

Teoria dos Grafos

PASSEIOS, TRILHAS E CAMINHOS

Prof. Tiago Eugenio de Melo

tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

Observações

- As definições e teorias apresentadas aqui foram baseadas no livro *Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação* (LTC, 2018).

Observações

- As definições e teorias apresentadas aqui foram baseadas no livro *Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação* (LTC, 2018).
- A numeração das definições e teoremas seguem as mesmas referências adotadas no livro para facilitar a localização.

CONCEITOS INICIAIS



Conceitos Iniciais

- Muitos problemas em Teoria dos Grafos estão relacionados com a possibilidade de se chegar a um vértice do grafo a partir de outro vértice, seguindo uma sequência de arestas.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.1**

- Um **passeio** em um grafo é uma sequência finita:

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.2**

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.2**

- Considere o grafo $G = (V, E)$ e um passeio em G dado pela sequência:

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.2**

- Considere o grafo $G = (V, E)$ e um passeio em G dado pela sequência:

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

- O inteiro k , que é o número de arestas do passeio, é chamado **comprimento** de W .

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.3**

- Um **passeio trivial** em um grafo G é um passeio com nenhuma aresta.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.3**

- Um **passeio trivial** em um grafo G é um passeio com nenhuma aresta.
- Dado um grafo $G = (V, E)$, para qualquer vértice $v \in V$, o passeio $W = v$ é um passeio trivial e tem comprimento 0.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.4**
 - Seja $G = (V,E)$ um grafo.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.4**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- Dados dois vértices $u \in V, v \in V$ em G , um passeio $u-v$ é **fechado** se $u = v$ e **aberto** se $u \neq v$.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.5**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo e considere o passeio

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.5**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo e considere o passeio

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

- Se as arestas e_1, e_2, \dots, e_k de W são distintas, então W é chamado **trilha**.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.5**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo e considere o passeio

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

- Se as arestas e_1, e_2, \dots, e_k de W são distintas, então W é chamado **trilha**.
- Uma trilha que começa e termina no mesmo vértice v é chamada **trilha fechada** ou circuito, caso contrário, é uma **trilha aberta**.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.6**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo e considere a trilha

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.6**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo e considere a trilha

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

- Se os vértices v_0, v_1, \dots, v_k de W são distintos, então W é chamado **caminho**.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.6**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo e considere a trilha

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

- Se os vértices v_0, v_1, \dots, v_k de W são distintos, então W é chamado **caminho**.
- Um caminho que começa e termina no mesmo vértice é chamado **caminho fechado ou ciclo**.

Conceitos Iniciais

- **Definição 4.6**

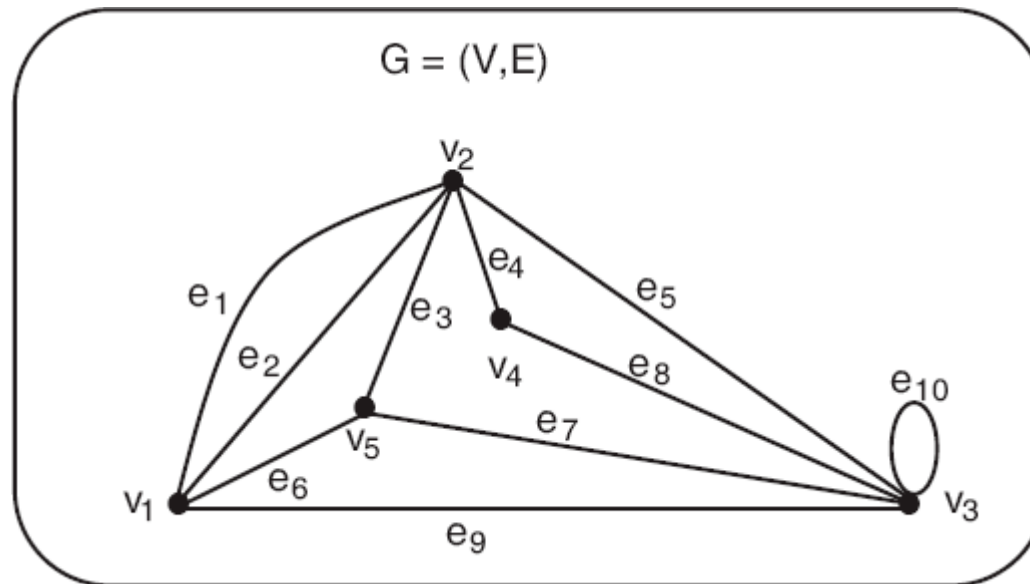
- Seja $G = (V, E)$ um grafo e considere a trilha

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

- Se os vértices v_0, v_1, \dots, v_k de W são distintos, então W é chamado **caminho**.
- Um caminho que começa e termina no mesmo vértice é chamado **caminho fechado ou ciclo**.
- Um caminho que não é fechado é chamado **caminho aberto**.

Exemplo

Grafo $G = (V,E)$ em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$

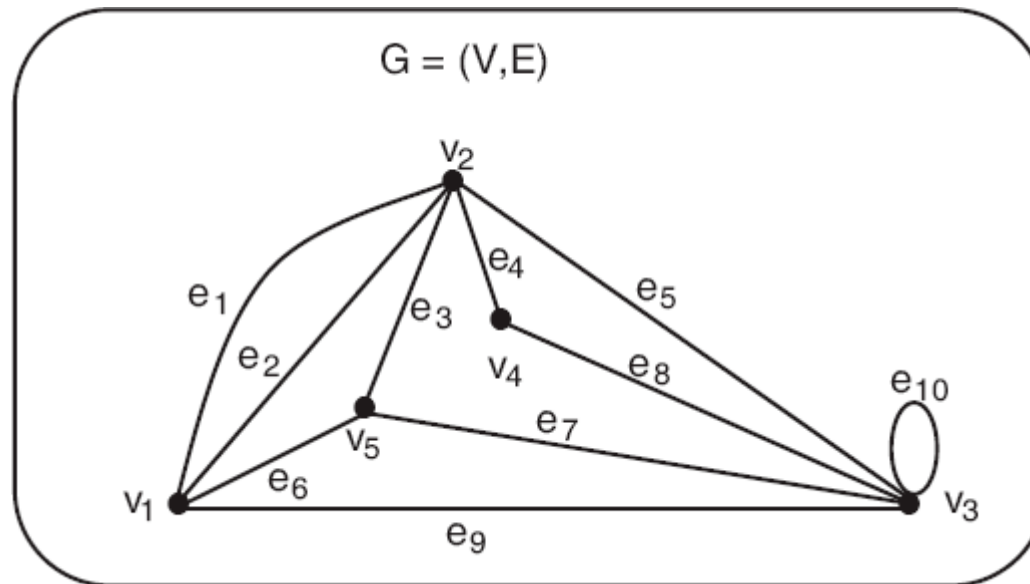


$$W_1 = v_1 e_1 v_2 e_5 v_3 e_{10} v_3 e_5 v_2 e_3 v_5$$

é um passeio aberto de tamanho 5 de v_1 a v_5 .

Exemplo

Grafo $G = (V,E)$ em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$

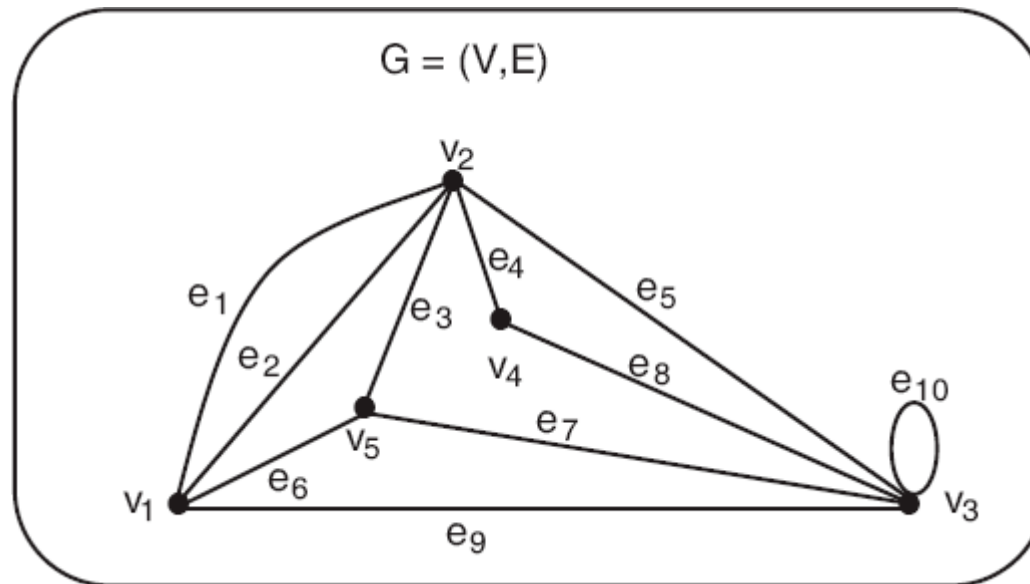


$$W_2 = v_1 e_1 v_2 e_1 v_1 e_1 v_2$$

é um passeio aberto de tamanho 3 de v_1 a v_2 .

Exemplo

Grafo $G = (V,E)$ em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$

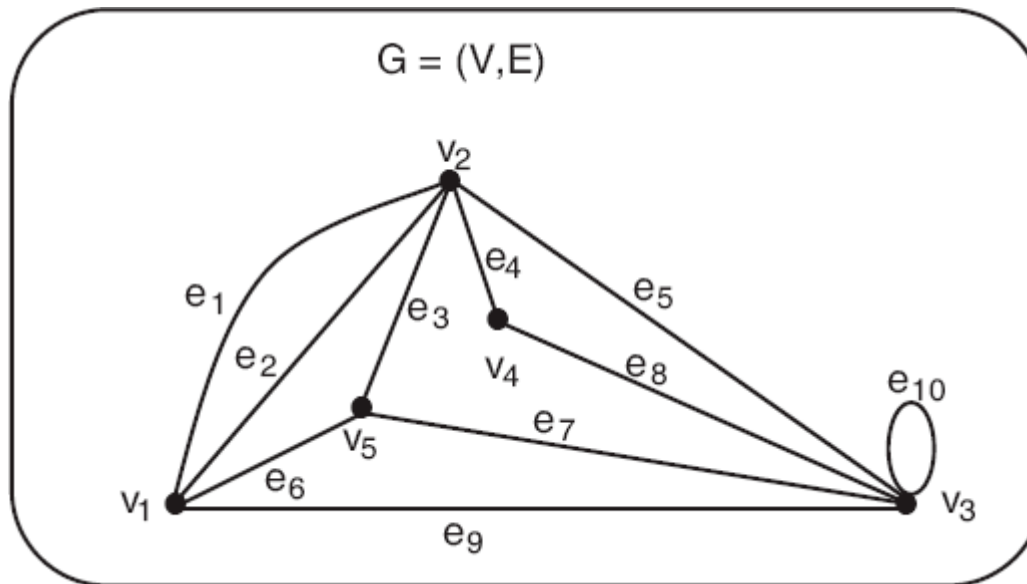


$$W_3 = v_1 v_5 v_2 v_4 v_3 v_1$$

é um passeio fechado de tamanho 5.

Exemplo

Grafo $G = (V,E)$ em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$

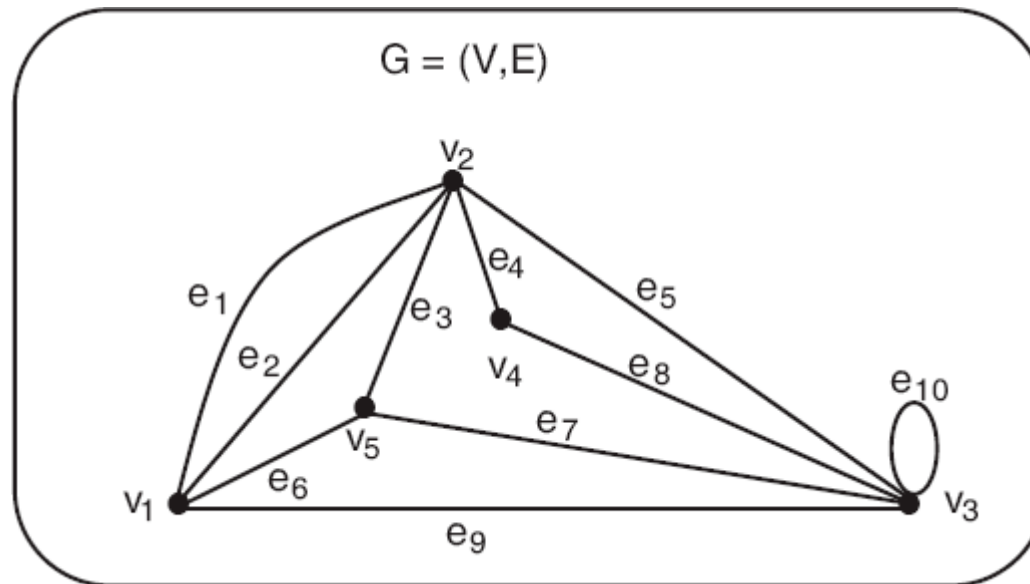


$$W_4 = v_2 v_4 v_3 v_5 v_1$$

é um caminho de comprimento 4.

Exemplo

Grafo $G = (V,E)$ em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$



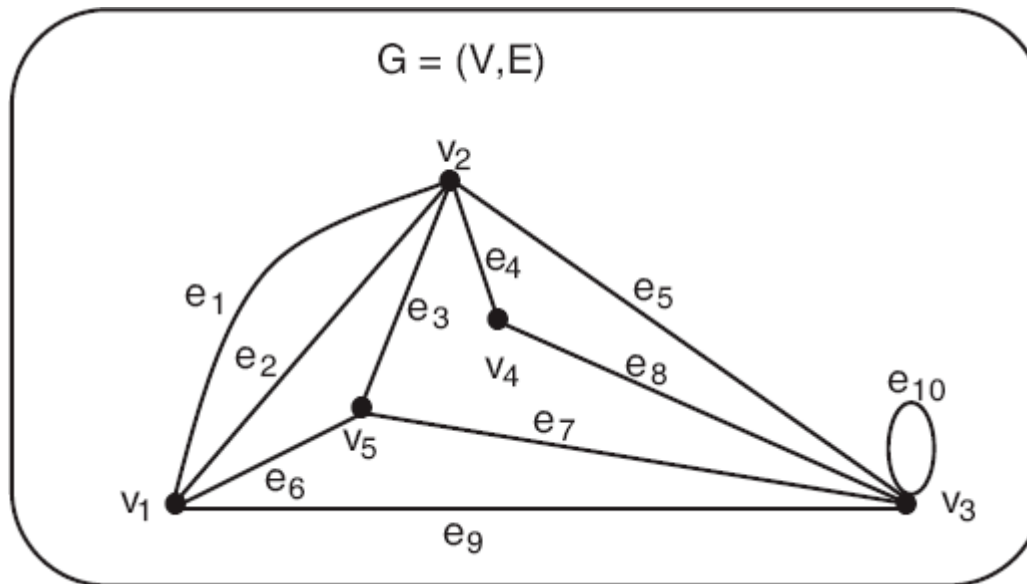
W_1 e W_2 não são trilhas.

$$W_1 = v_1 e_1 v_2 e_5 v_3 e_{10} v_3 e_5 v_2 e_3 v_5$$

$$W_2 = v_1 e_1 v_2 e_1 v_1 e_1 v_2$$

Exemplo

Grafo $G = (V,E)$ em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$

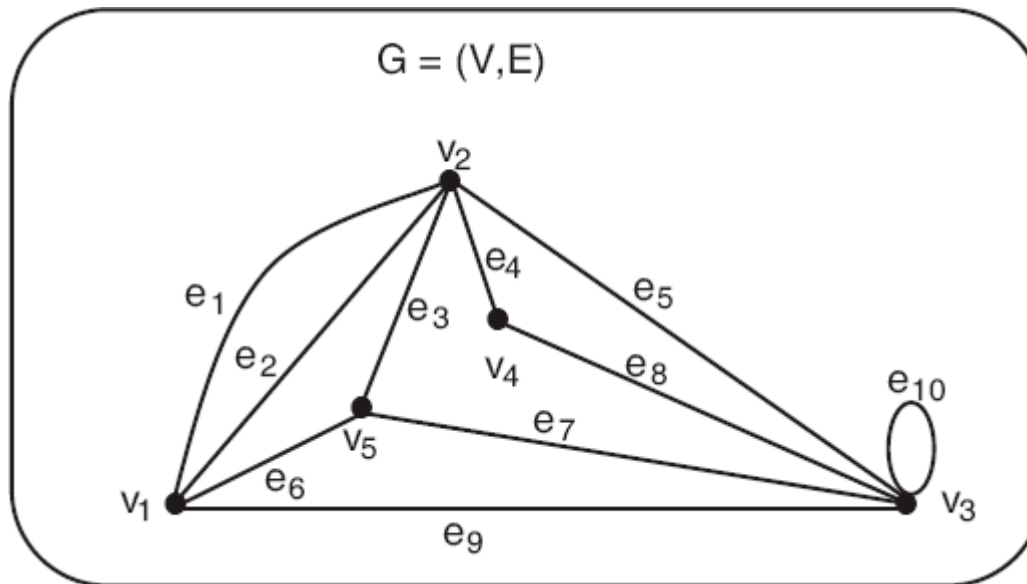


W_3 é uma trilha fechada.

$$W_3 = v_1 v_5 v_2 v_4 v_3 v_1$$

Exemplo

Grafo $G = (V,E)$ em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$



W_3 é um ciclo.

$$W_3 = v_1 v_5 v_2 v_4 v_3 v_1$$

CONNECTIVIDADE EM GRAFOS



Conectividade em Grafos

- **Definição 4.7**
 - Seja $G = (V,E)$ um grafo.

Conectividade em Grafos

- **Definição 4.7**

- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- Diz-se que o vértice u está **conectado** ao vértice v em G se existir um caminho de u a v em G .

Conectividade em Grafos

Conectividade em Grafos

- Consequências da Definição 4.7:

Conectividade em Grafos

- Consequências da Definição 4.7:
 - Se u está conectado a v , então v está conectado a u (pelo caminho inverso).

Conectividade em Grafos

- Conseqüências da Definição 4.7:
 - Se u está conectado a v , então v está conectado a u (pelo caminho inverso).
 - Qualquer vértice u está conectado a si próprio pelo caminho trivial $P = u$.

Conectividade em Grafos

- Consequências da Definição 4.7:
 - Se u está conectado a v , então v está conectado a u (pelo caminho inverso).
 - Qualquer vértice u está conectado a si próprio pelo caminho trivial $P = u$.
 - Se u está conectado a v e v está conectado a w , então u está conectado a w .

Conectividade em Grafos

- **Definição 4.8**

- Seja $G = (V,E)$ um grafo.

Conectividade em Grafos

- **Definição 4.8**

- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- Diz-se que G é conexo se quaisquer dois de seus vértices estão conectados.

Conectividade em Grafos

- **Definição 4.8**

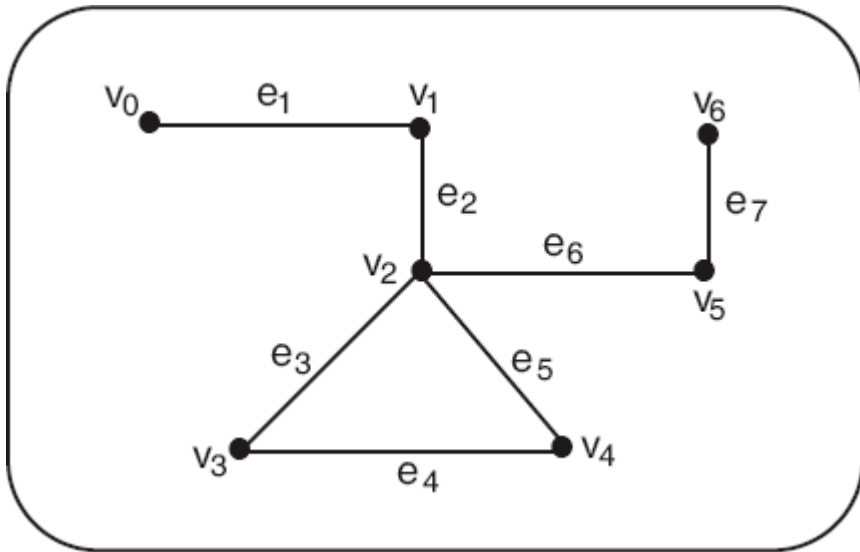
- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- Diz-se que G é conexo se quaisquer dois de seus vértices estão conectados.
- Um grafo que não é conexo é chamado desconexo.

Conectividade em Grafos

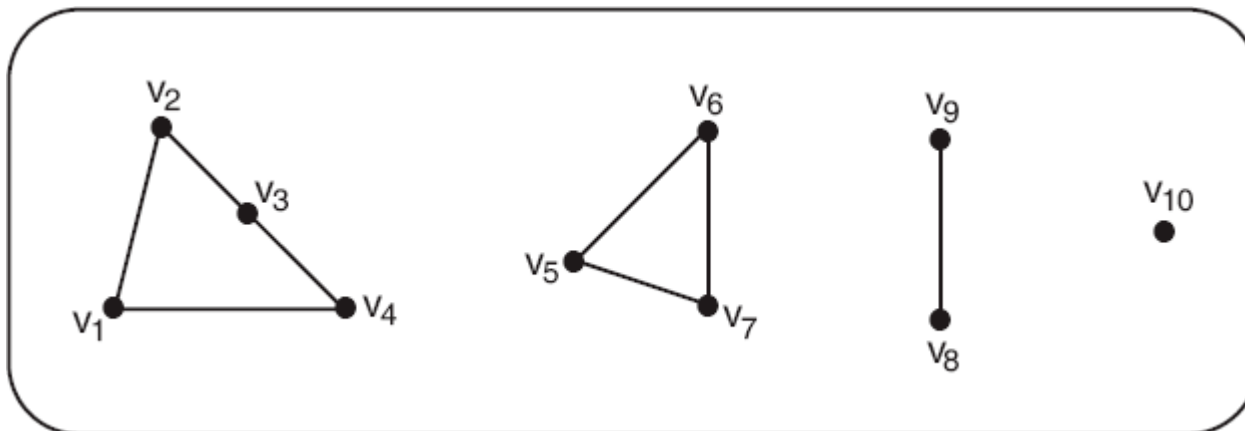
- **Definição 4.8**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- Diz-se que G é conexo se quaisquer dois de seus vértices estão conectados.
- Um grafo que não é conexo é chamado desconexo.
- Em um grafo conexo, é sempre possível ir de qualquer vértice do grafo a qualquer outro, seguindo as arestas do grafo.

Exemplo



Grafo conexo.



Grafo desconexo com dez vértices e oito arestas.

Conectividade em Grafos

- **Definição 4.9**

- Seja $G = (V,E)$ um grafo.

Conectividade em Grafos

- **Definição 4.9**

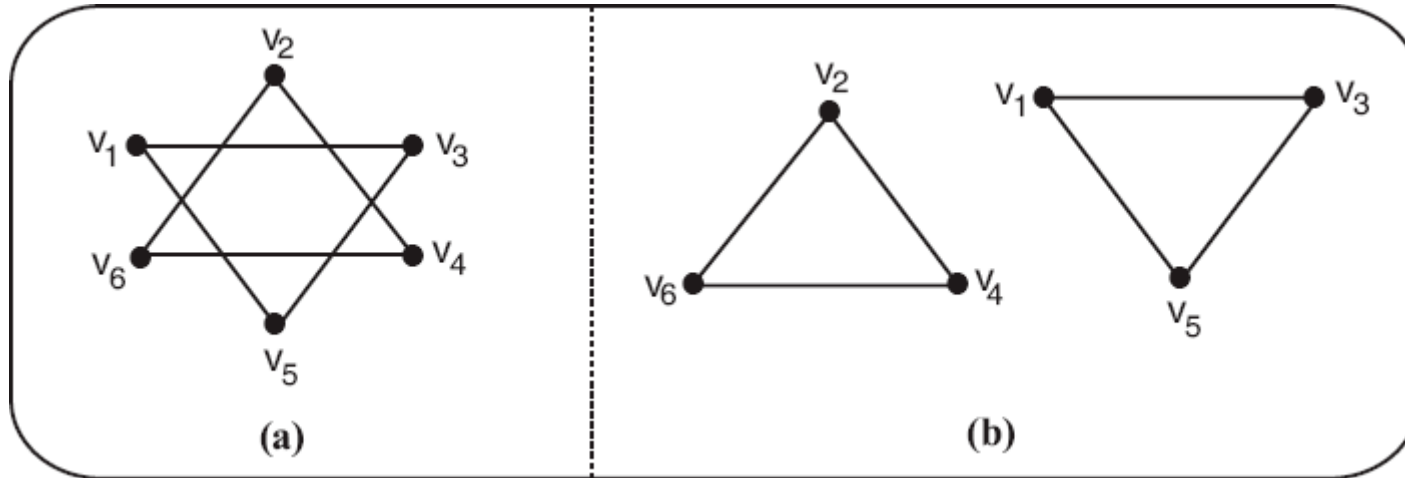
- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- Dado qualquer vértice u de G , seja $C(u)$ o conjunto de todos os vértices de G que estão conectados a u .

Conectividade em Grafos

- **Definição 4.9**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- Dado qualquer vértice u de G , seja $C(u)$ o conjunto de todos os vértices de G que estão conectados a u .
- O subgrafo de G induzido por $C(u)$ é chamado de componente conexo contendo u ou simplesmente de componente contendo u .

Exemplo



(a) Grafo G . (b) Os dois componentes conexos de G .

Conectividade em Grafos

- **Teorema 4.3**

- Qualquer grafo conexo G , com n vértices, deve ter pelo menos $n-1$ arestas.

Conectividade em Grafos

- **Teorema 4.4**

- Se um grafo simples com n vértices tem **mais** do que $\binom{n-1}{2}$ arestas, então deve ser conexo.

Exemplo

Exemplo

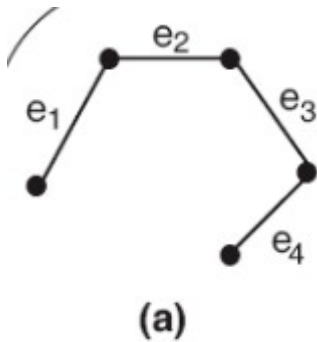
- Considere um grafo G com 5 vértices.

Exemplo

- Considere um grafo G com 5 vértices.
- Quantas arestas seriam necessárias para que ele seja conexo?

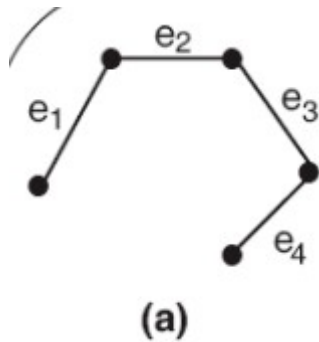
Exemplo

- Considere um grafo G com 5 vértices.
- Quantas arestas seriam necessárias para que ele seja conexo?



Exemplo

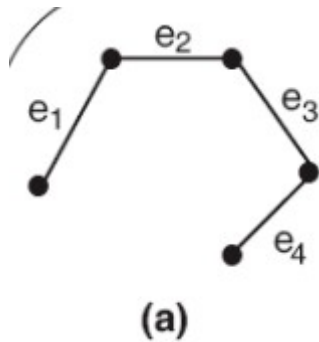
- Considere um grafo G com 5 vértices.
- Quantas arestas seriam necessárias para que ele seja conexo?



4 arestas

Exemplo

- Considere um grafo G com 5 vértices.
- Quantas arestas seriam necessárias para que ele seja conexo?

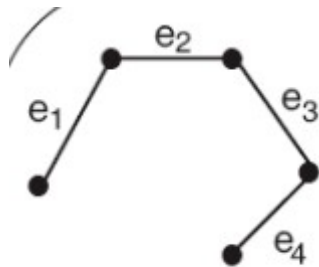


4 arestas

- 4 arestas garantem a conectividade?

Exemplo

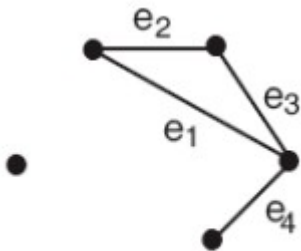
- Considere um grafo G com 5 vértices.
- Quantas arestas seriam necessárias para que ele seja conexo?



4 arestas

(a)

- 4 arestas garantem a conectividade?



(b)

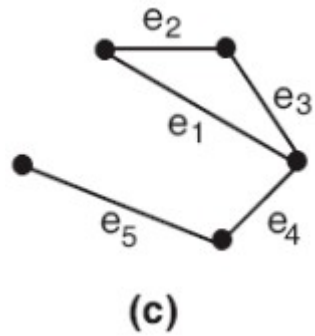
Exemplo

Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e5?

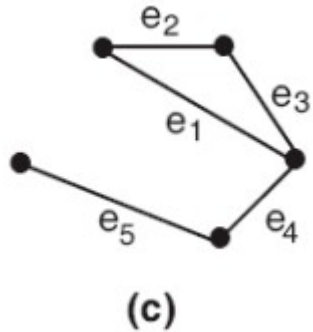
Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e5?



Exemplo

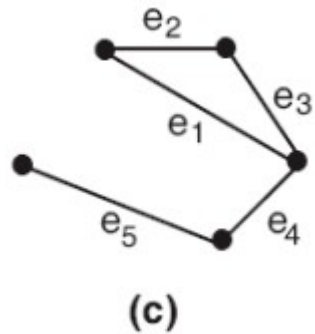
- E se fosse adicionada a aresta e5?



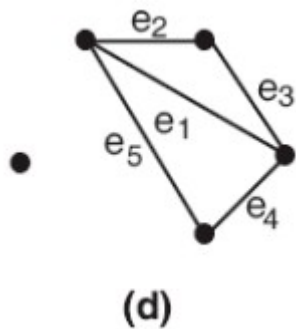
- 5 arestas garantem a conectividade?

Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e5?



- 5 arestas garantem a conectividade?



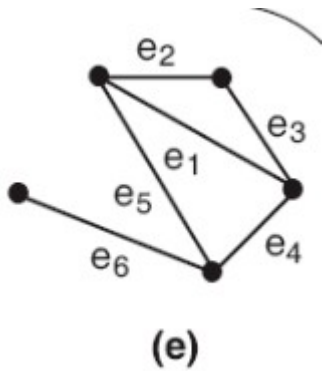
Exemplo

Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e_6 ?

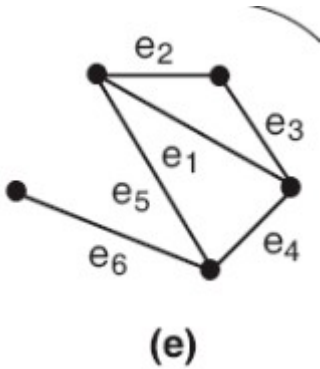
Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e6?



Exemplo

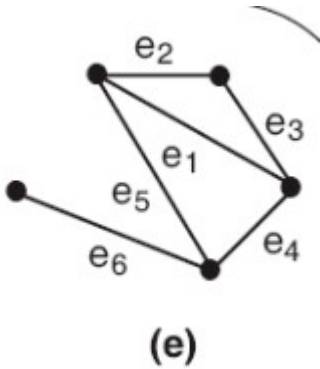
- E se fosse adicionada a aresta e6?



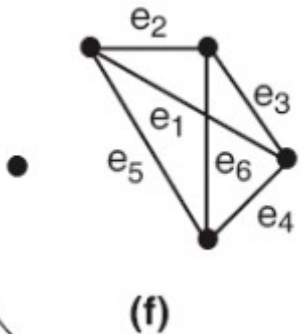
- 6 arestas garantem a conectividade?

Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e6?



- 6 arestas garantem a conectividade?



Exemplo

Exemplo

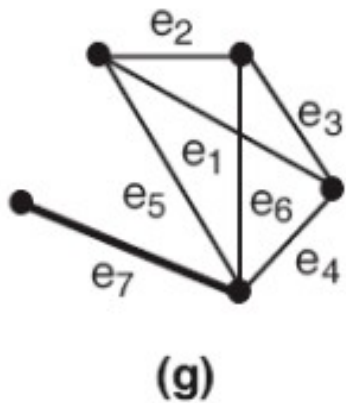
- E se fosse adicionada a aresta e_7 ?

Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e_7 ?
- Existem 4 possibilidades:

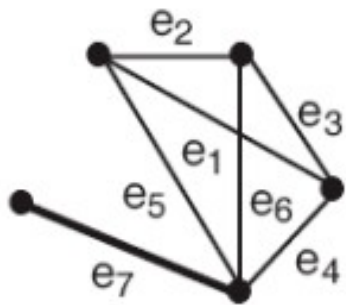
Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e7?
- Existem 4 possibilidades:

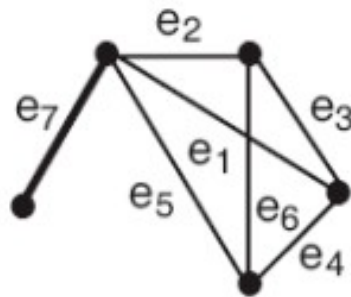


Exemplo

- E se fosse adicionada a aresta e7?
- Existem 4 possibilidades:



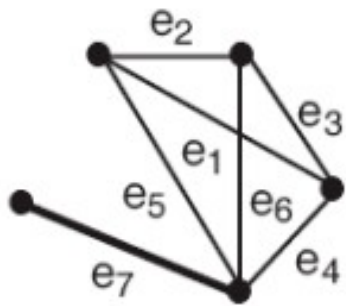
(g)



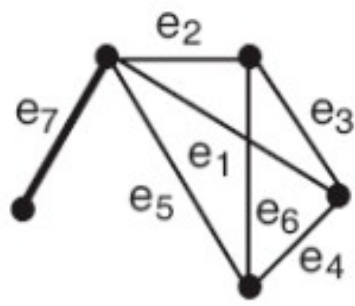
(h)

Exemplo

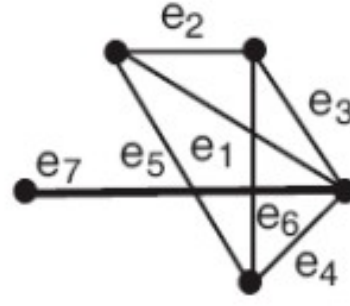
- E se fosse adicionada a aresta e7?
- Existem 4 possibilidades:



(g)



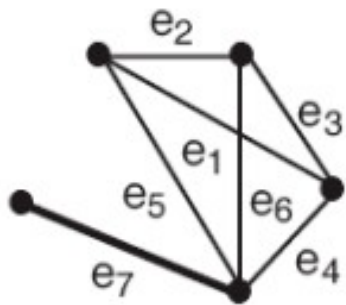
(h)



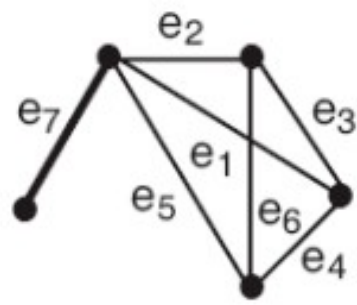
(i)

Exemplo

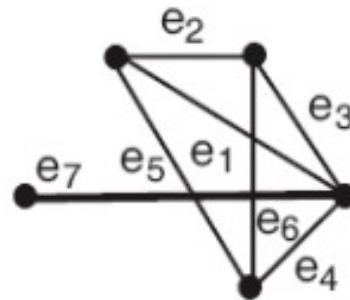
- E se fosse adicionada a aresta e7?
- Existem 4 possibilidades:



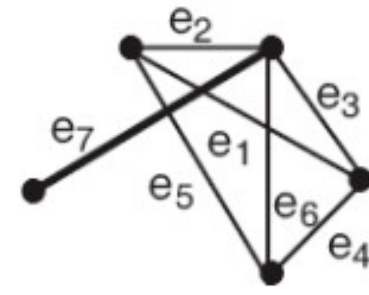
(g)



(h)



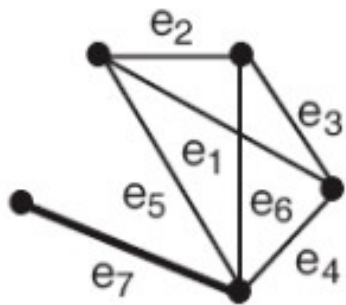
(i)



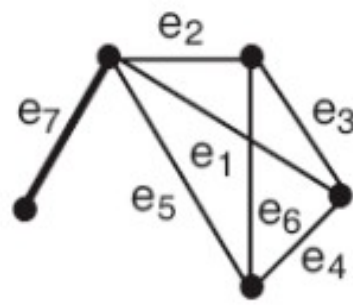
(j)

Exemplo

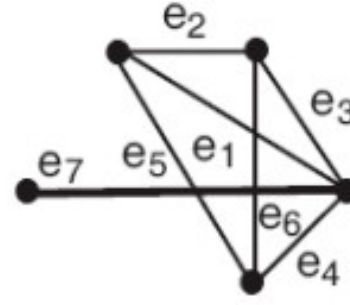
- E se fosse adicionada a aresta e7?
- Existem 4 possibilidades:



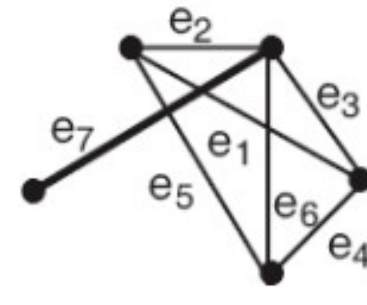
(g)



(h)



(i)



(j)

- Qualquer que seja a posição da nova aresta, o resultado final é um grafo conexo.

CONCEITOS SUBJACENTES



Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.10**
 - Seja $G = (V,E)$ um grafo.

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.10**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- Para quaisquer dois vértices u e v conectados por um caminho em G , a distância entre u e v , denotada por $d(u, v)$, é definida como o comprimento do caminho mais curto entre u e v .

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.10**

- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- Para quaisquer dois vértices u e v conectados por um caminho em G , a distância entre u e v , denotada por $d(u,v)$, é definida como o comprimento do caminho mais curto entre u e v .
- Se não existe caminho entre u e v , define-se a distância $d(u,v) = \infty$.

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.11**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo conectado.

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.11**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo conectado.
- (1) Para cada $v \in V$, a **excentricidade** de v , denotada por $\text{exc}(v)$ é definida como: $\text{exc}(v) = \max\{d(u, v) \mid u \in V, u \neq v\}$

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.11**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo conectado.
- (1) Para cada $v \in V$, a **excentricidade** de v , denotada por $\text{exc}(v)$ é definida como: $\text{exc}(v) = \max\{d(u, v) \mid u \in V, u \neq v\}$
- (2) O **raio** de G , denotado por $\text{raio}(G)$, é definido por: $\text{raio}(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}$

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.11**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo conectado.
- (1) Para cada $v \in V$, a **excentricidade** de v , denotada por $\text{exc}(v)$ é definida como: $\text{exc}(v) = \max\{d(u, v) \mid u \in V, u \neq v\}$
- (2) O **raio** de G , denotado por $\text{raio}(G)$, é definido por: $\text{raio}(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}$
- (3) O **diâmetro** de G , denotado por $\text{diâmetro}(G)$, é definido como: $\text{diâmetro}(G) = \max\{e(v) \mid v \in V\}$. Assim, $\text{diâmetro}(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V\}$.

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.11**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo conectado.
- (1) Para cada $v \in V$, a **excentricidade** de v , denotada por $\text{exc}(v)$ é definida como: $\text{exc}(v) = \max\{d(u, v) \mid u \in V, u \neq v\}$
- (2) O **raio** de G , denotado por $\text{raio}(G)$, é definido por: $\text{raio}(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}$
- (3) O **diâmetro** de G , denotado por $\text{diâmetro}(G)$, é definido como: $\text{diâmetro}(G) = \max\{e(v) \mid v \in V\}$. Assim, $\text{diâmetro}(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V\}$.
- (4) Um vértice $v \in V$ é um vértice central de G se sua excentricidade for igual ao raio de G .

Conceitos Subjacentes

- **Definição 4.11**

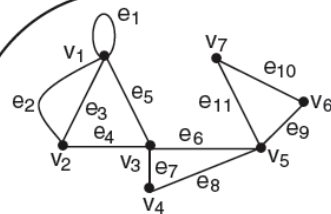
- Seja $G = (V, E)$ um grafo conectado.
- (1) Para cada $v \in V$, a **excentricidade** de v , denotada por $\text{exc}(v)$ é definida como: $\text{exc}(v) = \max\{d(u, v) \mid u \in V, u \neq v\}$
- (2) O **raio** de G , denotado por $\text{raio}(G)$, é definido por: $\text{raio}(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}$
- (3) O **diâmetro** de G , denotado por $\text{diâmetro}(G)$, é definido como: $\text{diâmetro}(G) = \max\{e(v) \mid v \in V\}$. Assim, $\text{diâmetro}(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V\}$.
- (4) Um vértice $v \in V$ é um vértice central de G se sua excentricidade for igual ao raio de G .
- (5) O **centro** de um grafo (i.e., $\text{centro}(G)$) é o conjunto de todos os vértices centrais de G .

Exercícios

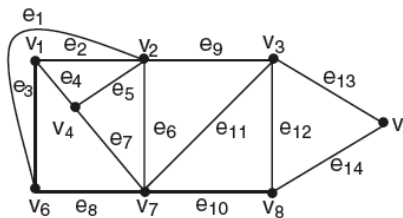
- Qual é a diferença entre caminho e trilha? Desenhe um exemplo de cada que mostre a diferença.
- Dado um grafo G com n vértices. Qual é o número mínimo de arestas para que ele seja conexo?

Exercícios

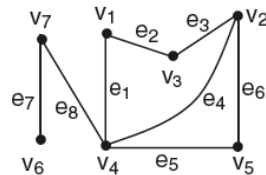
- Para cada um dos grafos a seguir, dê três exemplos de passeios, trilhas e caminhos.



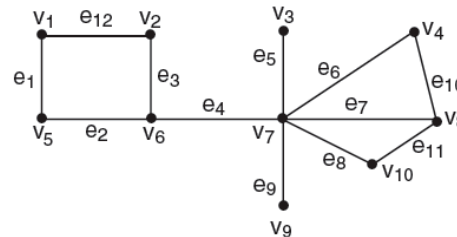
(a)



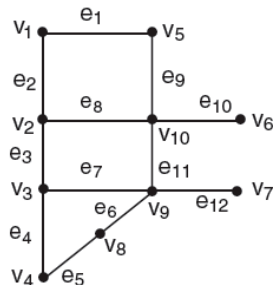
(b)



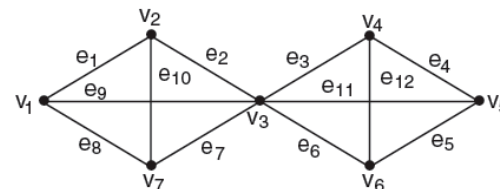
(c)



(d)



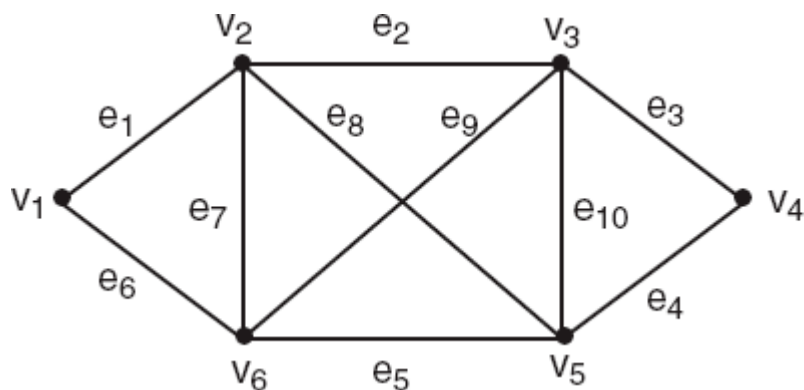
(e)



(f)

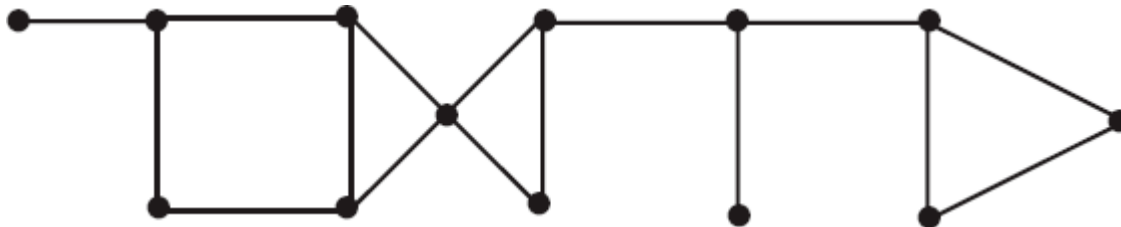
Exercícios

- Encontre, para o grafo a seguir:
 - quatro caminhos diferentes de v_1 a v_4 .
 - quatro diferentes trilhas de v_1 a v_4 , que não sejam caminhos.
 - quatro diferentes passeios de v_1 a v_4 , que não sejam trilhas.



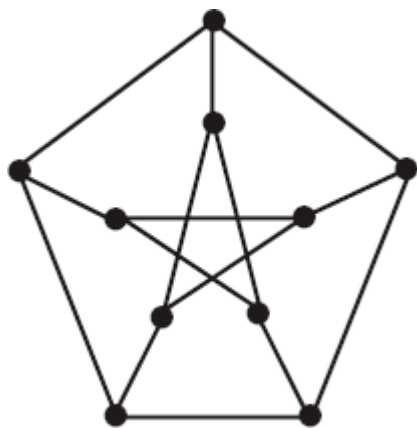
Exercícios

- Considere o grafo abaixo:
 - encontre um passeio fechado de comprimento 6. Seu passeio é uma trilha?
 - encontre um passeio aberto de comprimento 12. Seu passeio é um caminho?
 - encontre uma trilha fechada de comprimento 6. Sua trilha é um ciclo?
 - qual o comprimento do mais longo ciclo em G ?
 - qual o comprimento do caminho mais longo em G ? Quantos caminhos em G têm esse comprimento?



Exercícios

- No grafo de Petersen a seguir:
 - Encontre uma trilha de comprimento 5.
 - Encontre um caminho de comprimento 9.
 - Encontre ciclos de comprimentos 5, 6, 8 e 9.



Exercícios

- Mostre que não é possível ter um grupo de sete pessoas tal que cada pessoa no grupo conhece exatamente três outras pessoas no grupo.

Exercícios

- Encontre o diâmetro do grafo a seguir.

