Teoria dos Grafos

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE GRAFOS

Prof. Tiago Eugenio de Melo
tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

Observações

- As definições e teorias apresentadas aqui foram baseadas no livro *Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação* (LTC, 2018).

Observações

- As definições e teorias apresentadas aqui foram baseadas no livro *Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação* (LTC, 2018).
- A numeração das definições e teoremas seguem as mesmas referências adotadas no livro para facilitar a localização.

CONCEITOS INICIAIS

Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- Existem muitas maneiras de se representar grafos com o objetivo de tratá-los computacionalmente.

Conceitos Iniciais

- Existem muitas maneiras de se representar grafos com o objetivo de tratá-los computacionalmente.
- Principais formas:

Conceitos Iniciais

- Existem muitas maneiras de se representar grafos com o objetivo de tratá-los computacionalmente.
- Principais formas:
  - Matriz de adjacência.

Conceitos Iniciais

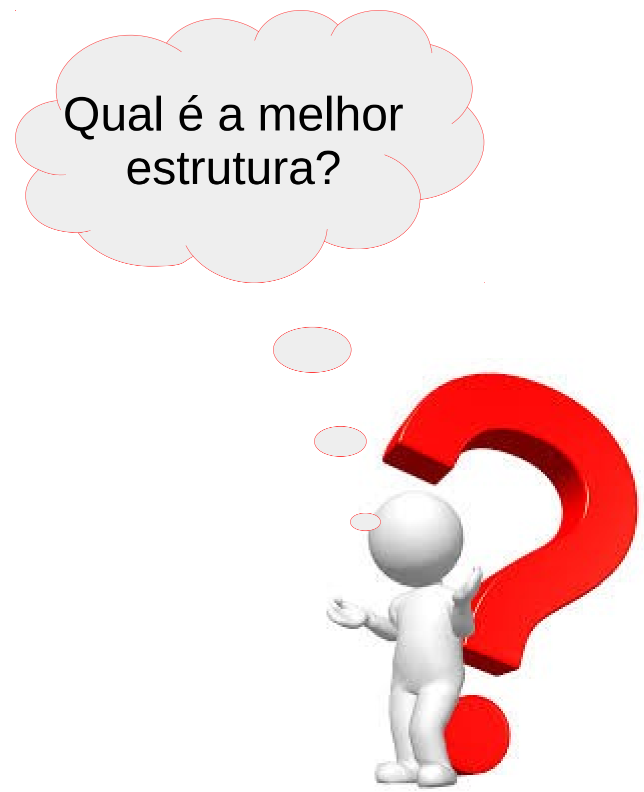
- Existem muitas maneiras de se representar grafos com o objetivo de tratá-los computacionalmente.
- Principais formas:
  - Matriz de adjacência.
  - Matriz de incidência.

Conceitos Iniciais

- Existem muitas maneiras de se representar grafos com o objetivo de tratá-los computacionalmente.
- Principais formas:
  - Matriz de adjacência.
  - Matriz de incidência.
  - Listas de adjacência.

Conceitos Iniciais

- Existem muitas maneiras de se representar grafos com o objetivo de tratá-los computacionalmente.
- Principais formas:
  - Matriz de adjacência.
  - Matriz de incidência.
  - Listas de adjacência.



Representação – Matriz de Adjacência

Representação – Matriz de Adjacência

- A ideia é associar **vértices** a linhas e colunas da matriz.

Representação – Matriz de Adjacência

- A ideia é associar **vértices** a <u>linhas e colunas</u> da matriz.
- **Definição 5.1**

Representação – Matriz de Adjacência

- A ideia é associar **vértices** a linhas e colunas da matriz.
- **Definição 5.1**
  - Seja G = (V,E) um grafo com n vértices nomeados de v1, v2, ..., vn.

Representação – Matriz de Adjacência

- A ideia é associar **vértices** a <u>linhas e colunas</u> da matriz.
- **Definição 5.1**
  - Seja G = (V,E) um grafo com n vértices nomeados de $v_1, v_2, ..., v_n$.
  - A matriz de adjacência de G, com relação a essa particular nomeação dos n vértices de G, é a matriz quadrada $n \times n$, $A(G) = (a_{ij})$, em que a posição (i,j) na matriz − a_{ij} − é o número de arestas que unem o vértice v_i ao vértice v_j.

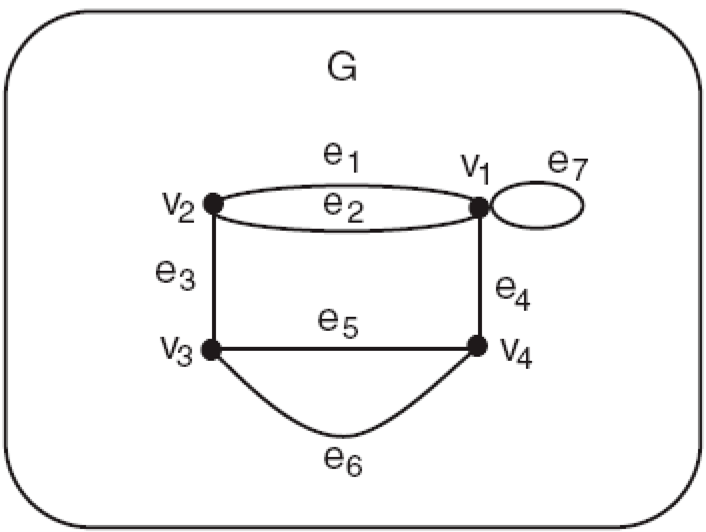
Representação – Matriz de Adjacência

Representação – Matriz de Adjacência

- Considere o grafo G da figura abaixo, cujos vértices são nomeados v1, v2, v3 e v4, como mostra a figura.

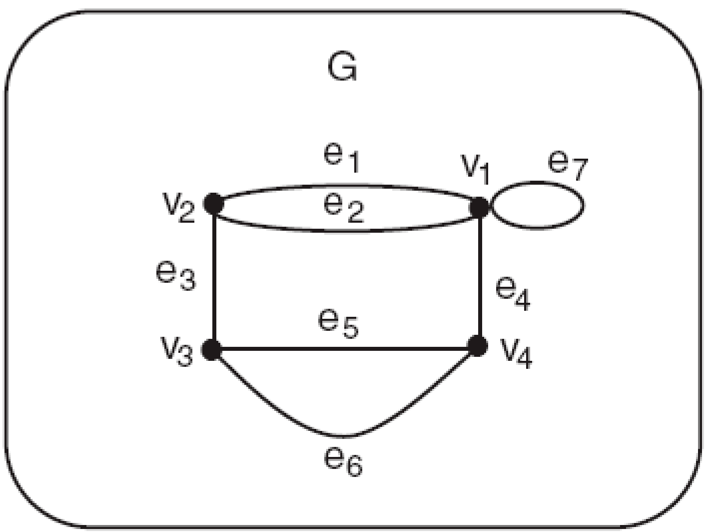
Representação – Matriz de Adjacência

- Considere o grafo G da figura abaixo, cujos vértices são nomeados v1, v2, v3 e v4, como mostra a figura.



Representação – Matriz de Adjacência

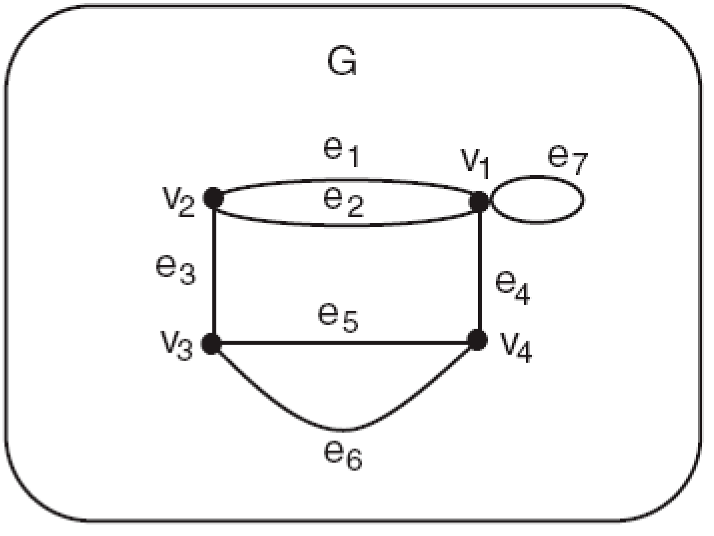
- Considere o grafo G da figura abaixo, cujos vértices são nomeados v1, v2, v3 e v4, como mostra a figura.



Grafo G com 4 vértices e 7 arestas.

Representação – Matriz de Adjacência

- Considere o grafo G da figura abaixo, cujos vértices são nomeados v1, v2, v3 e v4, como mostra a figura.

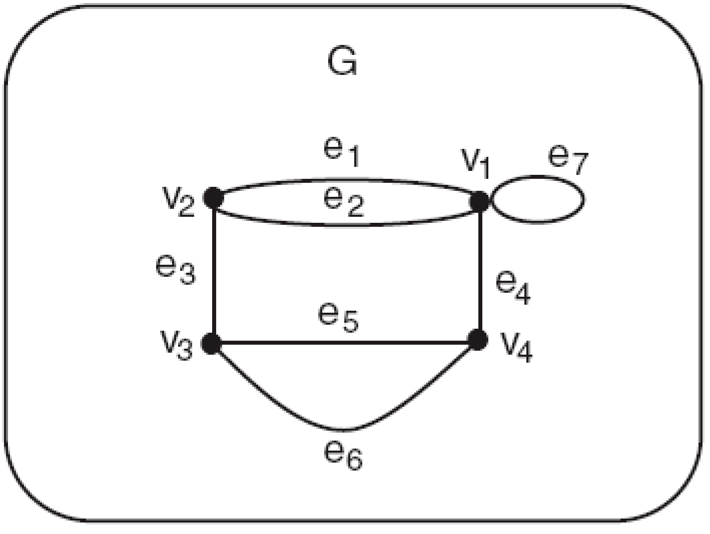


$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Grafo G com 4 vértices e 7 arestas.

Representação – Matriz de Adjacência

- Considere o grafo G da figura abaixo, cujos vértices são nomeados v1, v2, v3 e v4, como mostra a figura.



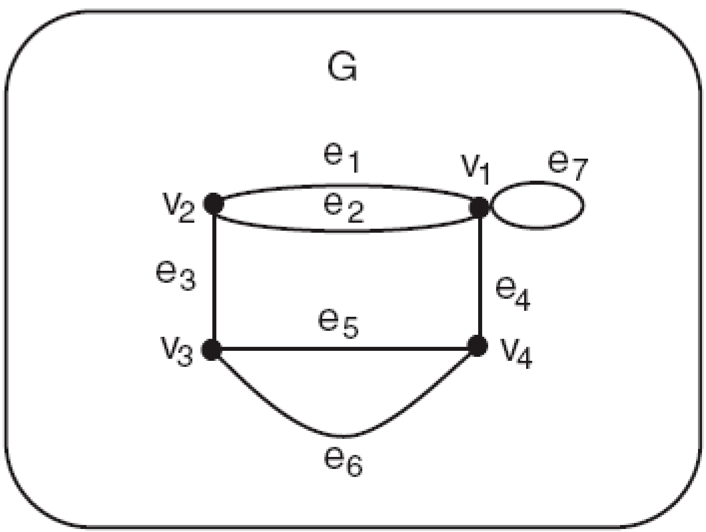
Grafo G com 4 vértices e 7 arestas.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de adjacência de G.

Representação – Matriz de Adjacência

- Considere o grafo G da figura abaixo, cujos vértices são nomeados v1, v2, v3 e v4, como mostra a figura.



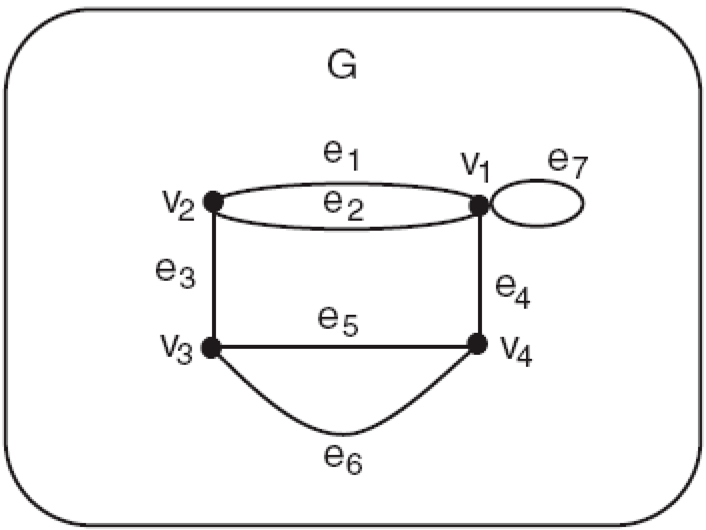
Grafo G com 4 vértices e 7 arestas.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de adjacência de G.

Representação – Matriz de Adjacência

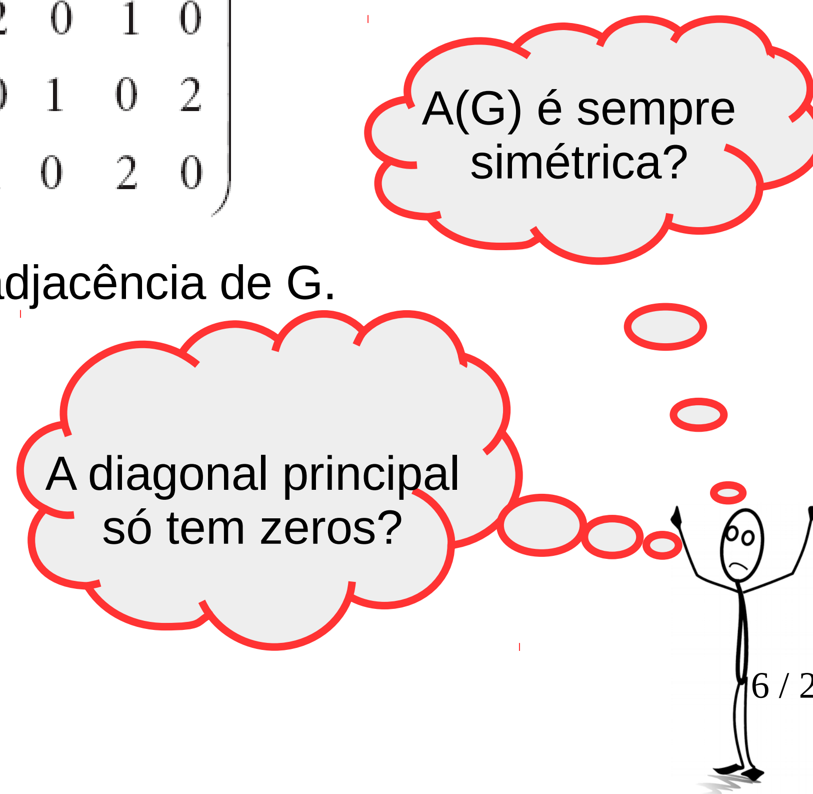
- Considere o grafo G da figura abaixo, cujos vértices são nomeados v1, v2, v3 e v4, como mostra a figura.



Grafo G com 4 vértices e 7 arestas.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de adjacência de G.



Representação – Matriz de Incidência

Representação – Matriz de Incidência

- A ideia é associar **vértices** a linhas e **arestas** a colunas.

Representação – Matriz de Incidência

- A ideia é associar **vértices** a linhas e **arestas** a colunas.
- **Definição 5.2**

Representação – Matriz de Incidência

- A ideia é associar **vértices** a linhas e **arestas** a colunas.
- **Definição 5.2**
  - Seja G = (V,E) um grafo com n vértices nomeados v1, v2, ..., vn e m arestas, nomeadas e1, e2, ..., em.

Representação – Matriz de Incidência

- A ideia é associar **vértices** a linhas e **arestas** a colunas.
- **Definição 5.2**
  - Seja G = (V,E) um grafo com n vértices nomeados v1, v2, ..., vn e m arestas, nomeadas e1, e2, ..., em.
  - A matriz de incidência de G, com relação a essa particular nomeação de vértices e de arestas de G é a matriz n × m M(G) = (mij), em que mij é o número de vezes que o vértice vi é incidente com a aresta ej, ou seja,

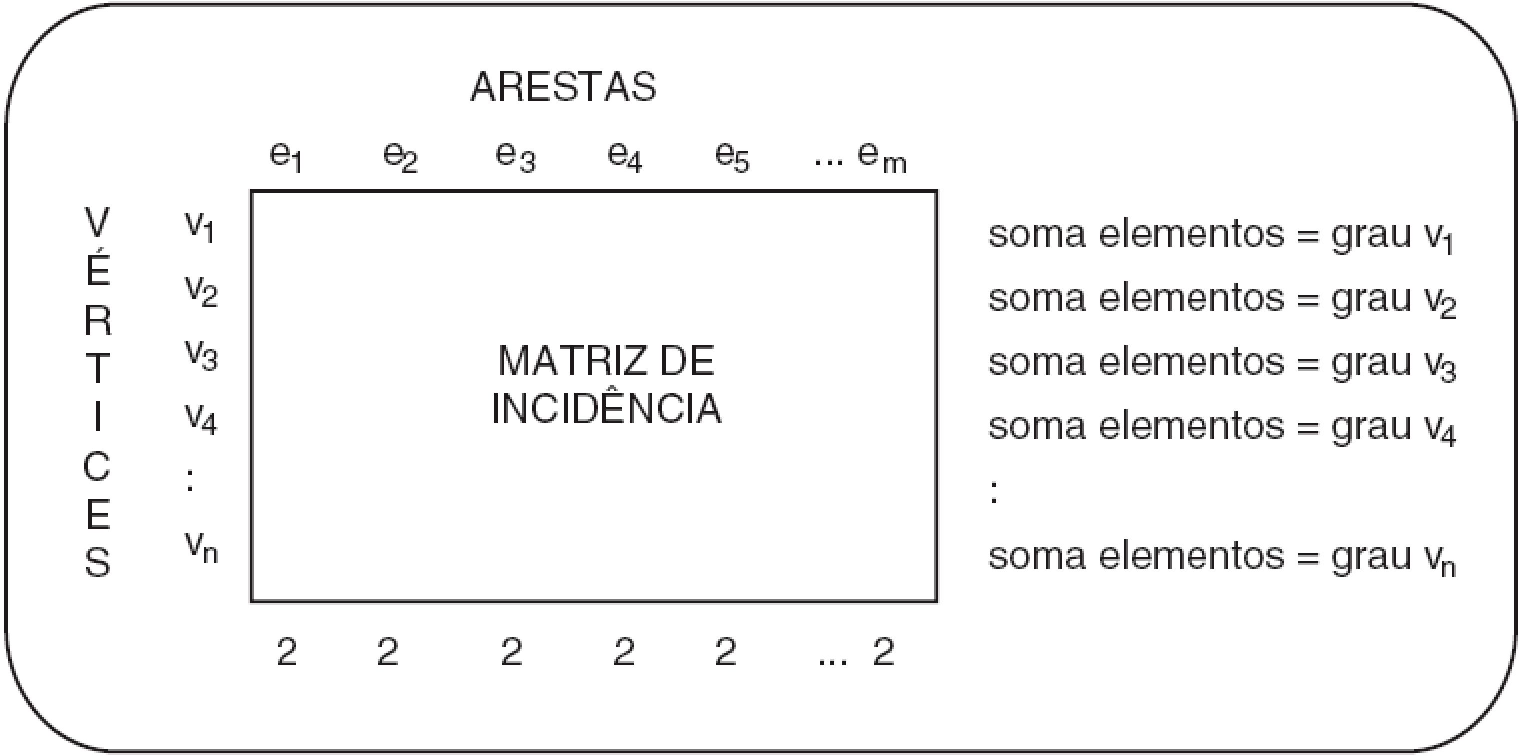
Representação – Matriz de Incidência

- A ideia é associar **vértices** a linhas e **arestas** a colunas.
- **Definição 5.2**
  - Seja G = (V,E) um grafo com n vértices nomeados v1, v2, ..., vn e m arestas, nomeadas e1, e2, ..., em.
  - A matriz de incidência de G, com relação a essa particular nomeação de vértices e de arestas de G é a matriz n × m M(G) = (mij), em que mij é o número de vezes que o vértice vi é incidente com a aresta ej, ou seja,

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } v_i \text{ não for uma extremidade de } e_j \\ 1 \text{ se } v_i \text{ for uma extremidade de uma aresta não} - \text{loop } e_j \\ 2 \text{ se } v_i \text{ for uma extremidade de um loop } e_j \end{cases}$$

Representação – Matriz de Incidência

- Esquema geral da matriz de incidência (n × m) de um grafo com n vértices e m arestas:

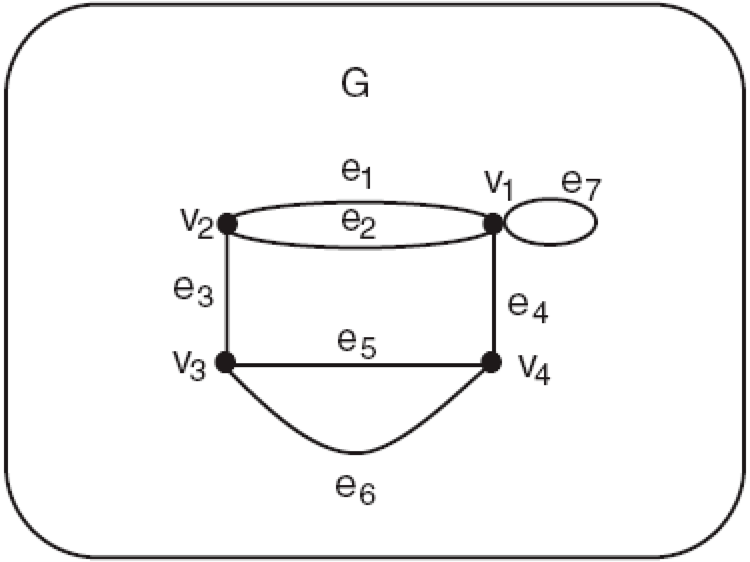


Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:

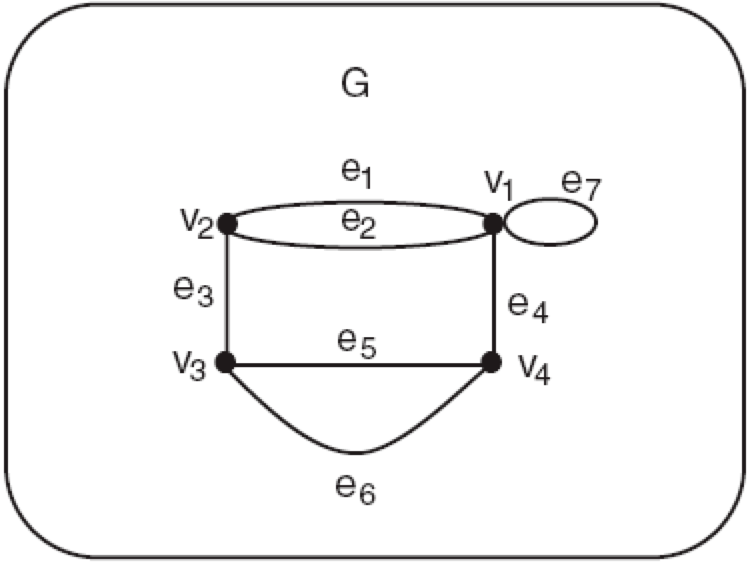
Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:



Representação – Matriz de Incidência

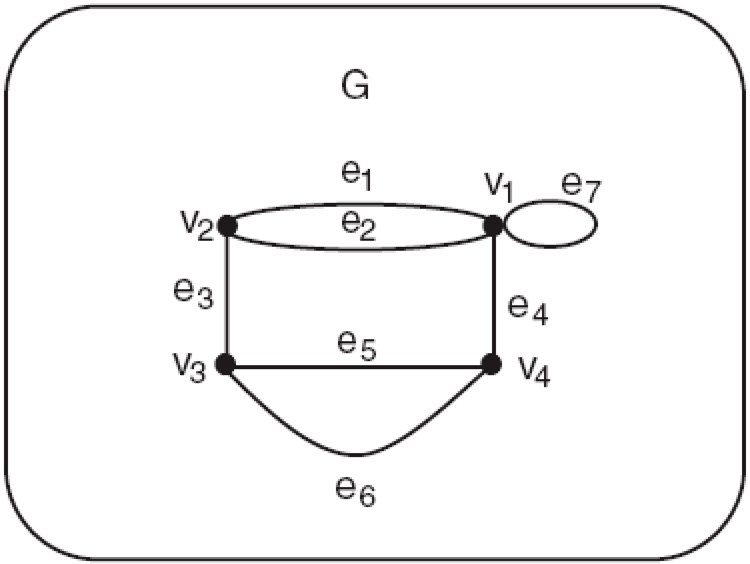
- Exemplo:



$$M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{grau de } v_1 = 5 \\ \text{grau de } v_2 = 3 \\ \text{grau de } v_3 = 3 \\ \text{grau de } v_4 = 3 \end{matrix}$$

Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:

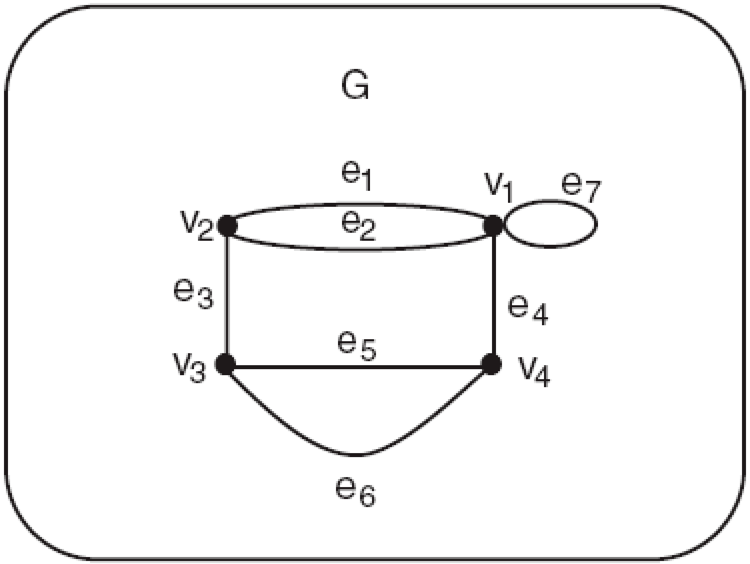


$$M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} \text{grau de } v_1 = 5 \\ \text{grau de } v_2 = 3 \\ \text{grau de } v_3 = 3 \\ \text{grau de } v_4 = 3 \end{matrix} \right.$$

A soma dos elementos na i-ésima linha de M(G) dá o grau do vértice vi.

Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:



$$M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \text{grau de } v_1 = 5 \\ \text{grau de } v_2 = 3 \\ \text{grau de } v_3 = 3 \\ \text{grau de } v_4 = 3 \end{Bmatrix}$$

A soma dos elementos na i-ésima linha de M(G) dá o grau do vértice vi.

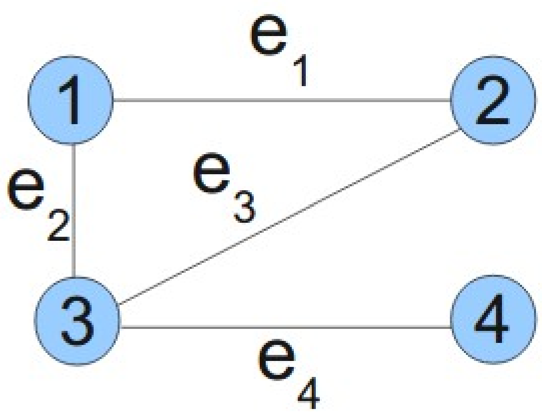
A soma dos elementos de cada coluna corresponde às duas extremidades da aresta que a coluna representa.

Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:

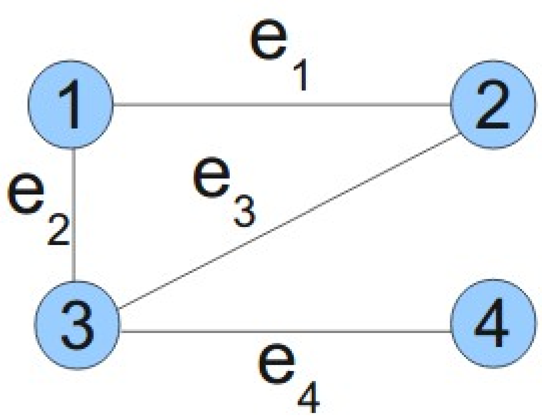
Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:



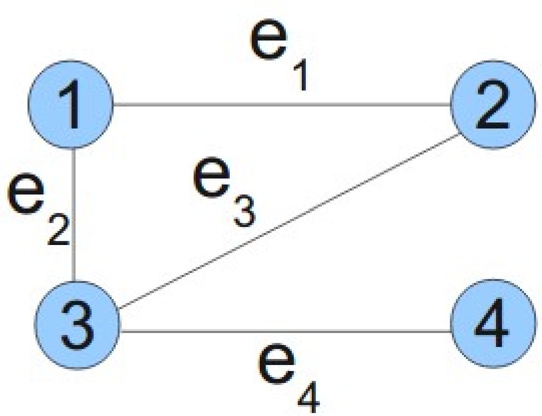
Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:



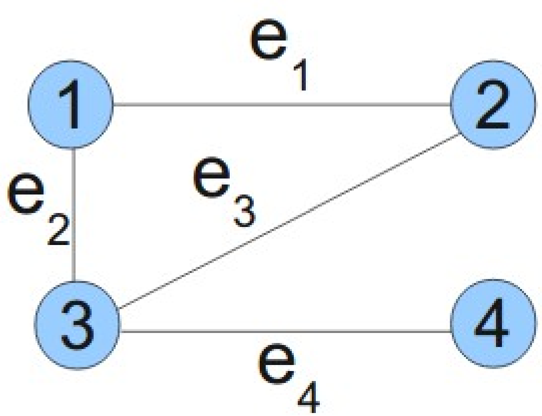
Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:



Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:



	e_1	e_2	e_3	e_4
1	1	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	1	1
4	0	0	0	1

Comentários

Comentários

- Considere um grafo com muitos vértices e poucas arestas.

Comentários

- Considere um grafo com muitos vértices e poucas arestas.
- A matriz seria formada principalmente por zeros!

Comentários

- Considere um grafo com muitos vértices e poucas arestas.
- A matriz seria formada principalmente por zeros!
- Grande desperdício de memória.

Comentários

- Considere um grafo com muitos vértices e poucas arestas.
- A matriz seria formada principalmente por zeros!
- Grande desperdício de memória.
- Qual seria a alternativa?

Representação – Listas de Adjacência

Representação – Listas de Adjacência

- A ideia é associar a cada vértice uma lista de vértices adjacentes.

Representação – Listas de Adjacência

- A ideia é associar a cada vértice uma lista de vértices adjacentes.
- Lista de adjacência

Representação – Listas de Adjacência

- A ideia é associar a cada vértice uma lista de vértices adjacentes.
- Lista de adjacência
  - Vértices estarão associados a um *array* de dimensão n (número de vértices do grafo).

Representação – Listas de Adjacência

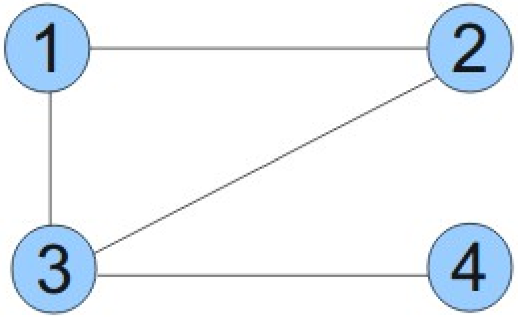
- A ideia é associar a cada vértice uma lista de vértices adjacentes.
- Lista de adjacência
  - Vértices estarão associados a um *array* de dimensão n (número de vértices do grafo).
  - Cada vértice possui uma lista de vértices adjacentes.

Representação – Listas de Adjacência

- Exemplo:

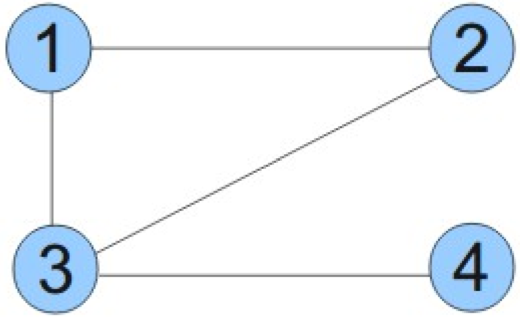
Representação – Listas de Adjacência

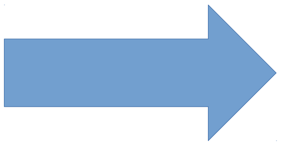
- Exemplo:



Representação – Listas de Adjacência

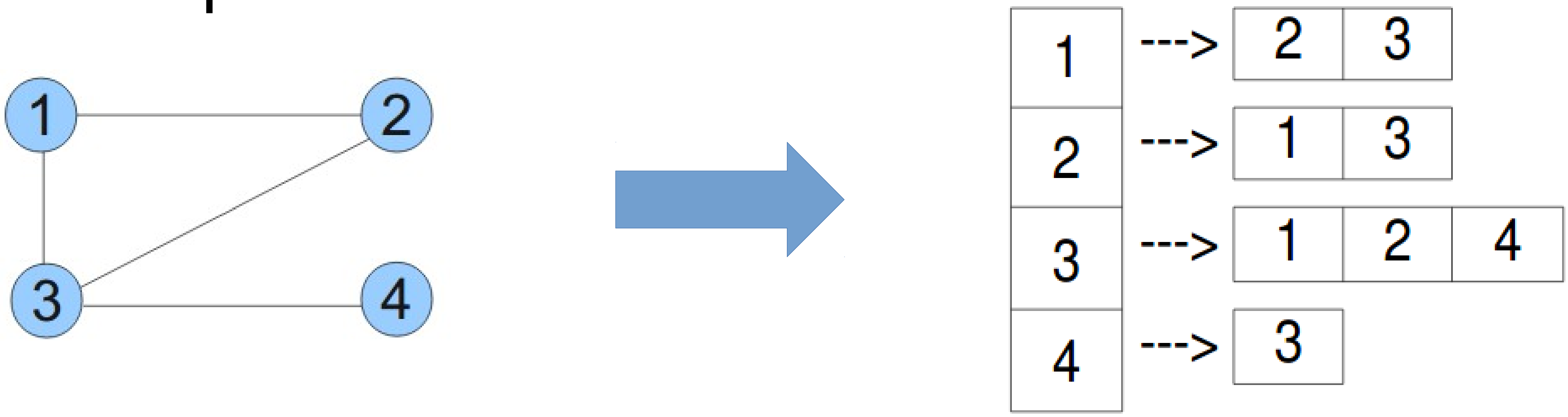
- Exemplo:





Representação – Listas de Adjacência

- Exemplo:



Comentários

Comentários

- Considere um grafo cujos vértices possuem um grande número de vizinhos.

Comentários

- Considere um grafo cujos vértices possuem um grande número de vizinhos.
- Qual seria o problema?

Comentários

- Considere um grafo cujos vértices possuem um grande número de vizinhos.
- Qual seria o problema?
  - As listas serão muito grandes (longas).

Comparação das estruturas

Tempo de execução	**Matriz**	**Lista**
Inserção de aresta	O(1)	O(1)
Remoção de aresta	O(1)	O(g’)
Teste da adjacência	O(1)	O(g’)
Listar os vizinhos de v	O(N*)	O(1)

Exercícios

- A representação matricial de grafos sempre terá a diagonal principal com valores 0 (zero)? Justifique a sua resposta.
- Qual seria o pior caso de representação de grafos através de listas de adjacências? Dê um exemplo.
- Compare a tarefa de remoção de arestas e vértices nas estruturas de matriz de adjacência e listas de adjacência em termos de desempenho.

Exercícios

- Faça o desenho do grafo da matriz de adjacência abaixo:

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	1	0	1	0	1
3	1	1	0	1	0
4	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0

Exercícios

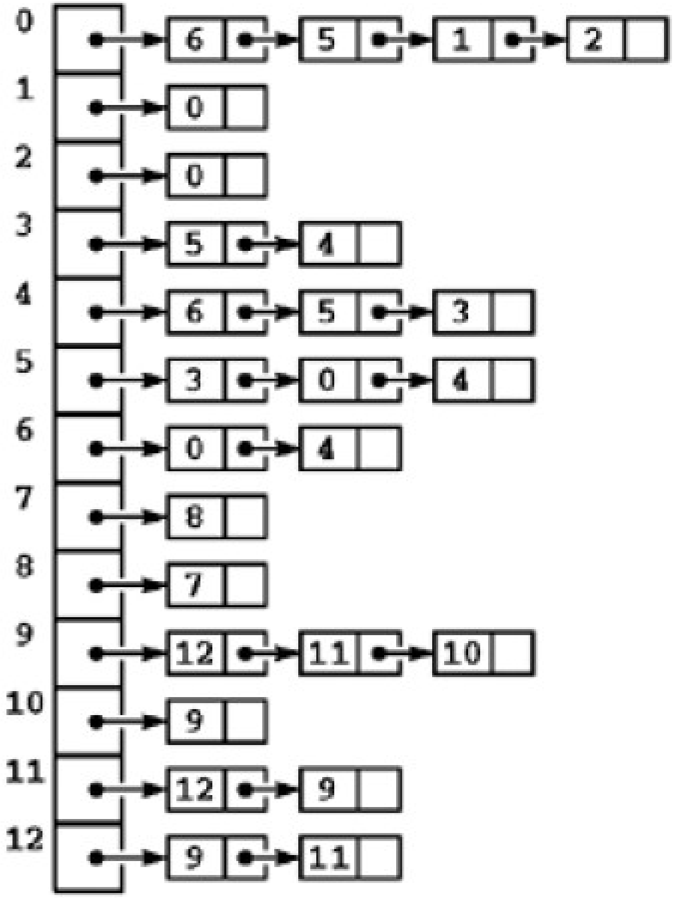
- Os Turistas Jensen, Leuzingner, Dufour e Medeiros se encontram em um bar de Paris e começam a conversar. As línguas disponíveis são o inglês, o francês, o português e o alemão. Jensen fala todas. Leuzingner não fala apenas o português. Dufour fala francês e alemão. Medeiros fala inglês e português. Represente por meio de um grafo todas as possibilidades de um deles dirigir a palavra a outro, sendo compreendido.

Exercícios

- Você usaria uma lista de adjacência ou uma matriz de adjacência em cada um dos casos abaixo? Justifique sua escolha.
  - a) O grafo tem 10.000 vértices e 20.000 arestas e é importante usar tão pouco espaço quanto possível.
  - b) O grafo tem 10.000 vértices e 20.000.000 arestas, e é importante usar tão pouco espaço quanto possível.
  - c) Você deve ter a aresta adjacente tão rápido quanto possível, sem se importar quanto espaço você usa.

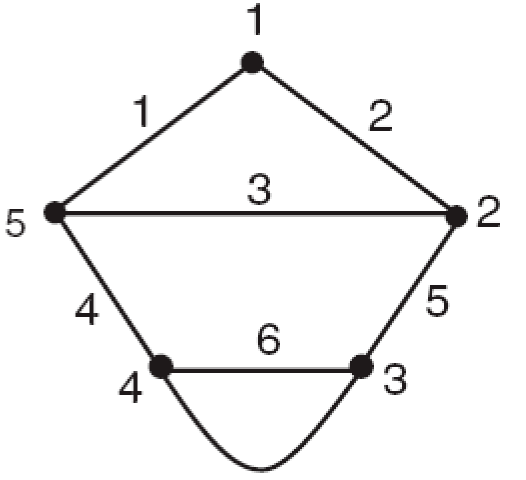
Exercícios

- Desenhe o grafo representado pela lista de adjacências abaixo:



Exercícios

- Constru a matriz de adjacência e de incidência do grafo mostrado a seguir:



- Desenhe um grafo cuja matriz de incidência é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercícios

- Se G é um grafo sem loops, o que você pode dizer sobre a soma das entradas em:
  - qualquer linha ou coluna da matriz de adjacência de G?
  - qualquer linha da matriz de incidência de G?
  - qualquer coluna da matriz de incidência de G?
- Se um grafo tem vértices de graus 1,2,3,3,4,5, quantas arestas ele tem? Justifique sua resposta.
- Pode um grafo ter vértices com graus 2,2,3,4,5,5,6,8 e nenhum outro vértice? Justifique sua resposta.

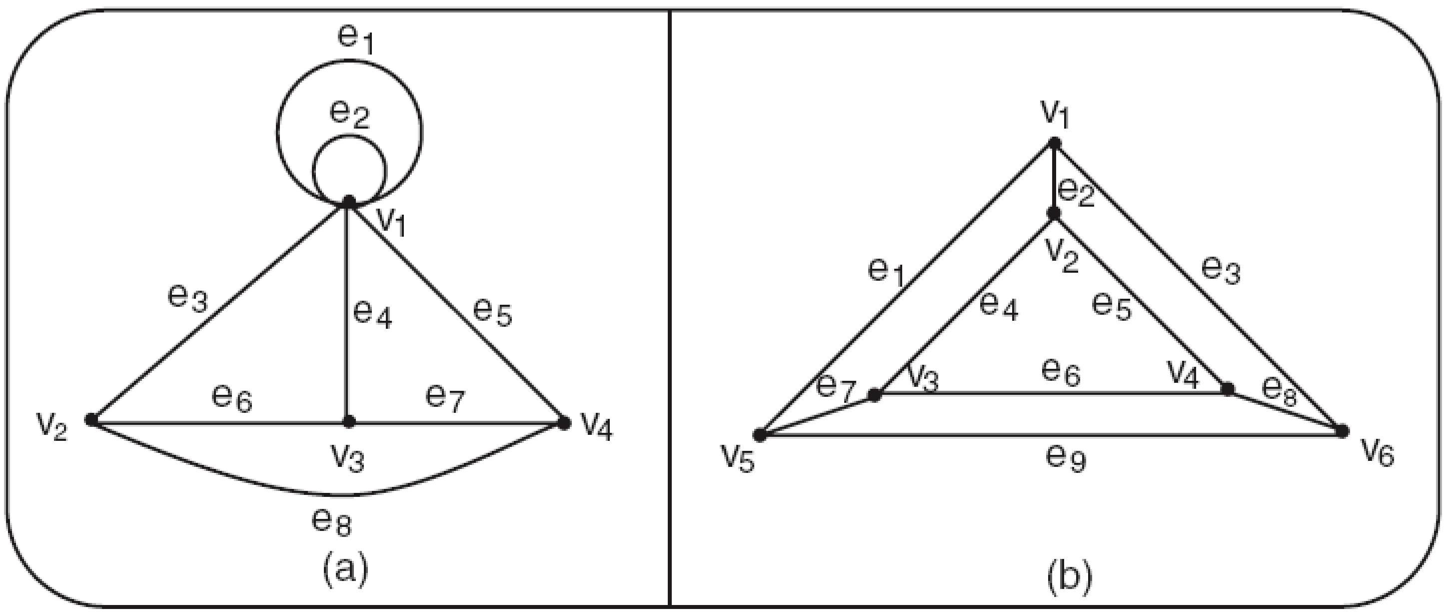
Exercícios

- Desenhe cada um dos grafos com as seguintes matrizes de adjacência:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercícios

- Escreva a matriz de adjacência e a matriz de incidência para os grafos mostrados em (a) e (b) a seguir, usando as ordenações de vértices e arestas dadas.



Exercícios

- Por que em uma matriz de adjacências verificar a existência de uma aresta é O(1)?
- Qual estrutura usa mais espaço, lista de adjacências ou matriz de adjacências? Justique a sua resposta.