

Teoria dos Grafos

Grafos Eulerianos

Prof. Tiago Eugenio de Melo
tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

- As definições e teorias apresentadas aqui foram baseadas no livro *Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação* (LTC, 2018).
- A numeração das definições e teoremas seguem as mesmas referências adotadas no livro para facilitar a localização.

GRAFOS EULERIANOS

Remember

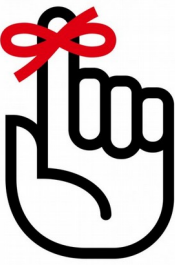


Remember



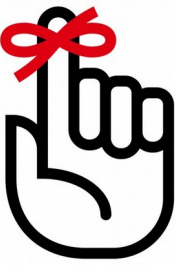
- Um **passeio** em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência alternada de vértices e arestas que começa e termina com vértices.

Remember



- Um **passeio** em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência alternada de vértices e arestas que começa e termina com vértices.
- Um **caminho** é um passeio onde todos os vértices são distintos.

Remember



- Um **passeio** em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência alternada de vértices e arestas que começa e termina com vértices.
- Um **caminho** é um passeio onde todos os vértices são distintos.
- Uma **trilha** (*trail*) ou trajeto em um grafo é um passeio em que todas as suas arestas são distintas.

Introdução

Introdução

- Definição 8.1

Introdução

- Definição 8.1
 - Uma **trilha** em um grafo G é chamada de trilha de Euler se ela incluir **todas as arestas** de G .

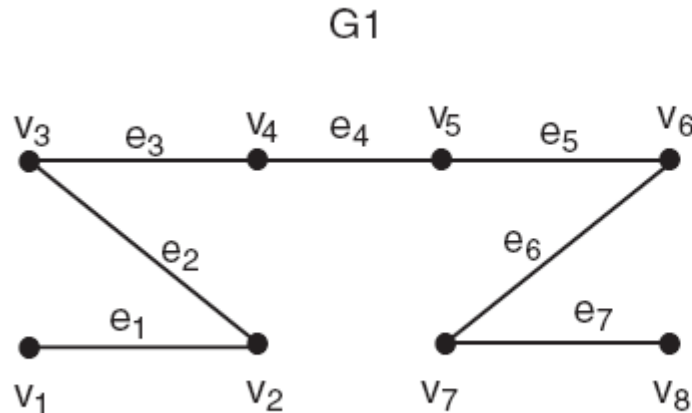
Introdução

- Definição 8.1
 - Uma **trilha** em um grafo G é chamada de trilha de Euler se ela incluir **todas as arestas** de G .
 - Exemplo:

Introdução

- Definição 8.1

- Uma **trilha** em um grafo G é chamada de trilha de Euler se ela incluir **todas as arestas** de G .
- Exemplo:



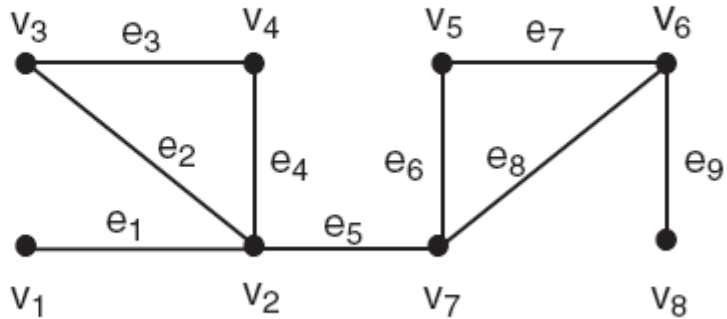
Introdução

Introdução

- G2 tem uma trilha de Euler?

Introdução

- G2 tem uma trilha de Euler?



Introdução

Introdução

- Definição 8.2

Introdução

- Definição 8.2
 - Um **tour** em G é um passeio fechado em G que inclui toda a aresta de G **pelo menos uma vez.**

Introdução

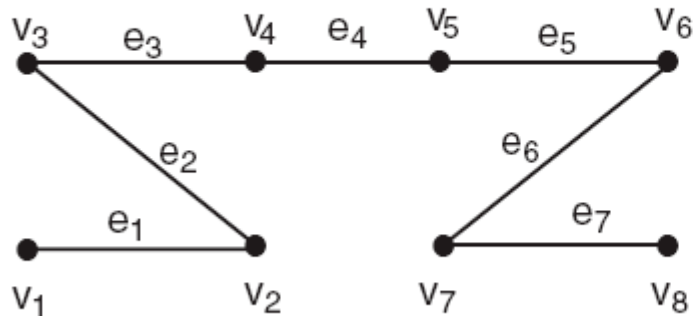
- Definição 8.2
 - Um **tour** em G é um passeio fechado em G que inclui toda a aresta de G **pelo menos uma vez**.
- Exemplo:

Introdução

- Definição 8.2
 - Um **tour** em G é um passeio fechado em G que inclui toda a aresta de G **pelo menos uma vez**.
- Exemplo:
 - $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_7v_6v_5v_4v_3v_2v_1$

Introdução

- Definição 8.2
 - Um **tour** em G é um passeio fechado em G que inclui toda a aresta de G pelo menos uma vez.
- Exemplo:
 - $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_7v_6v_5v_4v_3v_2v_1$



Introdução

Introdução

- Definição 8.3

Introdução

- Definição 8.3
 - Um **tour de Euler** em G é um tour que inclui cada aresta de G exatamente uma vez.

Introdução

- Definição 8.3
 - Um **tour de Euler** em G é um tour que inclui cada aresta de G exatamente uma vez.
 - Assim, um tour de Euler é uma trilha de Euler fechada.

Introdução

Introdução

- Definição 8.4

Introdução

- Definição 8.4
 - Um grafo G é chamado de **grafo de Euler** se tem um tour de Euler.

Introdução

Introdução

- Exemplos:

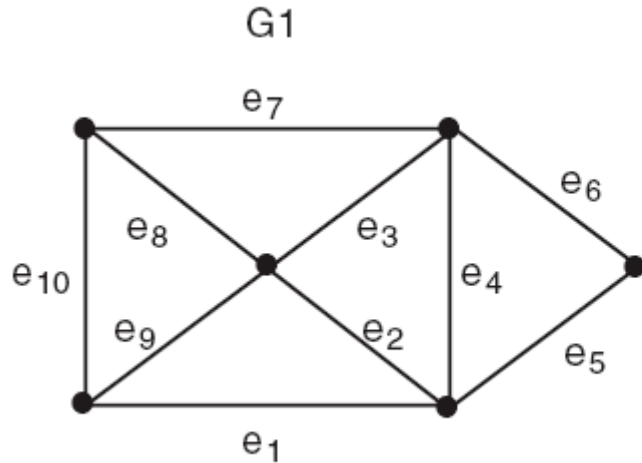
Introdução

- Exemplos:
 - O grafo G_1 não é um grafo de Euler, entretanto, tem uma trilha de Euler.

Introdução

- Exemplos:

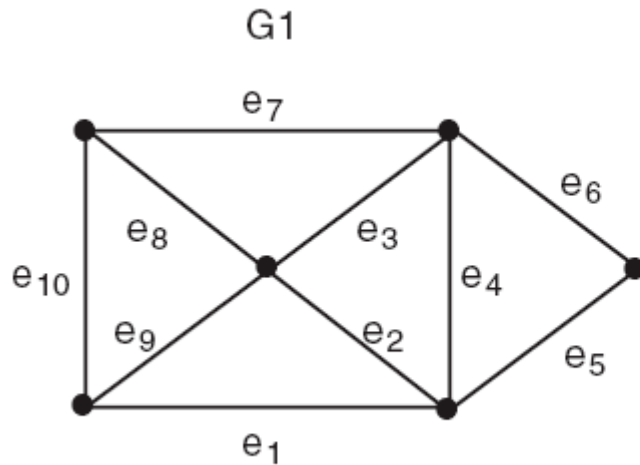
- O grafo G_1 não é um grafo de Euler, entretanto, tem uma trilha de Euler.



Introdução

- Exemplos:

- O grafo G_1 não é um grafo de Euler, entretanto, tem uma trilha de Euler.



- Trilha de Euler: $e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9e_{10}$

Introdução

Introdução

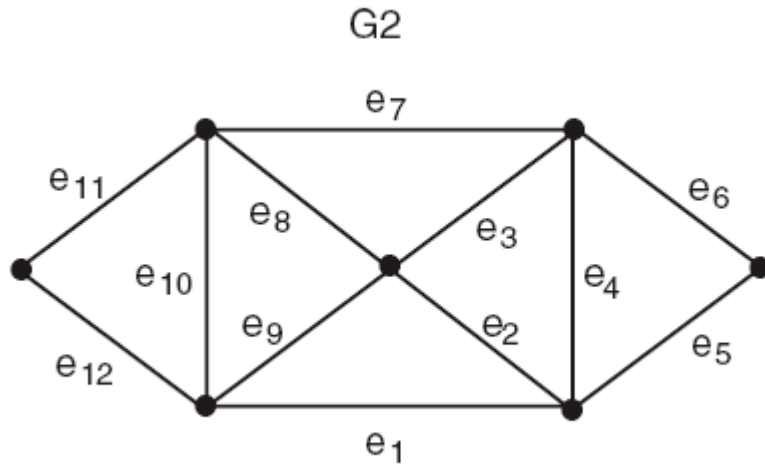
- Exemplos:

Introdução

- Exemplos:
 - O grafo G_2 é um grafo de Euler.

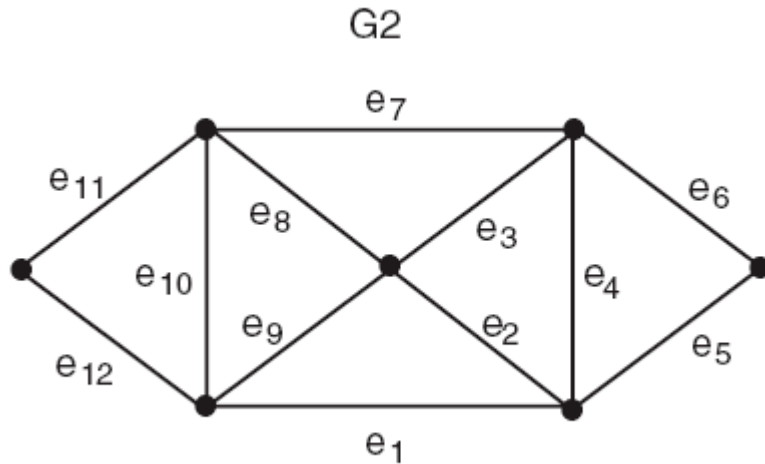
Introdução

- Exemplos:
 - O grafo G_2 é um grafo de Euler.



Introdução

- Exemplos:
 - O grafo G_2 é um grafo de Euler.



GRAFO DE EULER

Grafo de Euler

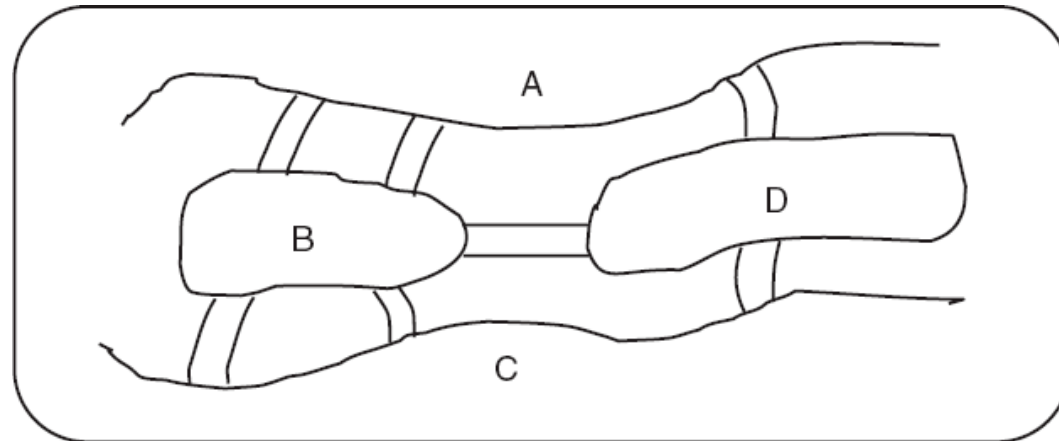
- O suíço Leonhard Euler (1707-1783) foi a primeira pessoa a resolver um problema conhecido como “As pontes de Königsberg”.

Grafo de Euler

- O problema consiste em determinar se uma pessoa pode, a partir de determinado ponto, atravessar cada uma das sete pontes exatamente uma vez e voltar ao ponto de onde partiu.

Grafo de Euler

- O problema consiste em determinar se uma pessoa pode, a partir de determinado ponto, atravessar cada uma das sete pontes exatamente uma vez e voltar ao ponto de onde partiu.

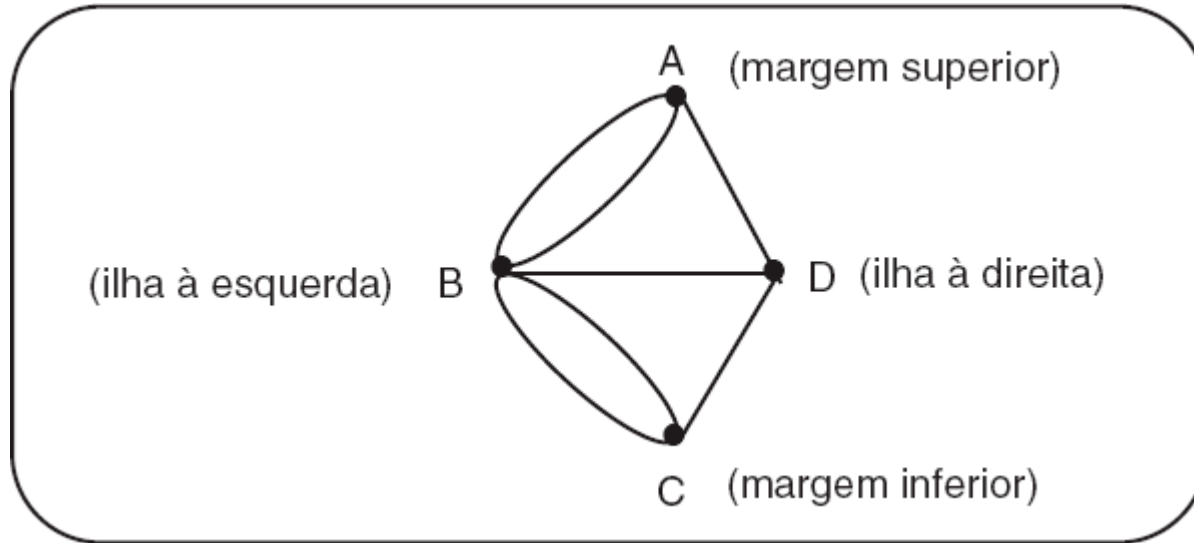


Grafo de Euler

- Euler abstraiu o problema como o grafo abaixo:

Grafo de Euler

- Euler abstraiu o problema como o grafo abaixo:

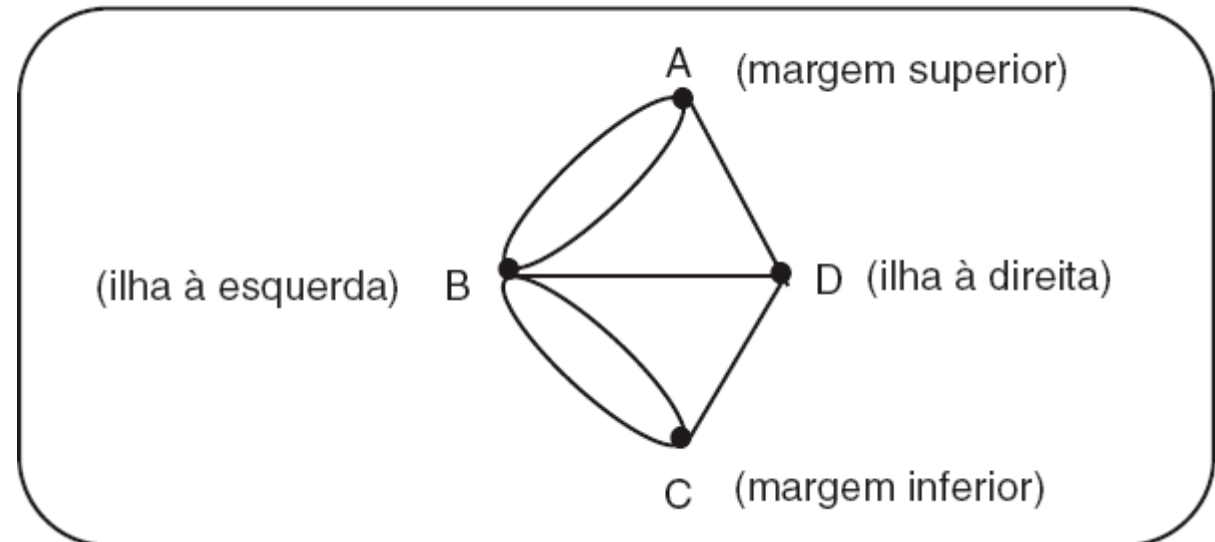


Grafo de Euler

- É possível percorrer o diagrama abaixo a partir de qualquer dos pontos A, B, C ou D, usando todos os arcos apenas uma vez e voltar ao ponto de início?

Grafo de Euler

- É possível percorrer o diagrama abaixo a partir de qualquer dos pontos A, B, C ou D, usando todos os arcos apenas uma vez e voltar ao ponto de início?



Grafo de Euler

Grafo de Euler

- Percorrer as sete pontes passando por elas apenas uma vez caracterizaria uma trilha de Euler.

Grafo de Euler

- Percorrer as sete pontes passando por elas apenas uma vez caracterizaria uma trilha de Euler.
- Percorrer as sete pontes apenas uma vez voltando ao ponto de partida caracterizaria um tour de Euler.

Grafo de Euler

- Percorrer as sete pontes passando por elas apenas uma vez caracterizaria uma trilha de Euler.
- Percorrer as sete pontes apenas uma vez voltando ao ponto de partida caracterizaria um tour de Euler.
- Euler mostrou que a resposta ao problema é “não”, mostrando que o grafo não tem (o que foi mais tarde definido como) uma trilha de Euler.

Problema do Carteiro Chinês

Introdução

Introdução

- Pense nos serviços como coleta de lixo ou correios.

Introdução

- Pense nos serviços como coleta de lixo ou correios.
- Os cruzamentos das ruas são vértices do grafo e as arestas são as ruas.

Introdução

- Pense nos serviços como coleta de lixo ou correios.
- Os cruzamentos das ruas são vértices do grafo e as arestas são as ruas.
- Cada rua tem um custo de percurso associado que representa a distância, tempo ou outro fator.

Introdução

- Pense nos serviços como coleta de lixo ou correios.
- Os cruzamentos das ruas são vértices do grafo e as arestas são as ruas.
- Cada rua tem um custo de percurso associado que representa a distância, tempo ou outro fator.
- É necessário percorrer **todas** as rua se retornar ao ponto inicial com custo mínimo.

Aplicações

Aplicações

- Coleta de lixo.

Aplicações

- Coleta de lixo.
- Vendas em domicílio.

Aplicações

- Coleta de lixo.
- Vendas em domicílio.
- Entrega do correio.

Aplicações

- Coleta de lixo.
- Vendas em domicílio.
- Entrega do correio.
- Recenseamento.

Aplicações

- Coleta de lixo.
- Vendas em domicílio.
- Entrega do correio.
- Recenseamento.
- ...

Problema do Caixeiro Viajante

Problema do Caixeiro Viajante

- Histórico

Problema do Caixeiro Viajante

- Histórico
 - A literatura relata um grande número de problemas de otimização combinatória associados aos percursos desenvolvidos sobre as arestas de um grafo G .

Problema do Caixeiro Viajante

- Histórico
 - A literatura relata um grande número de problemas de otimização combinatória associados aos percursos desenvolvidos sobre as arestas de um grafo G .
 - O Problema do Carteiro Chinês foi relatado inicialmente por Kwan Mei-Ko em 1962, na revista *Chinese Mathematics*.

Problema do Caixeiro Viajante

Problema do Caixeiro Viajante

- Definição

Problema do Caixeiro Viajante

- Definição
 - O Problema do Carteiro Chinês – PCC, consiste em determinar um passeio fechado de custo mínimo que passe por cada aresta de um grafo G conectado pelo menos uma vez.

Problema do Caixeiro Viajante

- O problema do carteiro chinês consiste em determinar como, partindo de determinado ponto e retornando a ele, percorrer todas as ruas de uma rota para entrega de cartas andando o mínimo possível.

Problema do Caixeiro Viajante

- Para modelar a situação, pode-se construir um grafo G no qual cada aresta representa uma rua na rota do carteiro, cada vértice representa um cruzamento entre ruas, e o peso associado a cada aresta representa o comprimento da rua entre os cruzamentos (ou o tempo gasto para percorrê-la).