

# Teoria dos Grafos

## INTRODUÇÃO A GRAFOS

Prof. Tiago Eugenio de Melo

[tmelo@uea.edu.br](mailto:tmelo@uea.edu.br)

[www.tiagodemelo.info](http://www.tiagodemelo.info)

# Conceitos Iniciais

# Conceitos Iniciais

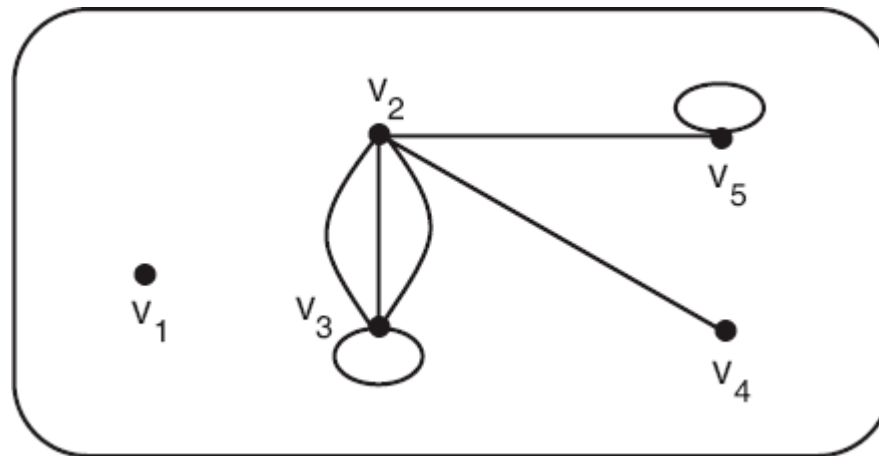
- Teoria dos Grafos (TG) é uma área do conhecimento voltada ao estudo/análise das estruturas matemáticas chamadas **grafos**.

# Conceitos Iniciais

- Teoria dos Grafos (TG) é uma área do conhecimento voltada ao estudo/análise das estruturas matemáticas chamadas **grafos**.
- Um grafo pode ser informalmente definido como um conjunto de objetos chamados vértices e um conjunto de arestas que unem pares desses objetos.

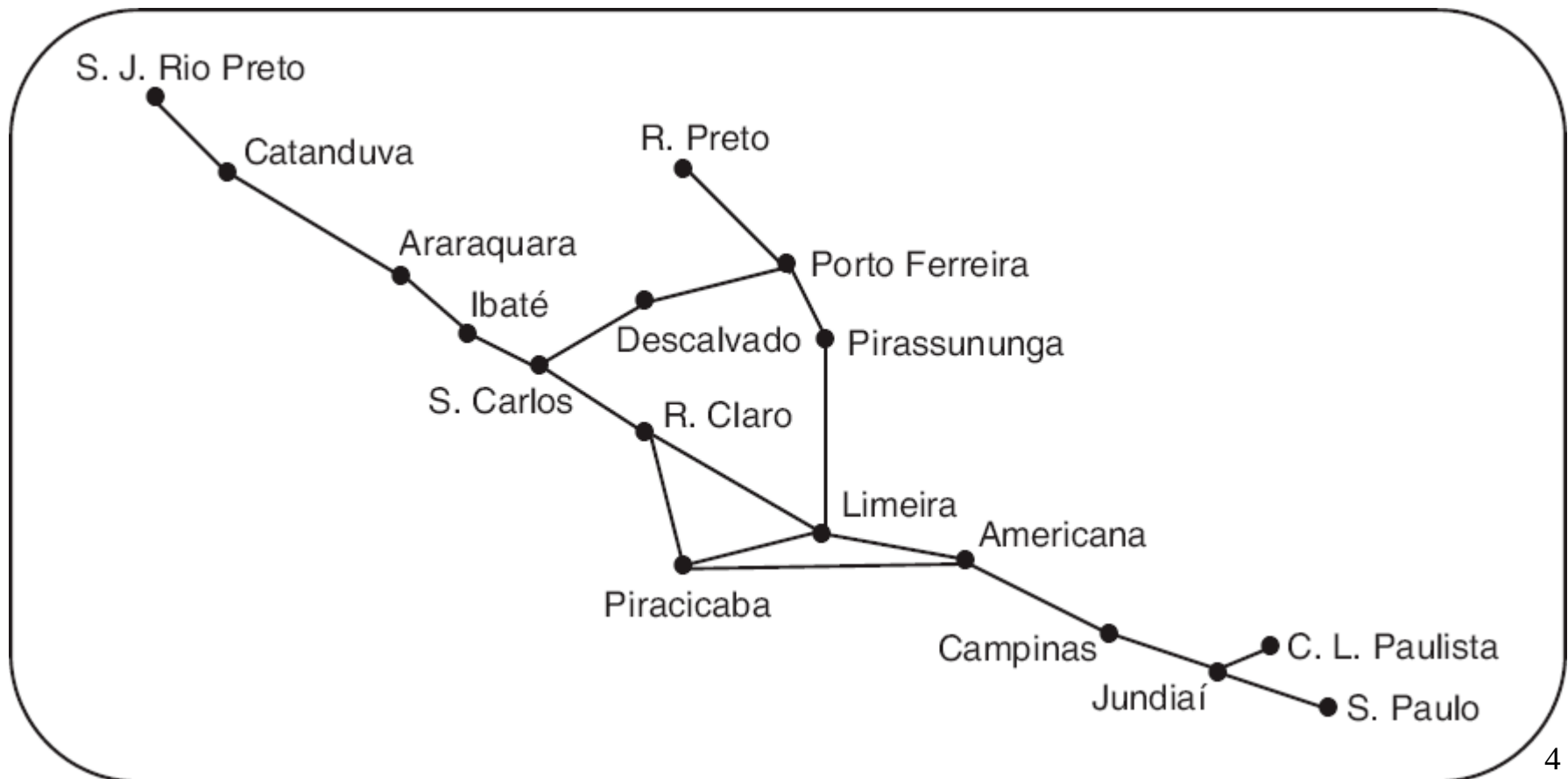
# Conceitos Iniciais

- Grafo com cinco vértices  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e sete arestas, três das quais são paralelas e duas são loops.



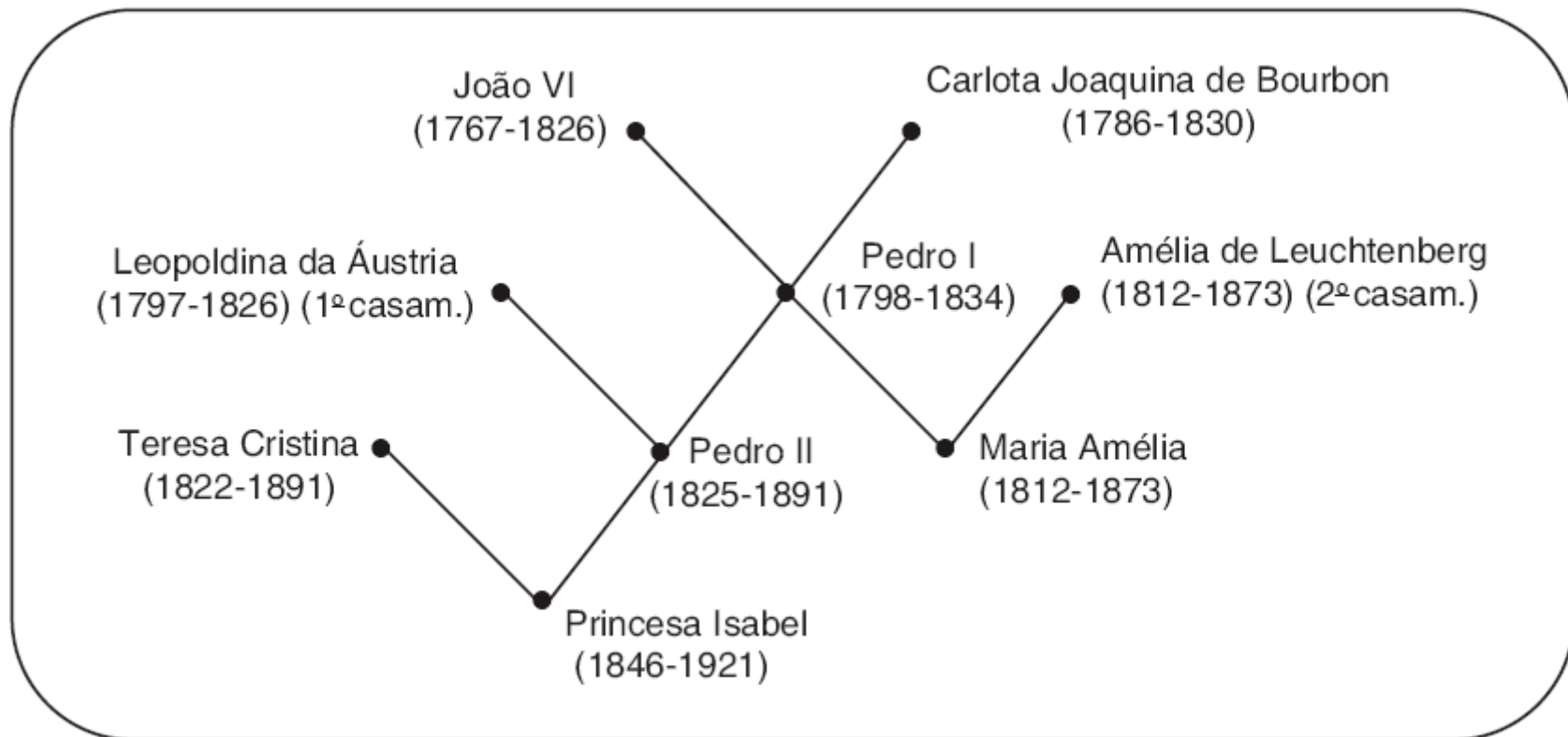
# Exemplos

- Grafos podem ser usados para representar mapas.



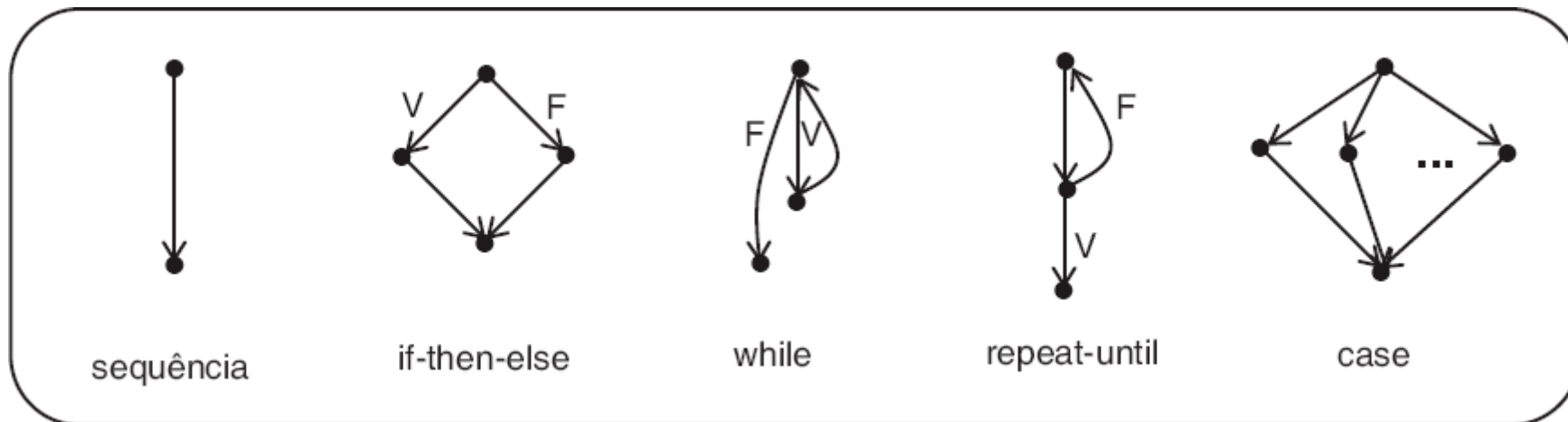
# Exemplos

- Grafo como representação de relações familiares.



# Exemplos

- Modelar um algoritmo ou um programa usando um grafo.

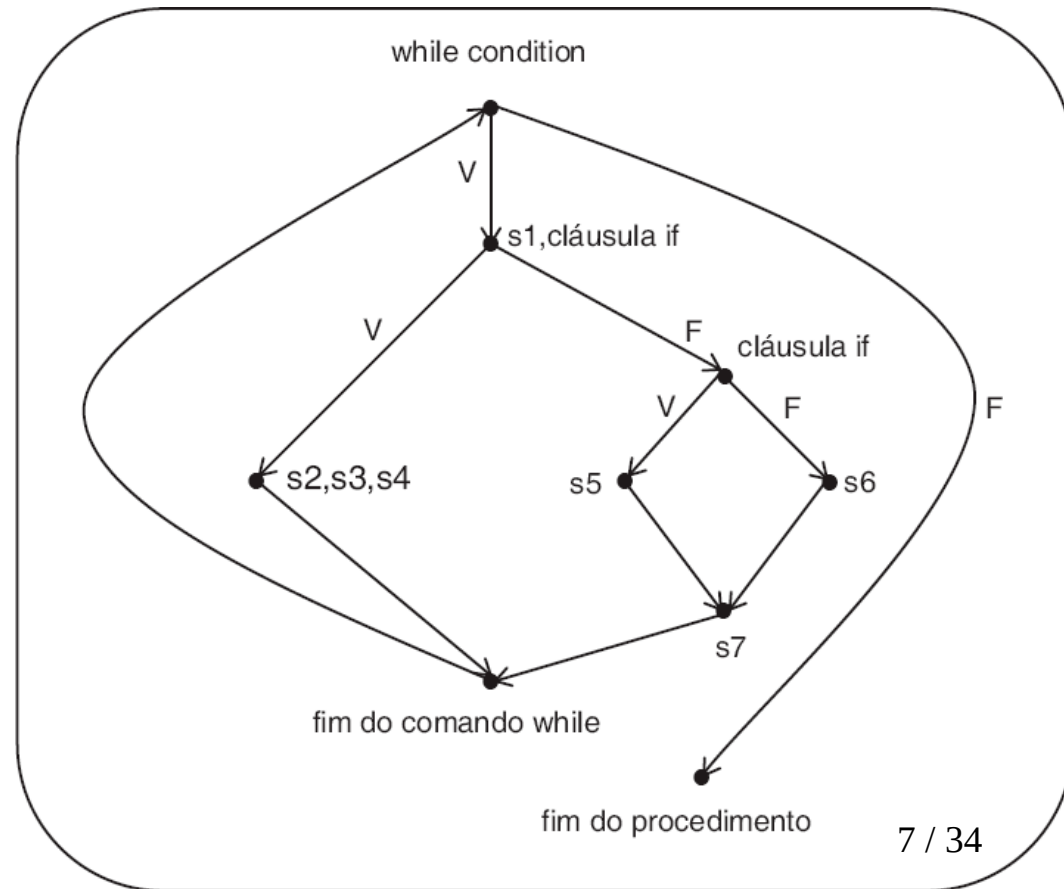




# Exemplos

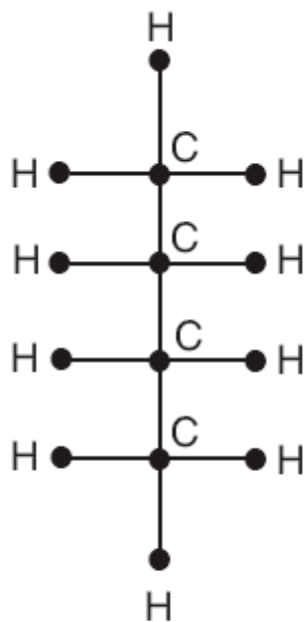
- Modelar um algoritmo ou um programa usando um grafo.

```
procedure whatever (...);  
begin  
  while (...) do  
    begin  
      s1;  
      if Flag1 = 0  
        then begin  
          s2;  
          s3;  
          s4  
        end  
        else begin  
          if Flag2 = 0  
            then s5  
            else s6;  
          s7  
        end  
    end  
  end  
end
```

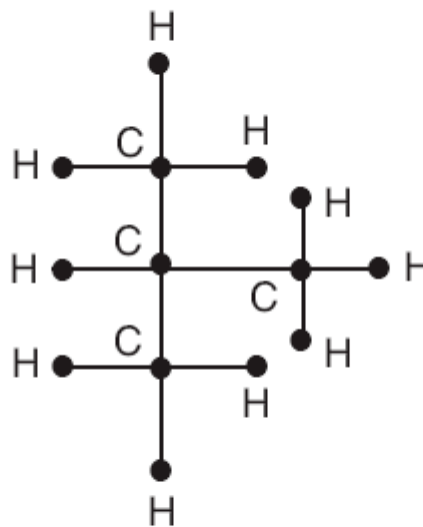


# Exemplos

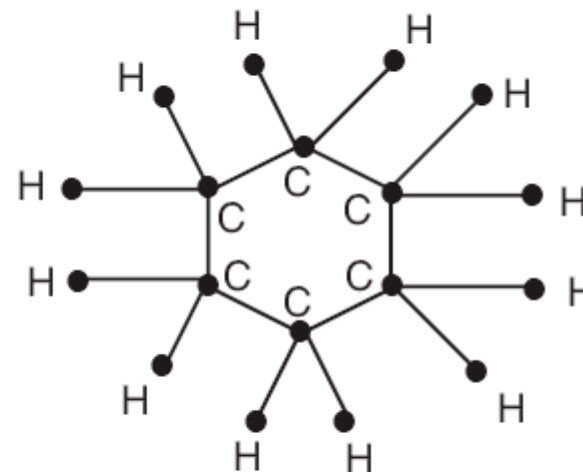
- Em Química, por exemplo, diagramas de moléculas podem ser tratados como grafos.



Butano



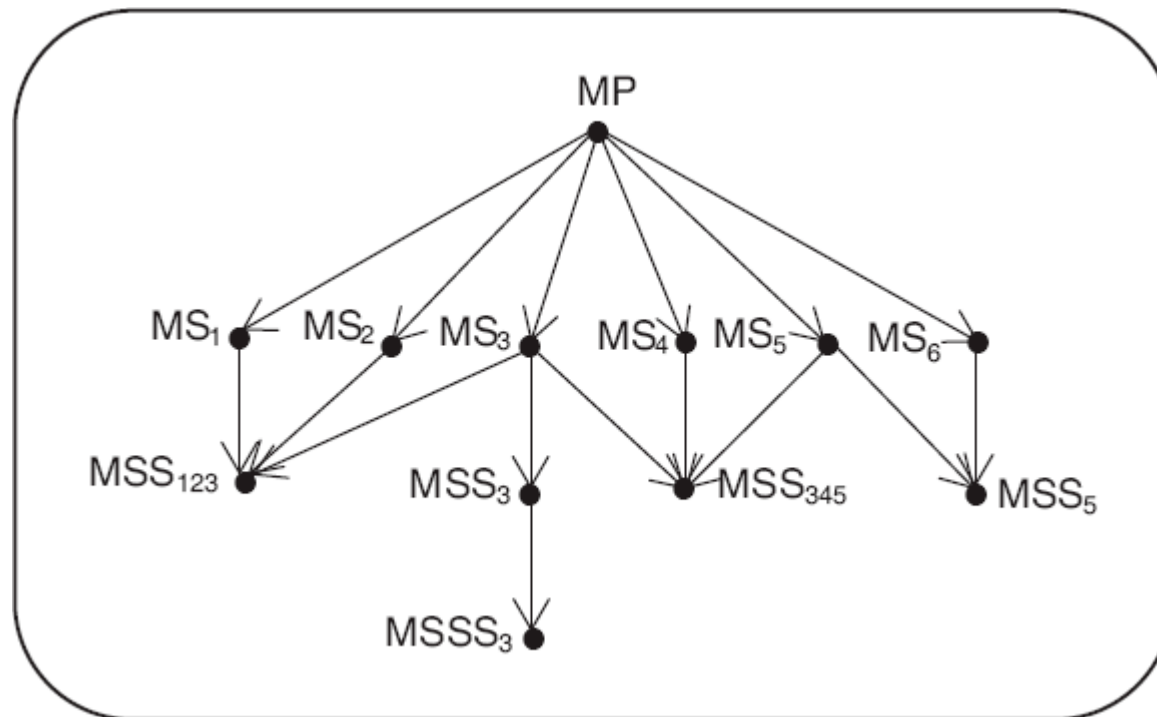
Isobutano



Cicloexano

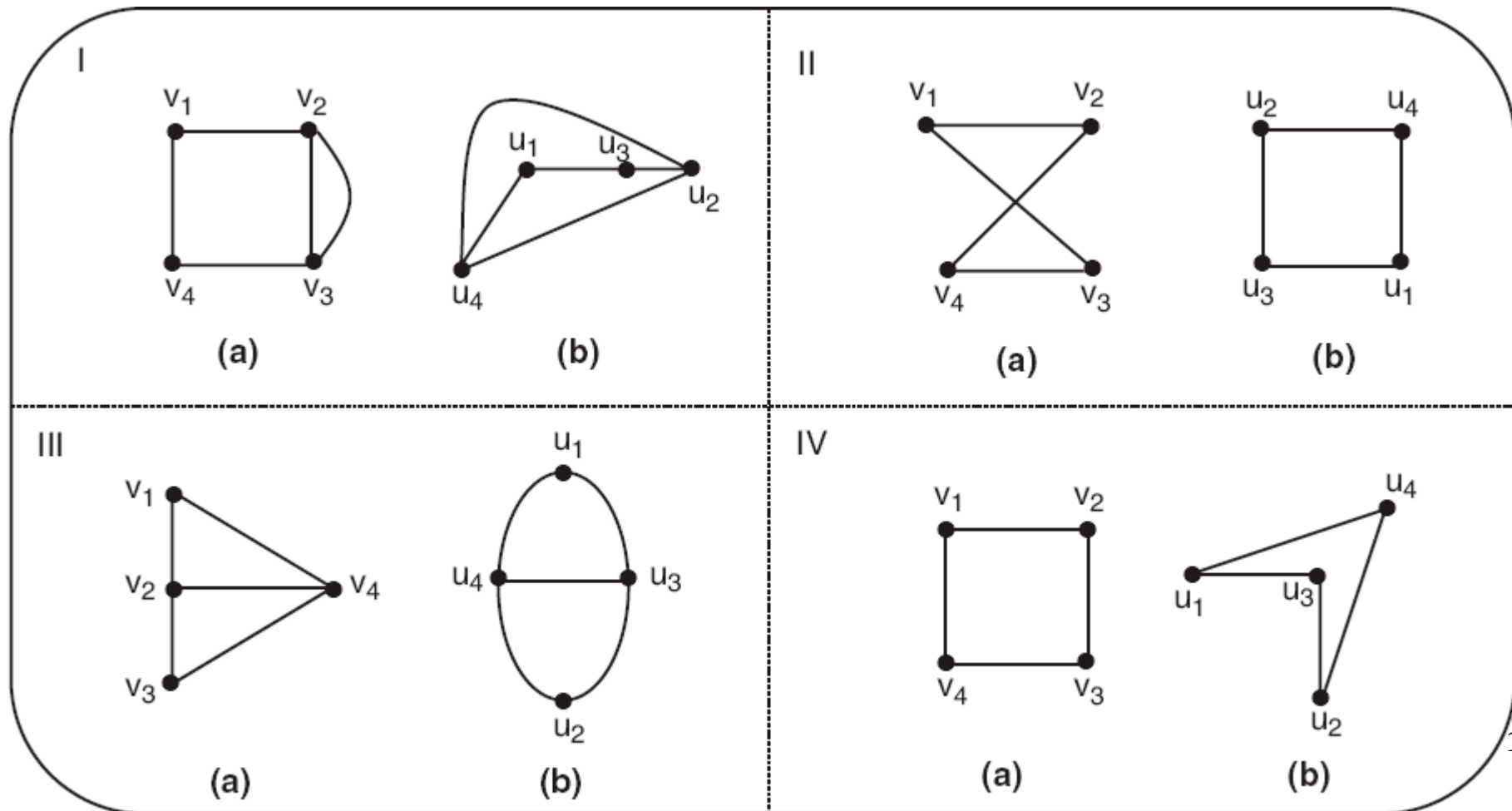
# Exemplos

- Uso de grafo na representação da estruturação de chamadas a módulos, em um sistema computacional.



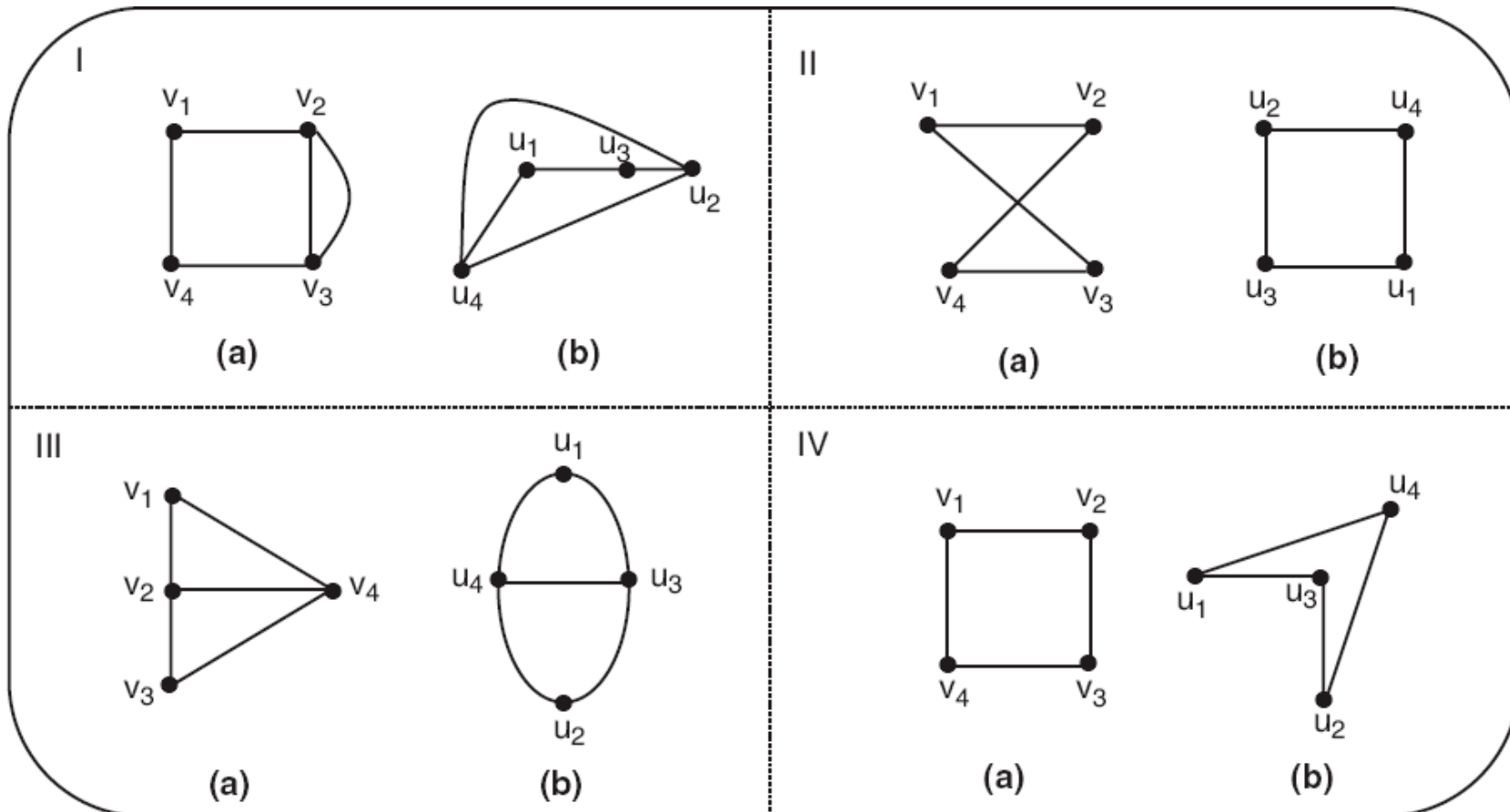
# Observação

- A maneira como as arestas dos grafos são desenhadas **não** é importante.



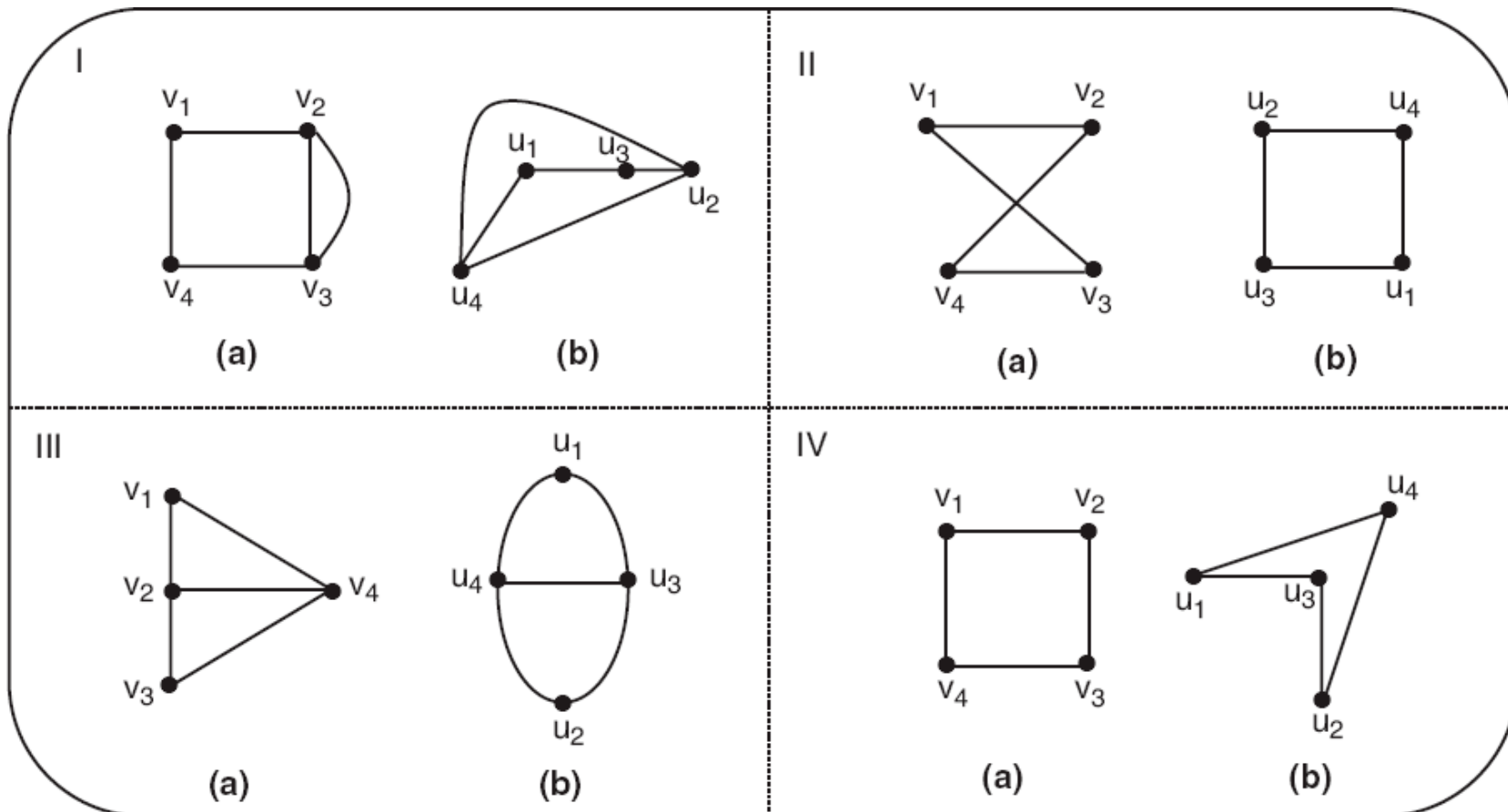
# Observação

- O que é importante são os vértices do grafo e o número de arestas entre cada par de vértices (inclusive loops).



# Observação

- Em cada uma das partes, I, II, III e IV, os grafos (a) e (b) são **isomorfos**.



# Observação

# Observação

- As arestas de um grafo podem se cruzar em outros lugares que não os vértices.



# Observação

- As arestas de um grafo podem se cruzar em outros lugares que não os vértices.
- Dependendo da modelagem, o fato de as arestas se interceptarem em outros pontos que não nos vértices não tem relevância.

# Observação

- As arestas de um grafo podem se cruzar em outros lugares que não os vértices.
- Dependendo da modelagem, o fato de as arestas se interceptarem em outros pontos que não nos vértices não tem relevância.
- Existem grafos, entretanto, com a seguinte propriedade: não importa como eles são desenhados no plano (com linhas não interrompidas), as arestas irão sempre se interceptar em pontos que não são os vértices do grafo.

# Observação

# Observação

- Grafos que podem ser desenhados no plano sem tais interseções são chamados grafos planos (**grafos planares**).

# Observação

- Grafos que podem ser desenhados no plano sem tais interseções são chamados grafos planos (**grafos planares**).
- A questão de um grafo ser ou não plano é fundamental para a solução de alguns problemas que são modelados como grafos.

# Observação

- Grafos que podem ser desenhados no plano sem tais interseções são chamados grafos planos (**grafos planares**).
- A questão de um grafo ser ou não plano é fundamental para a solução de alguns problemas que são modelados como grafos.
- Vários critérios podem ser usados para determinar a planaridade de um grafo.

# Observação

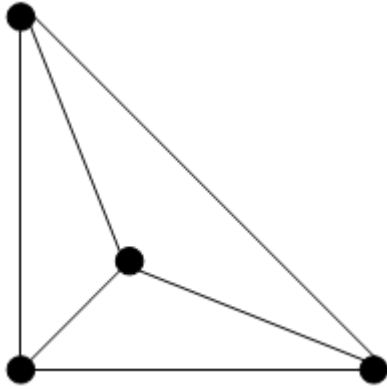
# Observação

- Exemplos:



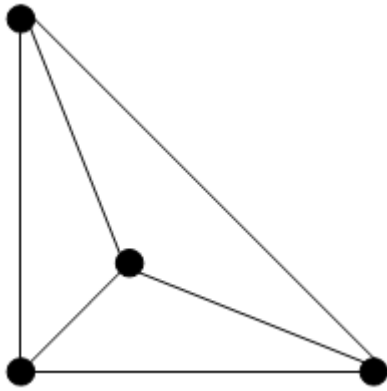
# Observação

- Exemplos:



# Observação

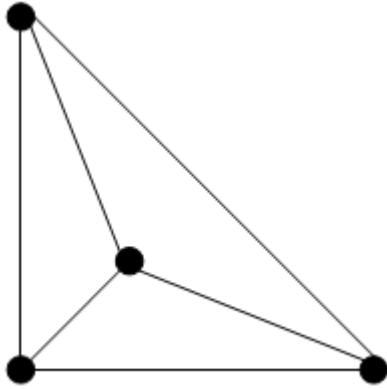
- Exemplos:



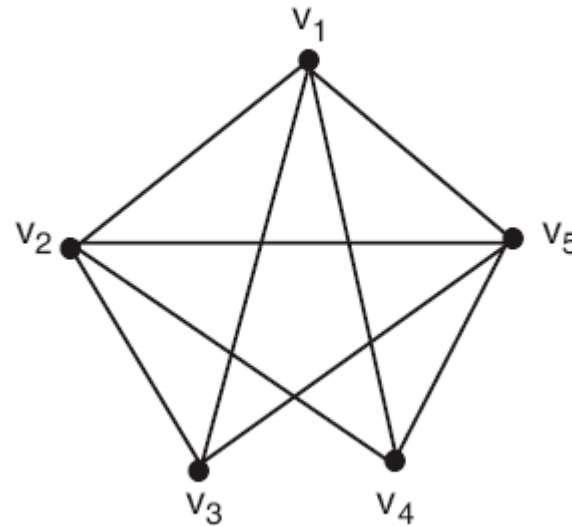
GRAFO PLANAR

# Observação

- Exemplos:

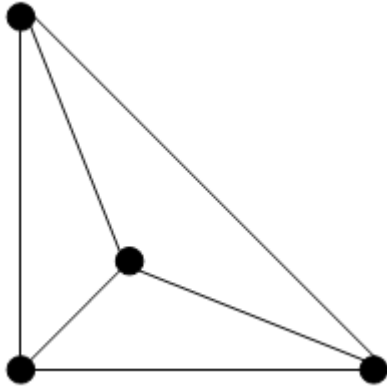


GRAFO PLANAR

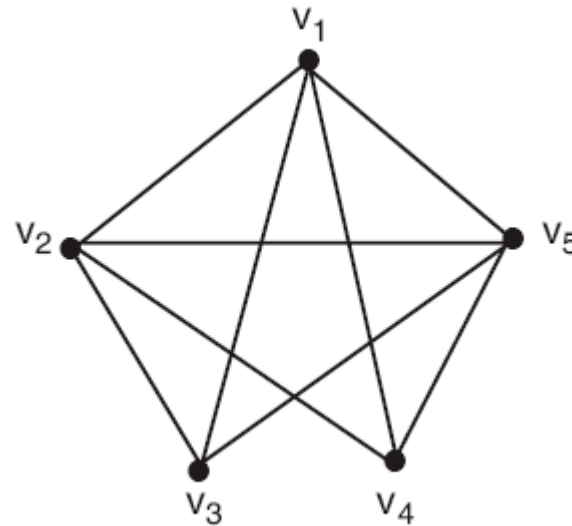


# Observação

- Exemplos:



GRAFO PLANAR



GRAFO NÃO PLANAR

# Observação

# Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:

# Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:
  - **Grafos direcionados versus grafos não direcionados**

# Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:
  - **Grafos direcionados versus grafos não direcionados**
    - Em um grafo direcionado, cada aresta, geralmente referenciada como arco, tem uma direção associada a ela.



# Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras, nas quais o seguinte é básico:
  - **Grafos direcionados versus grafos não direcionados**
    - Em um grafo direcionado, cada aresta, geralmente referenciada como arco, tem uma direção associada a ela.
    - Nos grafos não direcionados, cada aresta pode ser abordada como bidirecional;

# Observação

# Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras:

# Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras:
  - **Grafos finitos** versus **grafos infinitos**:

# Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras:
  - **Grafos finitos versus grafos infinitos:**
    - Um grafo pode ter infinitos vértices, infinitas arestas ou ambos.

# Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras:
  - **Grafos finitos versus grafos infinitos:**
    - Um grafo pode ter infinitos vértices, infinitas arestas ou ambos.
    - A maioria dos estudos sobre grafos, entretanto, lida com grafos com um número finito de vértices e de arestas.

# Observação

# Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras:

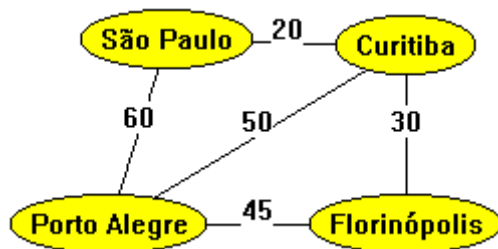


# Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras:
  - **Grafos rotulados** versus **grafos não rotulados**:

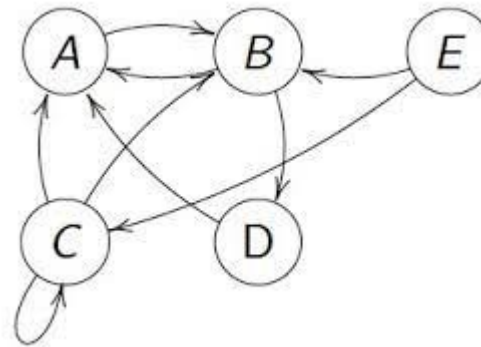
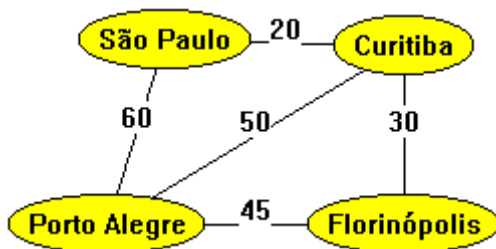
# Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras:
  - **Grafos rotulados** versus **grafos não rotulados**:



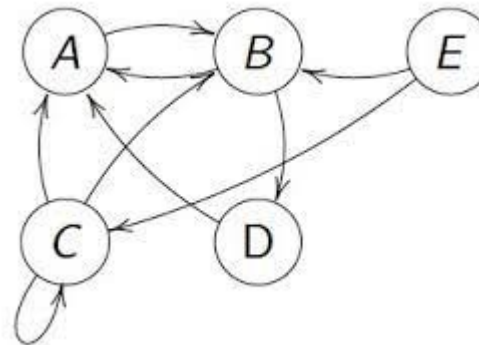
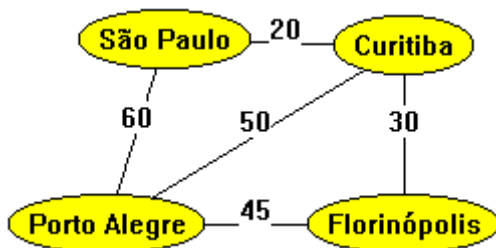
# Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras:
  - **Grafos rotulados** versus **grafos não rotulados**:



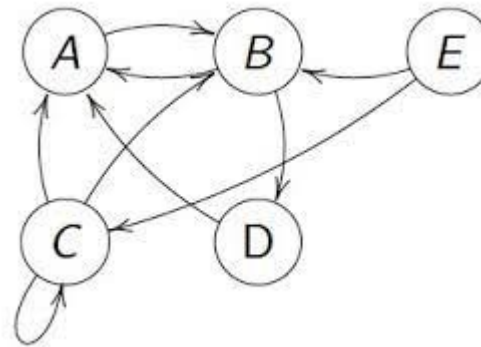
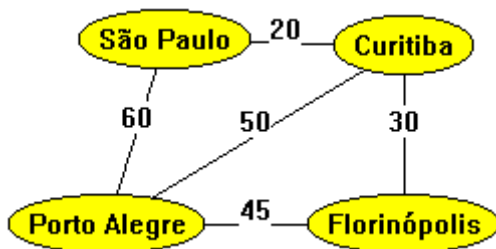
# Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras:
  - **Grafos rotulados** versus **grafos não rotulados**:
    - Em Teoria dos Grafos não é assumido que vértices ou arestas tenham rótulos (exceto para identificação).



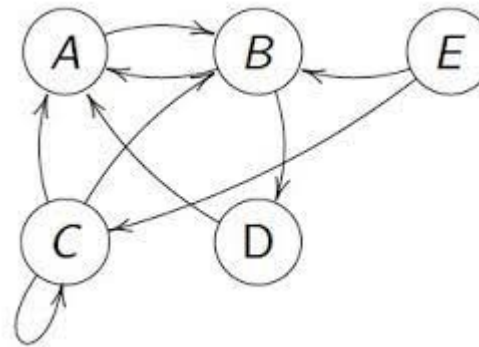
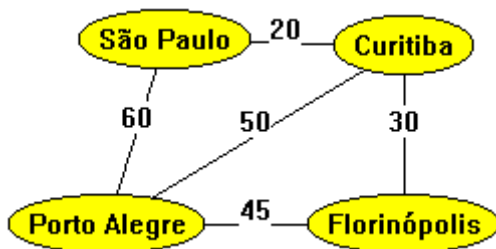
# Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras:
  - **Grafos rotulados versus grafos não rotulados:**
    - Em Teoria dos Grafos não é assumido que vértices ou arestas tenham rótulos (exceto para identificação).
    - Ainda assim, em muitas aplicações, valores são atribuídos tanto a vértices quanto a arestas.



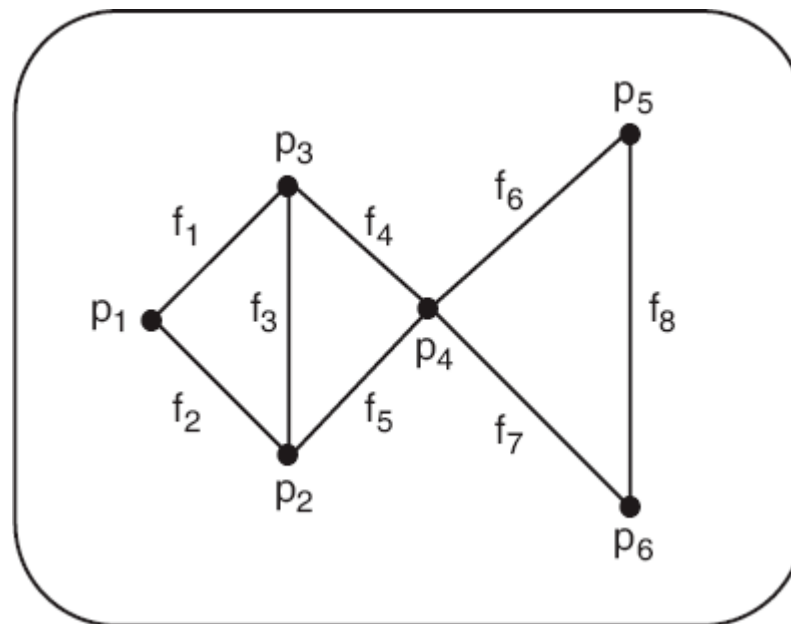
# Observação

- O estudo de grafos pode ser abordado de várias maneiras:
  - **Grafos rotulados versus grafos não rotulados:**
    - Em Teoria dos Grafos não é assumido que vértices ou arestas tenham rótulos (exceto para identificação).
    - Ainda assim, em muitas aplicações, valores são atribuídos tanto a vértices quanto a arestas.
    - A teoria, portanto, deve poder lidar com ambos os tipos de grafos.



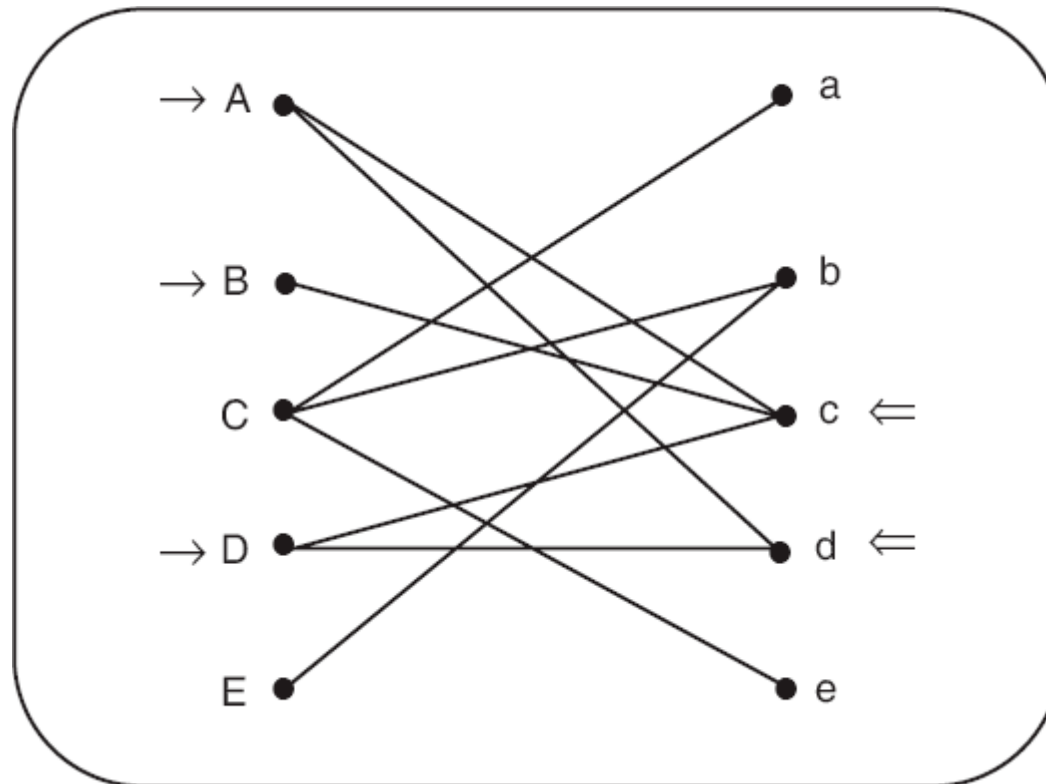
# Exemplos

- Considere que uma rede de fios e postes telefônicos é modelada como o grafo da figura abaixo, onde  $p$  representa os postes e  $f$  representa os fios.



# Exemplos

- Considere uma situação envolvendo cinco pessoas que estão procurando emprego, identificadas por A, B, C, D e E, e o anúncio de cinco empregos, identificados por a, b, c, d, e.





# Exemplos

# Exemplos

- Suponha que a área de atuação de um vendedor de produtos industriais (identificado como **caixeiro-viajante**) inclua várias cidades, com rodovias conectando certos pares dessas cidades.

# Exemplos

- Suponha que a área de atuação de um vendedor de produtos industriais (identificado como **caixeiro-viajante**) inclua várias cidades, com rodovias conectando certos pares dessas cidades.
- O serviço exige que ele visite cada cidade pessoalmente.

# Exemplos

- Suponha que a área de atuação de um vendedor de produtos industriais (identificado como **caixeiro-viajante**) inclua várias cidades, com rodovias conectando certos pares dessas cidades.
- O serviço exige que ele visite cada cidade pessoalmente.
- É possível ele planejar uma viagem de carro que lhe permita, ao sair de uma cidade, visitar cada uma das cidades exatamente uma vez, voltando à cidade de partida?

# Exemplos

# Exemplos

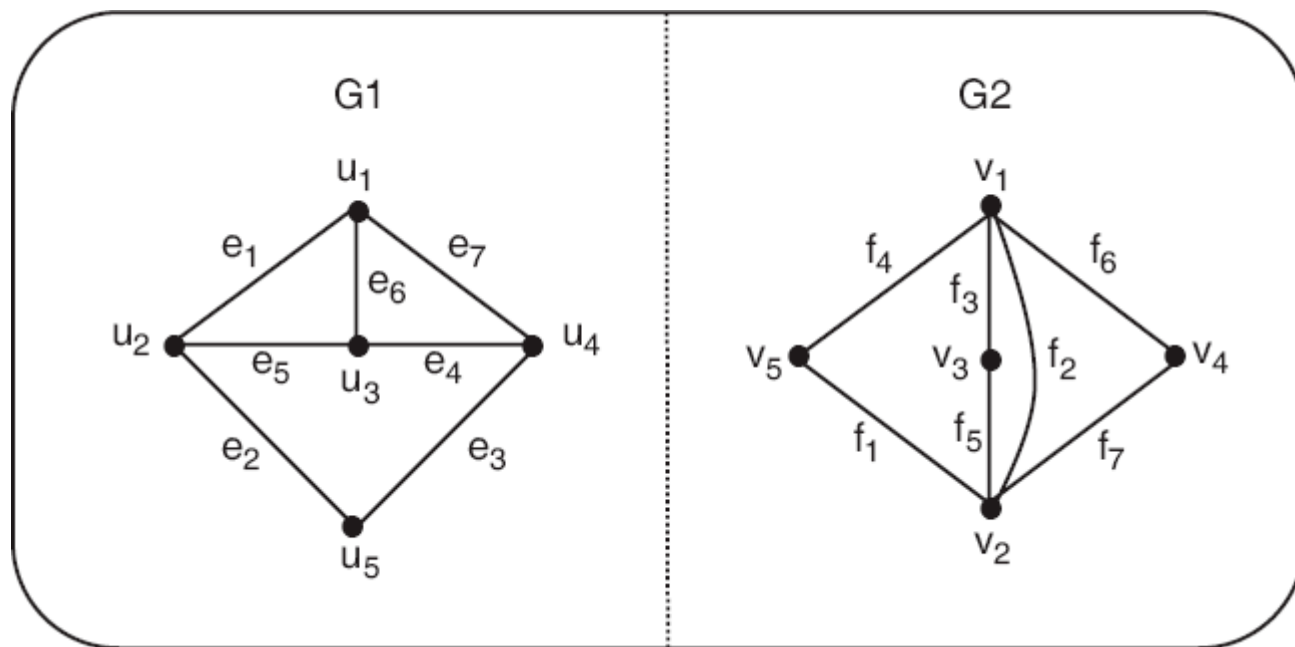
- A situação pode ser modelada por um grafo cujos vértices são as cidades envolvidas.

# Exemplos

- A situação pode ser modelada por um grafo cujos vértices são as cidades envolvidas.
- Dois vértices desse grafo estarão conectados por uma aresta apenas se existir uma rodovia que conecta as cidades correspondentes (não passando por nenhuma outra cidade especificada).

# Exemplos

- Caixeiro-viajante:





# Exemplos

# Exemplos

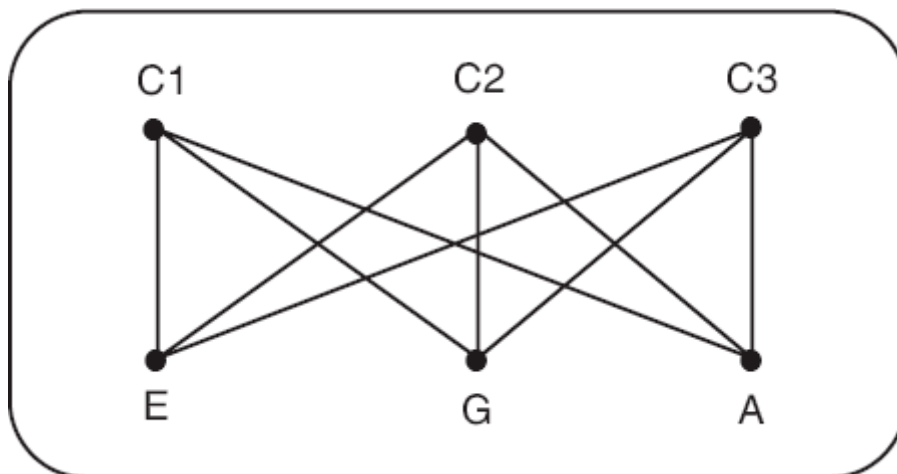
- Considere três casas e considere o problema de instalação do fornecimento de eletricidade, gás e água para cada uma delas.

# Exemplos

- Considere três casas e considere o problema de instalação do fornecimento de eletricidade, gás e água para cada uma delas.
- É possível fazer essa instalação sem que as linhas de fornecimento se interceptem?

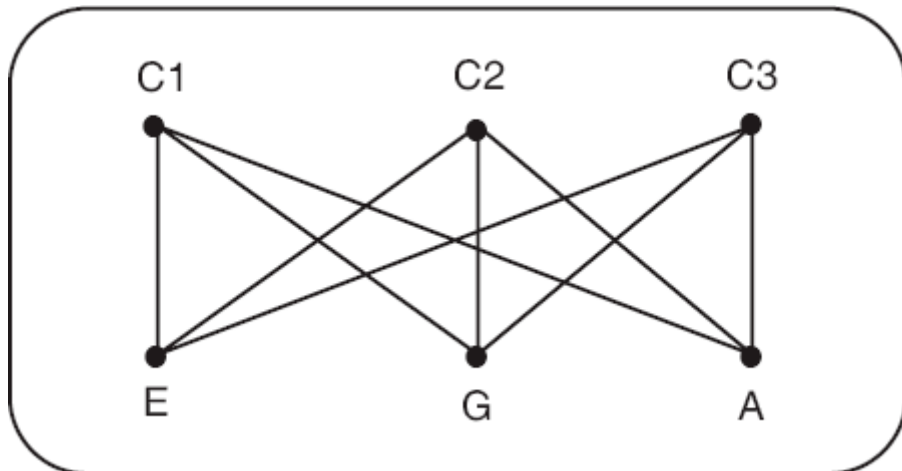
# Exemplos

- Considere três casas e considere o problema de instalação do fornecimento de eletricidade, gás e água para cada uma delas.
- É possível fazer essa instalação sem que as linhas de fornecimento se interceptem?



# Exemplos

- Uma vez modelado, o problema consiste em determinar se o grafo pode ser desenhado de maneira tal que duas arestas quaisquer não se interceptam.



# Exemplos

# Exemplos

- Considere seis emissoras de rádio C1, C2, C3, C4, C5 e C6 que solicitaram canais de frequência ao Ministério das Comunicações.

# Exemplos

- Considere seis emissoras de rádio C1, C2, C3, C4, C5 e C6 que solicitaram canais de frequência ao Ministério das Comunicações.
- Se os transmissores de duas emissoras estão a menos 200 km de distância um do outro, eles não podem ter a mesma frequência, uma vez que haverá muita interferência.



# Exemplos

- Considere seis emissoras de rádio C1, C2, C3, C4, C5 e C6 que solicitaram canais de frequência ao Ministério das Comunicações.
- Se os transmissores de duas emissoras estão a menos 200 km de distância um do outro, eles não podem ter a mesma frequência, uma vez que haverá muita interferência.
- O Ministério deseja atribuir o menor número possível de frequências distintas, levando em consideração o problema da interferência.

# Exemplos

# Exemplos

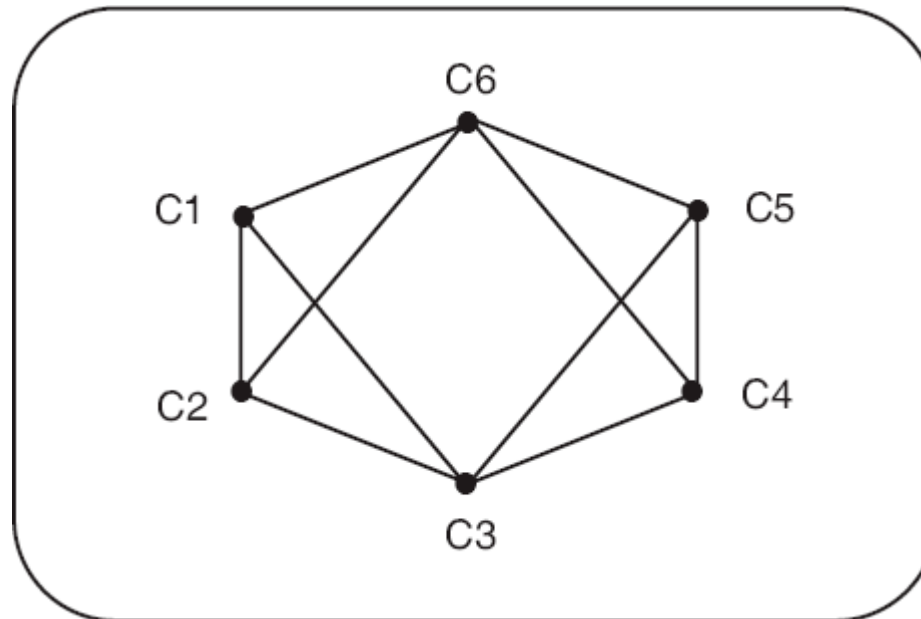
- Os vértices  $C_i$  e  $C_j$  são unidos por uma aresta se as duas emissoras  $C_i$  e  $C_j$  têm seus transmissores a uma distância menor 200km.

# Exemplos

- Os vértices  $C_i$  e  $C_j$  são unidos por uma aresta se as duas emissoras  $C_i$  e  $C_j$  têm seus transmissores a uma distância menor 200km.
- No grafo, por exemplo, a emissora  $C_6$  tem seu transmissor a uma distância menor que 200 km daqueles das emissoras  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_4$  e  $C_5$ .

# Exemplos

- Os vértices  $C_i$  e  $C_j$  são unidos por uma aresta se as duas emissoras  $C_i$  e  $C_j$  têm seus transmissores a uma distância menor 200km.
- No grafo, por exemplo, a emissora  $C_6$  tem seu transmissor a uma distância menor que 200 km daqueles das emissoras  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_4$  e  $C_5$ .



# Exemplos

# Exemplos

- Suponha, agora, que se deseje atribuir diferentes cores aos vértices de  $G$ , de tal maneira que nunca dois vértices de mesma cor estejam unidos por uma aresta.

# Exemplos

- Suponha, agora, que se deseje atribuir diferentes cores aos vértices de  $G$ , de tal maneira que nunca dois vértices de mesma cor estejam unidos por uma aresta.
- Representando as diferentes frequências de canais por meio de diferentes cores, o ministro deseja encontrar o menor número de cores com as quais os vértices possam ser coloridos.



# Exemplos

- Suponha, agora, que se deseje atribuir diferentes cores aos vértices de  $G$ , de tal maneira que nunca dois vértices de mesma cor estejam unidos por uma aresta.
- Representando as diferentes frequências de canais por meio de diferentes cores, o ministro deseja encontrar o menor número de cores com as quais os vértices possam ser coloridos.
- Para o exemplo em questão, o número é três.

# Exemplos

- Suponha, agora, que se deseje atribuir diferentes cores aos vértices de  $G$ , de tal maneira que nunca dois vértices de mesma cor estejam unidos por uma aresta.
- Representando as diferentes frequências de canais por meio de diferentes cores, o ministro deseja encontrar o menor número de cores com as quais os vértices possam ser coloridos.
- Para o exemplo em questão, o número é três.
- Pode-se, por exemplo, colorir  $C1$  e  $C4$  de vermelho,  $C2$  e  $C5$  de azul e  $C3$  e  $C6$  de amarelo.

# Exemplos

# Exemplos

- Uma companhia tem filiais em cada uma das cidades C1, C2, ..., C6.

# Exemplos

- Uma companhia tem filiais em cada uma das cidades  $C_1, C_2, \dots, C_6$ .
- O valor da passagem aérea de um voo direto entre as cidades  $C_i$  e  $C_j$  é dado pela posição  $(i,j)$  na matriz a seguir.

# Exemplos

- Uma companhia tem filiais em cada uma das cidades C1, C2, ..., C6.
- O valor da passagem aérea de um voo direto entre as cidades Ci e Cj é dado pela posição (i,j) na matriz a seguir.

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

# Exemplos

- A presença do símbolo  $\infty$  em uma posição da matriz indica a inexistência de voo direto entre as cidades representadas pela linha e pela coluna em que tal símbolo se encontra.

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

# Exemplos



# Exemplos

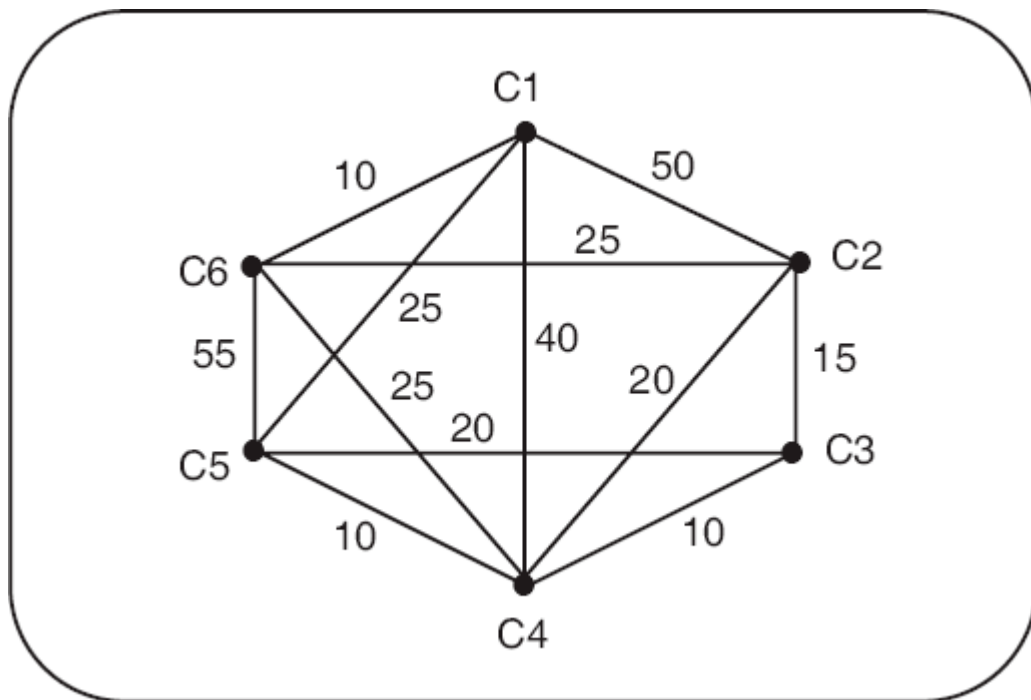
- A companhia está interessada no cálculo de uma tabela das tarifas mais baratas entre pares de cidades (mesmo que exista um vôo direto entre duas cidades, este pode não ser a rota mais barata).

# Exemplos

- A companhia está interessada no cálculo de uma tabela das tarifas mais baratas entre pares de cidades (mesmo que exista um voo direto entre duas cidades, este pode não ser a rota mais barata).
- Essa situação pode ser representada por um grafo ponderado, ou seja, um grafo com pesos associados às arestas que, no caso, representam as tarifas associadas aos voos diretos, como informados na matriz.

# Exemplos

- Aquele problema pode ser representado como um grafo.



# Exemplos

# Exemplos

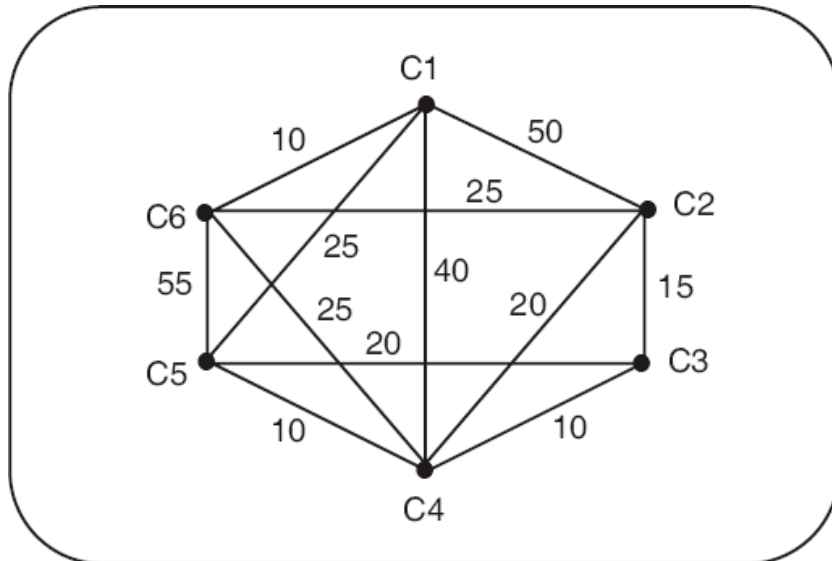
- O problema pode, então, ser resolvido usando o algoritmo de Dijkstra.

# Exemplos

- O problema pode, então, ser resolvido usando o algoritmo de Dijkstra.
- Esse tipo de problema é chamado de **problema do caminho mais curto** e tem um grande número de aplicações, nas mais variadas áreas de conhecimento.

# Exemplos

- O problema pode, então, ser resolvido usando o algoritmo de Dijkstra.
- Esse tipo de problema é chamado de **problema do caminho mais curto** e tem um grande número de aplicações, nas mais variadas áreas de conhecimento.



# Exercícios

- Explique a diferença entre os problemas bem conhecidos na Computação: caixeiro-viajante e o problema resolvido pelo algoritmo proposto por Dijkstra.