

Algoritmos e Estruturas de Dados I

Árvores B

Prof. Tiago Eugenio de Melo

tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

- As palavras com a fonte `Courier` indicam uma palavra-reservada da linguagem de programação.

Árvores B

Introdução

Introdução

- Árvore B é uma generalização da árvore binária de busca.

Introdução

- Árvore B é uma generalização da árvore binária de busca.
- É bem adaptada para sistemas de armazenamento que leem e escrevem blocos de dados relativamente grandes (ex: HD).

Introdução

- Árvore B é uma generalização da árvore binária de busca.
- É bem adaptada para sistemas de armazenamento que leem e escrevem blocos de dados relativamente grandes (ex: HD).
- Elas foram projetadas para funcionar com dados armazenados em memória secundária.

Introdução

- Árvore B é uma generalização da árvore binária de busca.
- É bem adaptada para sistemas de armazenamento que leem e escrevem blocos de dados relativamente grandes (ex: HD).
- Elas foram projetadas para funcionar com dados armazenados em memória secundária.
- Árvores B são árvores de busca balanceadas com altura = $O(\log n)$ no pior caso.

Introdução

- Árvore B é uma generalização da árvore binária de busca.
- É bem adaptada para sistemas de armazenamento que leem e escrevem blocos de dados relativamente grandes (ex: HD).
- Elas foram projetadas para funcionar com dados armazenados em memória secundária.
- Árvores B são árvores de busca balanceadas com altura = $O(\log n)$ no pior caso.
- É normalmente usada em banco de dados e sistemas de arquivos.

Introdução

- Árvore B é uma generalização da árvore binária de busca.
- É bem adaptada para sistemas de armazenamento que leem e escrevem blocos de dados relativamente grandes (ex: HD).
- Elas foram projetadas para funcionar com dados armazenados em memória secundária.
- Árvores B são árvores de busca balanceadas com altura = $O(\log n)$ no pior caso.
- É normalmente usada em banco de dados e sistemas de arquivos.
- São semelhantes às árvores rubro-negras, mas são melhores para minimizar as operações de E/S de disco.

Introdução

Introdução

- Muitos sistemas de banco de dados usam árvores B e suas variações para armazenamento de dados.

Introdução

- Muitos sistemas de banco de dados usam árvores B e suas variações para armazenamento de dados.
 - A razão é que suas operações são realizadas em tempo logarítmico.

Introdução

- Muitos sistemas de banco de dados usam árvores B e suas variações para armazenamento de dados.
 - A razão é que suas operações são realizadas em tempo logarítmico.
- Foi inventada por Rudolf Bayer e Edwards Meyers em 1971 enquanto trabalhavam na *Boeing Scientific Research Labs*.

Introdução

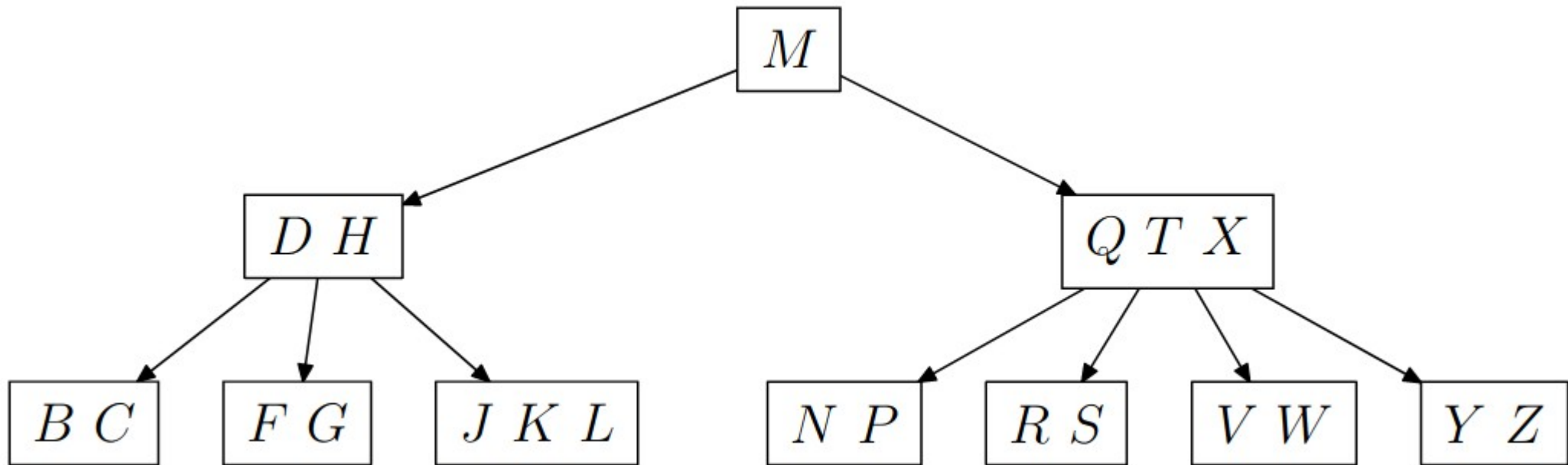
Introdução

- Árvores B são uma generalização das árvores binárias de busca, pois cada nó de uma árvore binária armazena uma única chave de busca, enquanto as **árvores B armazenam um número maior do que um de chaves de busca em cada nó.**

Introdução

- Árvores B são uma generalização das árvores binárias de busca, pois cada nó de uma árvore binária armazena uma única chave de busca, enquanto as **árvores B armazenam um número maior do que um de chaves de busca em cada nó.**
- Comumente, usamos o termo página para representar nó da árvore.

Exemplo

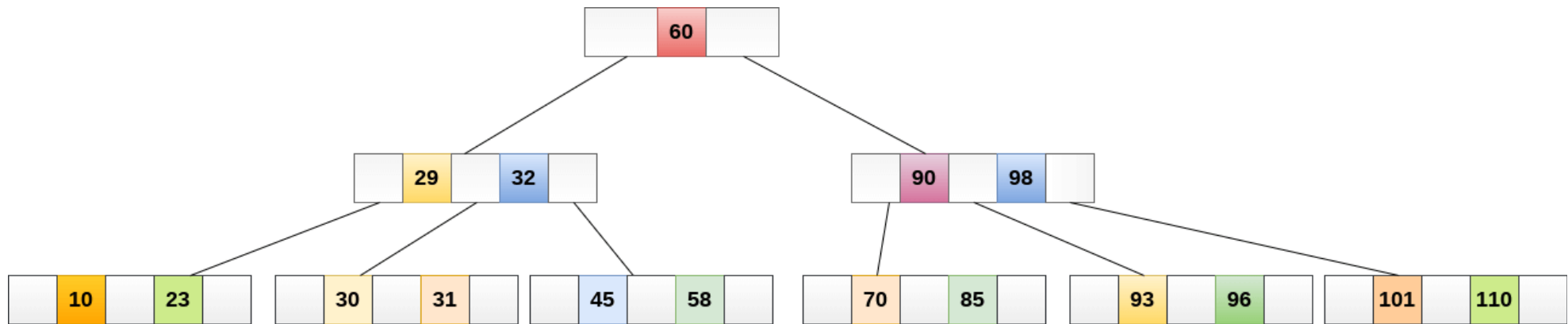


Definições

- Um nó (ou página) é geralmente representada por um conjunto de elementos apontando para os seus filhos.

Definições

- Um nó (ou página) é geralmente representada por um conjunto de elementos apontando para os seus filhos.



Definições

Definições

- Ordem

Definições

- Ordem
 - A literatura não é uniforme no uso e definição dos termos.

Definições

- Ordem
 - A literatura não é uniforme no uso e definição dos termos.
 - É o número mínimo de chaves que podem estar em uma página da árvore Cormen (1979).

Definições

- Ordem
 - A literatura não é uniforme no uso e definição dos termos.
 - É o número mínimo de chaves que podem estar em uma página da árvore Cormen (1979).
 - É a quantidade de elementos que a página pode suportar.

Definições

- Ordem
 - A literatura não é uniforme no uso e definição dos termos.
 - É o número mínimo de chaves que podem estar em uma página da árvore Cormen (1979).
 - É a quantidade de elementos que a página pode suportar.

ou

Definições

- Ordem

- A literatura não é uniforme no uso e definição dos termos.
- É o número mínimo de chaves que podem estar em uma página da árvore Cormen (1979).
- É a quantidade de elementos que a página pode suportar.

ou

- Número máximo de descendentes que uma página pode ter Knuth (1973).

Definições

- Ordem

- A literatura não é uniforme no uso e definição dos termos.
- É o número mínimo de chaves que podem estar em uma página da árvore Cormen (1979).
- É a quantidade de elementos que a página pode suportar.

ou

- Número máximo de descendentes que uma página pode ter Knuth (1973).
- É a quantidade de campos apontadores.

Definições

Definições

- Todo nó da árvore tem um mínimo de elementos definido pela metade da ordem.

Definições

- Todo nó da árvore tem um mínimo de elementos definido pela metade da ordem.
 - Exceção é a raiz da árvore.

Definições

- Todo nó da árvore tem um mínimo de elementos definido pela metade da ordem.
 - Exceção é a raiz da árvore.
 - Exemplo: uma árvore de ordem 5 pode ter no mínimo $5/2$ elementos, ou seja, 2 elementos.

Definições

- Todo nó da árvore tem um mínimo de elementos definido pela metade da ordem.
 - Exceção é a raiz da árvore.
 - Exemplo: uma árvore de ordem 5 pode ter no mínimo $5/2$ elementos, ou seja, 2 elementos.
- A quantidade de filhos que um nó pode ter é sempre a quantidade de elementos do nó mais 1 ($V + 1$).

Definições

- Todo nó da árvore tem um mínimo de elementos definido pela metade da ordem.
 - Exceção é a raiz da árvore.
 - Exemplo: uma árvore de ordem 5 pode ter no mínimo $5/2$ elementos, ou seja, 2 elementos.
- A quantidade de filhos que um nó pode ter é sempre a quantidade de elementos do nó mais 1 ($V + 1$).
 - Por exemplo, se um nó tem 4 elementos, este nó terá **obrigatoriamente** 5 apontamentos para os nós filhos.

Propriedades

Propriedades

- Árvore B com ordem m

Propriedades

- Árvore B com ordem m
 - Cada página possui no máximo $m + 1$ descendentes.

Propriedades

- Árvore B com ordem m
 - Cada página possui no máximo $m + 1$ descendentes.
 - Cada página, com exceção da raiz e das folhas, possui no mínimo $m/2$ descendentes (**taxa de ocupação**).

Propriedades

- Árvore B com ordem m
 - Cada página possui no máximo $m + 1$ descendentes.
 - Cada página, com exceção da raiz e das folhas, possui no mínimo $m/2$ descendentes (**taxa de ocupação**).
 - A raiz possui pelo menos 2 descendentes (exceção do nó folha).

Propriedades

- Árvore B com ordem m
 - Cada página possui no máximo $m + 1$ descendentes.
 - Cada página, com exceção da raiz e das folhas, possui no mínimo $m/2$ descendentes (**taxa de ocupação**).
 - A raiz possui pelo menos 2 descendentes (exceção do nó folha).
 - Todas as folhas aparecem no mesmo nível.

Propriedades

- Árvore B com ordem m
 - Cada página possui no máximo $m + 1$ descendentes.
 - Cada página, com exceção da raiz e das folhas, possui no mínimo $m/2$ descendentes (**taxa de ocupação**).
 - A raiz possui pelo menos 2 descendentes (exceção do nó folha).
 - Todas as folhas aparecem no mesmo nível.
 - Uma página interna com k descendentes contém $k-1$ chaves.

Propriedades

- Árvore B com ordem m
 - Cada página possui no máximo $m + 1$ descendentes.
 - Cada página, com exceção da raiz e das folhas, possui no mínimo $m/2$ descendentes (**taxa de ocupação**).
 - A raiz possui pelo menos 2 descendentes (exceção do nó folha).
 - Todas as folhas aparecem no mesmo nível.
 - Uma página interna com k descendentes contém $k-1$ chaves.
 - Uma folha possui no mínimo $m/2 - 1$ chaves e no máximo $m-1$ chaves (taxa de ocupação).

Inserção

Inserção

- As chaves são inseridas nos nós folhas.

Inserção

- As chaves são inseridas nos nós folhas.
- Se o nó ficar cheio, divide a folha em duas partes e suba a chave central para o nó pai.

Inserção

- As chaves são inseridas nos nós folhas.
- Se o nó ficar cheio, divide a folha em duas partes e suba a chave central para o nó pai.
- Se o pai ficar cheio, repita o processo. No pior caso, até a raiz.

Inserção

- As chaves são inseridas nos nós folhas.
- Se o nó ficar cheio, divide a folha em duas partes e suba a chave central para o nó pai.
- Se o pai ficar cheio, repita o processo. No pior caso, até a raiz.
- Se necessário, o nó raiz deverá ser dividido e a chave central será transformada em nova raiz.

Inserção

Inserção

- Vamos construir uma árvore de ordem 5

Inserção

- Vamos construir uma árvore de ordem 5
- Vamos inserir os seguintes elementos:

Inserção

- Vamos construir uma árvore de ordem 5
- Vamos inserir os seguintes elementos:
 - 1, 12, 8, 2, 25, 6, 14, 28, 17, 7, 52, 16, 48, 68, 3, 26, 29, 53, 55, 45

Inserção

- Vamos construir uma árvore de ordem 5
- Vamos inserir os seguintes elementos:
 - 1, 12, 8, 2, 25, 6, 14, 28, 17, 7, 52, 16, 48, 68, 3, 26, 29, 53, 55, 45
- As 4 primeiras chaves são simples:

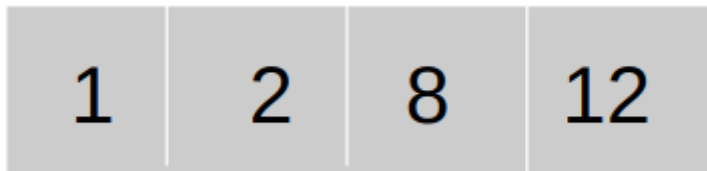
Inserção

- Vamos construir uma árvore de ordem 5
- Vamos inserir os seguintes elementos:
 - 1, 12, 8, 2, 25, 6, 14, 28, 17, 7, 52, 16, 48, 68, 3, 26, 29, 53, 55, 45
- As 4 primeiras chaves são simples:

1	2	8	12
---	---	---	----

Inserção

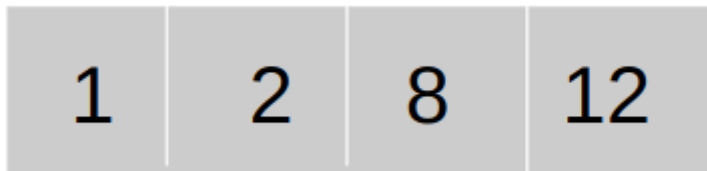
- Vamos construir uma árvore de ordem 5
- Vamos inserir os seguintes elementos:
 - 1, 12, 8, 2, 25, 6, 14, 28, 17, 7, 52, 16, 48, 68, 3, 26, 29, 53, 55, 45
- As 4 primeiras chaves são simples:



- O nó 25 estoura o limite.

Inserção

- Vamos construir uma árvore de ordem 5
- Vamos inserir os seguintes elementos:
 - 1, 12, 8, 2, 25, 6, 14, 28, 17, 7, 52, 16, 48, 68, 3, 26, 29, 53, 55, 45
- As 4 primeiras chaves são simples:



- O nó 25 estoura o limite.
- O que fazer?

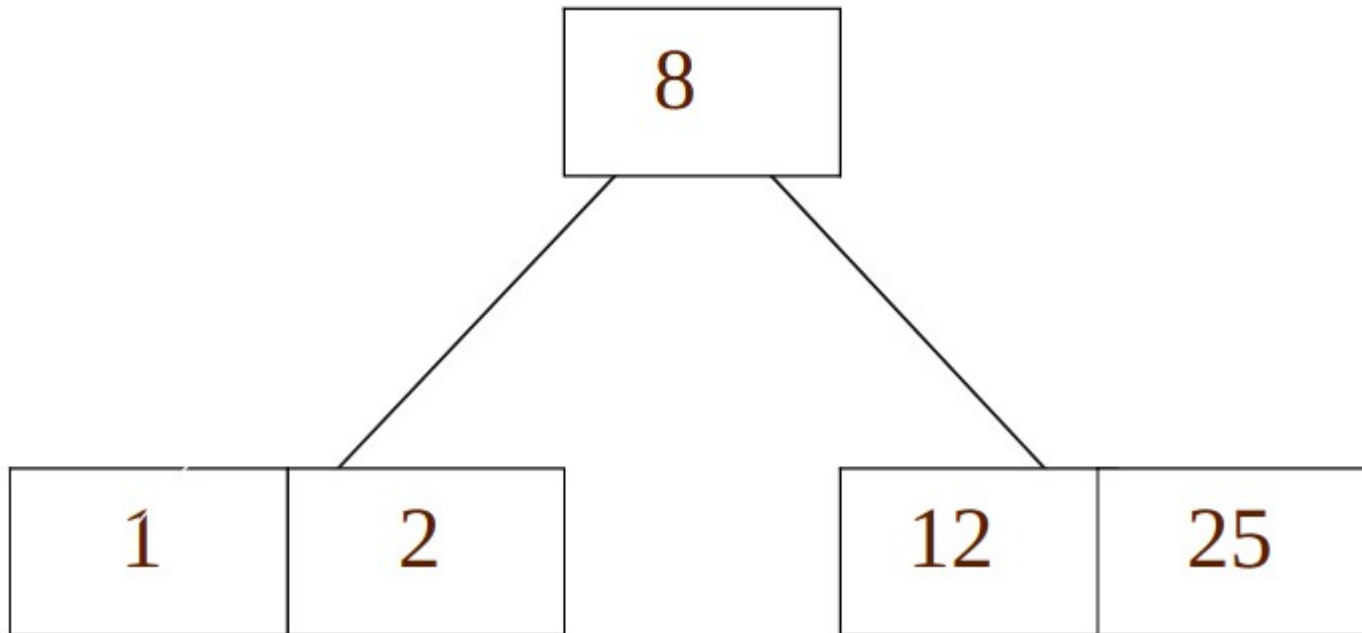
Inserção

Inserção

- Inserção do 25:

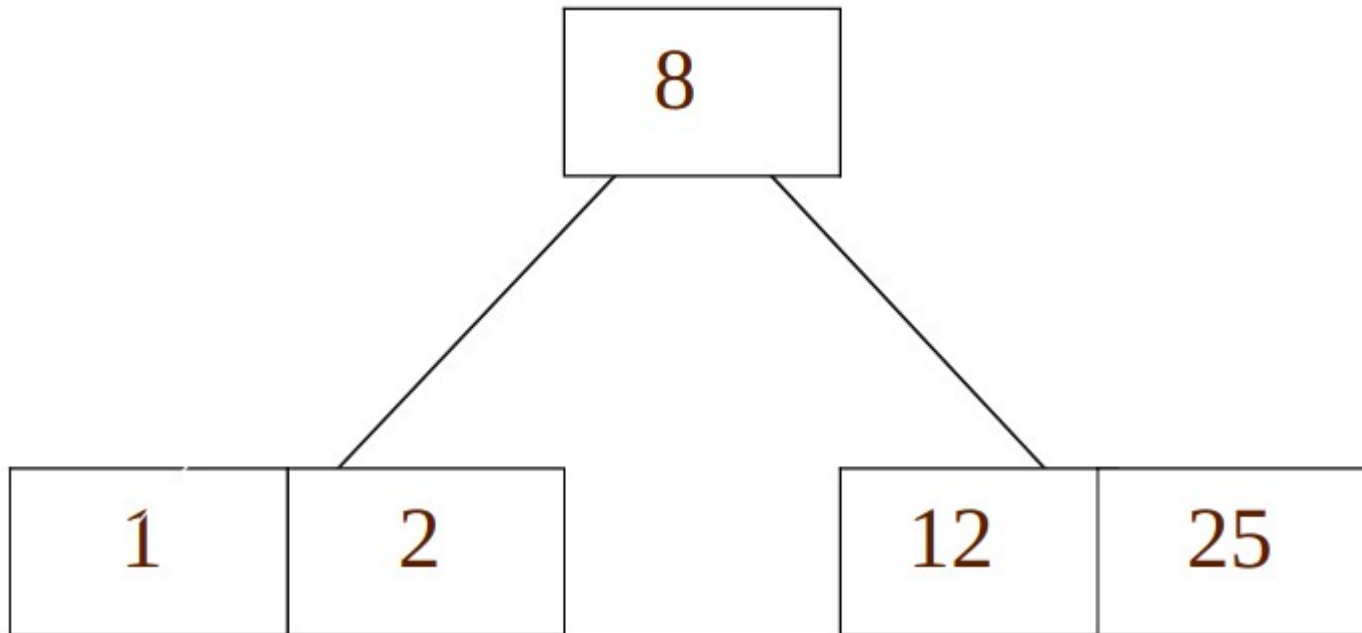
Inserção

- Inserção do 25:



Inserção

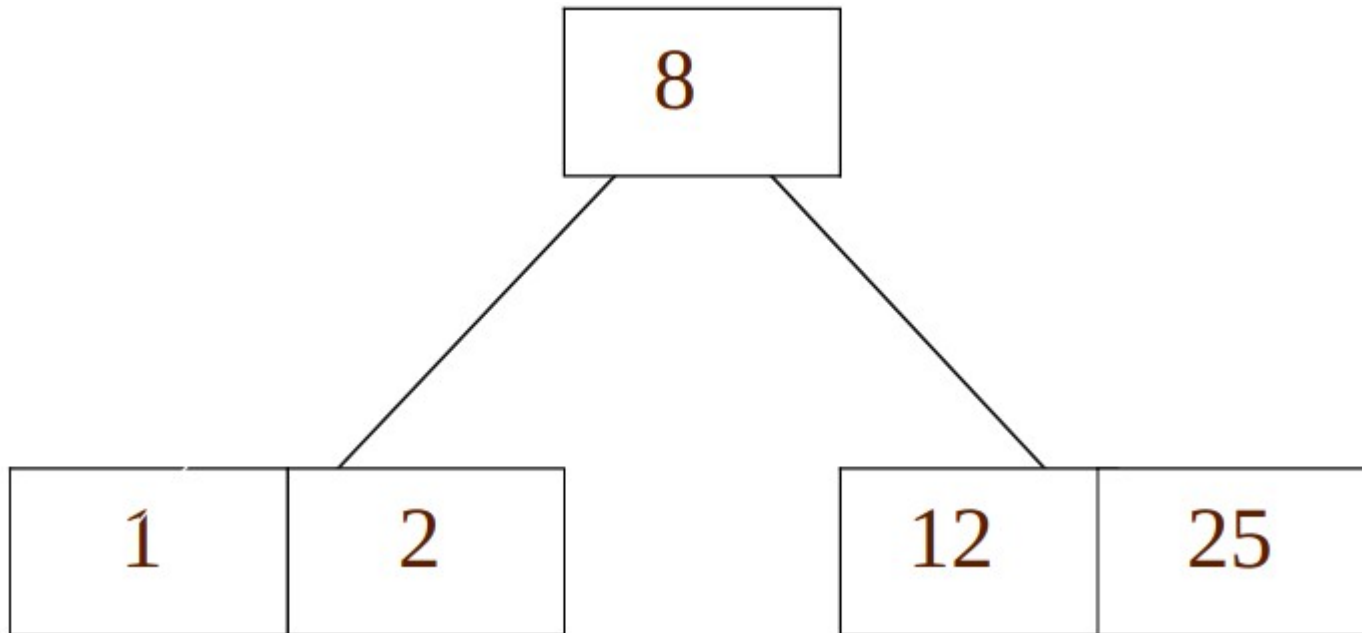
- Inserção do 25:



- Próximos:

Inserção

- Inserção do 25:



- Próximos:

– 6 14 28 17 7 52 16 48 68 3 26 29 53 55 45

Inserção

Inserção

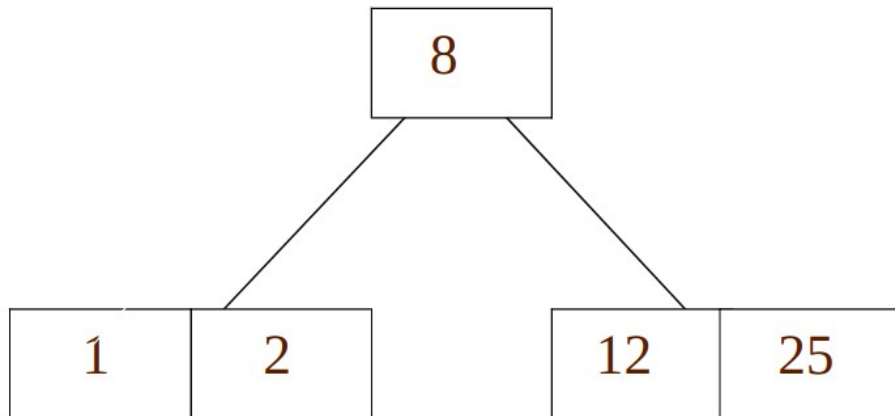
- Vamos inserir:

Inserção

- Vamos inserir:
 - 6, 14 e 28 :

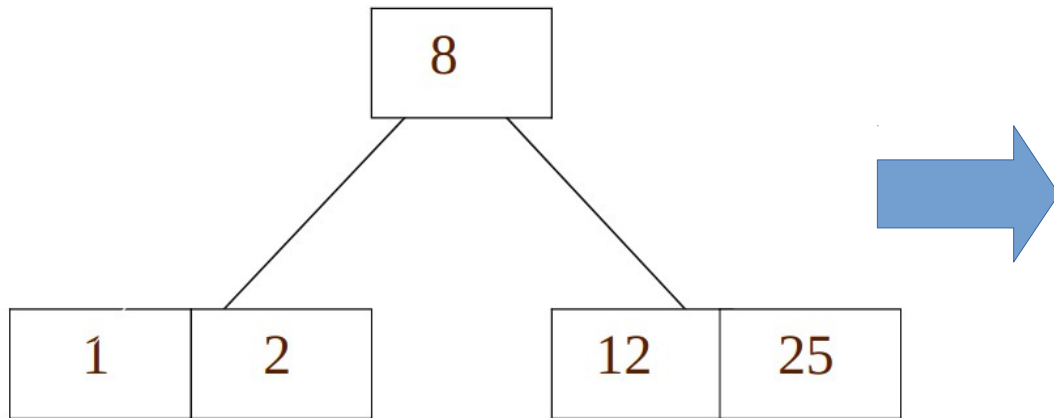
Inserção

- Vamos inserir:
 - 6, 14 e 28 :



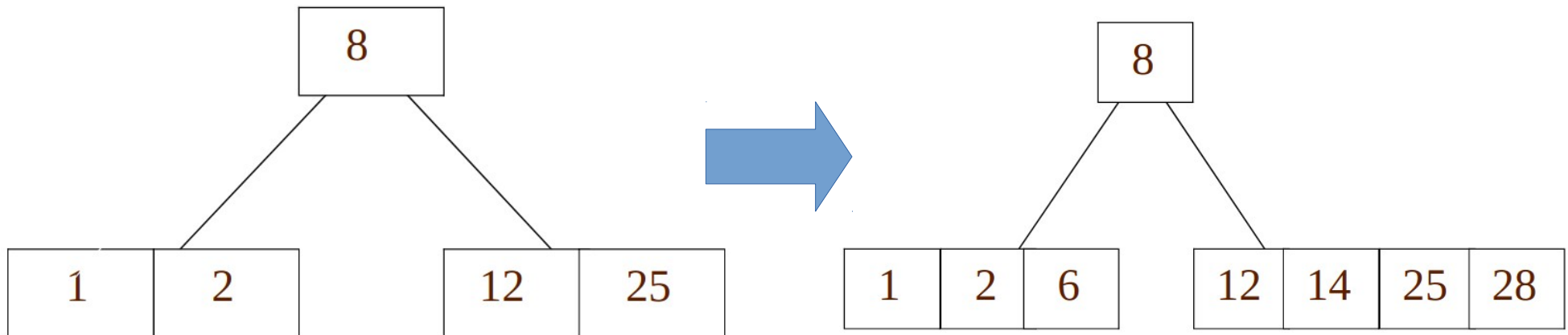
Inserção

- Vamos inserir:
 - 6, 14 e 28 :



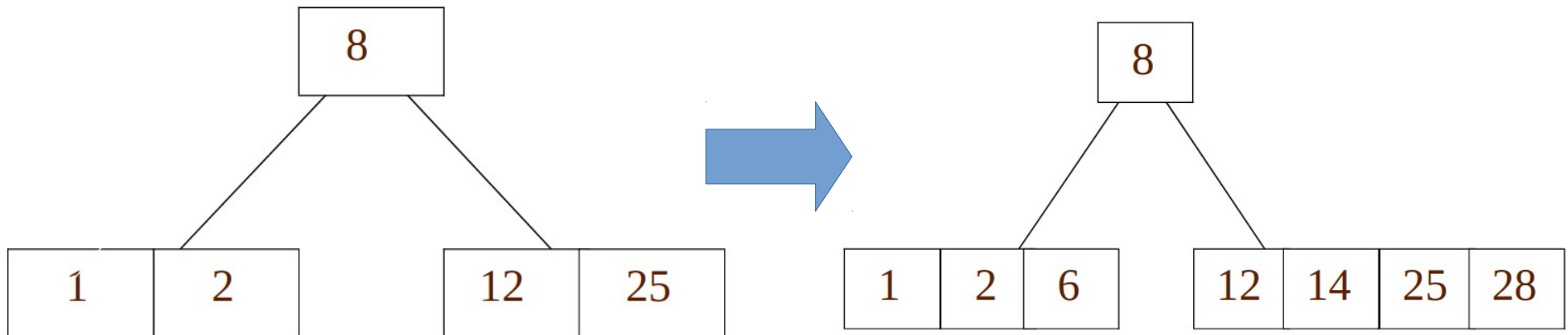
Inserção

- Vamos inserir:
 - 6, 14 e 28 :



Inserção

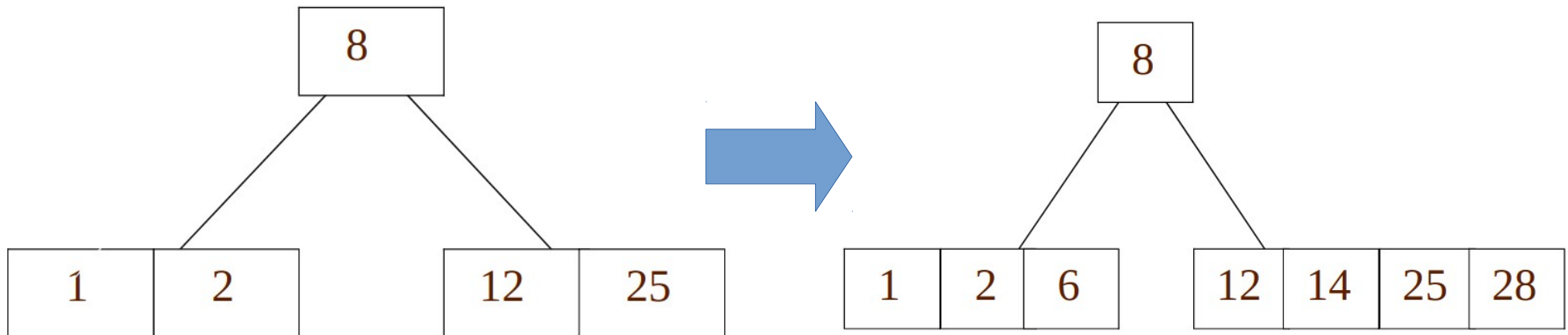
- Vamos inserir:
 - 6, 14 e 28 :



- Próximos:

Inserção

- Vamos inserir:
 - 6, 14 e 28 :



- Próximos:

– 17 7 52 16 48 68 3 26 29 53 55 45

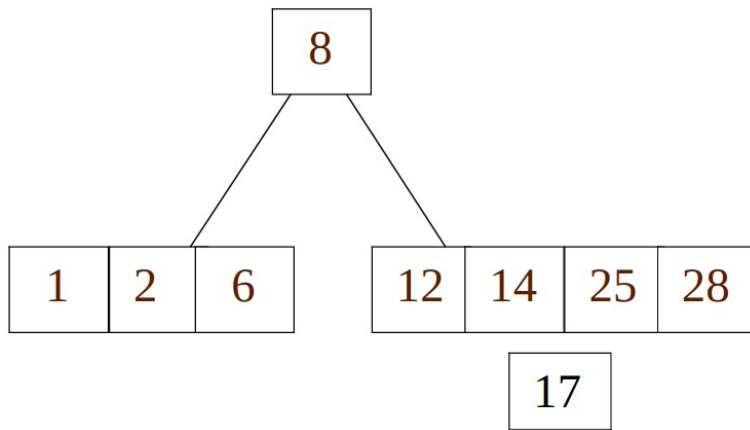
Inserção

Inserção

- Inserir o 17 à árvore:

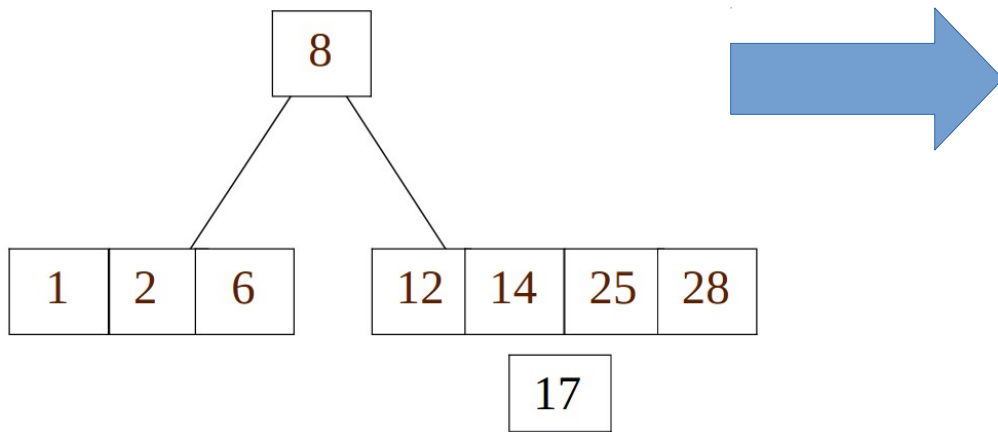
Inserção

- Inserir o 17 à árvore:



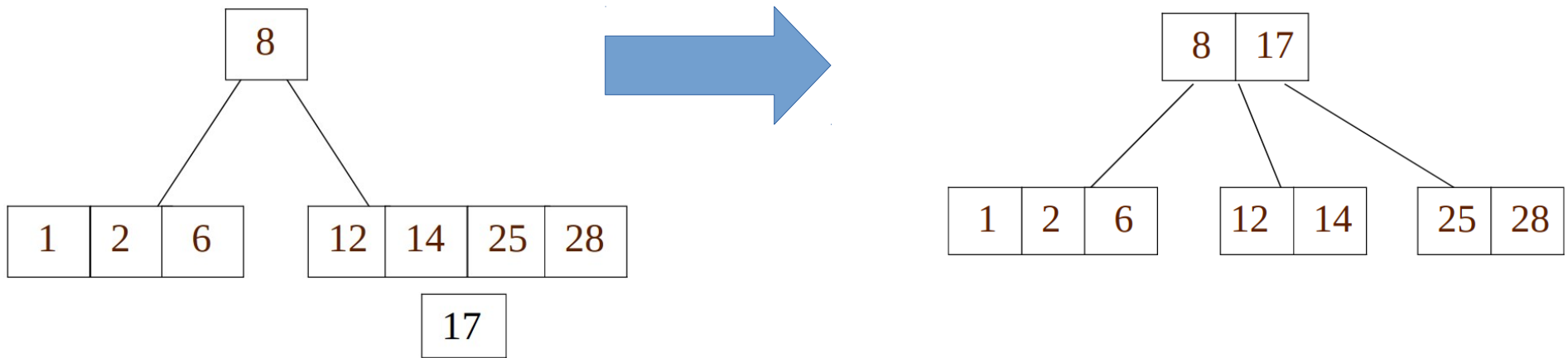
Inserção

- Inserir o 17 à árvore:



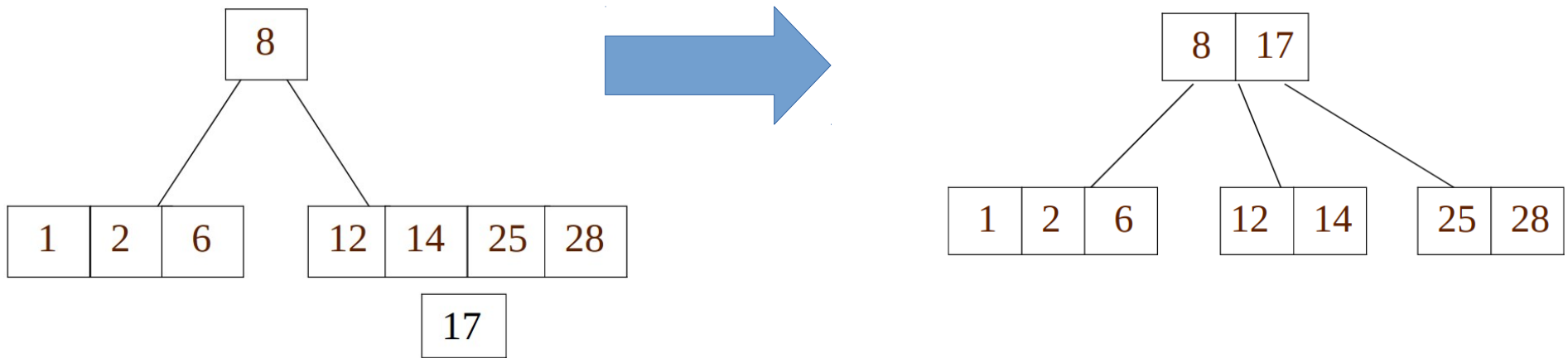
Inserção

- Inserir o 17 à árvore:



Inserção

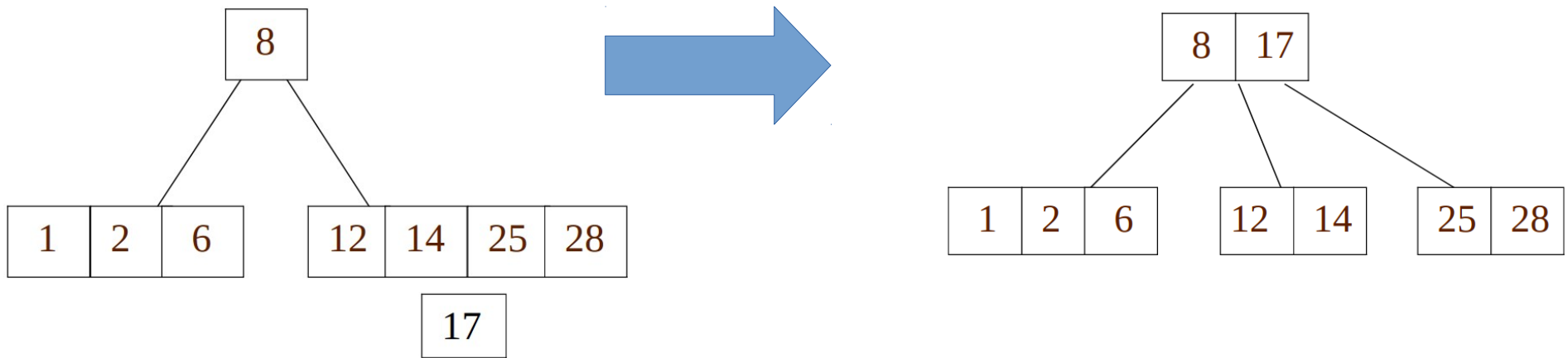
- Inserir o 17 à árvore:



- Próximos elementos:

Inserção

- Inserir o 17 à árvore:



- Próximos elementos:

- 7 52 16 48 68 3 26 29 53 55 45

Inserção

Inserção

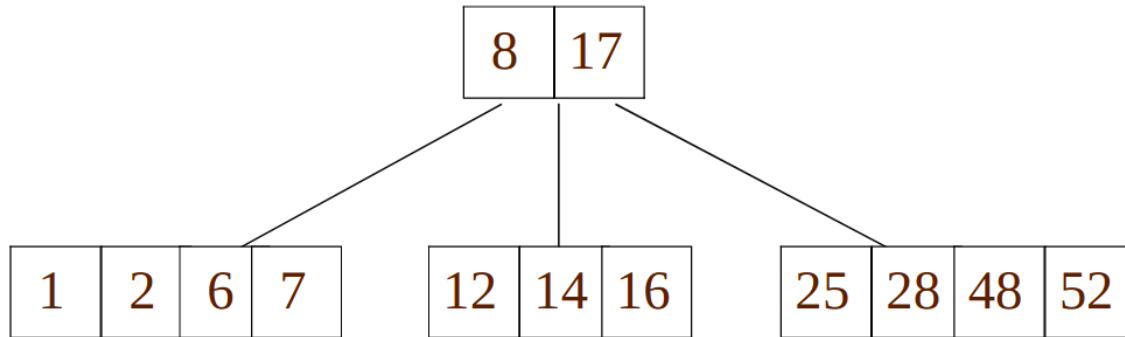
- Inserção dos elementos:

Inserção

- Inserção dos elementos:
 - 7, 52, 16 e 48

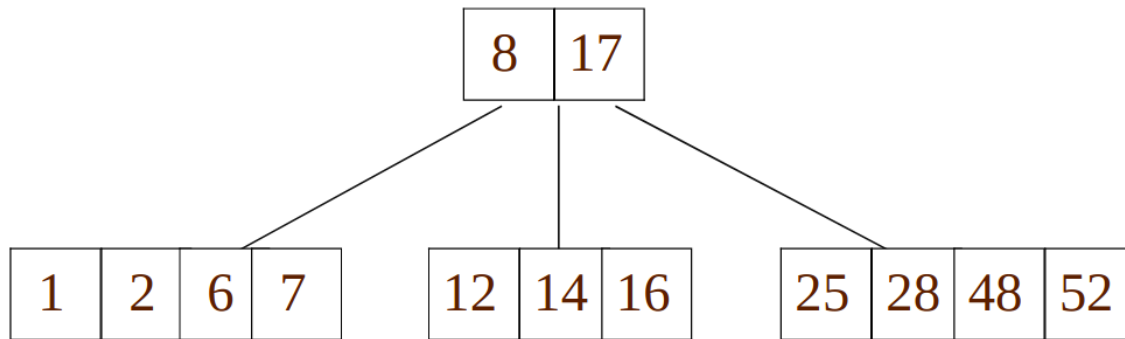
Inserção

- Inserção dos elementos:
 - 7, 52, 16 e 48



Inserção

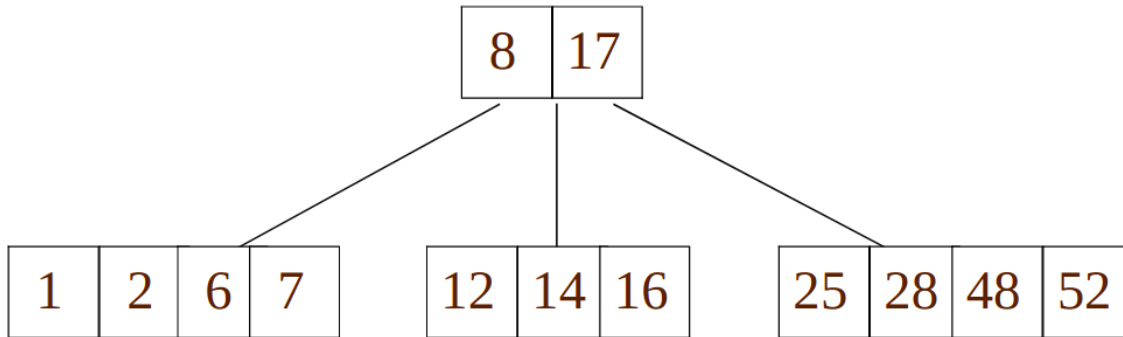
- Inserção dos elementos:
 - 7, 52, 16 e 48



- Próximos elementos:

Inserção

- Inserção dos elementos:
 - 7, 52, 16 e 48



- Próximos elementos:
 - 68 3 26 29 53 55 45

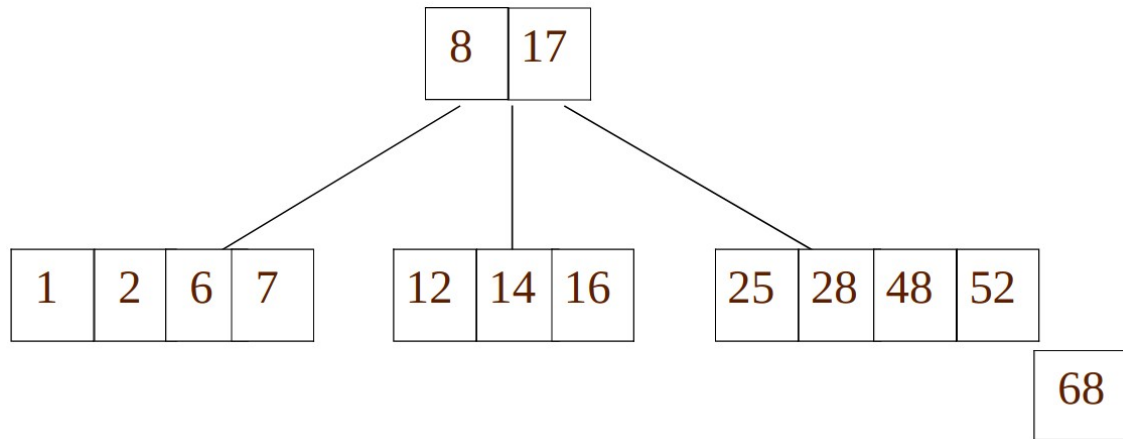
Inserção

Inserção

- Inserir elemento 68

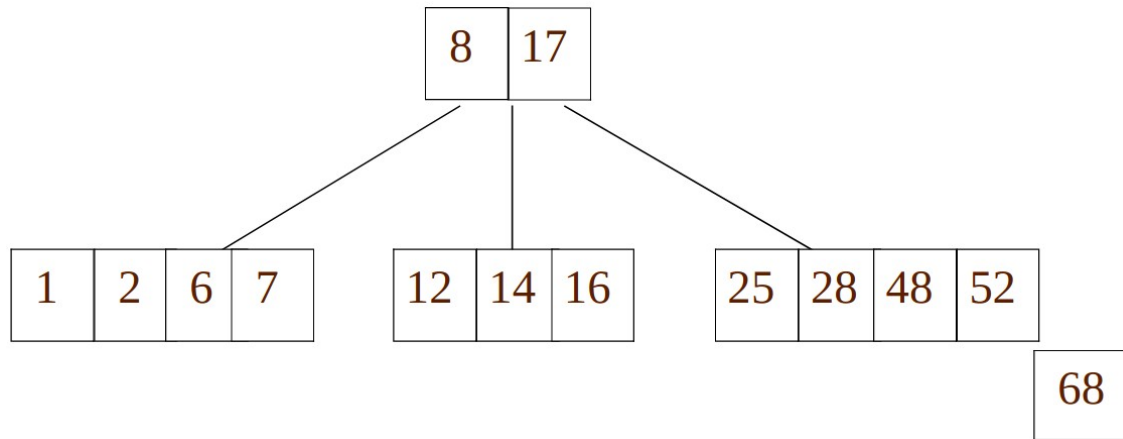
Inserção

- Inserir elemento 68



Inserção

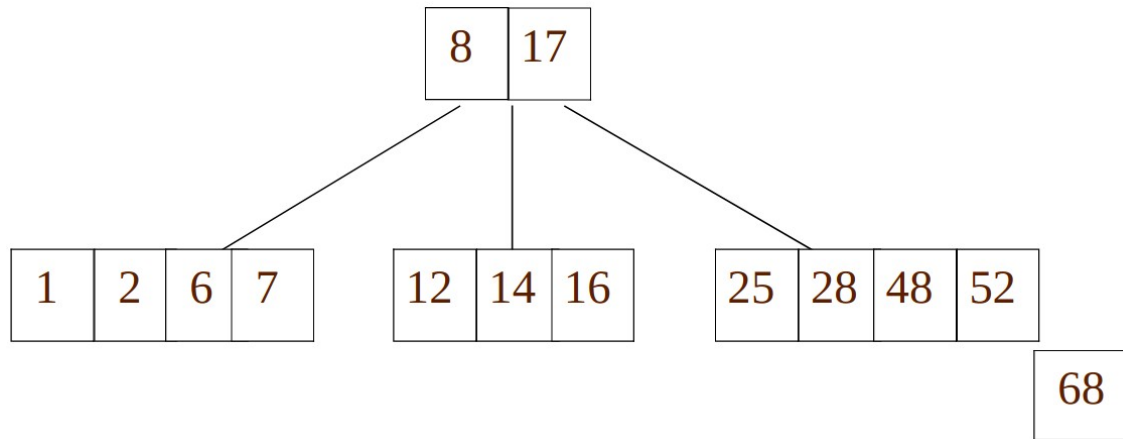
- Inserir elemento 68



- Próximos elementos:

Inserção

- Inserir elemento 68



- Próximos elementos:
 - 3 26 29 53 55 45

Inserção

Inserção

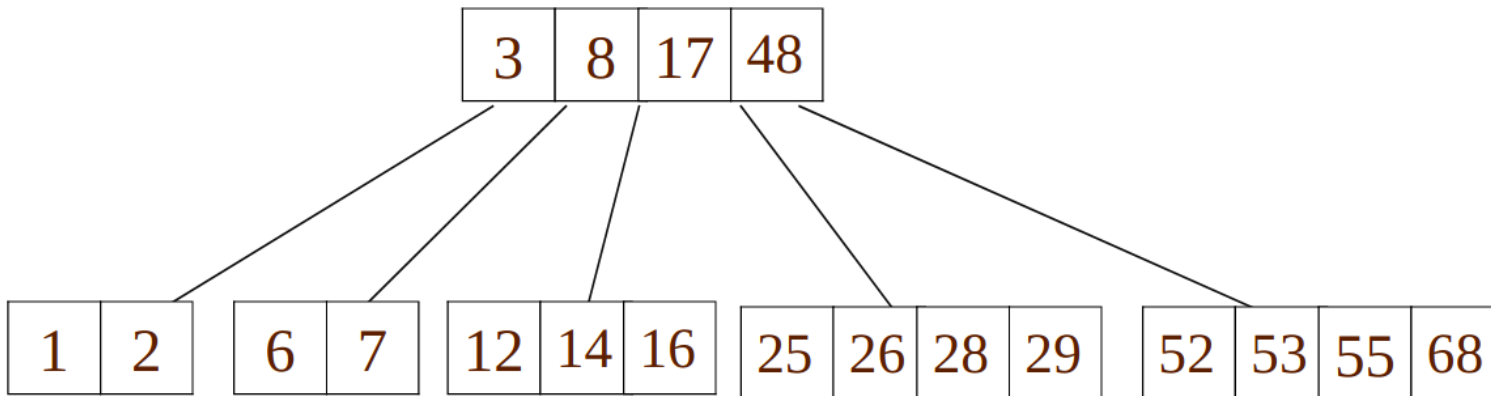
- Quando inserimos o 3 a divisão é na folha mais à esquerda e o 3 sobe.

Inserção

- Quando inserimos o 3 a divisão é na folha mais à esquerda e o 3 sobe.
- 26, 29, 53, 55 são inseridos nas folhas:

Inserção

- Quando inserimos o 3 a divisão é na folha mais à esquerda e o 3 sobe.
- 26, 29, 53, 55 são inseridos nas folhas:



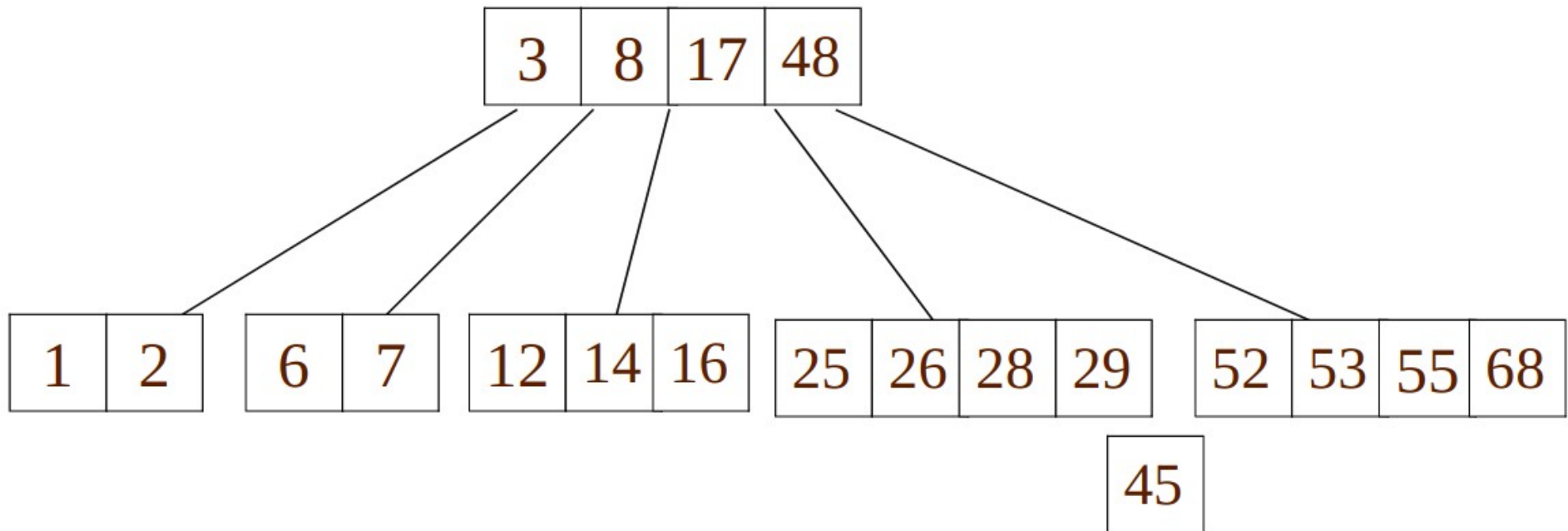
Inserção

Inserção

- Inserir o elemento 45:

Inserção

- Inserir o elemento 45:



Inserção

Inserção

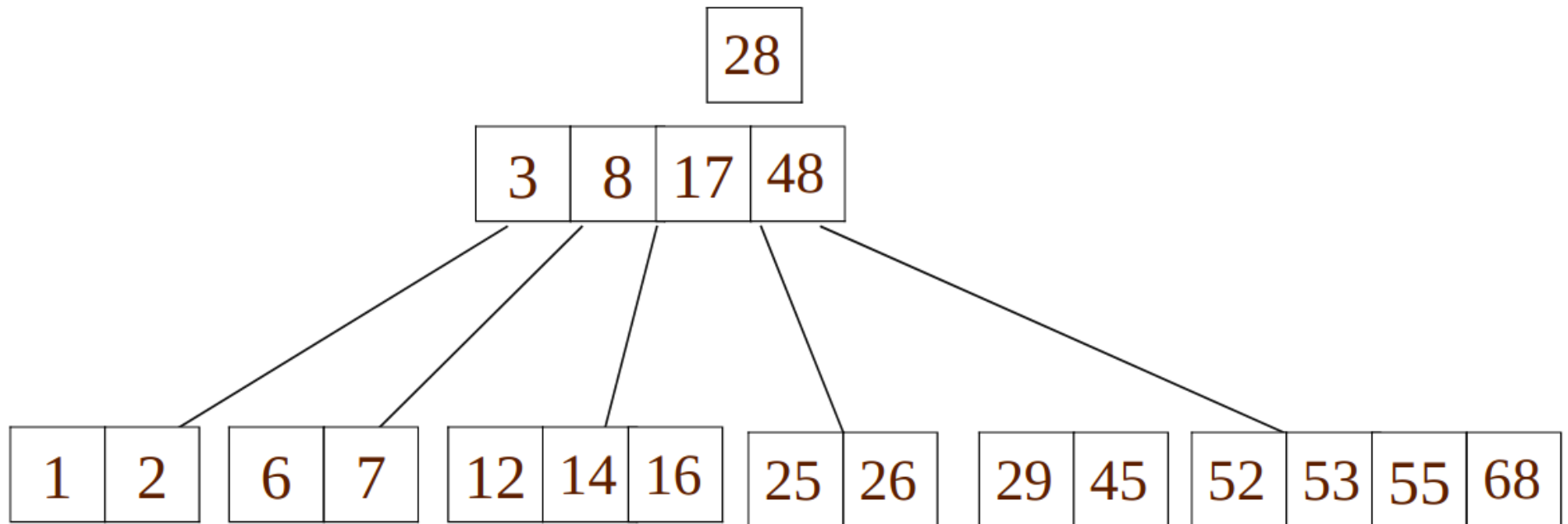
- Inserir o elemento 45:

Inserção

- Inserir o elemento 45:
 - O 28 subirá para a raiz, mas esta estará cheia.

Inserção

- Inserir o elemento 45:
 - O 28 subirá para a raiz, mas esta estará cheia.



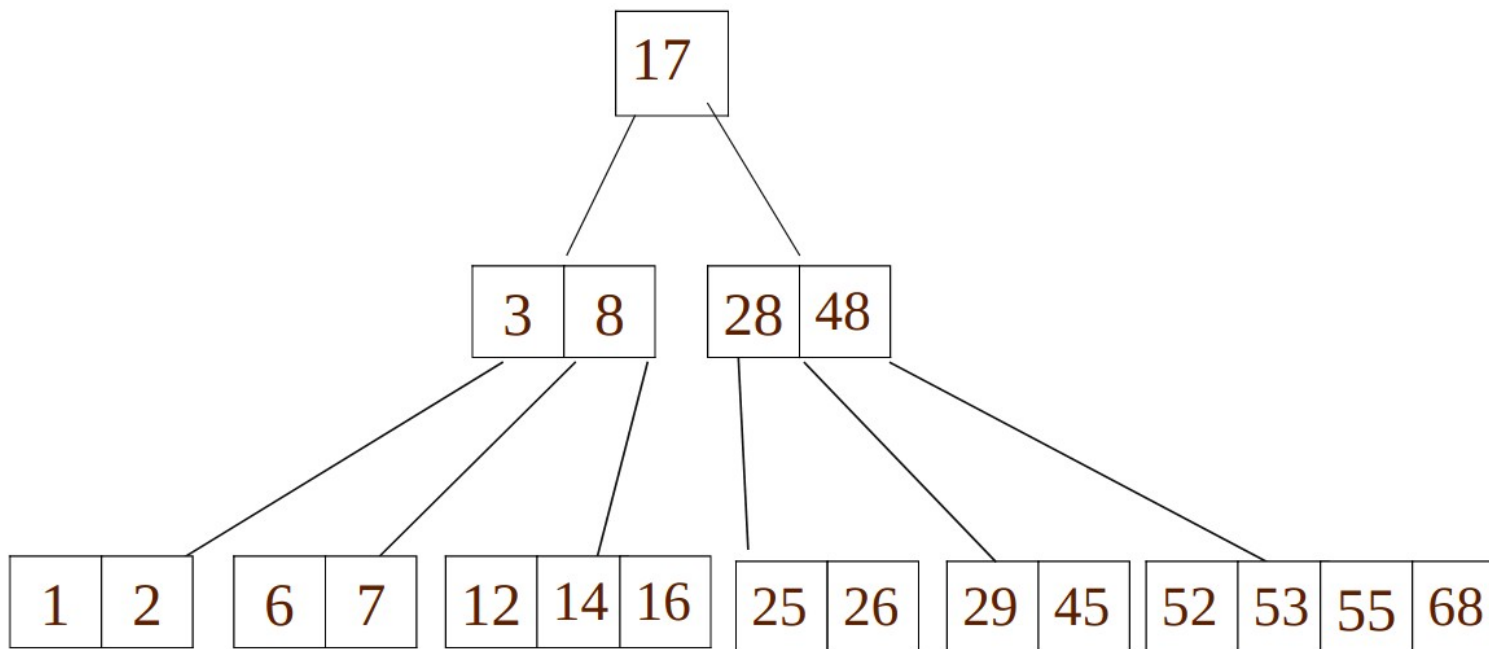
Inserção

Inserção

- O 17 tem que subir para se tornar a nova raiz.

Inserção

- O 17 tem que subir para se tornar a nova raiz.



Remoção

Remoção

- A remoção mais simples ocorre quando a chave está na folha.

Remoção

- A remoção mais simples ocorre quando a chave está na folha.
- Situações:

Remoção

- A remoção mais simples ocorre quando a chave está na folha.
- Situações:
 - Chave está na folha.

Remoção

- A remoção mais simples ocorre quando a chave está na folha.
- Situações:
 - Chave está na folha.
 - Chave **não** está na folha.

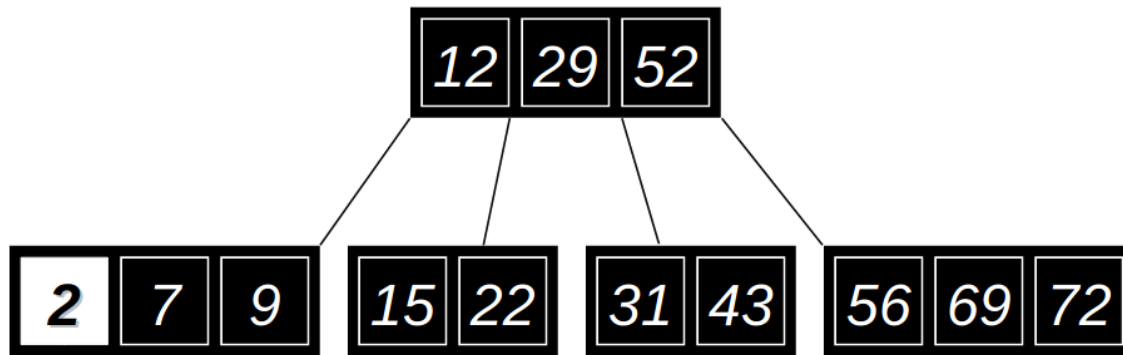
Remoção

Remoção

- Remove o elemento 2 da árvore de ordem 5:

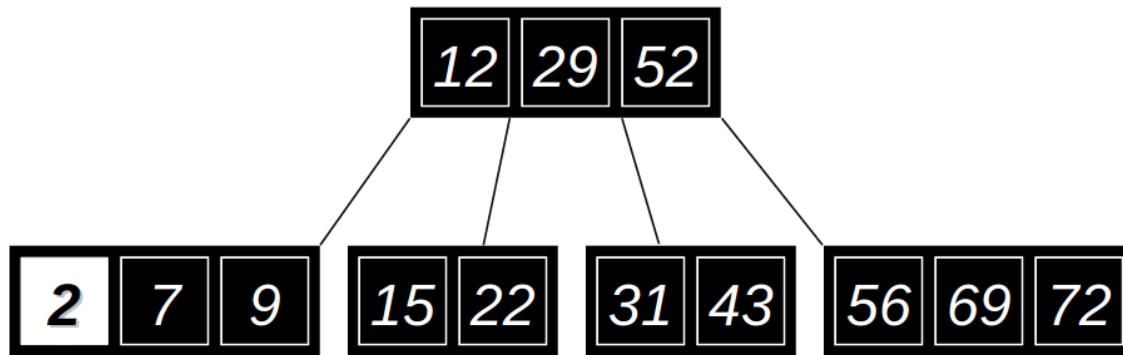
Remoção

- Remove o elemento 2 da árvore de ordem 5:



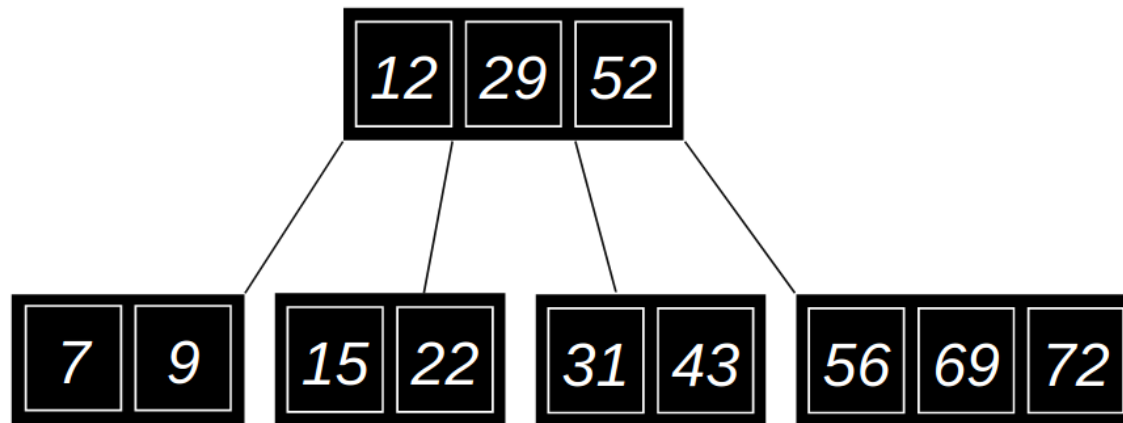
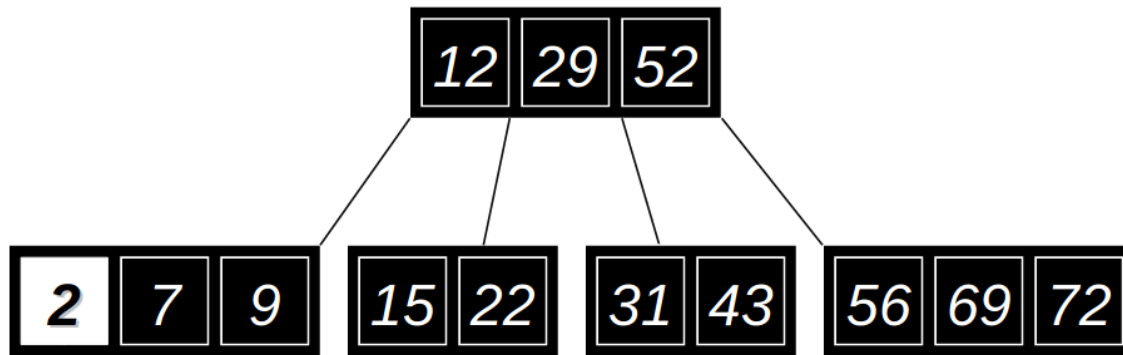
Remoção

- Remove o elemento 2 da árvore de ordem 5:



Remoção

- Remove o elemento 2 da árvore de ordem 5:



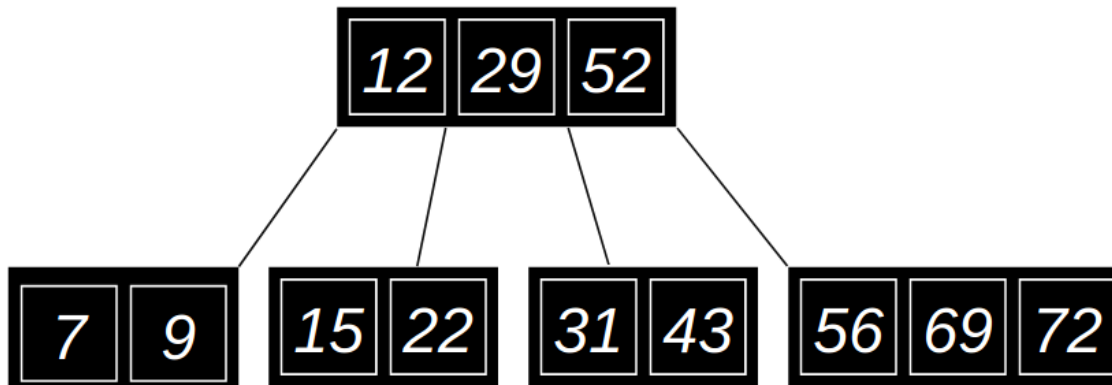
Remoção

Remoção

- Remover o nó 52:

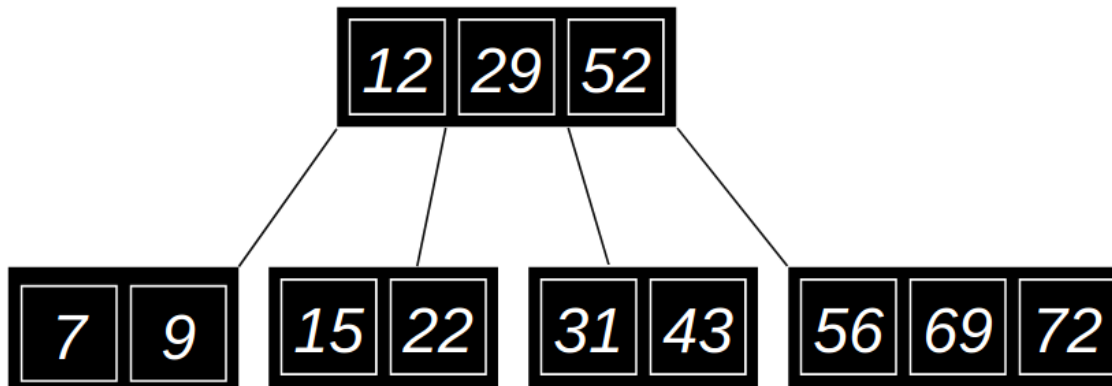
Remoção

- Remover o nó 52:



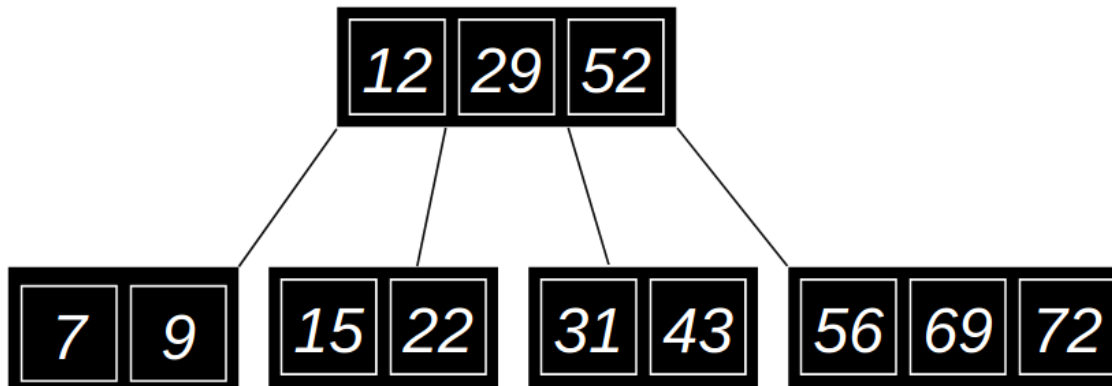
Remoção

- Remover o nó 52:



Remoção

- Remover o nó 52:

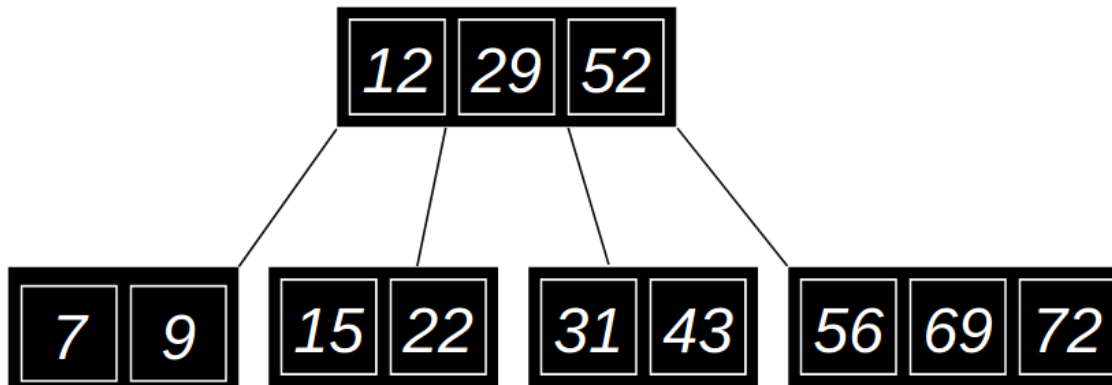


- Substituí pelo sucessor 56:

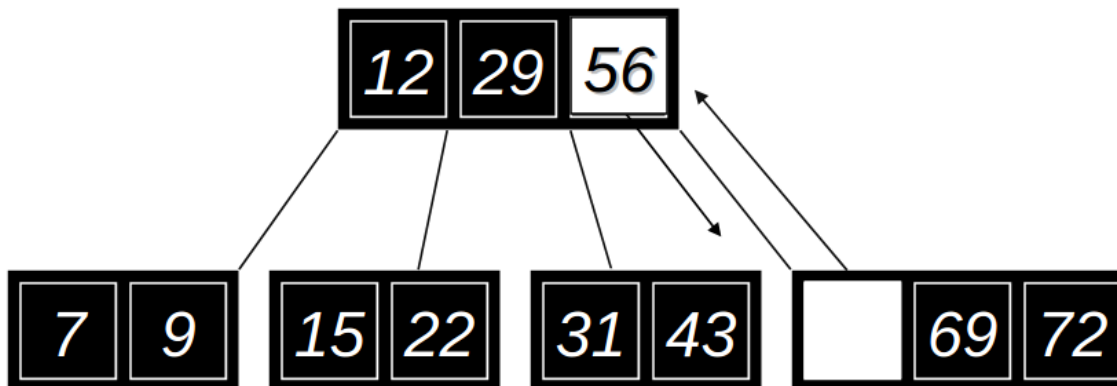


Remoção

- Remover o nó 52:



- Substituí pelo sucessor 56:



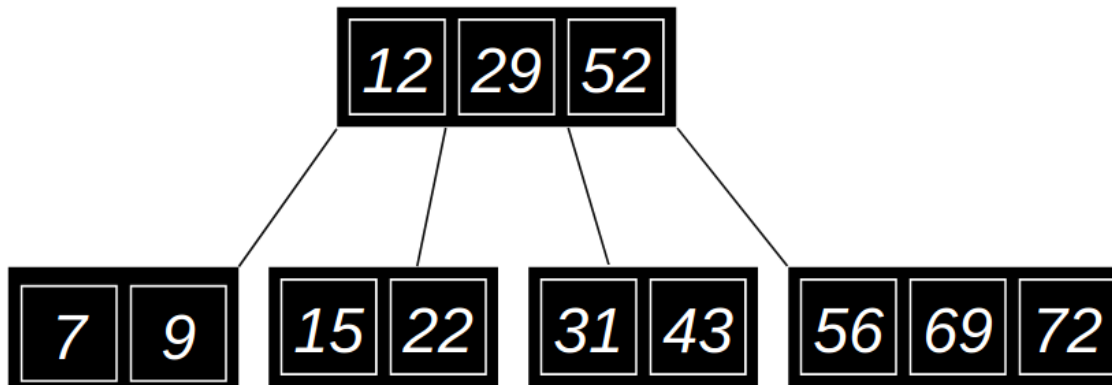
Remoção

Remoção

- Remoção do 52:

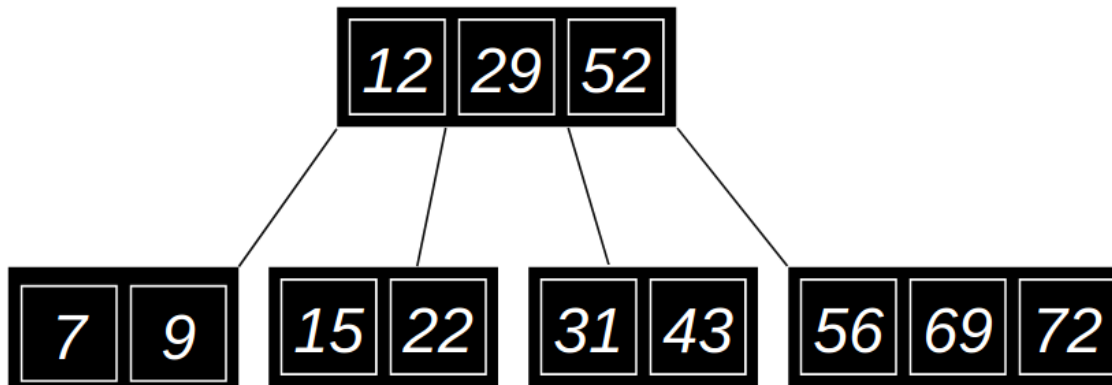
Remoção

- Remoção do 52:



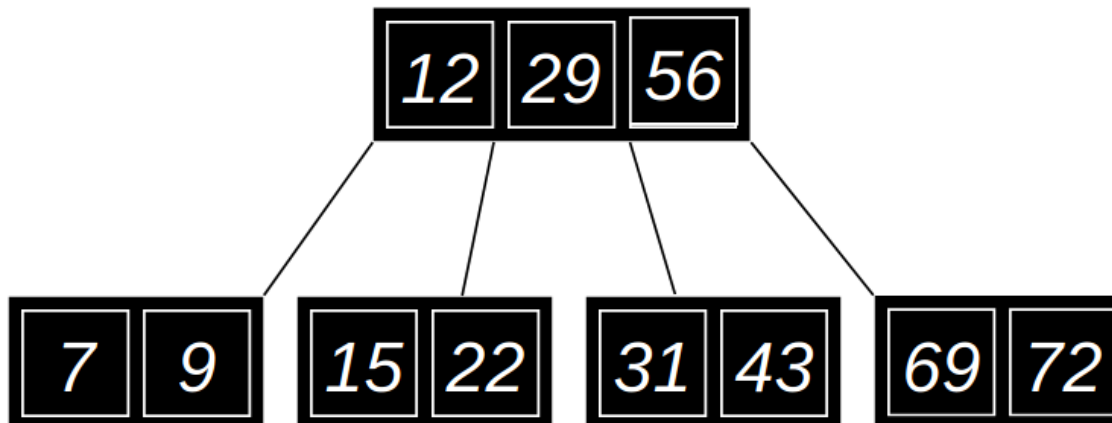
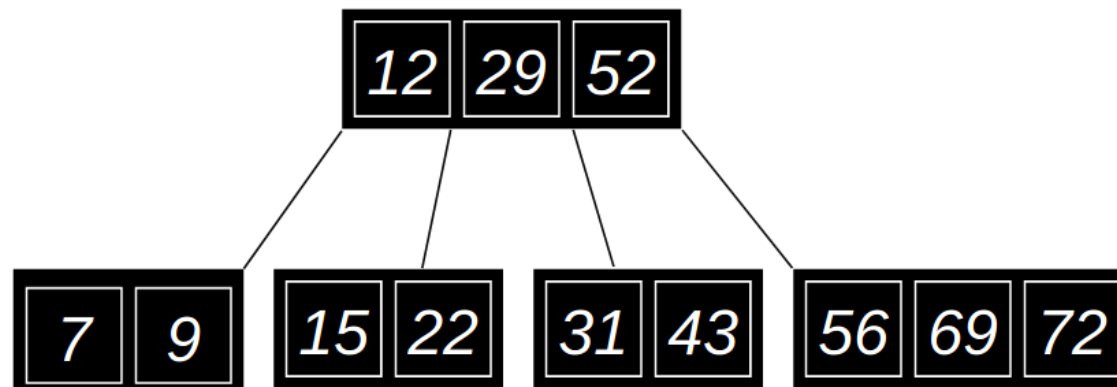
Remoção

- Remoção do 52:



Remoção

- Remoção do 52:



Remoção

Remoção

- Se uma remoção fizer com que uma folha tenha um número menor que o mínimo, então temos que observar os irmãos adjacentes.

Remoção

- Se uma remoção fizer com que uma folha tenha um número menor que o mínimo, então temos que observar os irmãos adjacentes.
- Se um irmão tem o número mínimo de chaves, então:

Remoção

- Se uma remoção fizer com que uma folha tenha um número menor que o mínimo, então temos que observar os irmãos adjacentes.
- Se um irmão tem o número mínimo de chaves, então:
 - Suas chaves devem ser combinadas com a chave nó pai.

Remoção

- Se uma remoção fizer com que uma folha tenha um número menor que o mínimo, então temos que observar os irmãos adjacentes.
- Se um irmão tem o número mínimo de chaves, então:
 - Suas chaves devem ser combinadas com a chave nó pai.
 - Este processo é recursivo.

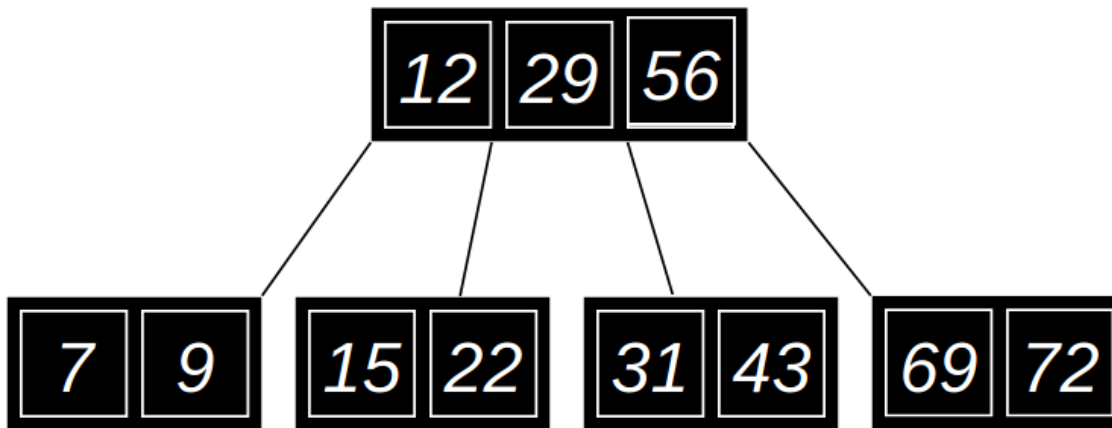
Remoção

Remoção

- Exemplo: remover o 72

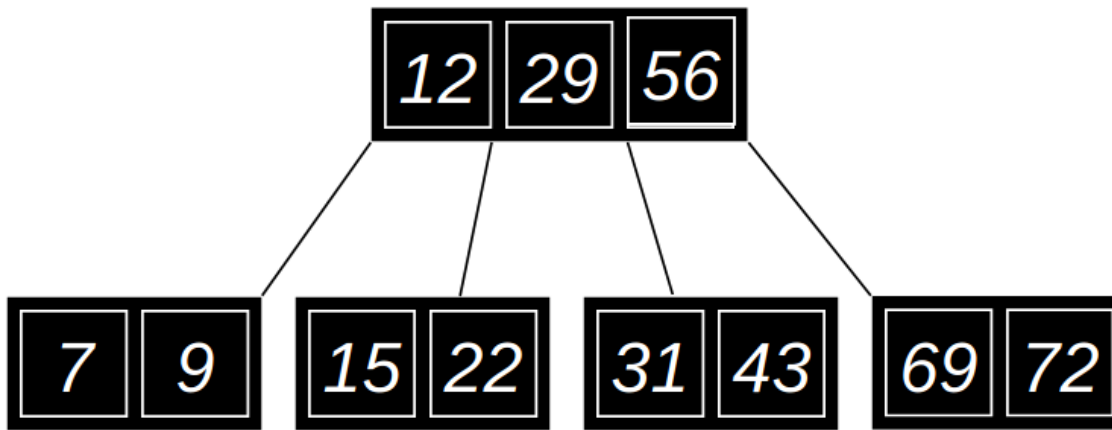
Remoção

- Exemplo: remover o 72



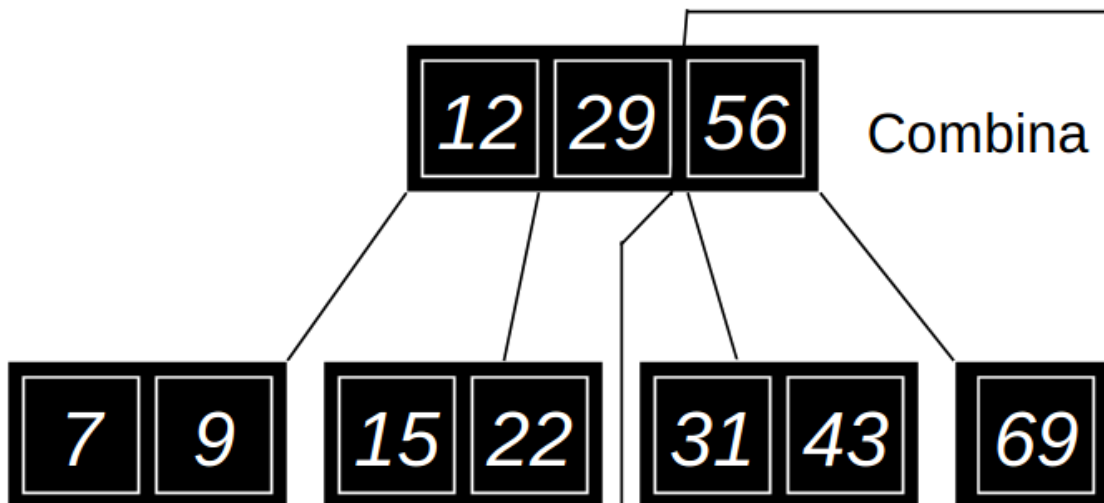
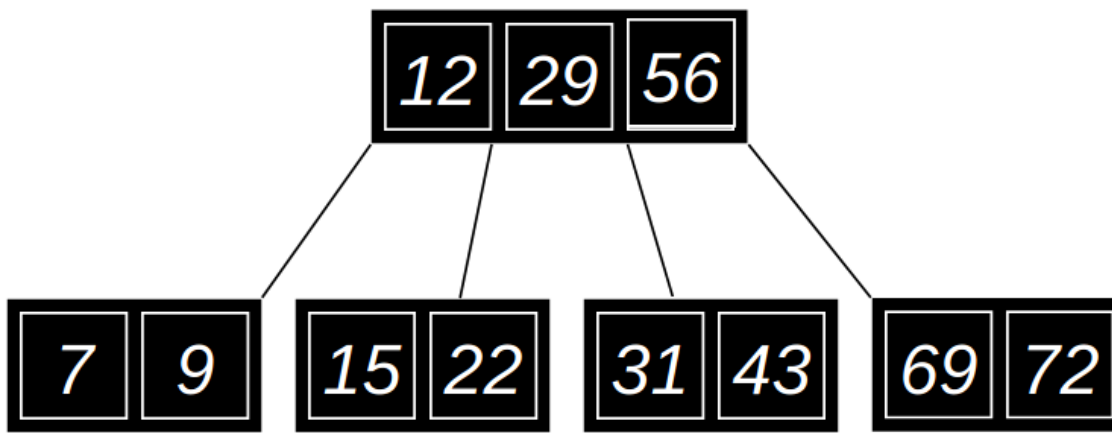
Remoção

- Exemplo: remover o 72



Remoção

- Exemplo: remover o 72



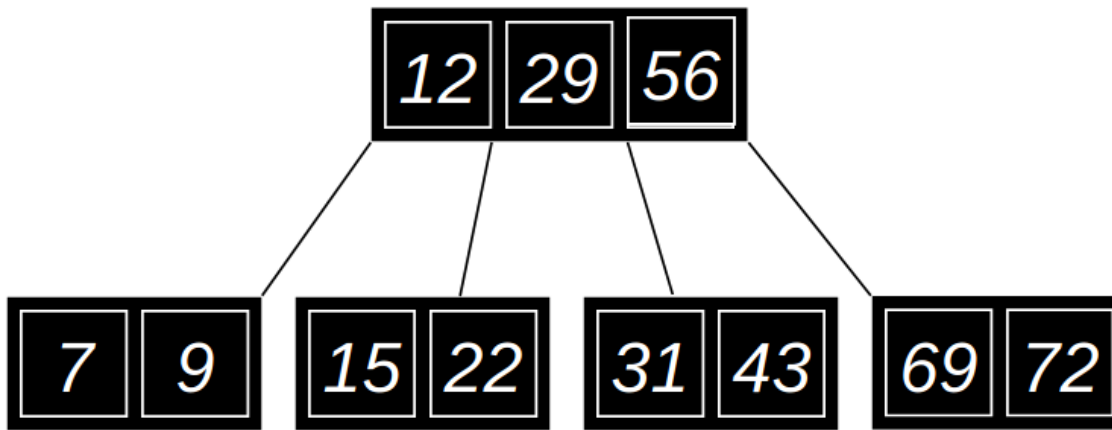
Remoção

Remoção

- Exemplo: remover o 72

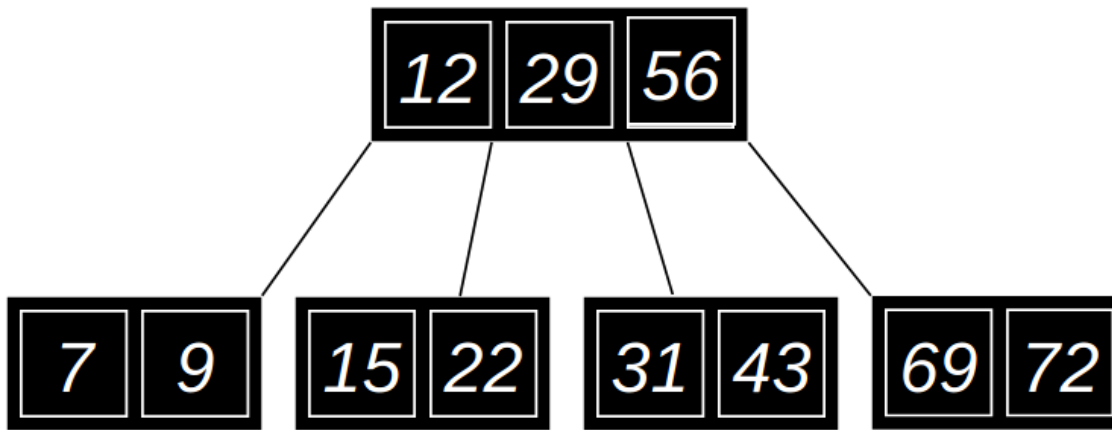
Remoção

- Exemplo: remover o 72



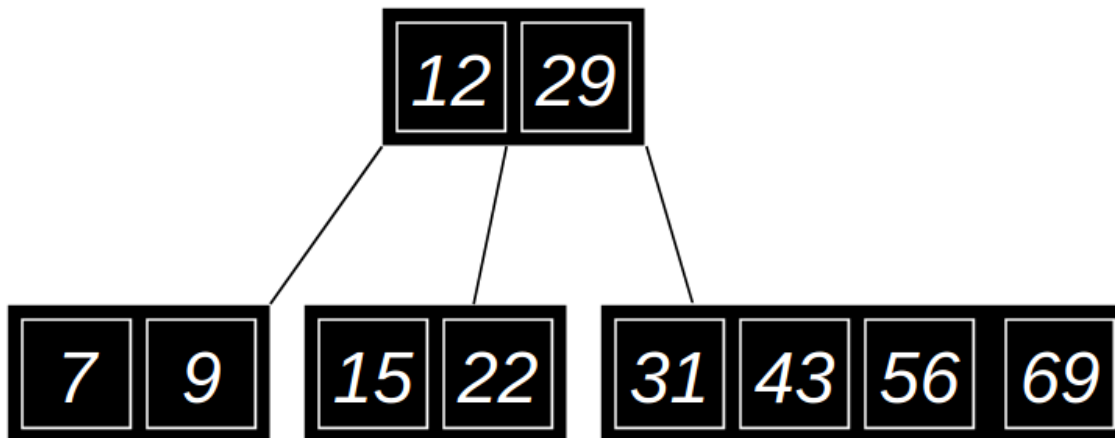
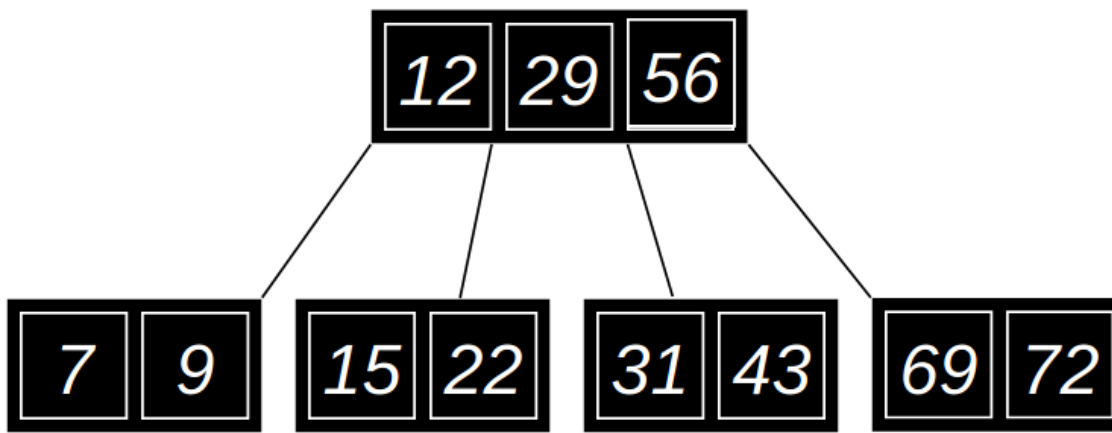
Remoção

- Exemplo: remover o 72



Remoção

- Exemplo: remover o 72



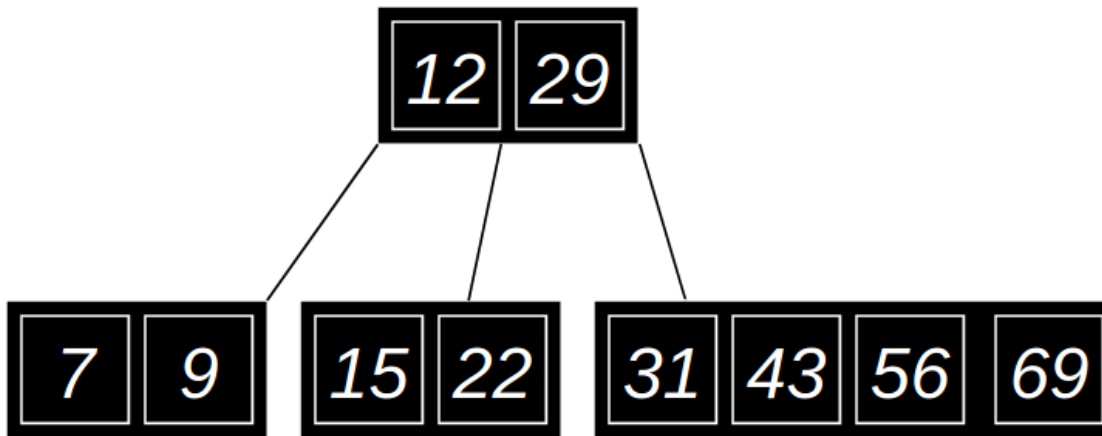
Remoção

Remoção

- Remover o 22:

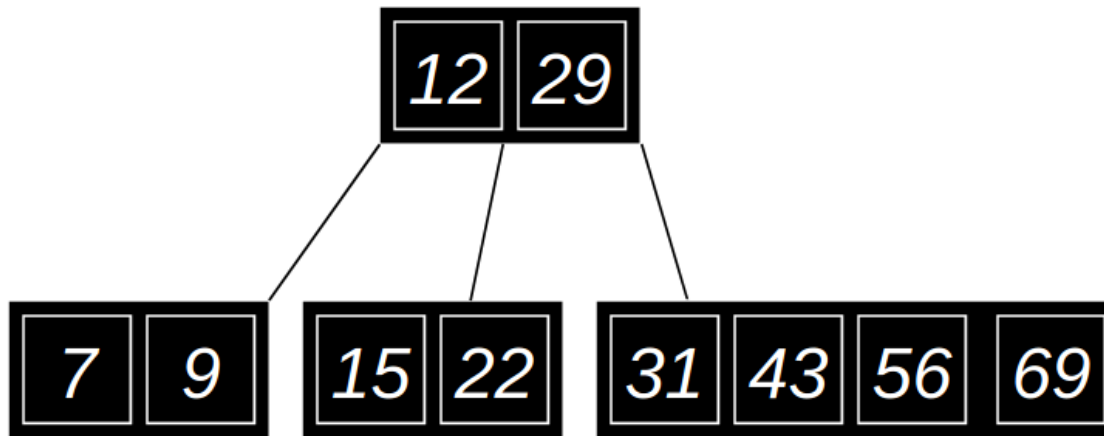
Remoção

- Remover o 22:



Remoção

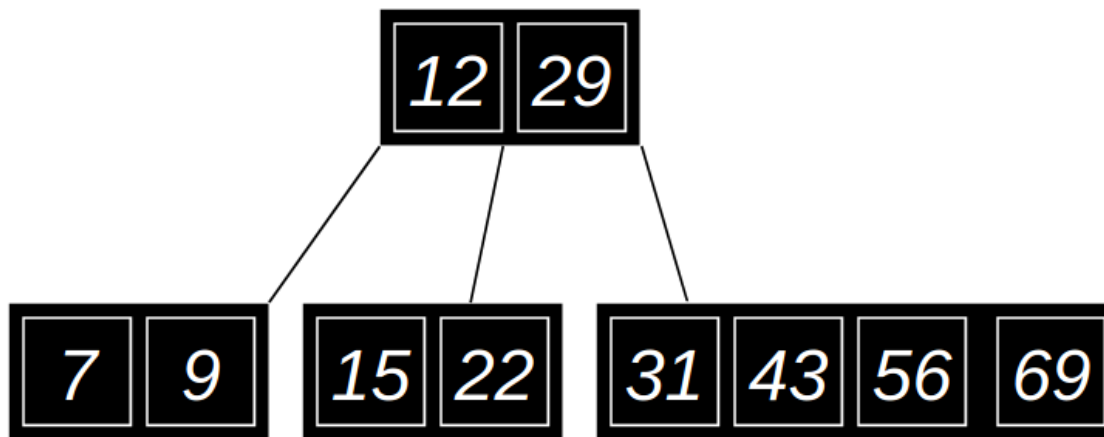
- Remover o 22:



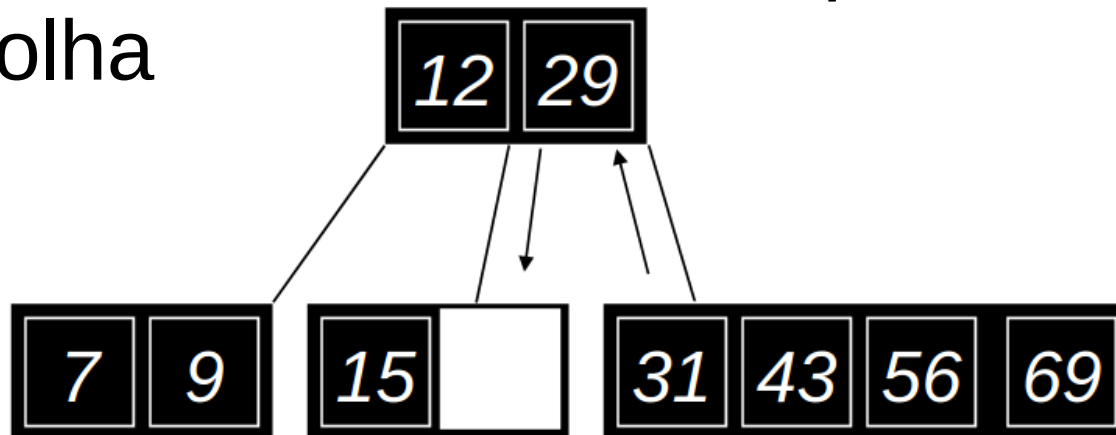
- Descer a chave do nó pai e subir a chave na folha

Remoção

- Remover o 22:



- Descer a chave do nó pai e subir a chave na folha



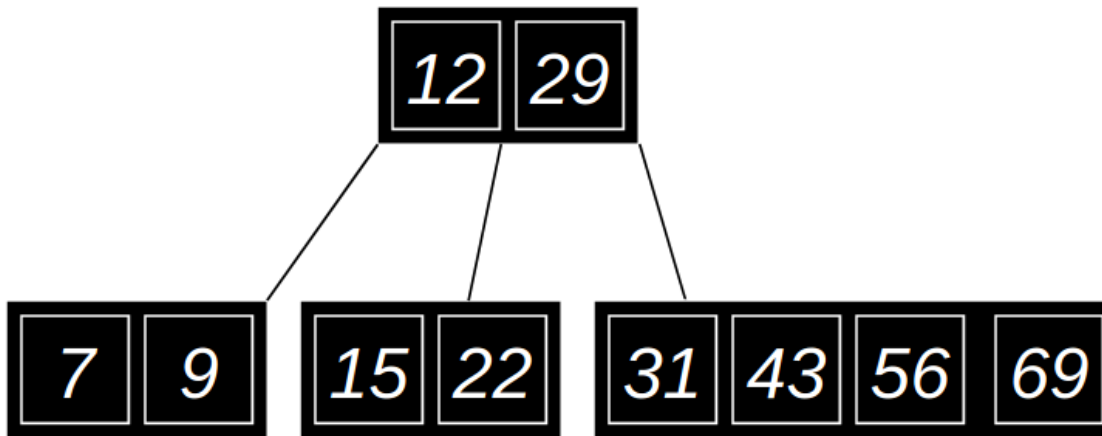
Remoção

Remoção

- Remover o 22:

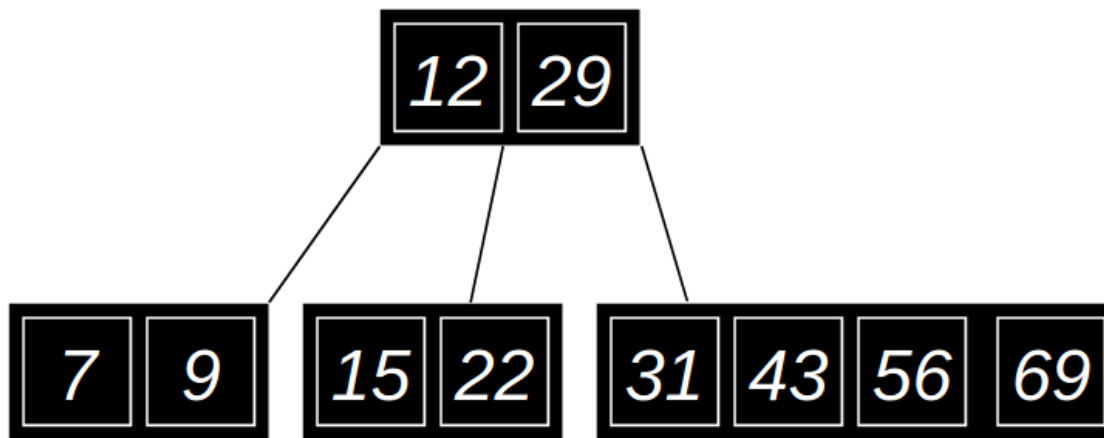
Remoção

- Remover o 22:



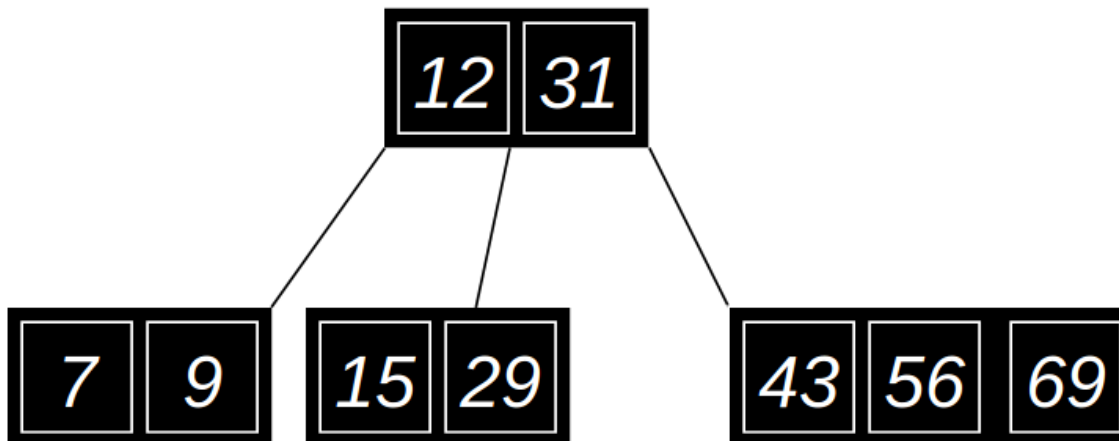
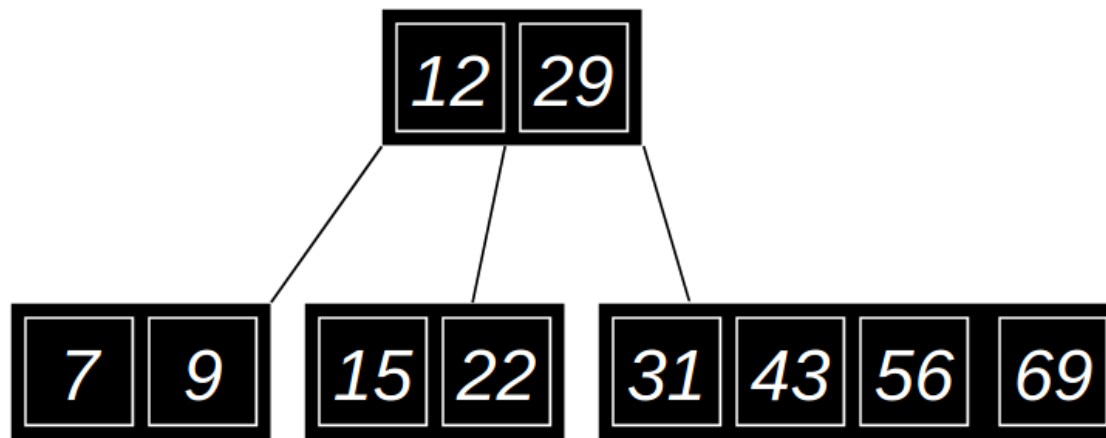
Remoção

- Remover o 22:



Remoção

- Remover o 22:



Exercícios

- Seja a árvore produzida pelos seguintes números: {3, 7, 9, 23, 45, 1, 5, 14, 25, 24, 13, 11, 8, 19, 4, 31, 35, 56, 2, 6, 7, 10, 12, 15, 16, 17}. Remova os seguintes números: {1, 3, 2, 7, 8, 9, 10, 15, 16, 17, 23, 24, 25, 31, 35, 45, 56, 5, 6, 11, 12, 4}. Desenhe o estado da árvore após a realização de cada operação.

Exercícios

- Por que as árvores B são consideradas, geralmente, superiores as árvores binárias de busca para pesquisa externa, e árvores binárias são comumente usadas para pesquisa interna?

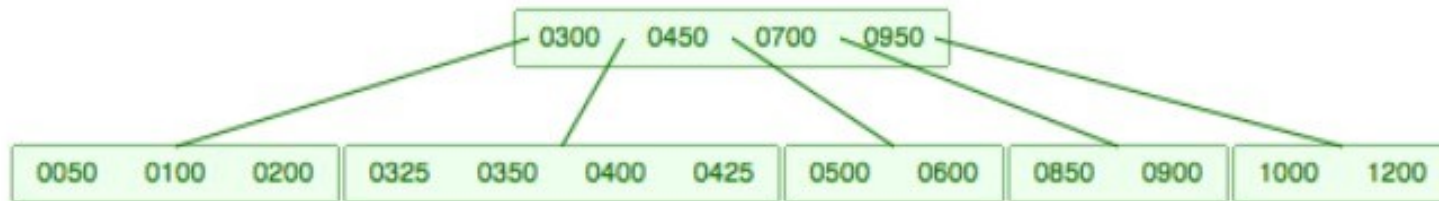
Exercícios

Exercícios

- Insira o elemento 375 na árvore abaixo:

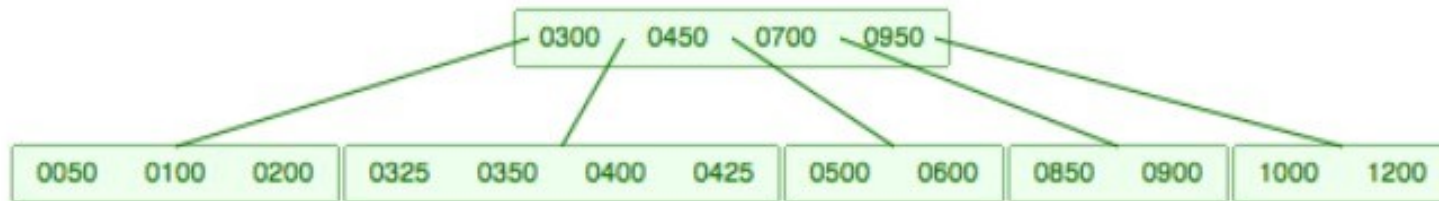
Exercícios

- Insira o elemento 375 na árvore abaixo:



Exercícios

- Insira o elemento 375 na árvore abaixo:



RESPOSTA:

