f(x1) = f(x2) \to x1 = x2$.
  - Alternativamente, uma função f é injetora se e somente se $x1 \neq x2 \to f(x1) \neq f(x2)$.

Isomorfismo

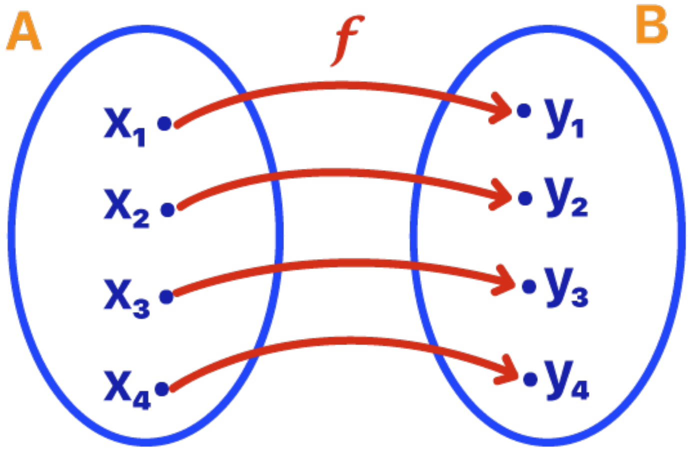
- Função
  - Uma função total $f{:}A \rightarrow B$ é **injetora** (ou um-a-um) se associa elementos distintos de A a elementos distintos de B.
  - f é injetora se e só se $f(x1) = f(x2) \rightarrow x1 = x2$.
  - Alternativamente, uma função f é injetora se e somente se $x1 \neq x2 \rightarrow f(x1) \neq f(x2)$.
  - Uma função total que não é injetora é chamada muitos-a-um.

Isomorfismo

- Função Injetora?

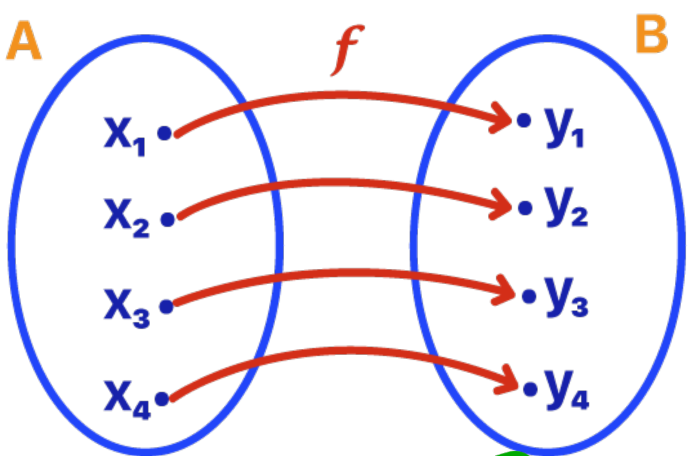
Isomorfismo

- Função Injetora?



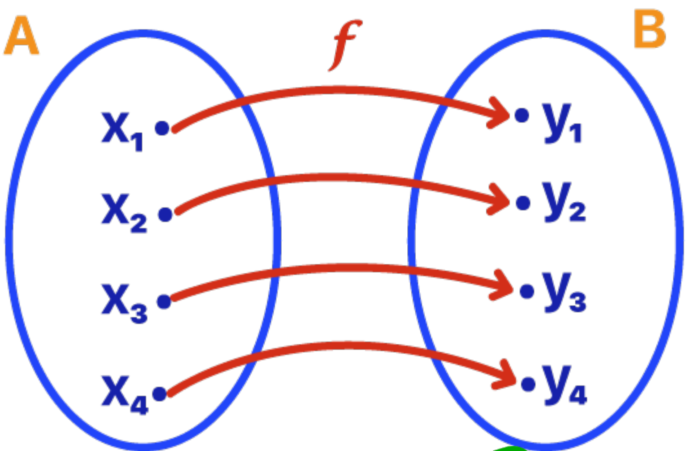
Isomorfismo

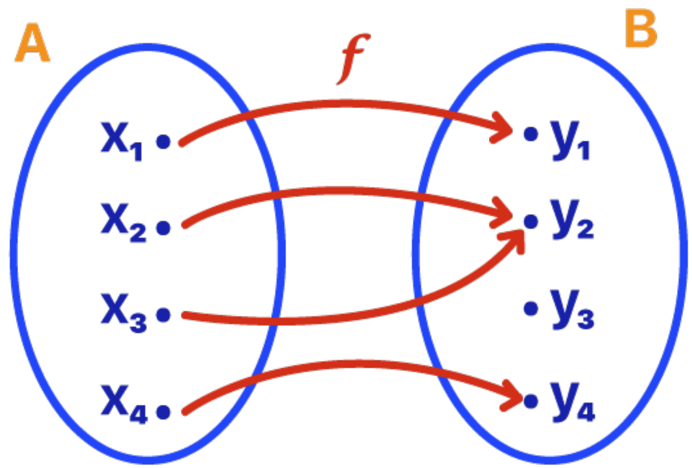
- Função Injetora?



Isomorfismo

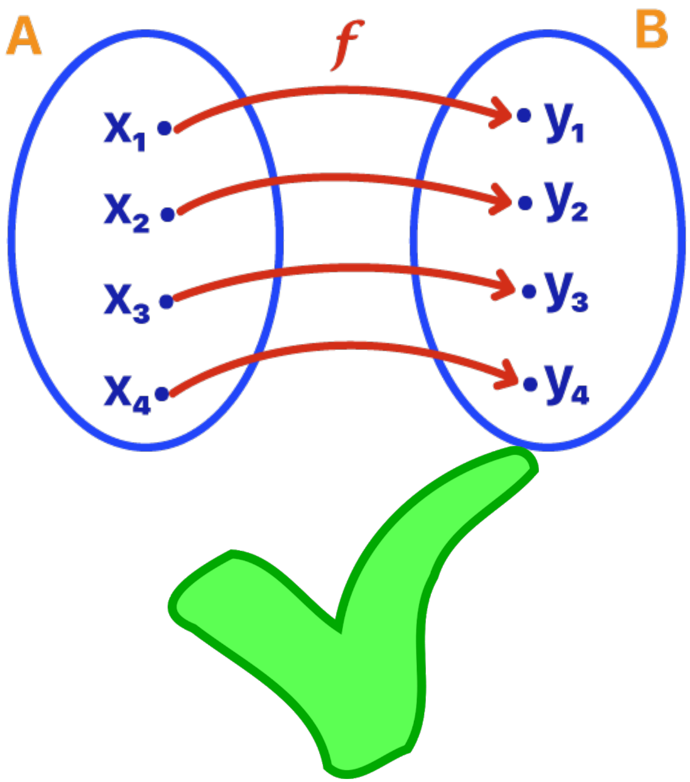
- Função Injetora?

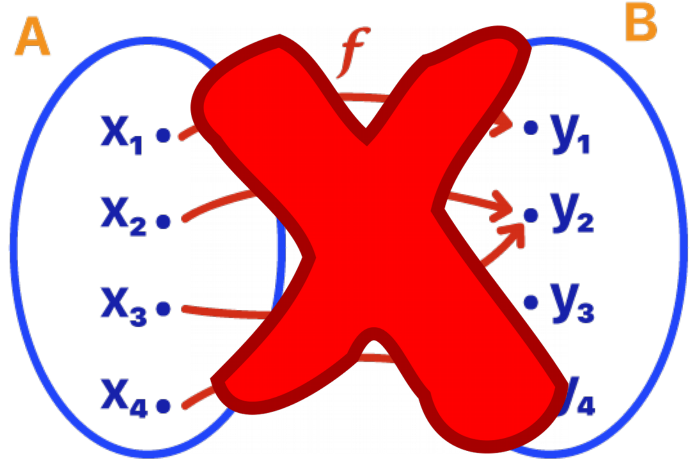




Isomorfismo

- Função Injetora?





Isomorfismo

- Uma função injetora e sobrejetora é chamada bijetora.

Isomorfismo

- **Definição 3.5**
  - Dois grafos G1 = (V1,E1) e G2 = (V2,E2) são isomorfos se:

Isomorfismo

- **Definição 3.5**
  - Dois grafos G1 = (V1,E1) e G2 = (V2,E2) são isomorfos se:
    - existir uma função total f bijetora, do conjunto de vértices de G1 no conjunto de vértices de G2 (f:V1 → V2);

Isomorfismo

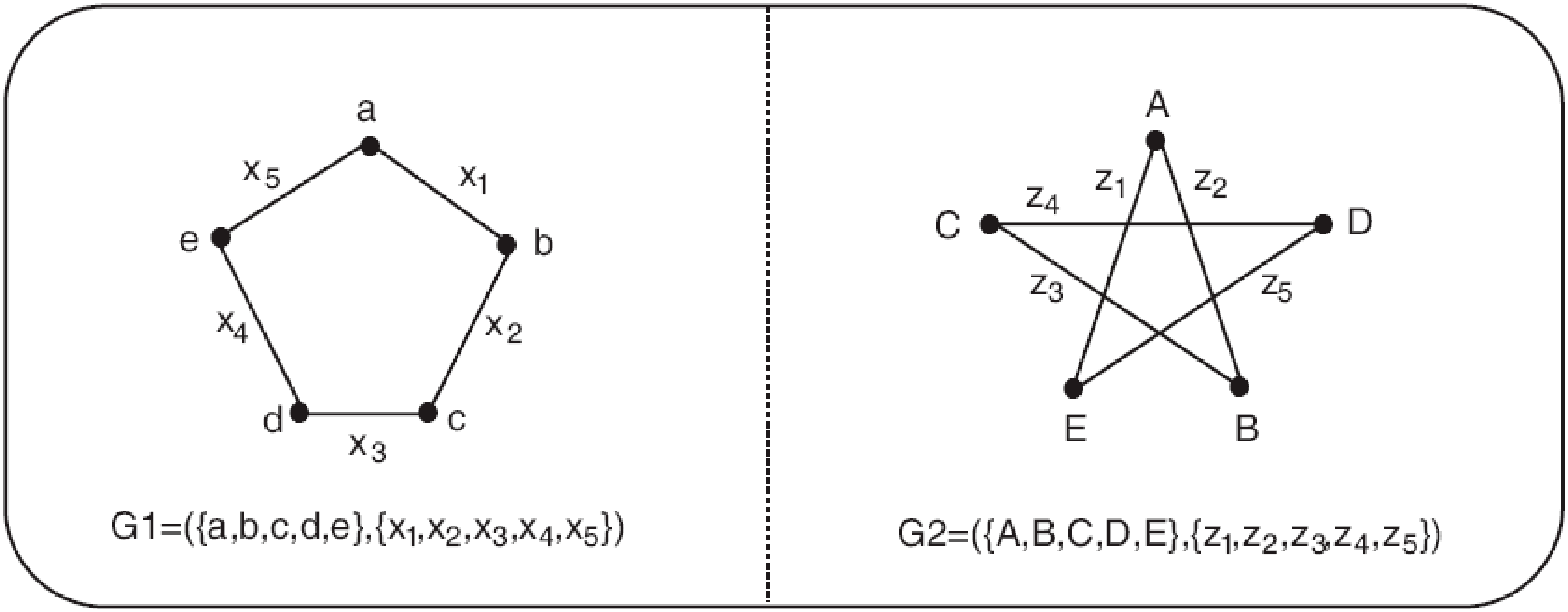
- **Definição 3.5**
  - Dois grafos G1 = (V1,E1) e G2 = (V2,E2) são isomorfos se:
    - existir uma função total f bijetora, do conjunto de vértices de G1 no conjunto de vértices de G2 (f:V1 → V2);
    - existir uma função total g bijetora, do conjunto de arestas de G1 no conjunto de arestas de G2 (g:E1 → E2), tal que uma aresta e é incidente a v1 e v2 em G1 se e somente se a aresta g(e) for incidente a f(v1) e f(v2) em G2.

Isomorfismo

- **Definição 3.5**
  - Dois grafos G1 = (V1,E1) e G2 = (V2,E2) são isomorfos se:
    - existir uma função total f bijetora, do conjunto de vértices de G1 no conjunto de vértices de G2 ($f: V1 \rightarrow V2$);
    - existir uma função total g bijetora, do conjunto de arestas de G1 no conjunto de arestas de G2 ($g: E1 \rightarrow E2$), tal que uma aresta e é incidente a v1 e v2 em G1 se e somente se a aresta g(e) for incidente a f(v1) e f(v2) em G2.
    - O par de funções f e g é chamado de isomorfismo entre grafos G1 e G2.

Isomorfismo

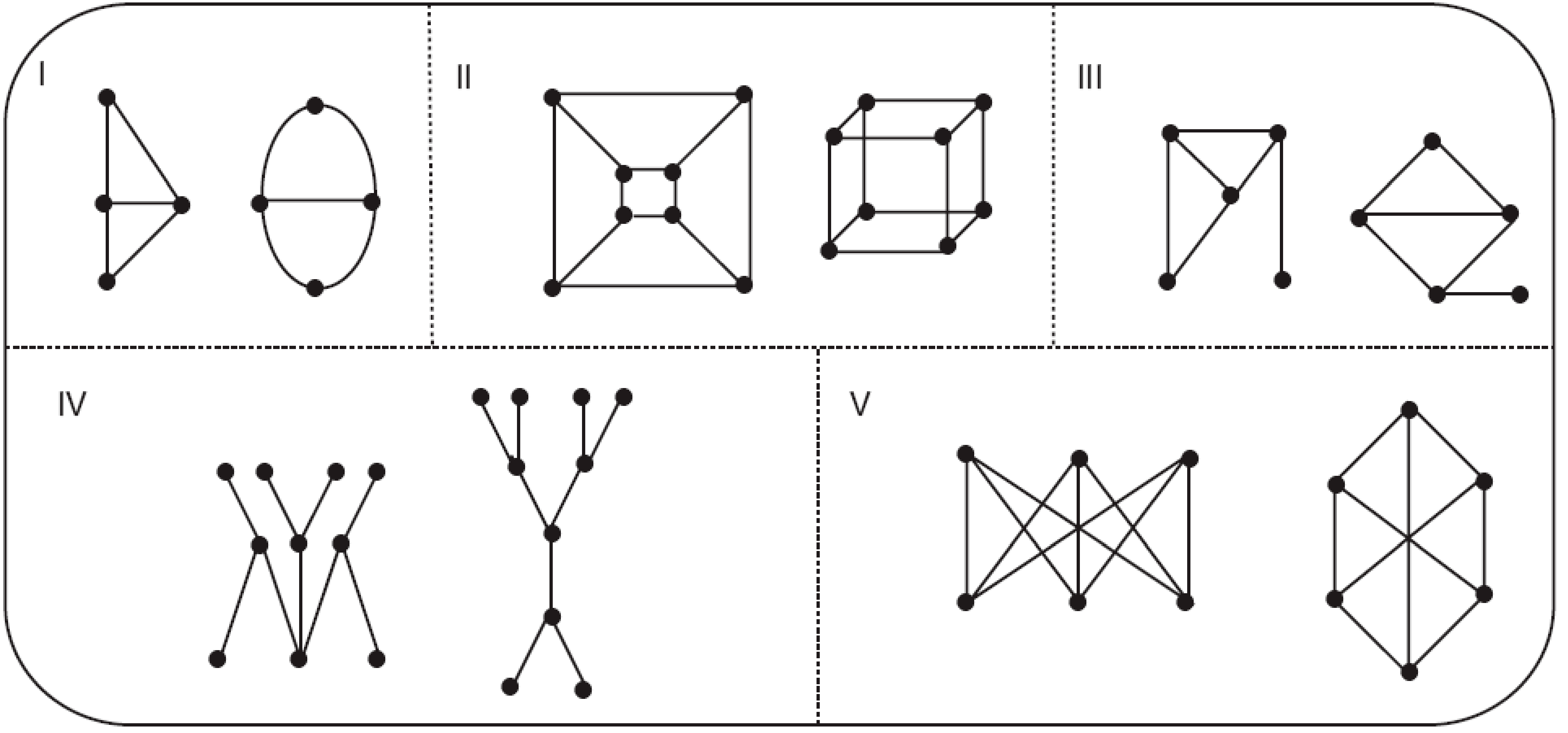
- Exemplo:



G1 e G2 são isomorfos.

Isomorfismo

- Exemplos



Pares de grafos isomorfos entre si.

Isomorfismo

Isomorfismo

- Com base na definição de isomorfismo entre grafos (Definição 3.5), para que sejam isomorfos, dois grafos devem ter:

Isomorfismo

- Com base na definição de isomorfismo entre grafos (Definição 3.5), para que sejam isomorfos, dois grafos devem ter:
  - (1) o mesmo número de vértices;

Isomorfismo

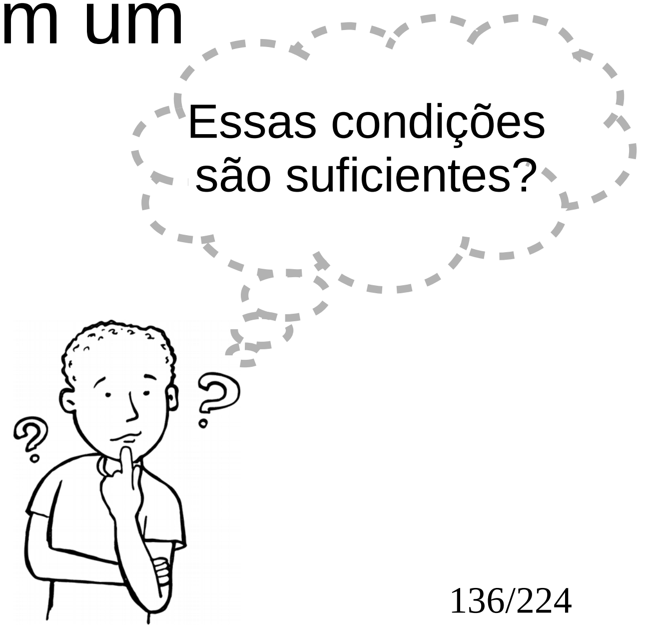
- Com base na definição de isomorfismo entre grafos (Definição 3.5), para que sejam isomorfos, dois grafos devem ter:
  - (1) o mesmo número de vértices;
  - (2) o mesmo número de arestas;

Isomorfismo

- Com base na definição de isomorfismo entre grafos (Definição 3.5), para que sejam isomorfos, dois grafos devem ter:
  - (1) o mesmo número de vértices;
  - (2) o mesmo número de arestas;
  - (3) um número igual de vértices com um determinado grau.

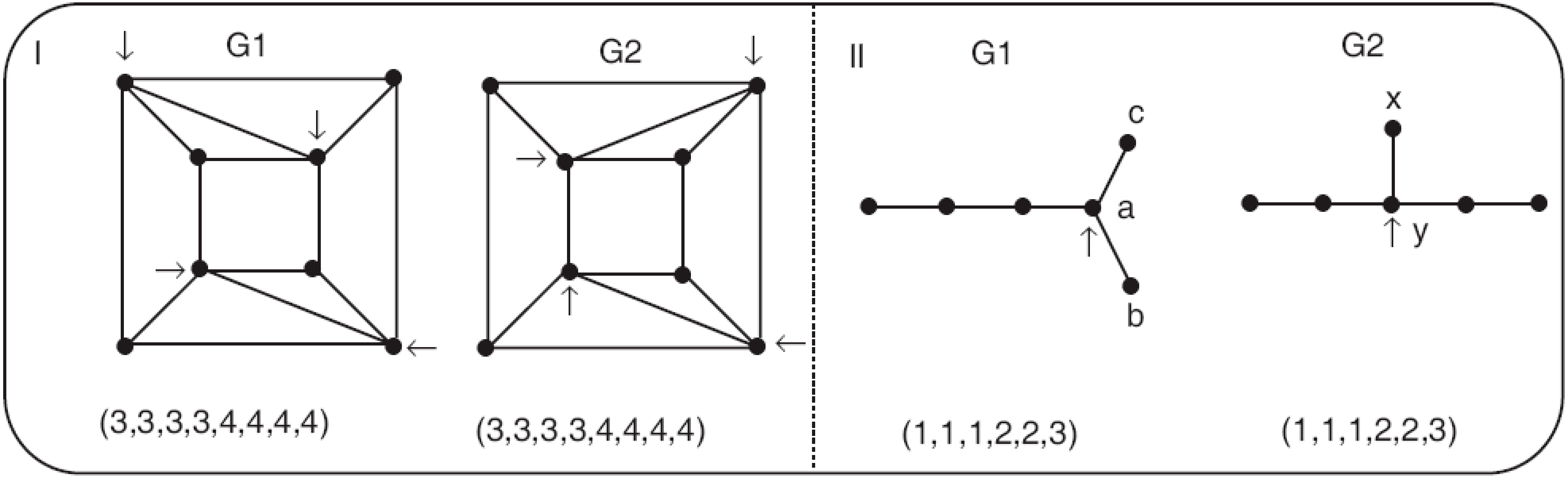
Isomorfismo

- Com base na definição de isomorfismo entre grafos (Definição 3.5), para que sejam isomorfos, dois grafos devem ter:
  - (1) o mesmo número de vértices;
  - (2) o mesmo número de arestas;
  - (3) um número igual de vértices com um determinado grau.



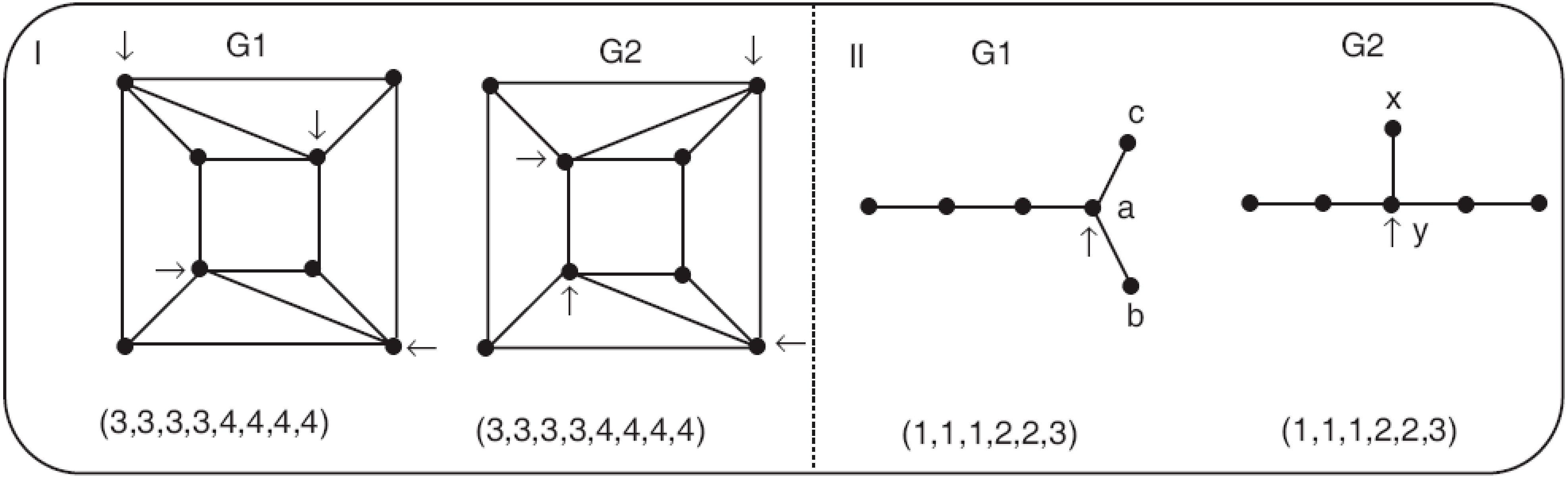
Isomorfismo

- Os grafos abaixo são isomorfos?



Isomorfismo

- Os grafos abaixo são isomorfos?



Isomorfismo

Isomorfismo

- A busca por um critério simples e eficiente para a detecção de isomorfismo ainda é um problema **não resolvido** em Teoria dos Grafos.

Isomorfismo

- A busca por um critério simples e eficiente para a detecção de isomorfismo ainda é um problema **não resolvido** em Teoria dos Grafos.
- Porém, existem vários algoritmos que se propõem à detecção automática de isomorfismo.

Isomorfismo

- **Teorema 3.3**
  - Dois grafos simples G1 e G2 são isomorfos se e somente se para alguma ordenação de seus vértices suas matrizes de adjacência (ver Definição 5.1) são iguais.

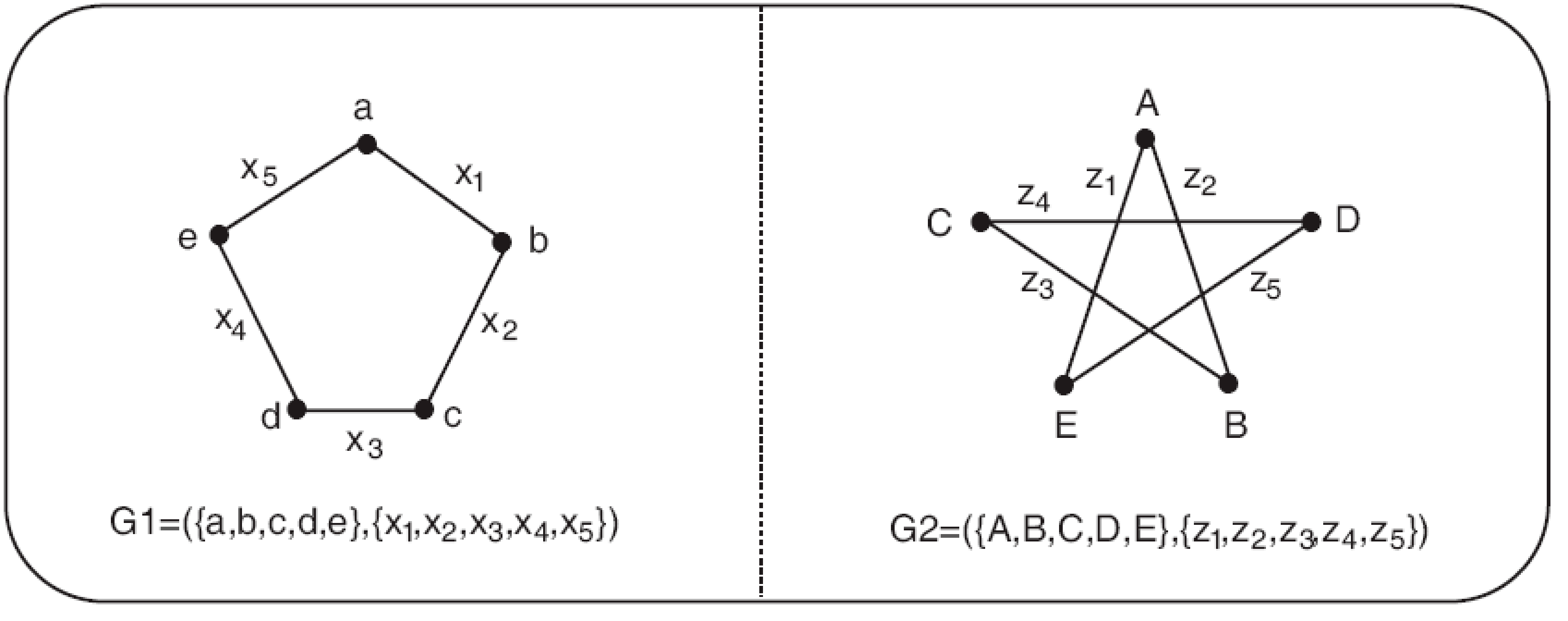
Isomorfismo

Isomorfismo

- Exemplo
  - Para os grafos G1 e G2 mostrados na figura abaixo, a matriz de adjacência de G1 (a, b, c, d, e) e a matriz de adjacência de G2 (A, B, C, D, E) são iguais.

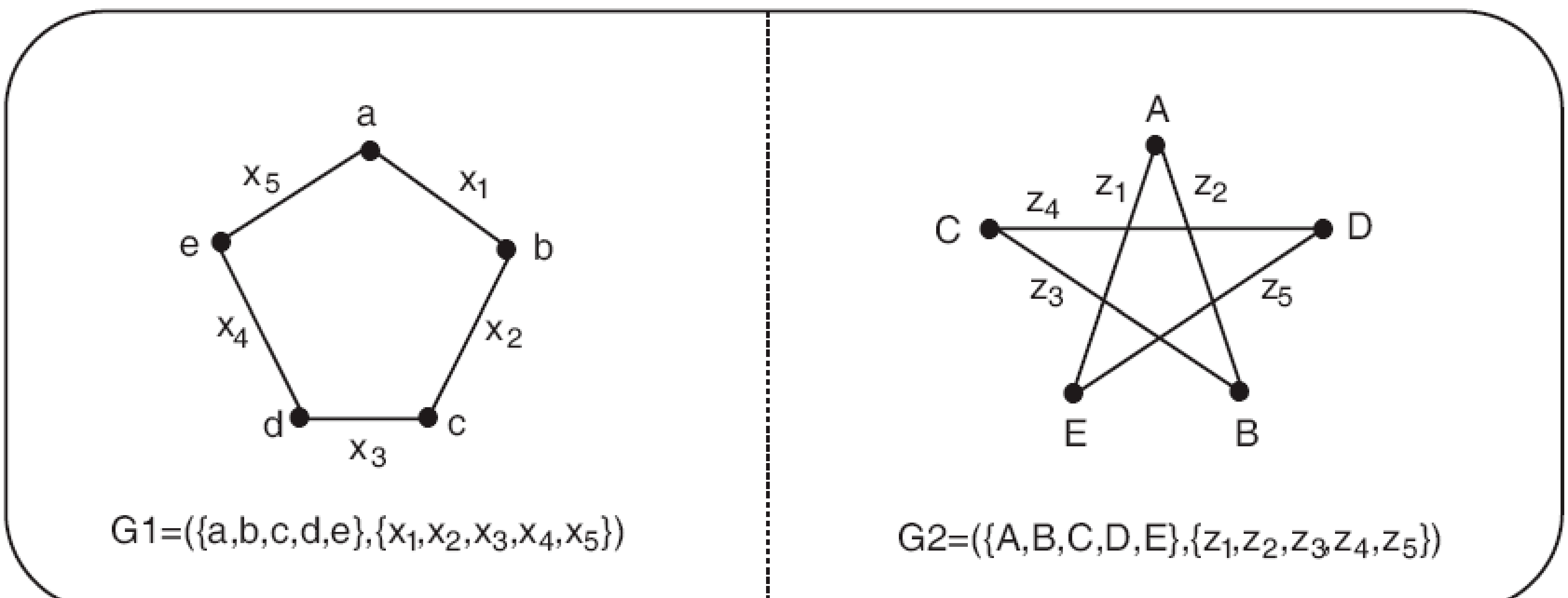
Isomorfismo

- Exemplo
  - Para os grafos G1 e G2 mostrados na figura abaixo, a matriz de adjacência de G1 (a, b, c, d, e) e a matriz de adjacência de G2 (A, B, C, D, E) são iguais.



Isomorfismo

- Exemplo
  - Para os grafos G1 e G2 mostrados na figura abaixo, a matriz de adjacência de G1 (a, b, c, d, e) e a matriz de adjacência de G2 (A, B, C, D, E) são iguais.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Isomorfismo

Isomorfismo

- A determinação do isomorfismo (ou não) entre dois grafos é um problema relevante.

Isomorfismo

- A determinação do isomorfismo (ou não) entre dois grafos é um problema relevante.
- Embora todo algoritmo conhecido para verificar se dois grafos são isomorfos requeira <u>tempo fatorial ou exponencial</u>, no pior caso, existem algoritmos que podem determinar se um par de grafos é isomorfo em tempo linear, na média dos casos.

Isomorfismo

- Aplicações práticas:
  - Matemática Química.
  - Automação de projeto eletrônico.

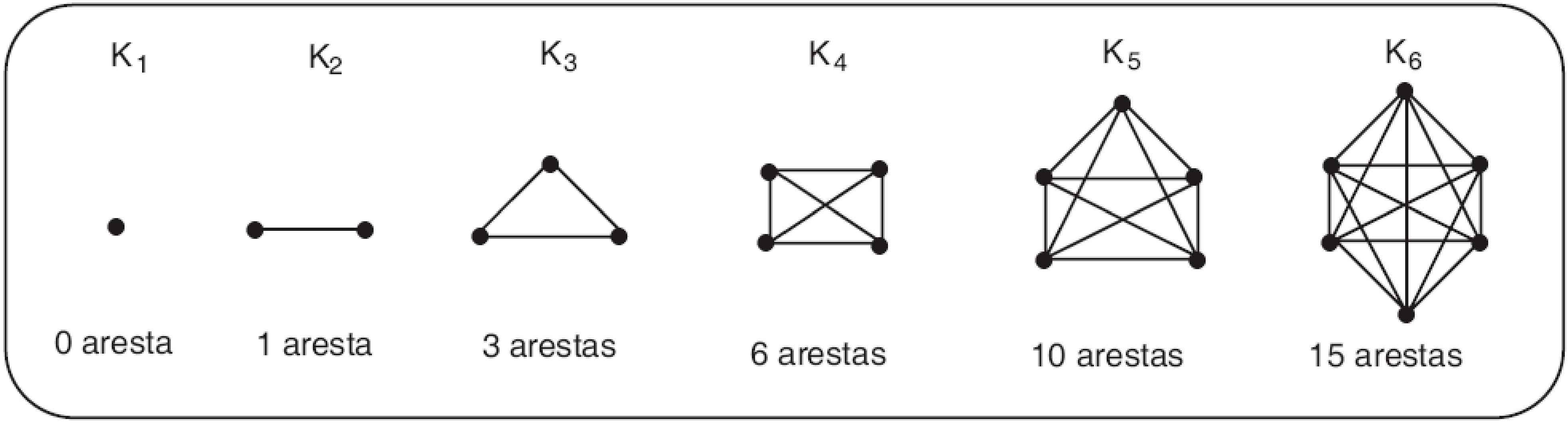
GRAFO COMPLETO E GRAFO R-PARTIDO

Grafo Completo

- **Definição 3.7**
  - Um grafo completo de ordem n, notado por Kn, é um grafo que tem n vértices e <u>exatamente uma</u> aresta conectando cada um dos possíveis pares de vértices distintos.

Grafo Completo

- **Definição 3.7**
  - Um grafo completo de ordem n, notado por Kn, é um grafo que tem n vértices e <u>exatamente uma</u> aresta conectando cada um dos possíveis pares de vértices distintos.



Grafo Bipartido

Grafo Bipartido

- **Definição 3.8**

Grafo Bipartido

- **Definição 3.8**
  - Seja G = (V,E) um grafo.

Grafo Bipartido

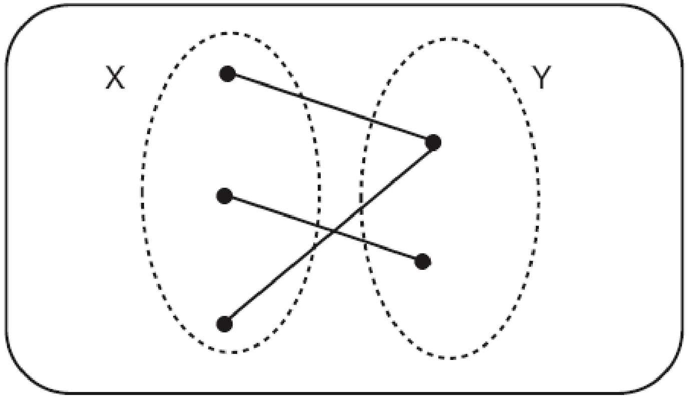
- **Definição 3.8**
  - Seja $G = (V,E)$ um grafo.
  - Se o conjunto de vértices V de G puder ser particionado em dois subconjuntos não vazios, X e Y ($X \cup Y = V$ e $X \cap Y = \emptyset$) de tal maneira que cada aresta de G tenha uma extremidade em X e a outra em Y, então G é chamado de bipartido.

Grafo Bipartido

- **Definição 3.8**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - Se o conjunto de vértices V de G puder ser particionado em dois subconjuntos não vazios, X e Y ($X \cup Y = V$ e $X \cap Y = \emptyset$) de tal maneira que cada aresta de G tenha uma extremidade em X e a outra em Y, então G é chamado de bipartido.
  - A partição $V = X \cup Y$ é chamada de bipartição de G.

Grafo Bipartido

- **Definição 3.8**
  - Seja G = (V,E) um grafo.
  - Se o conjunto de vértices V de G puder ser particionado em dois subconjuntos não vazios, X e Y ($X \cup Y = V$ e $X \cap Y = \emptyset$) de tal maneira que cada aresta de G tenha uma extremidade em X e a outra em Y, então G é chamado de bipartido.
  - A partição $V = X \cup Y$ é chamada de bipartição de G.



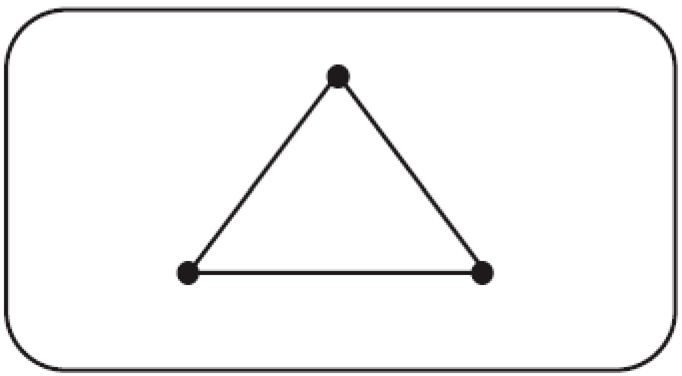
Grafo Bipartido

Grafo Bipartido

- A figura abaixo mostra um grafo que <u>não</u> é bipartido:

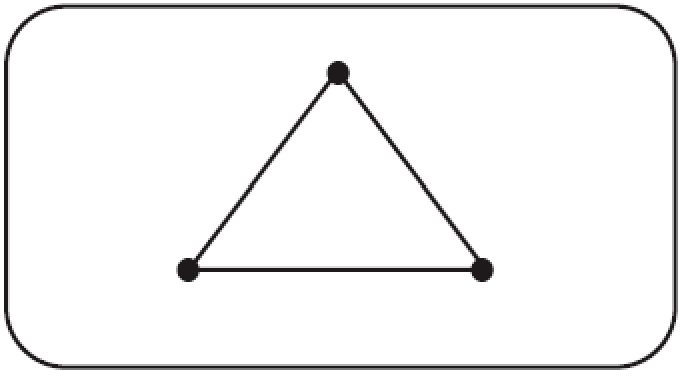
Grafo Bipartido

- A figura abaixo mostra um grafo que <u>não</u> é bipartido:



Grafo Bipartido

- A figura abaixo mostra um grafo que <u>não</u> é bipartido:



- Uma vez que o conjunto de vértices não pode ser particionado em dois subconjuntos não vazios disjuntos, de maneira que as arestas apenas conectem vértices de um subconjunto a vértices do outro subconjunto.

Grafo Partido

Grafo Partido

- **Definição 3.9**

Grafo Partido

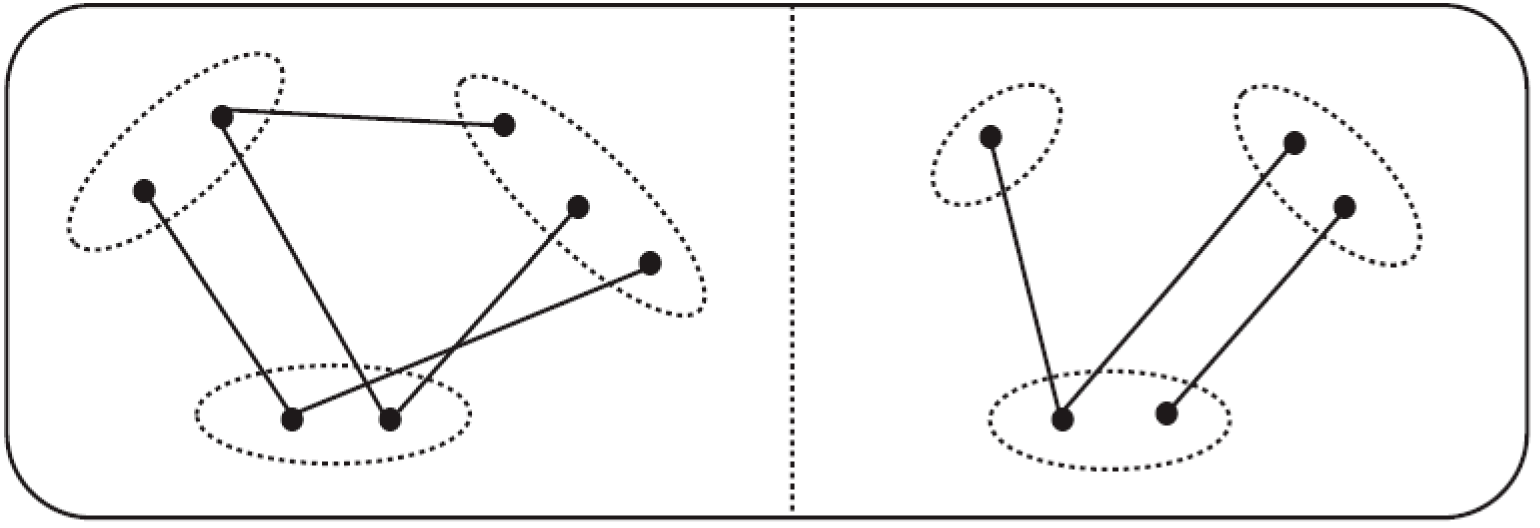
- **Definição 3.9**
  - Considere o número inteiro $r \geq 2$.

Grafo Partido

- **Definição 3.9**
  - Considere o número inteiro r ≥ 2.
  - O grafo G = (V,E) é chamado um **grafo r-partido** se V admite uma partição em r blocos tal que toda aresta de G tem seus vértices-extremidade em blocos diferentes − vértices em um mesmo bloco da partição não podem ser adjacentes.

Grafo Partido

- **Definição 3.9**
  - Considere o número inteiro r ≥ 2.
  - O grafo G = (V,E) é chamado um **grafo r-partido** se V admite uma partição em r blocos tal que toda aresta de G tem seus vértices-extremidade em blocos diferentes − vértices em um mesmo bloco da partição não podem ser adjacentes.



Grafo Partido

Grafo Partido

- **Definição 3.10**

Grafo Partido

- **Definição 3.10**
  - Um grafo bipartido completo é um grafo simples bipartido G, com a bipartição $V = X \cup Y$, no qual **todo** vértice em X está unido a todo vértice em Y.

Grafo Partido

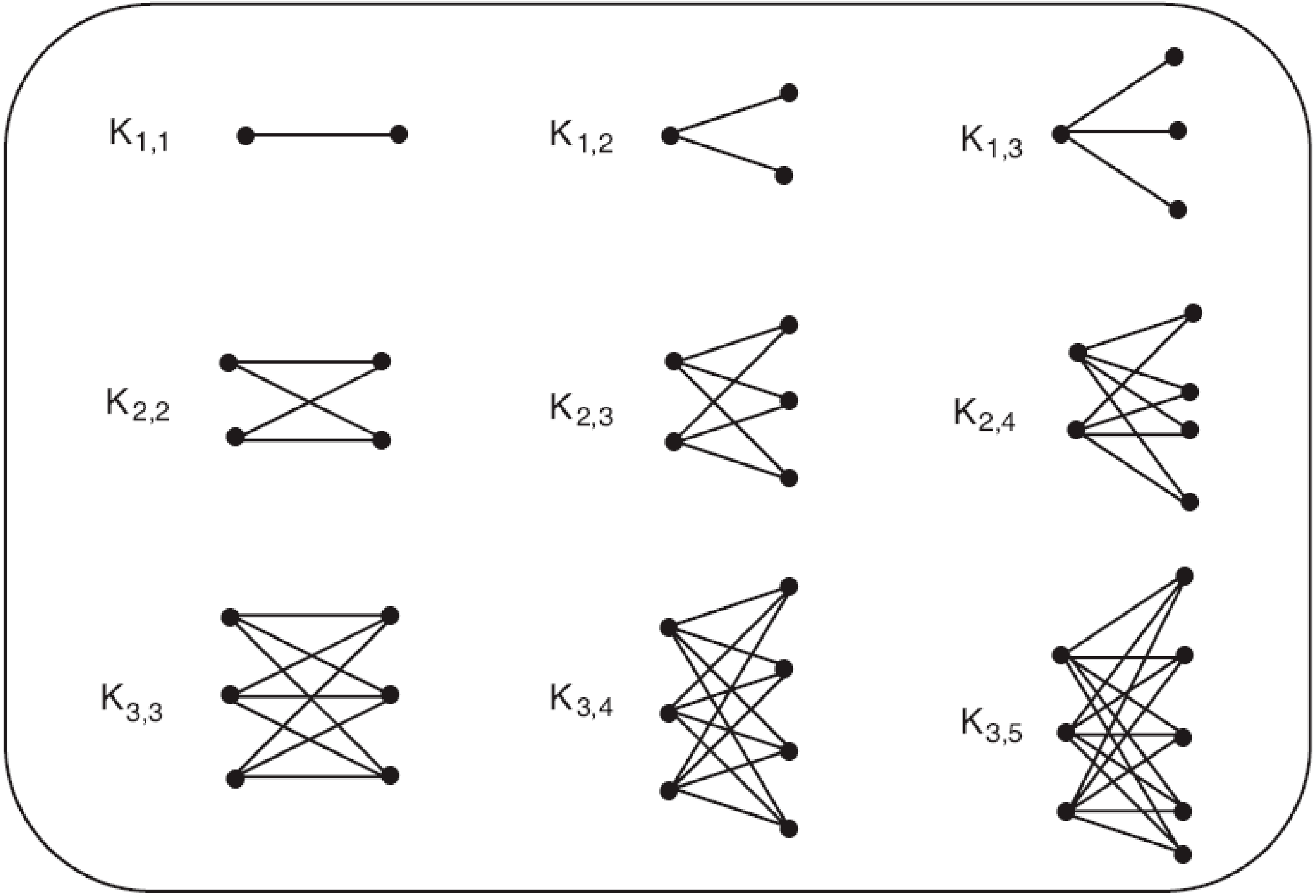
- **Definição 3.10**
  - Um grafo bipartido completo é um grafo simples bipartido G, com a bipartição $V = X \cup Y$, no qual **todo** vértice em X está unido a todo vértice em Y.
  - Se $|X| = m$ e $|Y| = n$ então tal grafo é denotado por $K_{m,n}$.

Grafo Partido

- **Definição 3.10**
  - Um grafo bipartido completo é um grafo simples bipartido G, com a bipartição $V = X \cup Y$, no qual **todo** vértice em X está unido a todo vértice em Y.
  - Se $|X| = m$ e $|Y| = n$ então tal grafo é denotado por $K_{m,n}$.
  - Para padronizar, assume-se que $m \leq n$. Note que $K_{n,n}$ é um grafo regular de grau n.

Grafo Partido

- A figura abaixo mostra os diagramas de Km,n, para m = 1, 2, 3 e n = m, m + 1, m + 2.



SUBGRAFO, SUPERGRAFO E GRAFO *SPANNING*

Subgrafo

- **Definição 3.11**
  - Sejam dois grafos $G1 = (V1,E1)$ e $G2 = (V2,E2)$.

Subgrafo

- **Definição 3.11**
  - Sejam dois grafos $G1 = (V1,E1)$ e $G2 = (V2,E2)$.
  - Diz-se que o grafo G2 é subgrafo de G1 (notado por $G2 \subseteq G1$), se $V2 \subseteq V1$ e $E2 \subseteq E1$, e para toda aresta $e \in E2$, se e for incidente a v1 e v2, então $v1, v2 \in V2$.

Subgrafo

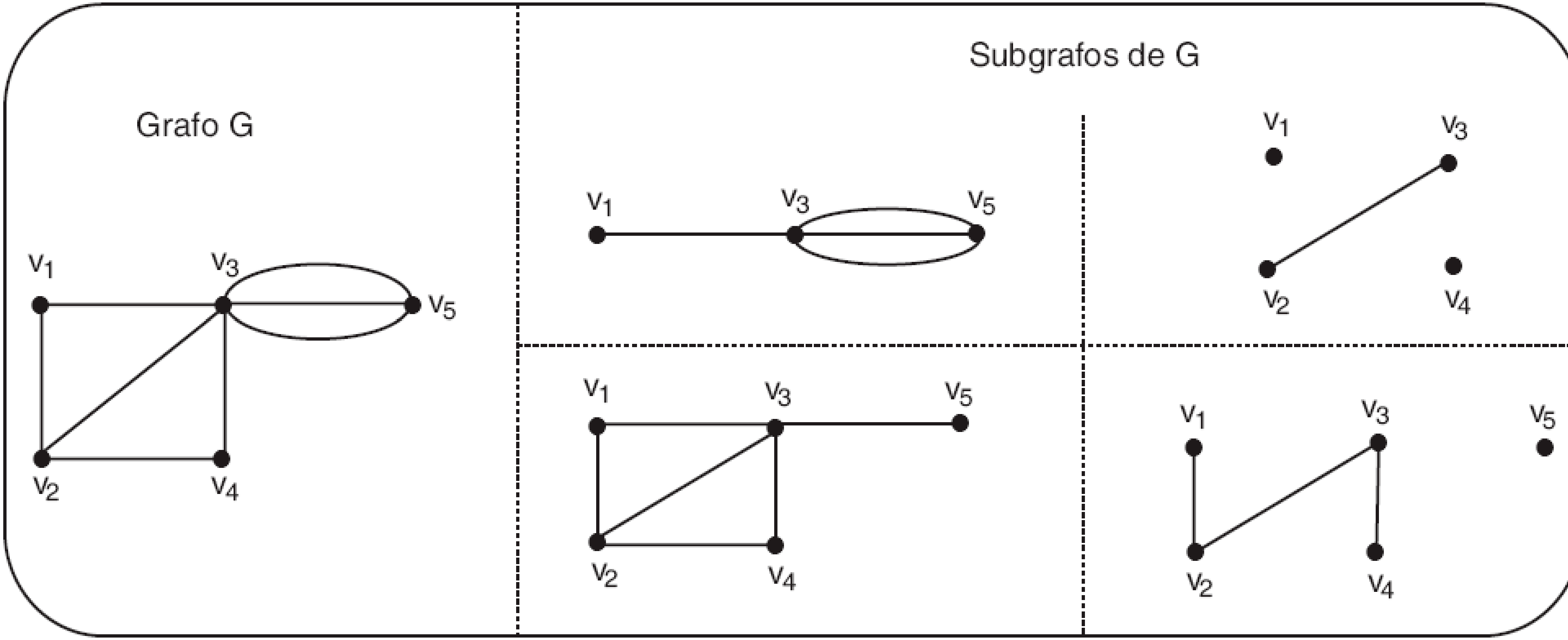
- **Definição 3.11**
  - Sejam dois grafos G1 = (V1,E1) e G2 = (V2,E2).
  - Diz-se que o grafo G2 é subgrafo de G1 (notado por G2 $\subseteq$ G1), se V2 $\subseteq$ V1 e E2 $\subseteq$ E1, e para toda aresta e $\in$ E2, se e for incidente a v1 e v2, então v1, v2 $\in$ V2.
  - Nesse caso diz-se também que G1 é supergrafo de G2.

Subgrafo

- **Definição 3.11**
  - Sejam dois grafos G1 = (V1,E1) e G2 = (V2,E2).
  - Diz-se que o grafo G2 é subgrafo de G1 (notado por G2 $\subseteq$ G1), se V2 $\subseteq$ V1 e E2 $\subseteq$ E1, e para toda aresta e $\in$ E2, se e for incidente a v1 e v2, então v1, v2 $\in$ V2.
  - Nesse caso diz-se também que G1 é supergrafo de G2.
  - Se G2 $\subseteq$ G1 e G2 $\neq$ G1, G2 é chamado de subgrafo próprio.

Subgrafo

- Exemplo



Um grafo G e quatro possíveis subgrafos.

Subgrafo

Subgrafo

- Observações:

Subgrafo

- Observações:
  - Todo grafo é seu próprio subgrafo.

Subgrafo

- Observações:
  - Todo grafo é seu próprio subgrafo.
  - Um subgrafo de um subgrafo de G é um subgrafo de G.

Subgrafo

- Observações:
  - Todo grafo é seu próprio subgrafo.
  - Um subgrafo de um subgrafo de G é um subgrafo de G.
  - Um único vértice em um grafo G é subgrafo de G.

Subgrafo

- Observações:
  - Todo grafo é seu próprio subgrafo.
  - Um subgrafo de um subgrafo de G é um subgrafo de G.
  - Um único vértice em um grafo G é subgrafo de G.
  - Uma única aresta de G, junto com os seus vértices-extremidade, é também um subgrafo de G.

Spanning

- **Definição 3.12**
  - G1 = (V1,E1) é um subgrafo *spanning* de G = (V,E) se G1 for um subgrafo de G, tal que V1 = V, ou seja, G1 e G têm exatamente o mesmo conjunto de vértices.

Grafos Disjuntos

- **Definição 3.20**
  - Seja G = (V, E) um grafo.

Grafos Disjuntos

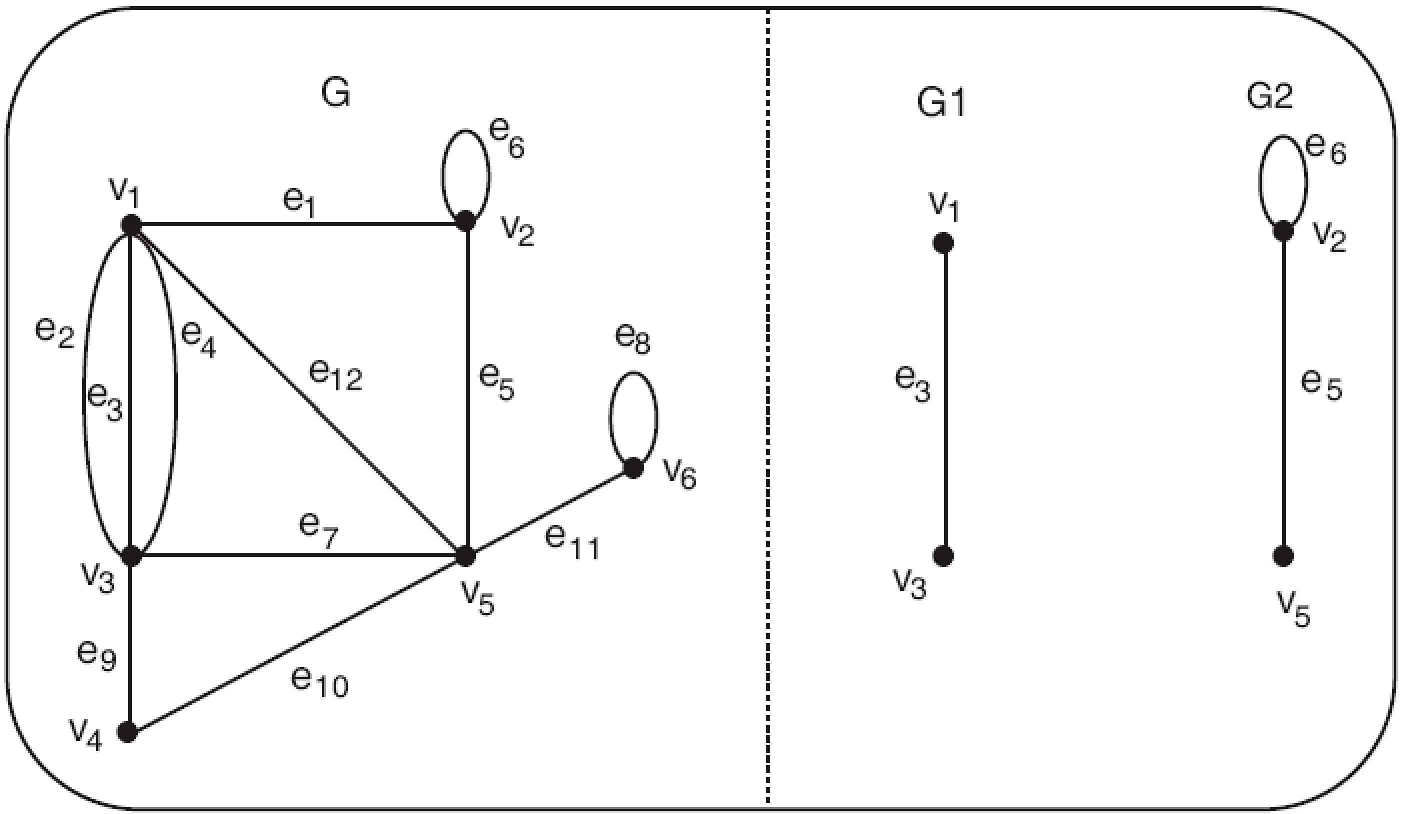
- **Definição 3.20**
  - Seja G = (V, E) um grafo.
  - Dois subgrafos G1 e G2 de G são disjuntos se eles não têm vértices em comum.

Grafos Disjuntos

- **Definição 3.20**
  - Seja G = (V, E) um grafo.
  - Dois subgrafos G1 e G2 de G são disjuntos se eles não têm vértices em comum.
  - Se não tiverem arestas em comum, são chamados arestas disjuntos.

Grafos Disjuntos

- A figura abaixo mostra um grafo G e os subgrafos disjuntos G1 e G2 de G.

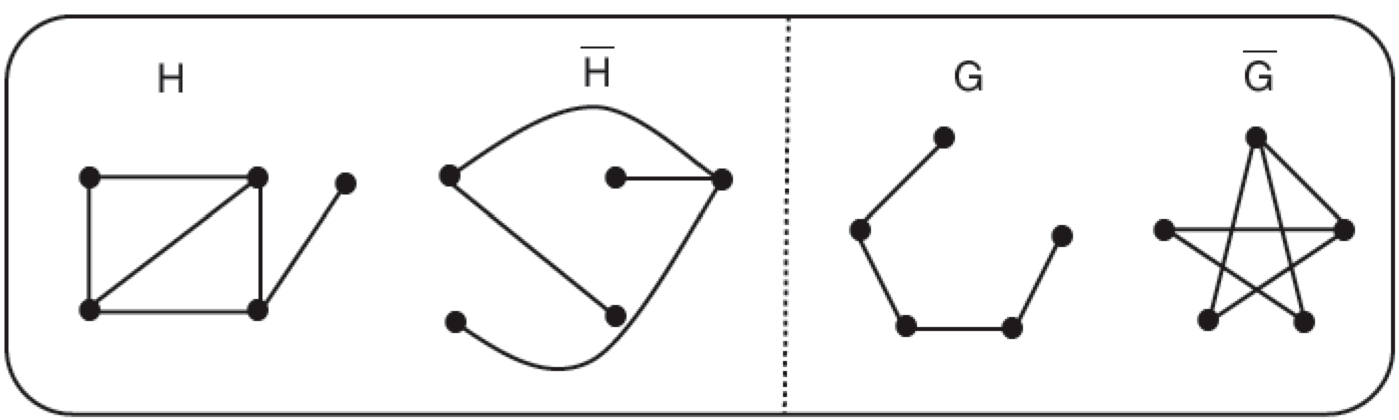


Complemento

- **Definição 3.24**
  - O complemento do grafo simples G = (V,E), notado por G = (V,F), é o grafo simples cujo conjunto de vértices é o mesmo de G e cujo conjunto de arestas é composto por todas as arestas que não comparecem em E, ou seja, existe uma aresta entre dois vértices u e v de V se e somente se não existe aresta entre u e v em G.

Complemento

- **Definição 3.24**
  - O complemento do grafo simples G = (V,E), notado por G = (V,F), é o grafo simples cujo conjunto de vértices é o mesmo de G e cujo conjunto de arestas é composto por todas as arestas que não comparecem em E, ou seja, existe uma aresta entre dois vértices u e v de V se e somente se não existe aresta entre u e v em G.



CLIQUE E COBERTURA

Clique

Clique

- **Definição 3.27**

Clique

- **Definição 3.27**
  - Para qualquer grafo G, um subgrafo completo de G é chamado de clique de G.

Clique

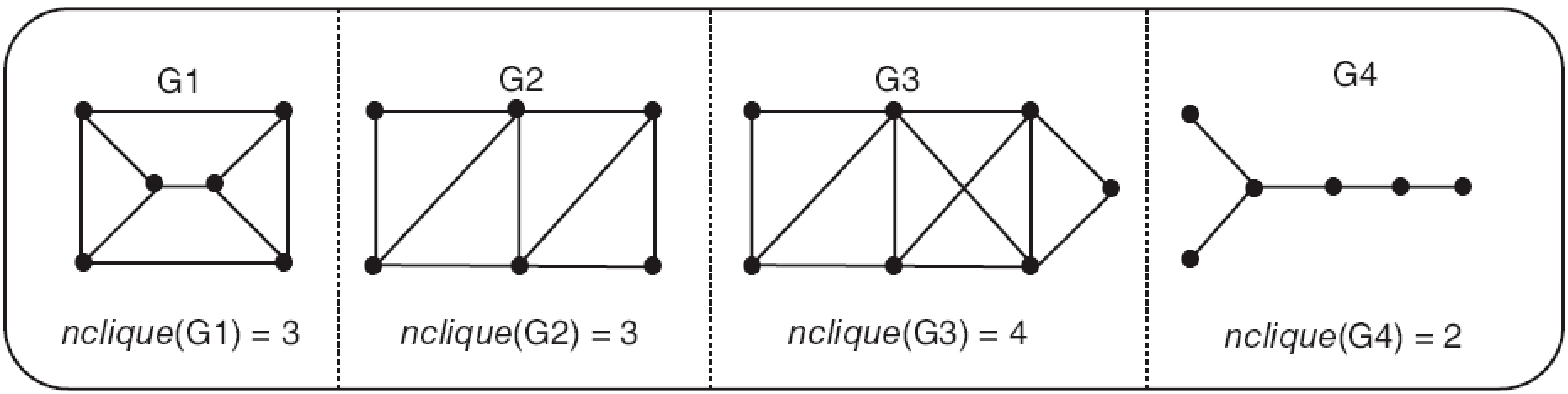
- **Definição 3.27**
  - Para qualquer grafo G, um subgrafo completo de G é chamado de clique de G.
  - O número de vértices do maior clique de G é chamado número clique de G e é notado por nclique(G).

Clique

- **Definição 3.27**
  - Para qualquer grafo G, um subgrafo completo de G é chamado de <u>clique de G</u>.
  - O número de vértices do maior clique de G é chamado número clique de G e é notado por nclique(G).
  - Algumas vezes usa-se a palavra clique para denominar apenas o conjunto de vértices do subgrafo completo de um grafo G.

Clique

- Considere os quatro grafos G1, G2, G3 e G4 mostrados na figura abaixo:



Grafos G1, G2, G3 e G4 e seus respectivos números-clique (nclique).

Cobertura

- **Definição 3.29**
  - Seja o grafo simples básico $G = (V, E)$.

Cobertura

- **Definição 3.29**
  - Seja o grafo simples básico G = (V, E).
  - Uma cobertura de vértices de G é um subconjunto de vértices $V1 \subseteq V$ tal que se $(vi,vj) \in E$ então ou $vi \in V1$ ou $vj \in V1$ (ou ambos).

Cobertura

- **Definição 3.29**
  - Seja o grafo simples básico G = (V, E).
  - Uma cobertura de vértices de G é um subconjunto de vértices $V1 \subseteq V$ tal que se $(vi,vj) \in E$ então ou $vi \in V1$ ou $vj \in V1$ (ou ambos).
  - Diz-se, então, que o conjunto V1 cobre as arestas de G.

Exercícios

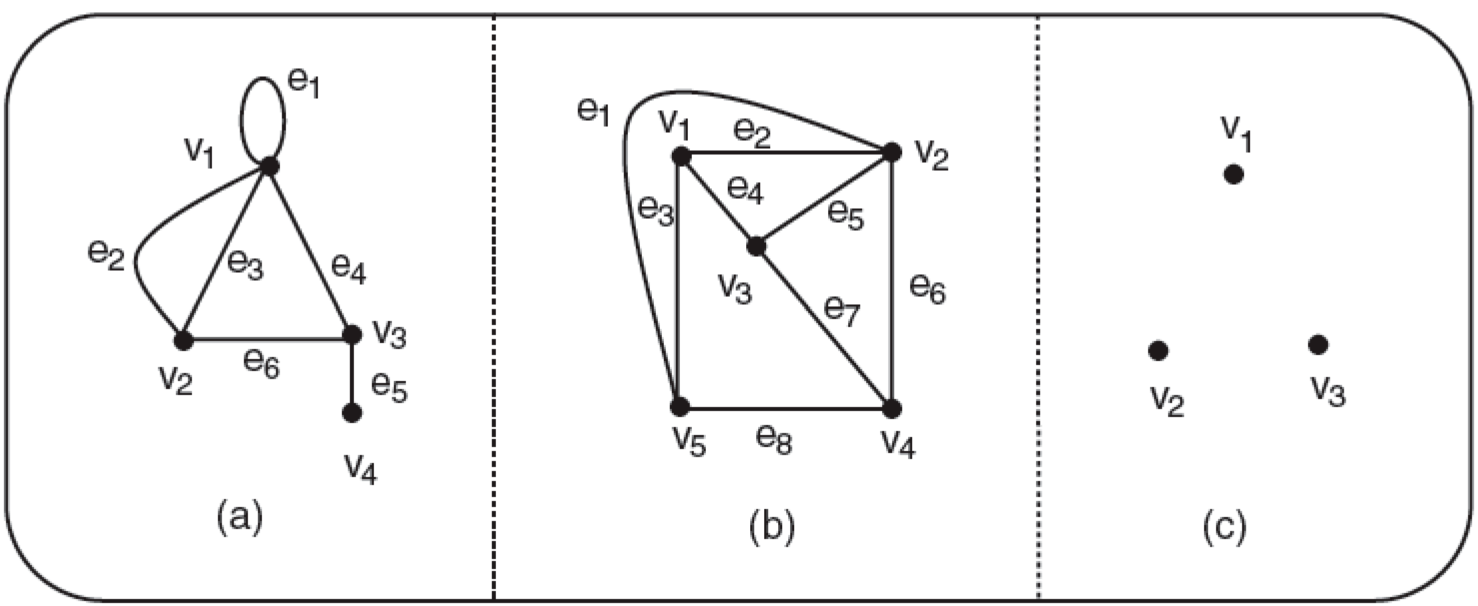
- O que são grafos isomorfos? Desenhe um exemplo.
- Escreva um algoritmo que verifique se dois grafos G1 e G2 não são isomorfos com base no número de vértices e arestas e, também, comparando a lista ordenada dos graus de seus vértices.
- Qual é a diferença entre grafos simples e grafos complexos?

Exercícios

- Dê um exemplo de um grafo simples: (a) que não tenha vértices com grau ímpar. (b) que não tenha vértices com grau par.

Exercícios

- Para cada um dos três grafos G = (V,E), encontre V, E, todas as arestas paralelas, todos os loops, todos os vértices isolados, e diga se G é um grafo simples. Diga também a quais vértices e1 é incidente.

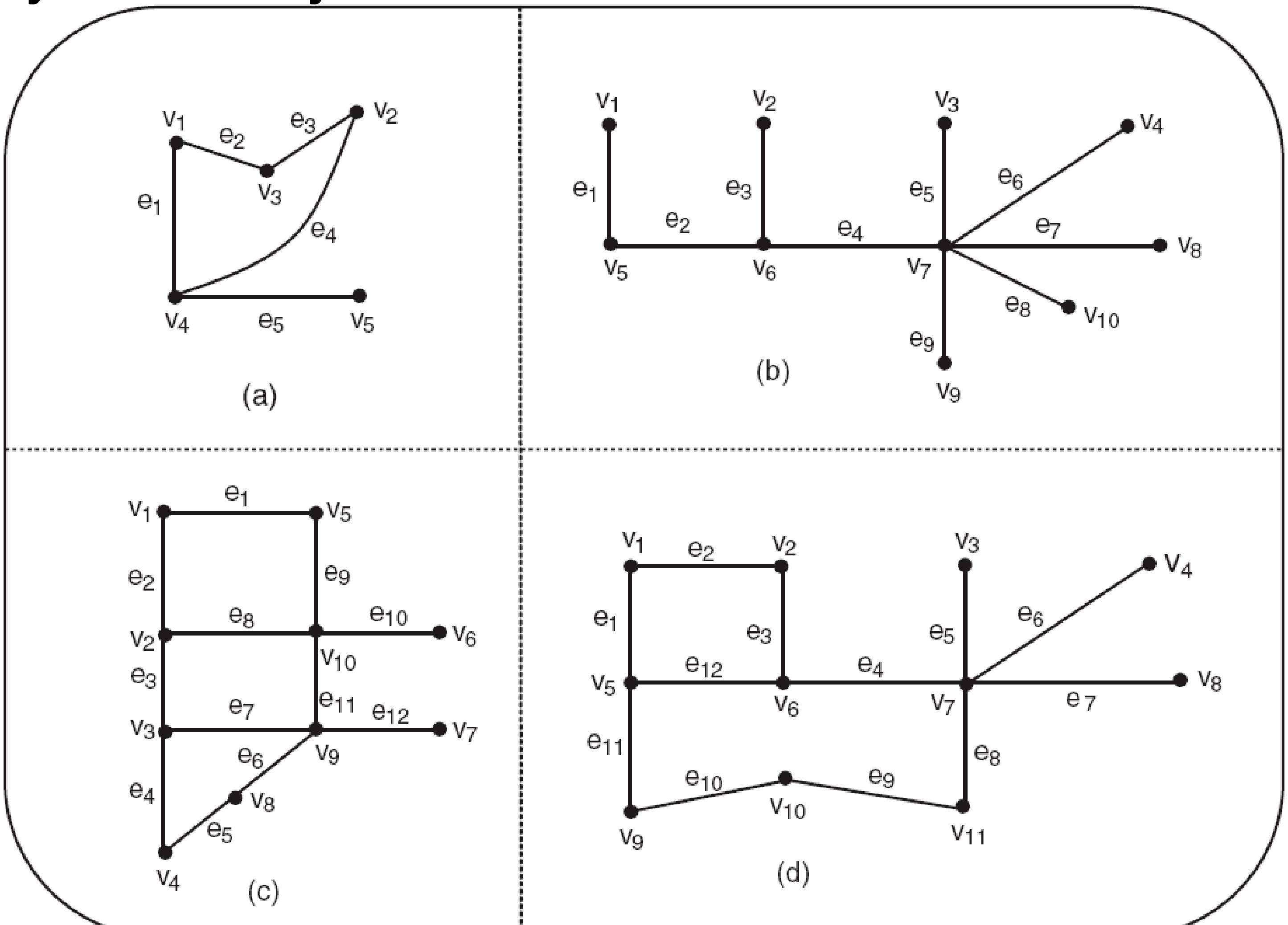


Exercícios

- Justifique cada uma das afirmações a seguir:
  - (a) todo grafo é seu próprio subgrafo.
  - (b) um subgrafo de um subgrafo de G é um subgrafo de G.
  - (c) um único vértice em um grafo G é um subgrafo de G.
  - (d) uma única aresta de G, junto com os seus vértices-extremidade é também um subgrafo de G.

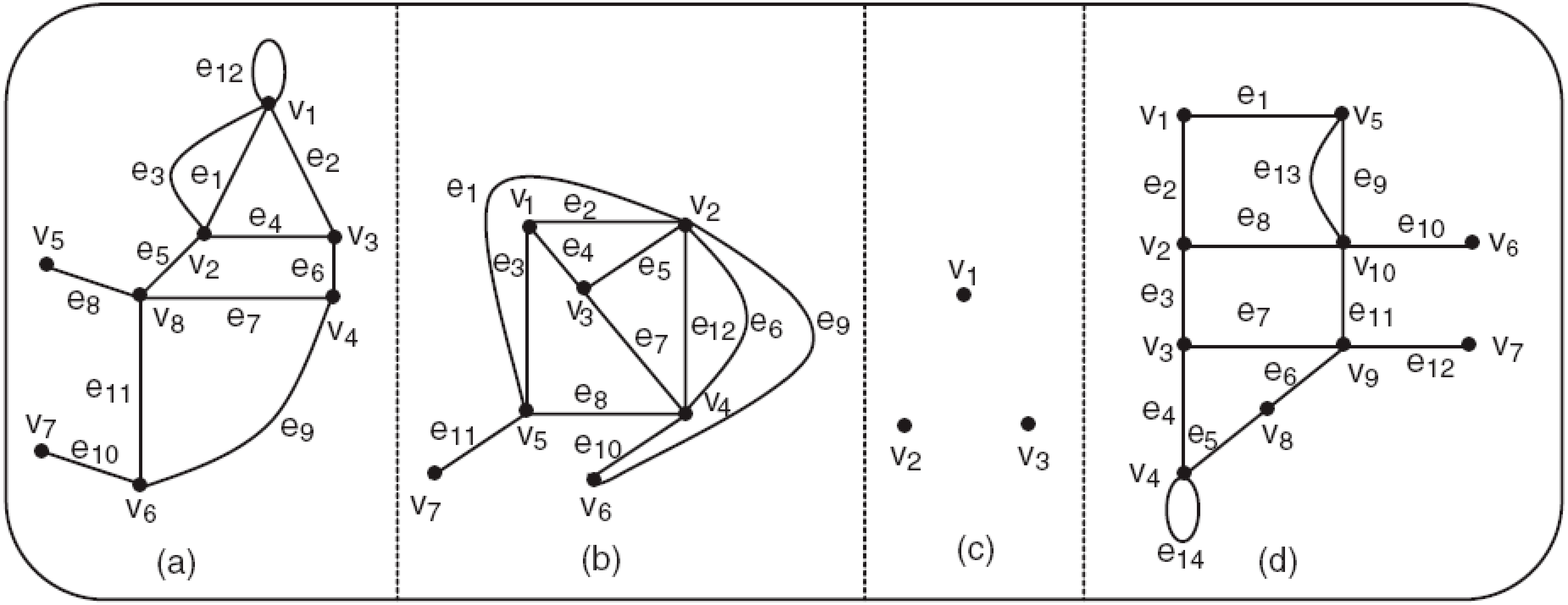
Exercícios

- Verifique se cada um dos grafos a seguir é bipartido. Se o grafo em questão for bipartido, especifique os conjuntos disjuntos de vértices.



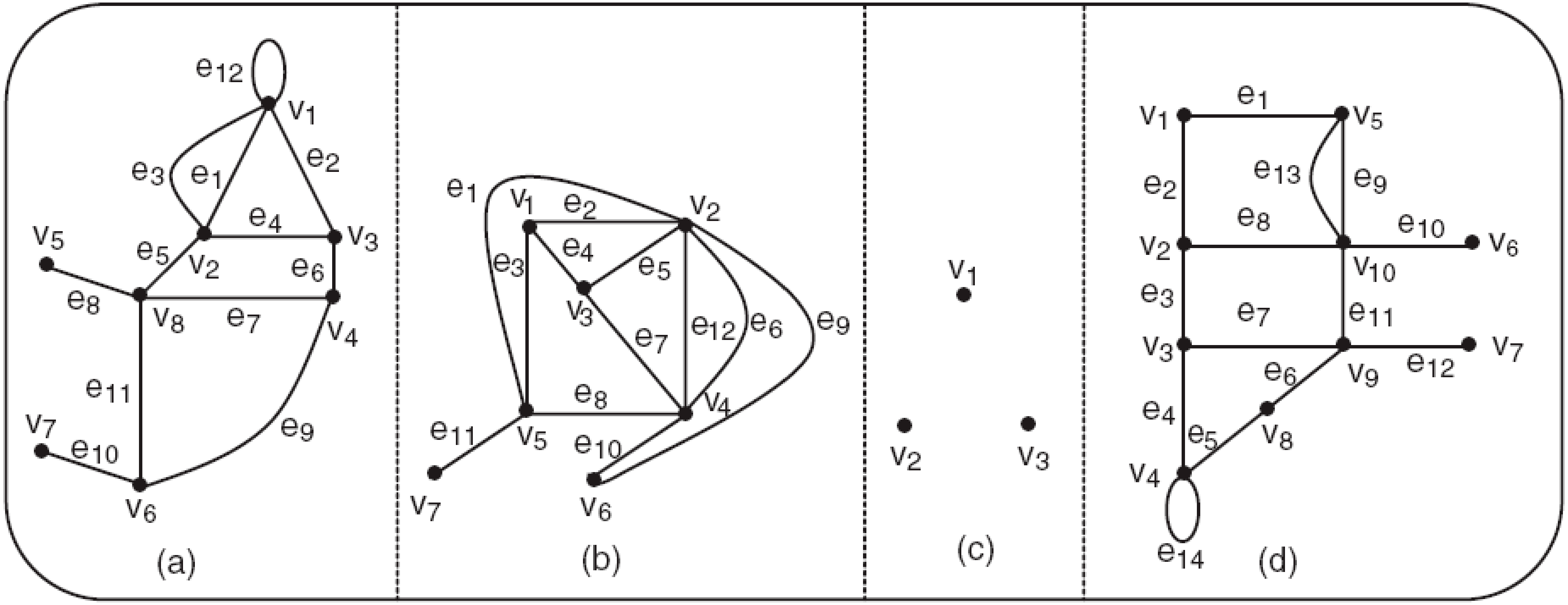
Exercícios

- Especifique três subgrafos spanning para cada um dos grafos (a), (b), (c) e (d).



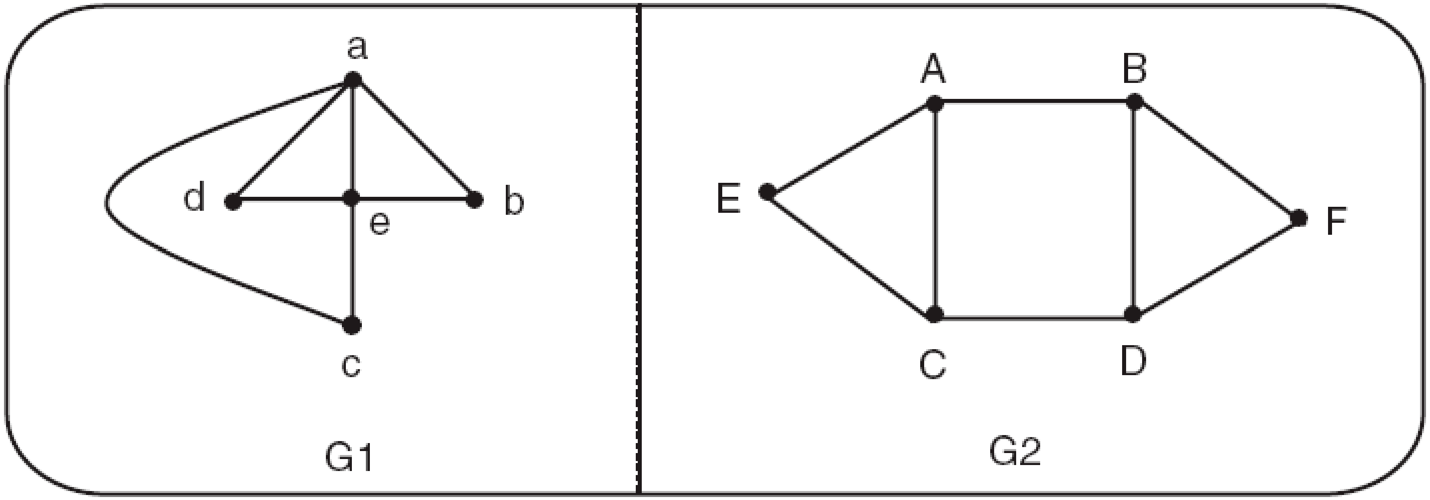
Exercícios

- Construa o grafo básico simples de (a), (b), (c) e (d).



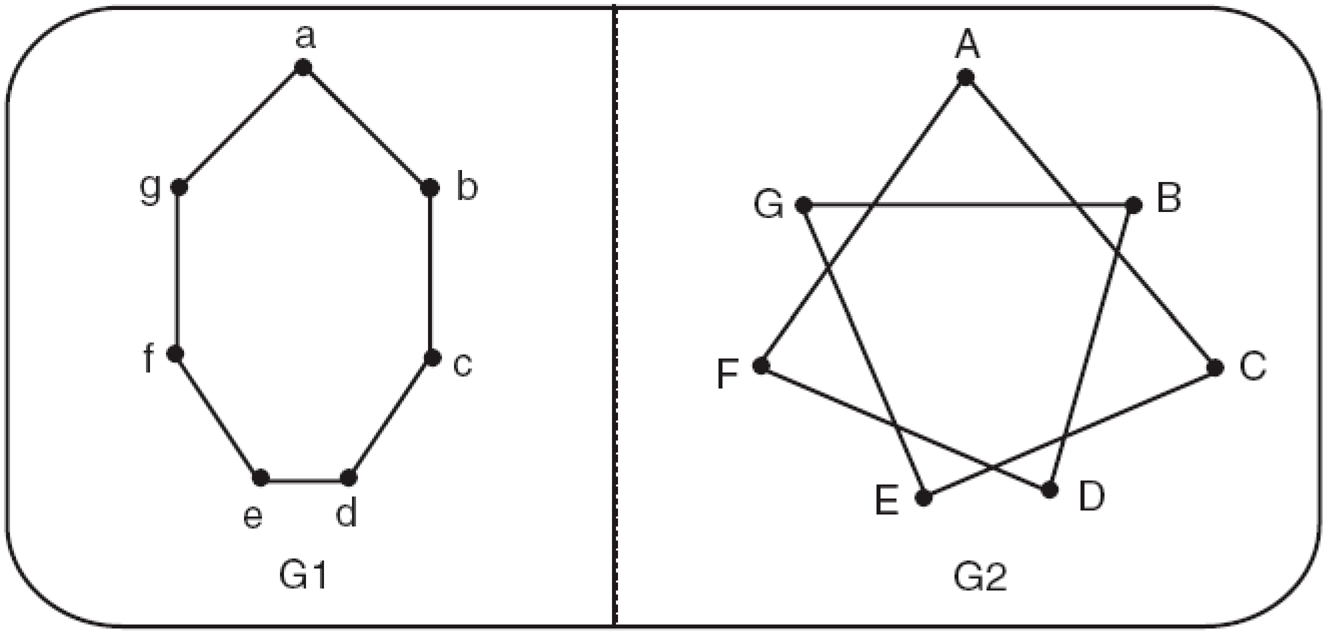
Exercícios

- Determine se os grafos G1 e G2 a seguir são isomorfos.



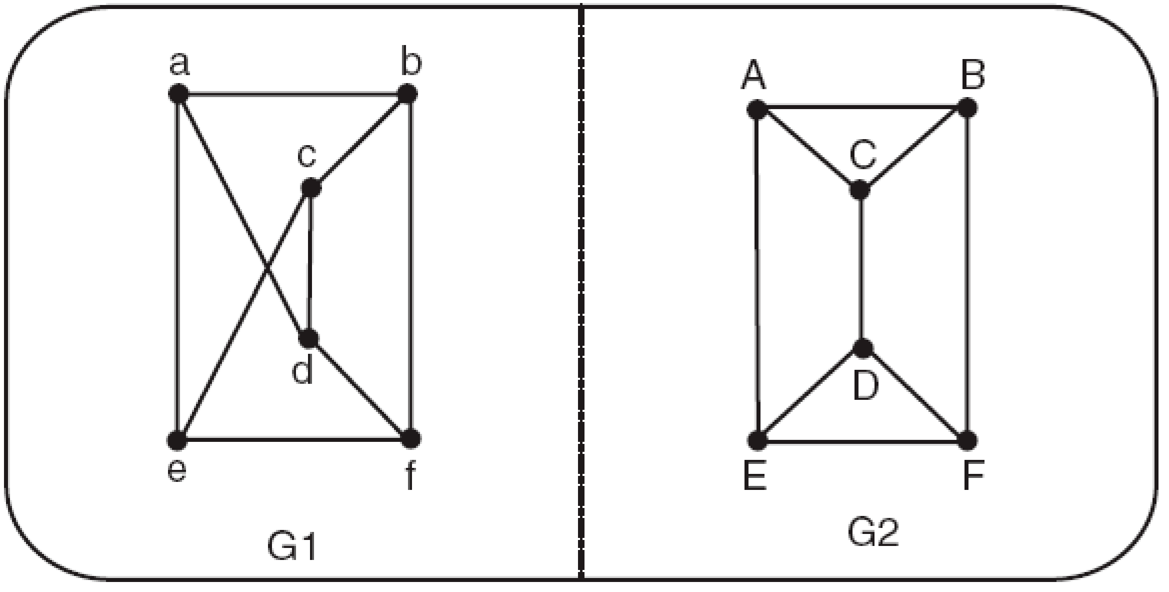
Exercícios

- Determine se os grafos G1 e G2 a seguir são isomorfos.



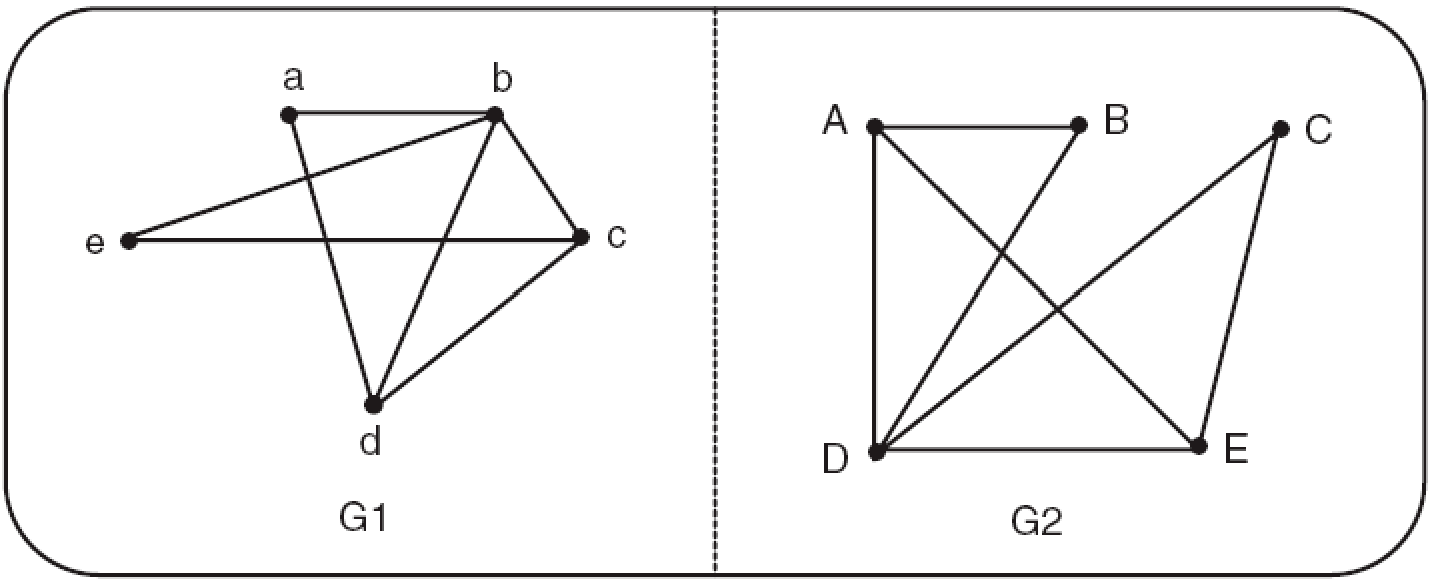
Exercícios

- Determine se os grafos G1 e G2 a seguir são isomorfos.



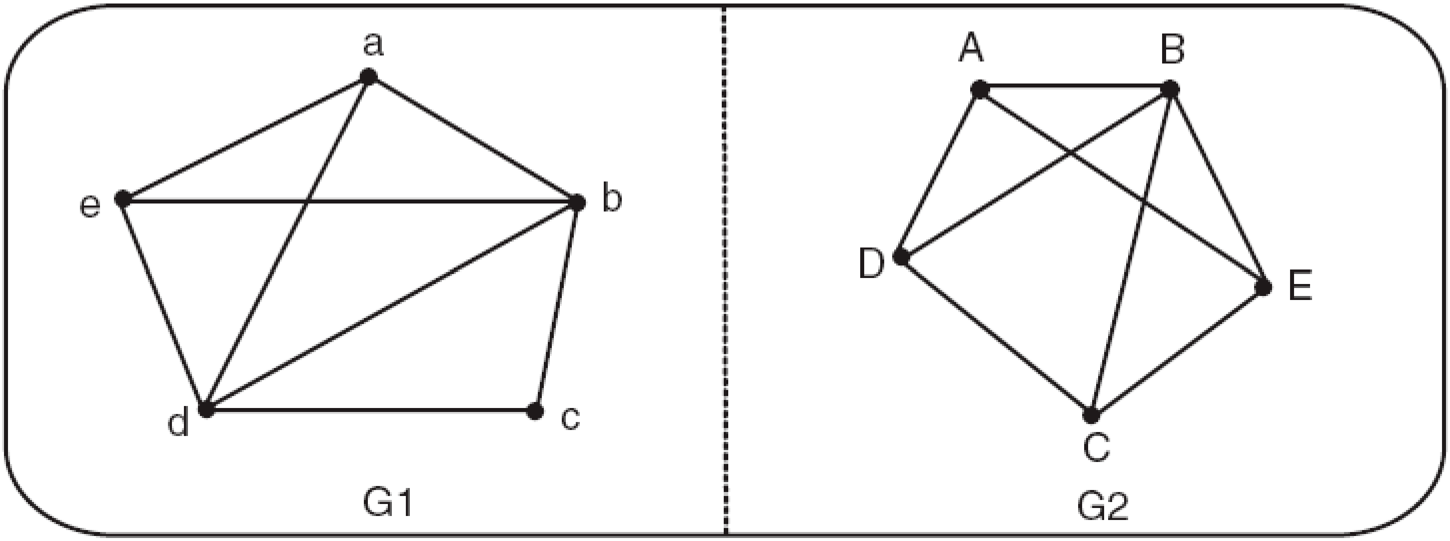
Exercícios

- Determine se os grafos G1 e G2 a seguir são isomorfos.



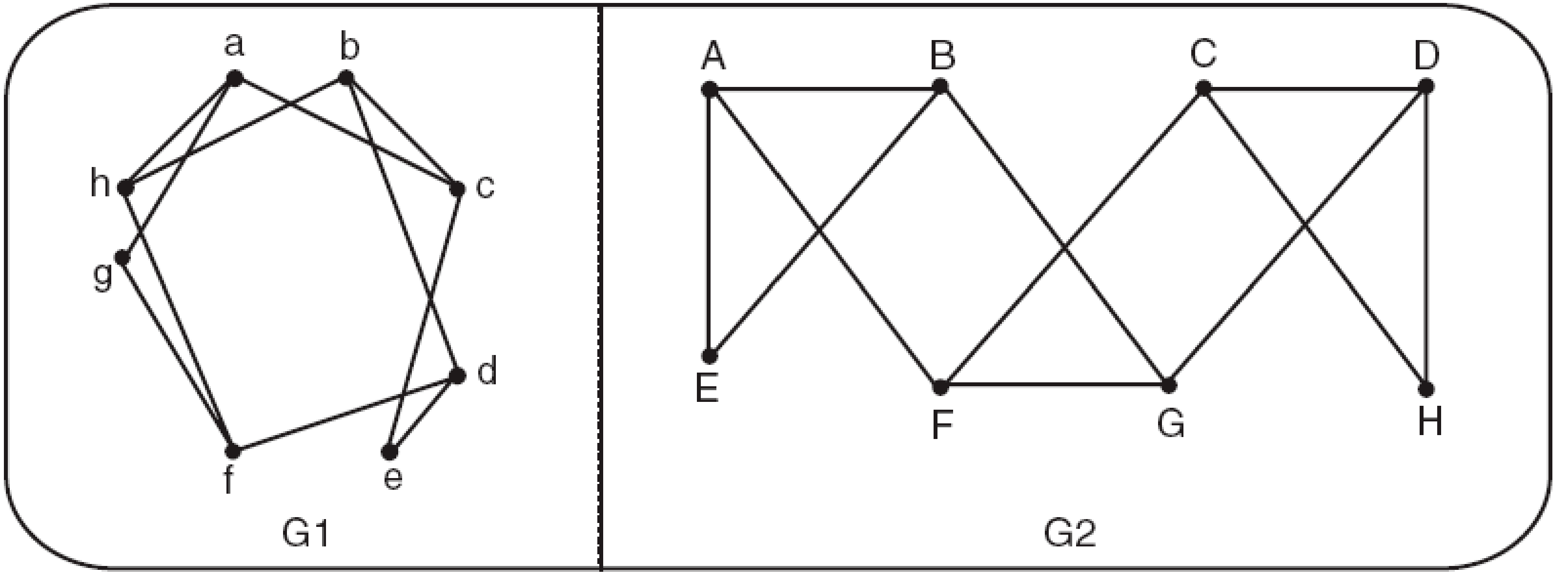
Exercícios

- Determine se os grafos G1 e G2 a seguir são isomorfos.



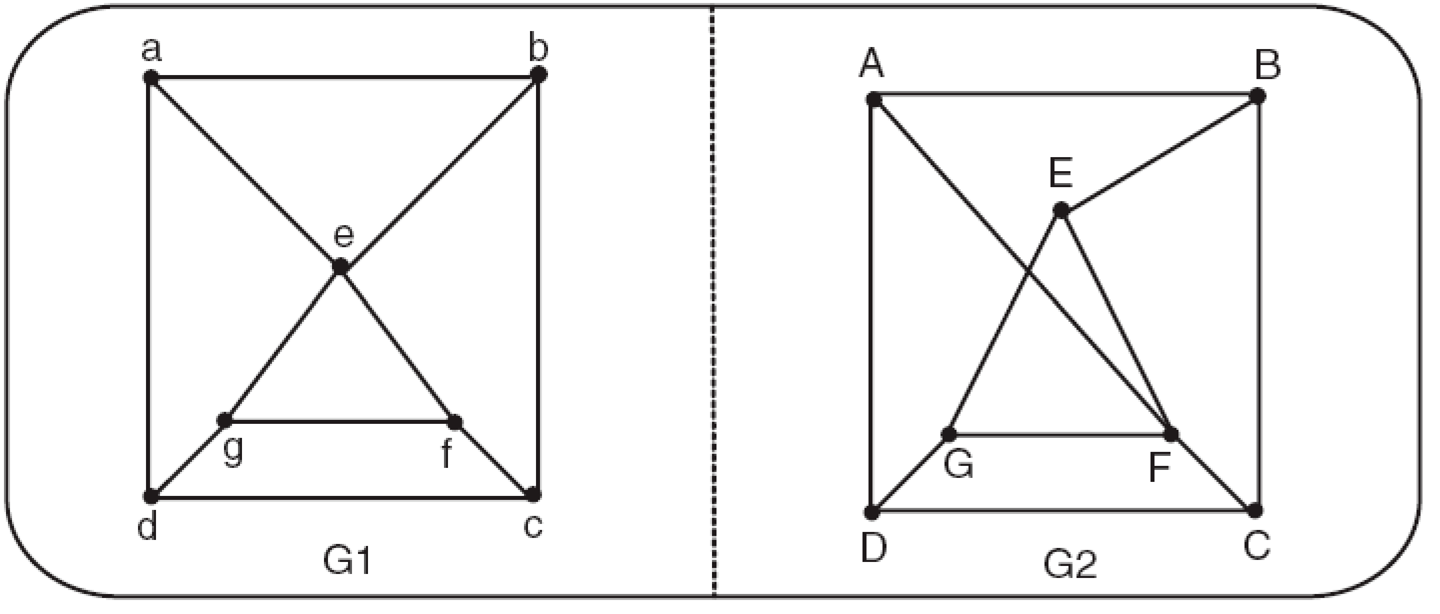
Exercícios

- Determine se os grafos G1 e G2 a seguir são isomorfos.



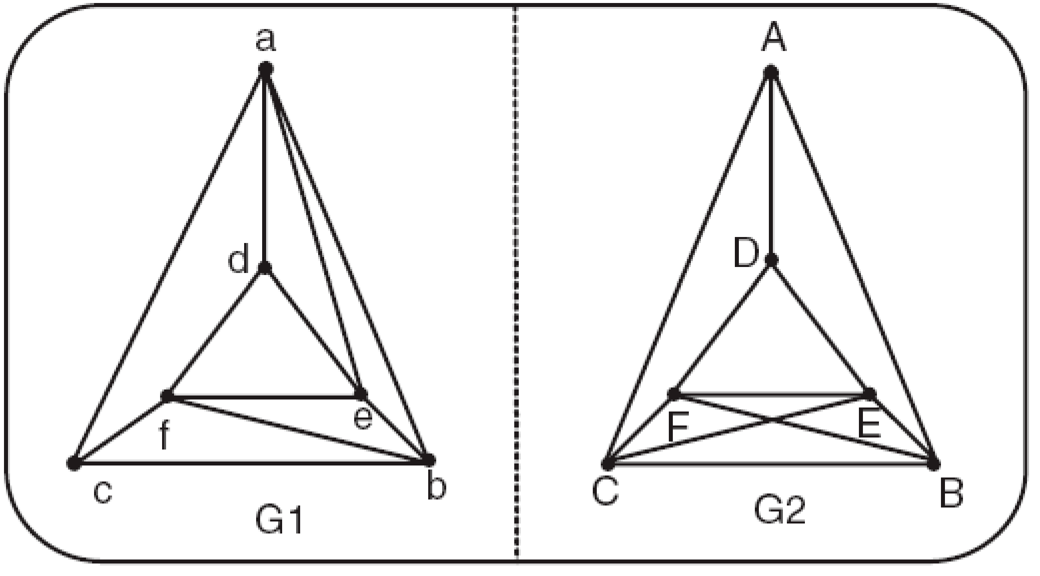
Exercícios

- Determine se os grafos G1 e G2 a seguir são isomorfos.



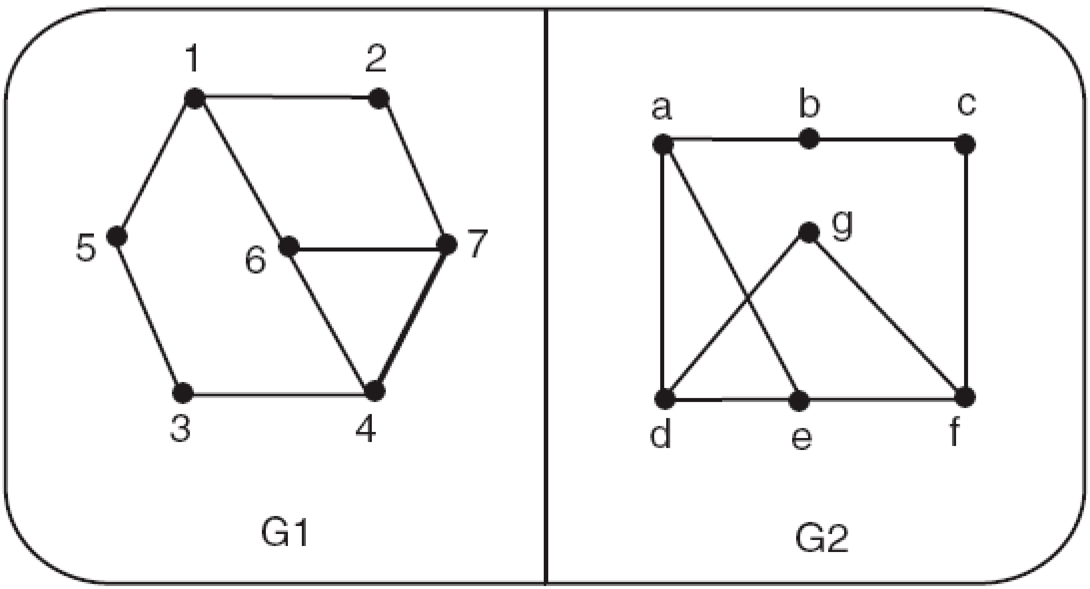
Exercícios

- Determine se os grafos G1 e G2 a seguir são isomorfos.



Exercícios

- Determine se os grafos G1 e G2 a seguir são isomorfos.



Exercícios

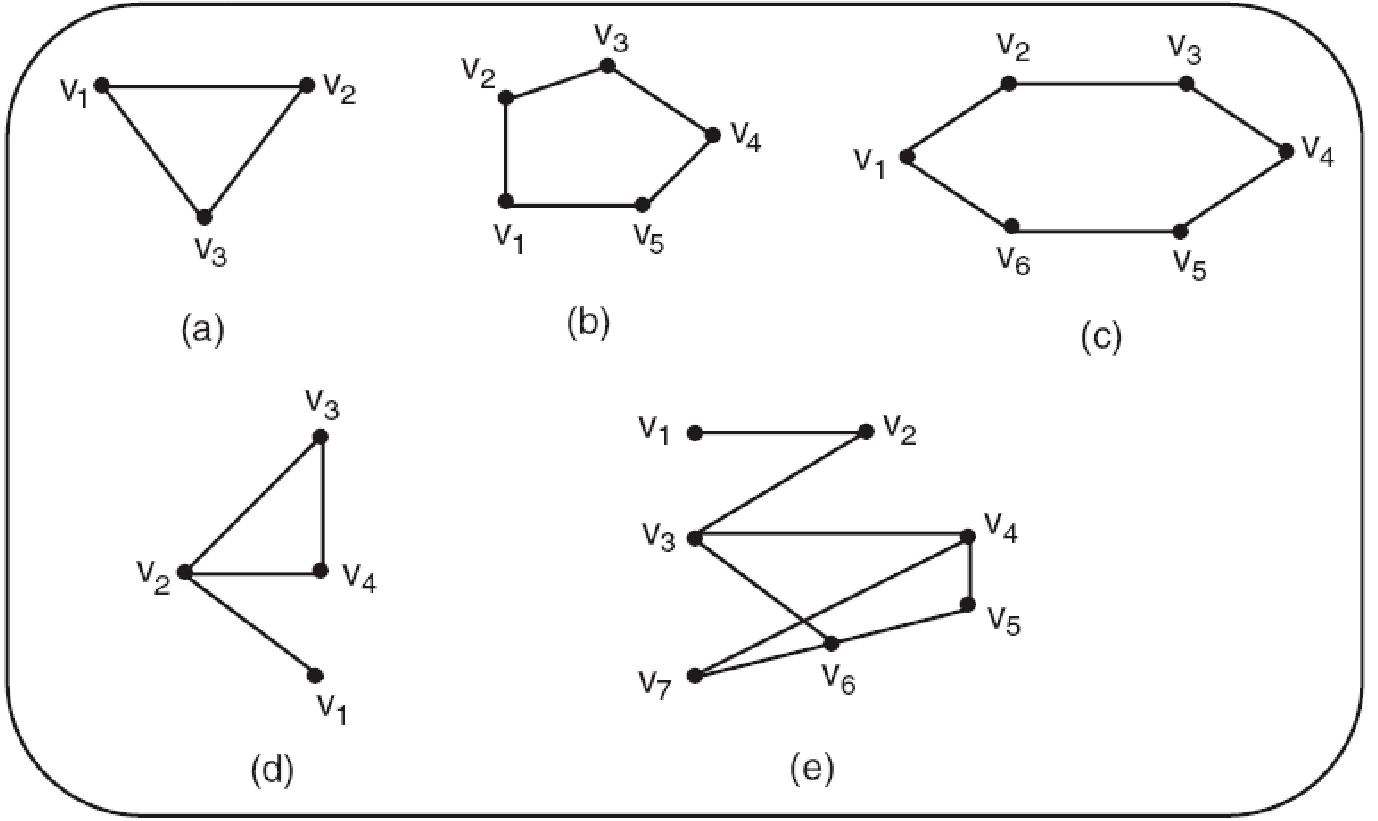
- Desenhe o grafo com a propriedade solicitada ou, então, explique por que tal grafo não existe:
  - Seis vértices, cada um com grau 3.
  - Cinco vértices, cada um com grau 3.
  - Quatro vértices, cada um com grau 1.
  - Seis vértices e quatro arestas.
  - Quatro arestas, quatro vértices tendo graus 1,2,3,4.
  - Quatro vértices com graus 1,2,3,4.
  - Grafo simples; seis vértices tendo graus 1,2,3,4,5,5.
  - Grafo simples; cinco vértices tendo graus 2,3,3,4,4.
  - Grafo simples; cinco vértices tendo graus 2,2,4,4,4.

Exercícios

- Dê um exemplo de um grafo conectado tal que a remoção de qualquer aresta resulta em um grafo que não é conectado (assuma que a remoção de uma aresta não remove qualquer vértice).

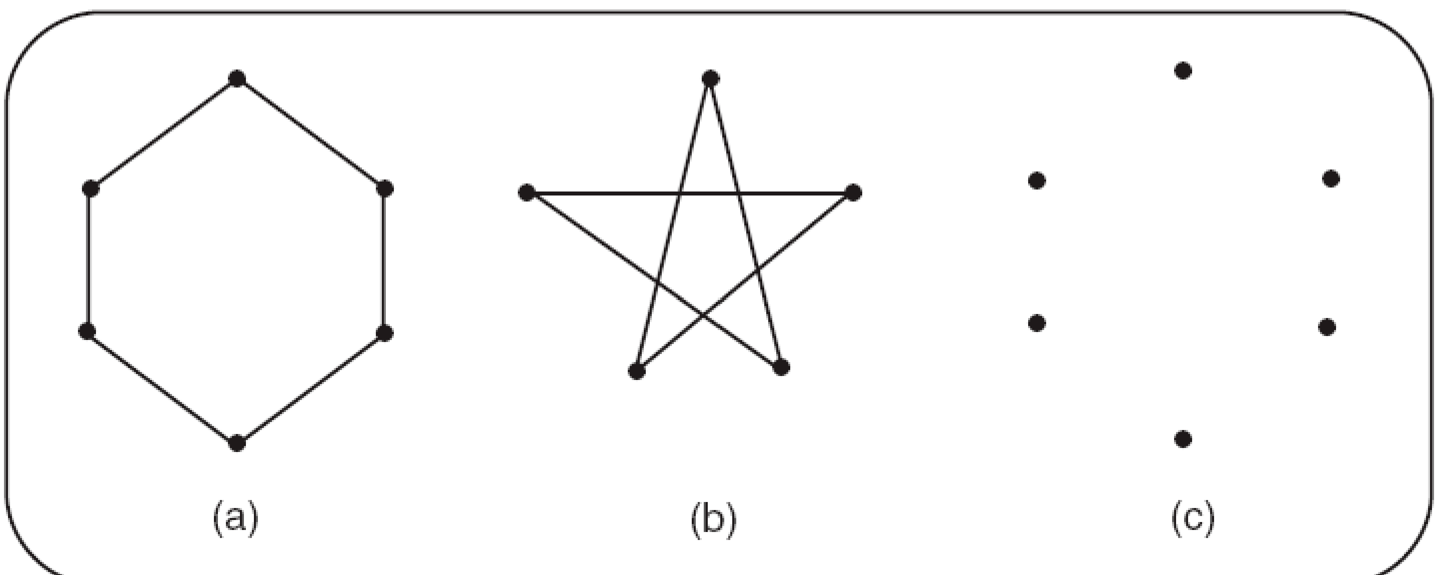
Exercícios

- Dados os grafos a seguir, quais deles são bipartidos e quais não? Para os bipartidos, redesenhe-os, de modo que fiquem evidentes os dois conjuntos de vértices.



Exercícios

- Um grafo simples é chamado de autocomplementar se for isomorfo ao seu próprio complemento.
  - Quais dos grafos (a), (b) e (c) a seguir são autocomplementares?



Exercícios

- Faça uma lista de todas as árvores spanning, inclusive daquelas isomorfas, dos grafos conexos (a), (b), (c) e (d) a seguir. Quantas árvores spanning não isomorfas existem em cada caso?