Teoria dos Grafos

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE GRAFOS

Prof. Tiago Eugenio de Melo
tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

Observações

- As definições e teorias apresentadas aqui foram baseadas no livro *Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação* (LTC, 2018).

Observações

- As definições e teorias apresentadas aqui foram baseadas no livro *Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação* (LTC, 2018).
- A numeração das definições e teoremas seguem as mesmas referências adotadas no livro para facilitar a localização.

CONCEITOS INICIAIS

Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- Existem muitas maneiras de se representar grafos com o objetivo de tratá-los computacionalmente.

Conceitos Iniciais

- Existem muitas maneiras de se representar grafos com o objetivo de tratá-los computacionalmente.
- Principais formas:

Conceitos Iniciais

- Existem muitas maneiras de se representar grafos com o objetivo de tratá-los computacionalmente.
- Principais formas:
  - Matriz de adjacência.

Conceitos Iniciais

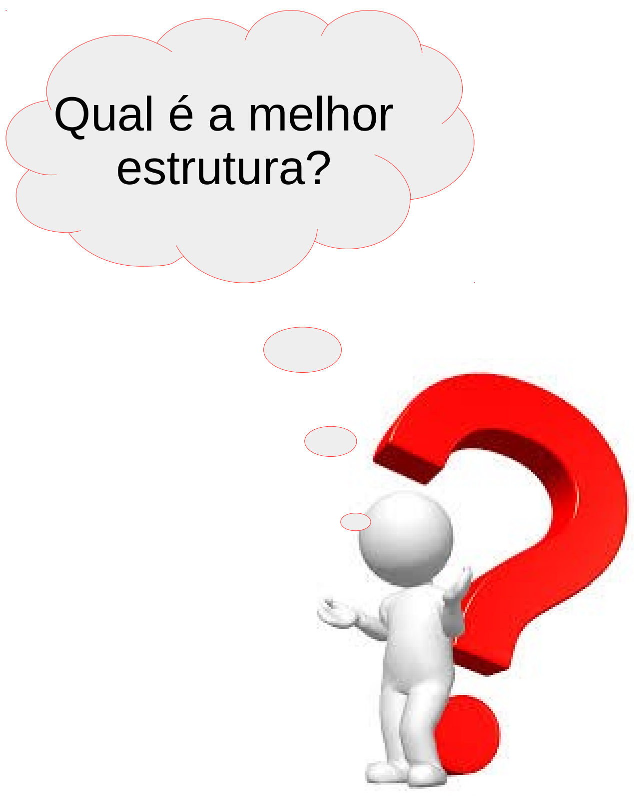
- Existem muitas maneiras de se representar grafos com o objetivo de tratá-los computacionalmente.
- Principais formas:
  - Matriz de adjacência.
  - Matriz de incidência.

Conceitos Iniciais

- Existem muitas maneiras de se representar grafos com o objetivo de tratá-los computacionalmente.
- Principais formas:
  - Matriz de adjacência.
  - Matriz de incidência.
  - Listas de adjacência.

Conceitos Iniciais

- Existem muitas maneiras de se representar grafos com o objetivo de tratá-los computacionalmente.
- Principais formas:
  - Matriz de adjacência.
  - Matriz de incidência.
  - Listas de adjacência.



Representação – Matriz de Adjacência

Representação – Matriz de Adjacência

- A ideia é associar **vértices** a linhas e colunas da matriz.

Representação – Matriz de Adjacência

- A ideia é associar **vértices** a linhas e colunas da matriz.
- **Definição 5.1**

Representação – Matriz de Adjacência

- A ideia é associar **vértices** a <u>linhas e colunas</u> da matriz.
- **Definição 5.1**
  - Seja G = (V,E) um grafo com n vértices nomeados de v1, v2, ..., vn.

Representação – Matriz de Adjacência

- A ideia é associar **vértices** a <u>linhas e colunas</u> da matriz.
- **Definição 5.1**
  - Seja G = (V,E) um grafo com n vértices nomeados de v1, v2, ..., vn.
  - A matriz de adjacência de G, com relação a essa particular nomeação dos n vértices de G, é a matriz quadrada n × n, A(G) = (aij), em que a posição (i,j) na matriz − aij − é o número de arestas que unem o vértice vi ao vértice vj.

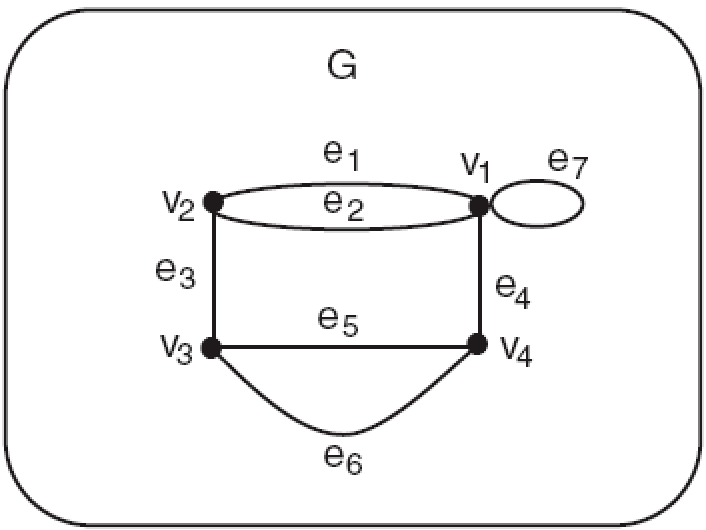
Representação – Matriz de Adjacência

Representação – Matriz de Adjacência

- Considere o grafo G da figura abaixo, cujos vértices são nomeados v1, v2, v3 e v4, como mostra a figura.

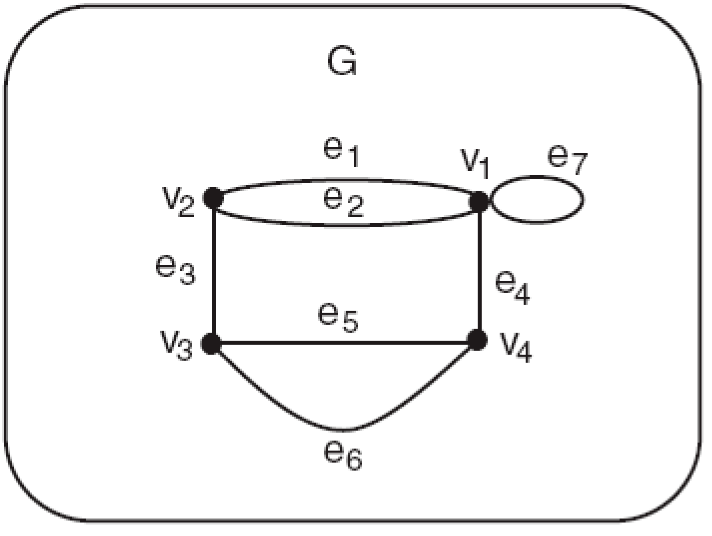
Representação – Matriz de Adjacência

- Considere o grafo G da figura abaixo, cujos vértices são nomeados v1, v2, v3 e v4, como mostra a figura.



Representação – Matriz de Adjacência

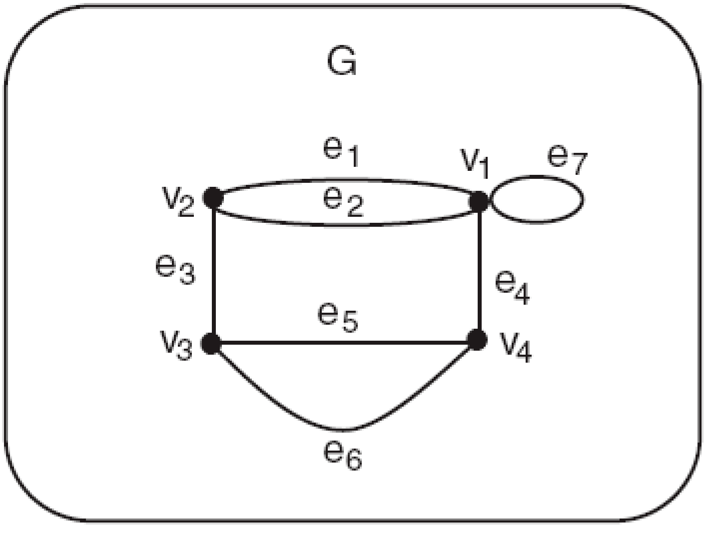
- Considere o grafo G da figura abaixo, cujos vértices são nomeados v1, v2, v3 e v4, como mostra a figura.



Grafo G com 4 vértices e 7 arestas.

Representação – Matriz de Adjacência

- Considere o grafo G da figura abaixo, cujos vértices são nomeados v1, v2, v3 e v4, como mostra a figura.

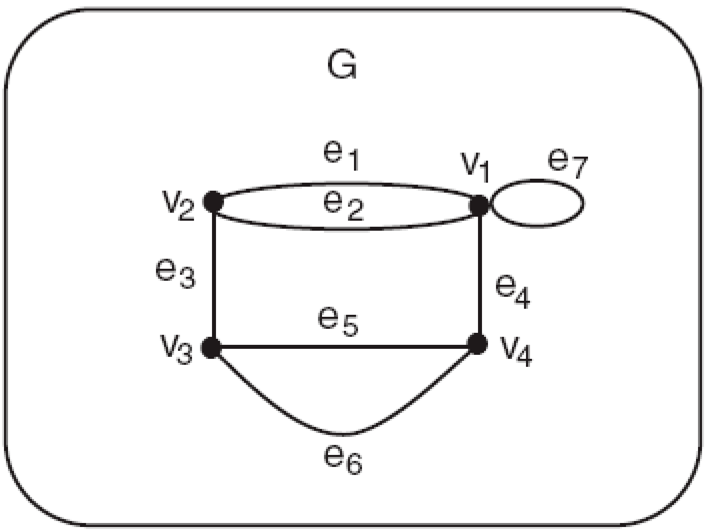


$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Grafo G com 4 vértices e 7 arestas.

Representação – Matriz de Adjacência

- Considere o grafo G da figura abaixo, cujos vértices são nomeados v1, v2, v3 e v4, como mostra a figura.



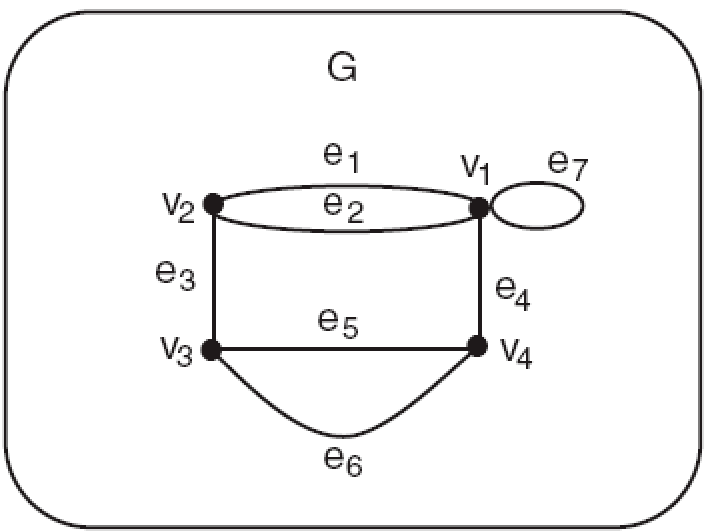
Grafo G com 4 vértices e 7 arestas.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de adjacência de G.

Representação – Matriz de Adjacência

- Considere o grafo G da figura abaixo, cujos vértices são nomeados v1, v2, v3 e v4, como mostra a figura.



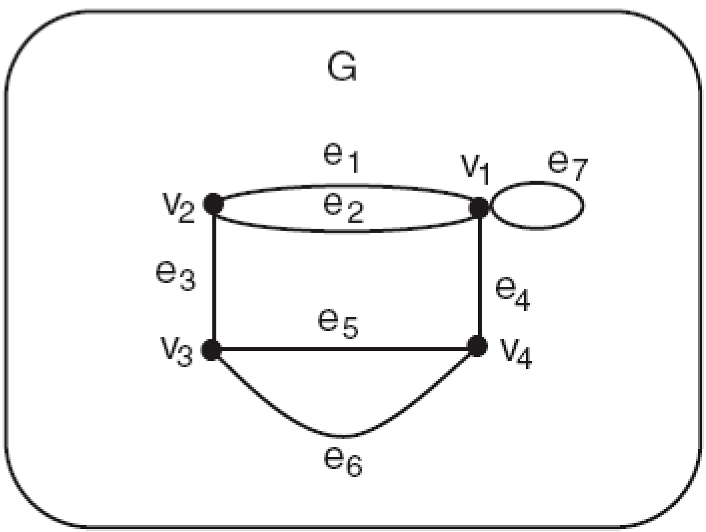
Grafo G com 4 vértices e 7 arestas.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de adjacência de G.

Representação – Matriz de Adjacência

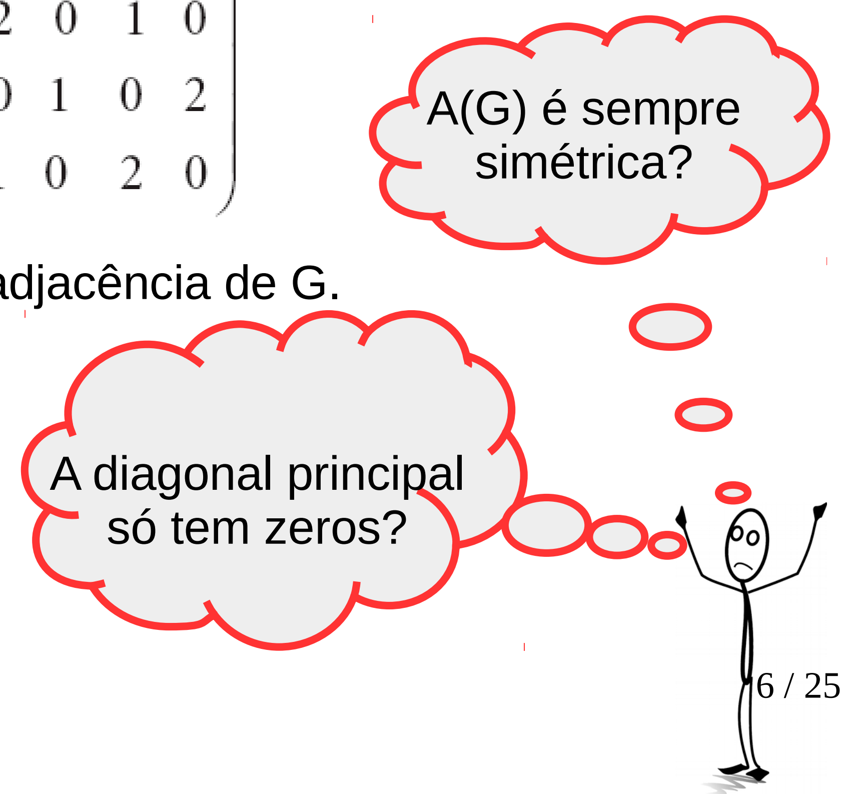
- Considere o grafo G da figura abaixo, cujos vértices são nomeados v1, v2, v3 e v4, como mostra a figura.



Grafo G com 4 vértices e 7 arestas.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de adjacência de G.



Representação – Matriz de Incidência

Representação – Matriz de Incidência

- A ideia é associar **vértices** a linhas e **arestas** a colunas.

Representação – Matriz de Incidência

- A ideia é associar **vértices** a <u>linhas</u> e **arestas** a <u>colunas</u>.
- **Definição 5.2**

Representação – Matriz de Incidência

- A ideia é associar **vértices** a linhas e **arestas** a colunas.
- **Definição 5.2**
  - Seja G = (V,E) um grafo com n vértices nomeados v1, v2, ..., vn e m arestas, nomeadas e1, e2, ..., em.

Representação – Matriz de Incidência

- A ideia é associar **vértices** a linhas e **arestas** a colunas.
- **Definição 5.2**
  - Seja G = (V,E) um grafo com n vértices nomeados v1, v2, ..., vn e m arestas, nomeadas e1, e2, ..., em.
  - A matriz de incidência de G, com relação a essa particular nomeação de vértices e de arestas de G é a matriz n × m M(G) = (mij), em que mij é o número de vezes que o vértice vi é incidente com a aresta ej, ou seja,

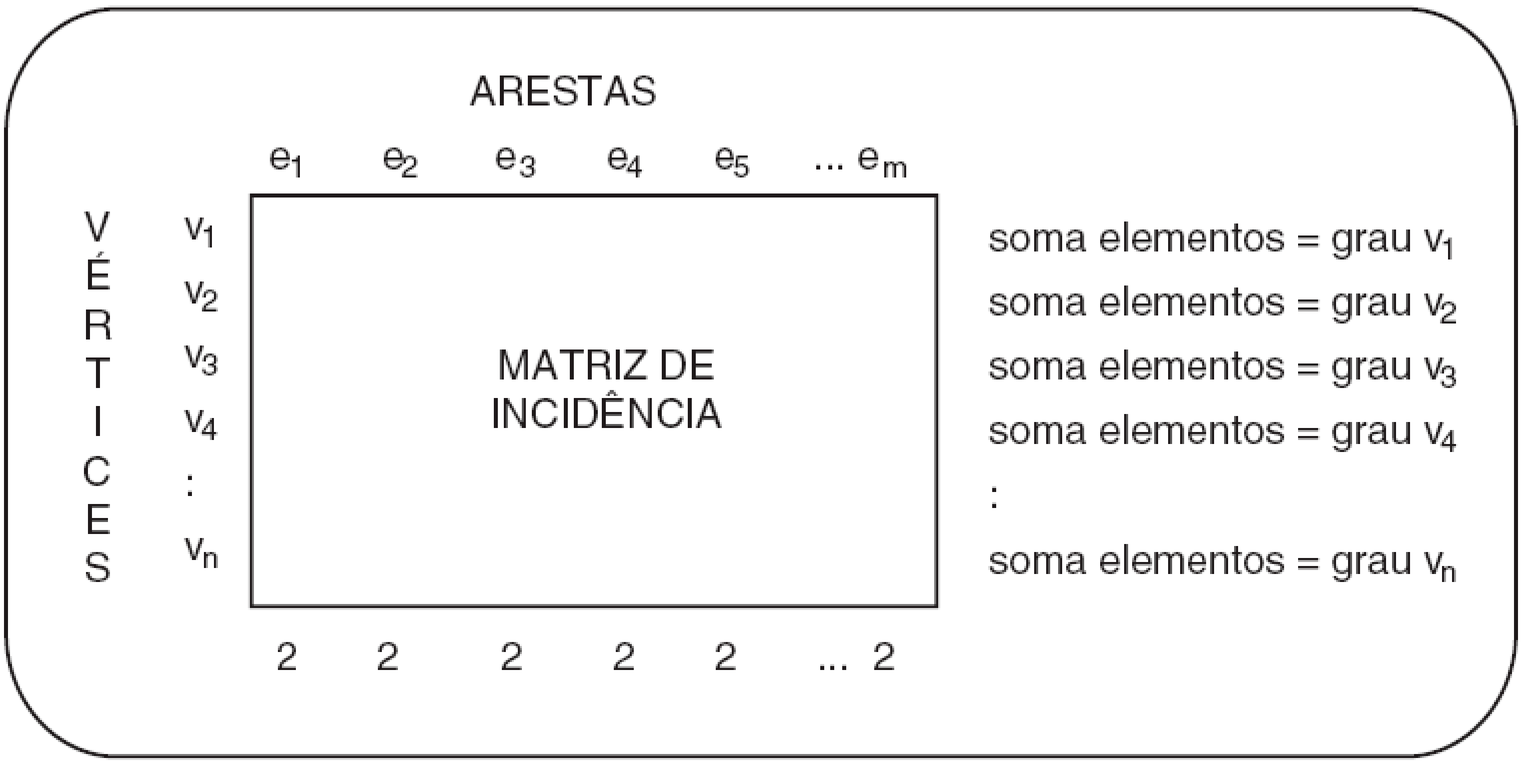
Representação – Matriz de Incidência

- A ideia é associar **vértices** a linhas e **arestas** a colunas.
- **Definição 5.2**
  - Seja G = (V,E) um grafo com n vértices nomeados v1, v2, ..., vn e m arestas, nomeadas e1, e2, ..., em.
  - A matriz de incidência de G, com relação a essa particular nomeação de vértices e de arestas de G é a matriz n × m M(G) = (mij), em que mij é o número de vezes que o vértice vi é incidente com a aresta ej, ou seja,

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } v_i \text{ não for uma extremidade de } e_j \\ 1 \text{ se } v_i \text{ for uma extremidade de uma aresta não} - \text{loop } e_j \\ 2 \text{ se } v_i \text{ for uma extremidade de um loop } e_j \end{cases}$$

Representação – Matriz de Incidência

- Esquema geral da matriz de incidência (n × m) de um grafo com n vértices e m arestas:

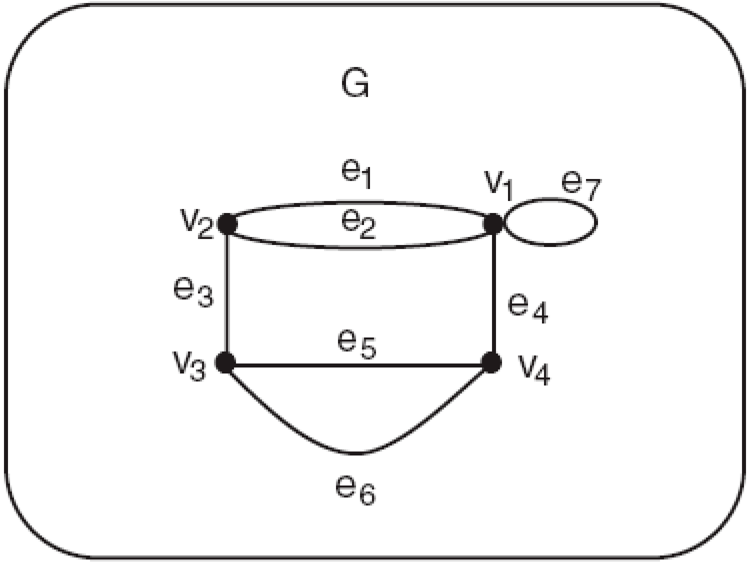


Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:

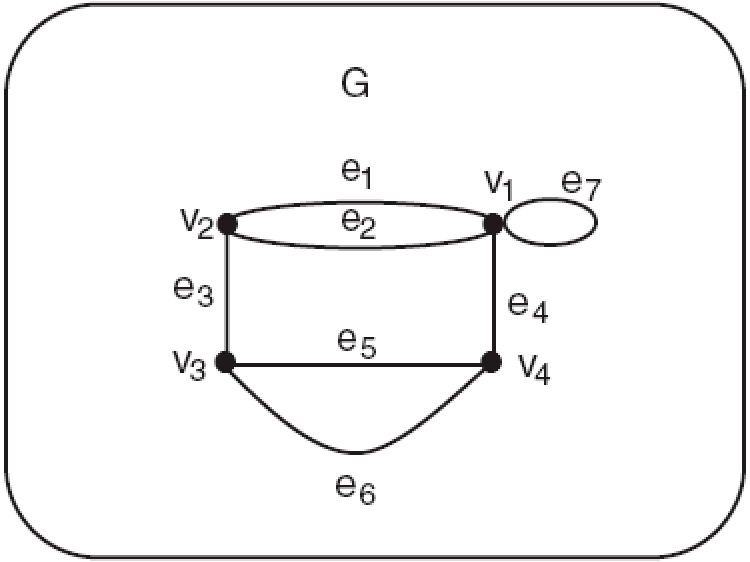
Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:



Representação – Matriz de Incidência

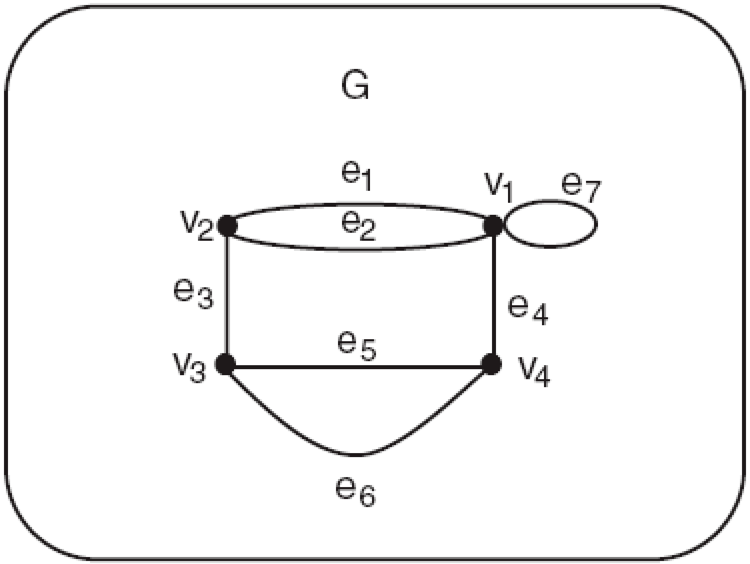
- Exemplo:



$$M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \text{grau de } v_1 = 5 \\ \text{grau de } v_2 = 3 \\ \text{grau de } v_3 = 3 \\ \text{grau de } v_4 = 3 \end{matrix}\right\}$$

Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:

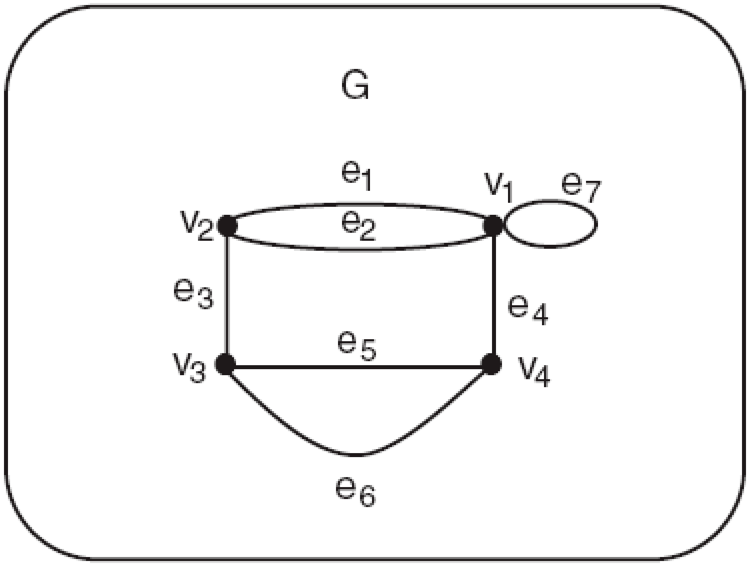


$$M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \text{grau de } v_1 = 5 \\ \text{grau de } v_2 = 3 \\ \text{grau de } v_3 = 3 \\ \text{grau de } v_4 = 3 \end{Bmatrix}$$

A soma dos elementos na i-ésima linha de M(G) dá o grau do vértice vi.

Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:



$$M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \text{grau de } v_1 = 5 \\ \text{grau de } v_2 = 3 \\ \text{grau de } v_3 = 3 \\ \text{grau de } v_4 = 3 \end{Bmatrix}$$

A soma dos elementos na i-ésima linha de M(G) dá o grau do vértice vi.

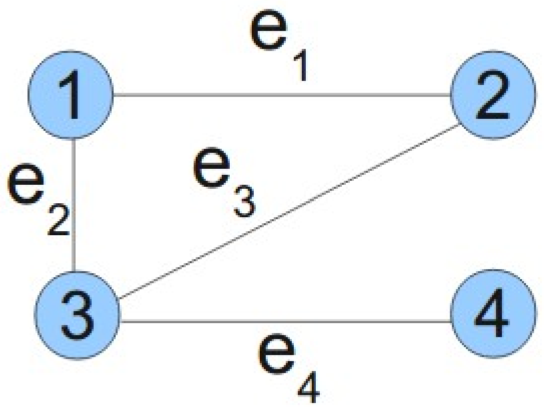
A soma dos elementos de cada coluna corresponde às duas extremidades da aresta que a coluna representa.

Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:

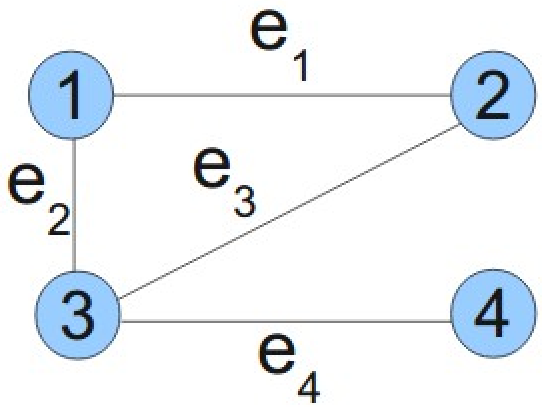
Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:



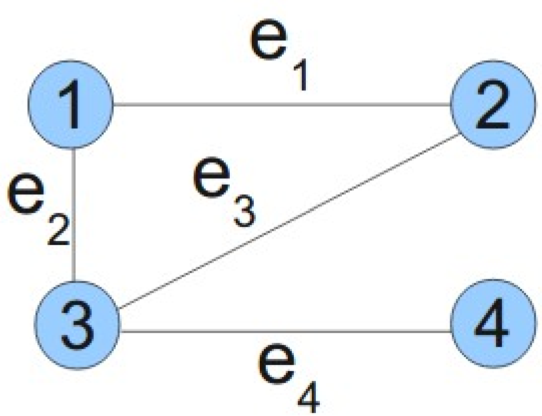
Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:



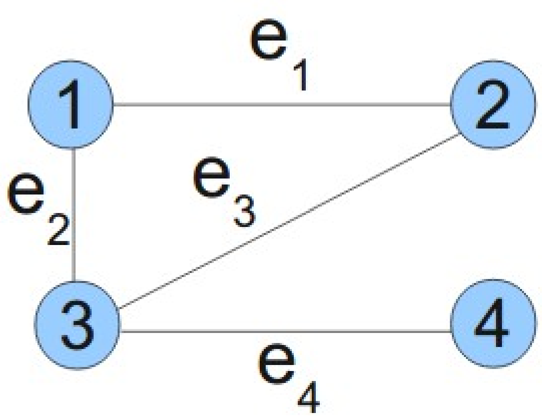
Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:



Representação – Matriz de Incidência

- Exemplo:



	e_1	e_2	e_3	e_4
1	1	1	0	0
2	1	0	1	0
3	0	1	1	1
4	0	0	0	1

Comentários

Comentários

- Considere um grafo com muitos vértices e poucas arestas.

Comentários

- Considere um grafo com muitos vértices e poucas arestas.
- A matriz seria formada principalmente por zeros!

Comentários

- Considere um grafo com muitos vértices e poucas arestas.
- A matriz seria formada principalmente por zeros!
- Grande desperdício de memória.

Comentários

- Considere um grafo com muitos vértices e poucas arestas.
- A matriz seria formada principalmente por zeros!
- Grande desperdício de memória.
- Qual seria a alternativa?

Representação – Listas de Adjacência

Representação – Listas de Adjacência

- A ideia é associar a cada vértice uma lista de vértices adjacentes.

Representação – Listas de Adjacência

- A ideia é associar a cada vértice uma lista de vértices adjacentes.
- Lista de adjacência

Representação – Listas de Adjacência

- A ideia é associar a cada vértice uma lista de vértices adjacentes.
- Lista de adjacência
  - Vértices estarão associados a um *array* de dimensão n (número de vértices do grafo).

Representação – Listas de Adjacência

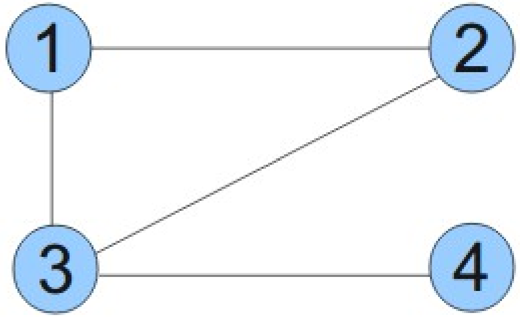
- A ideia é associar a cada vértice uma lista de vértices adjacentes.
- Lista de adjacência
  - Vértices estarão associados a um *array* de dimensão n (número de vértices do grafo).
  - Cada vértice possui uma lista de vértices adjacentes.

Representação – Listas de Adjacência

- Exemplo:

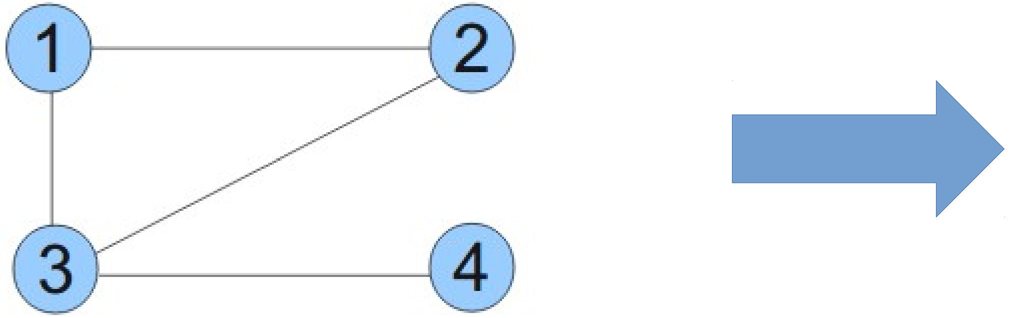
Representação – Listas de Adjacência

- Exemplo:



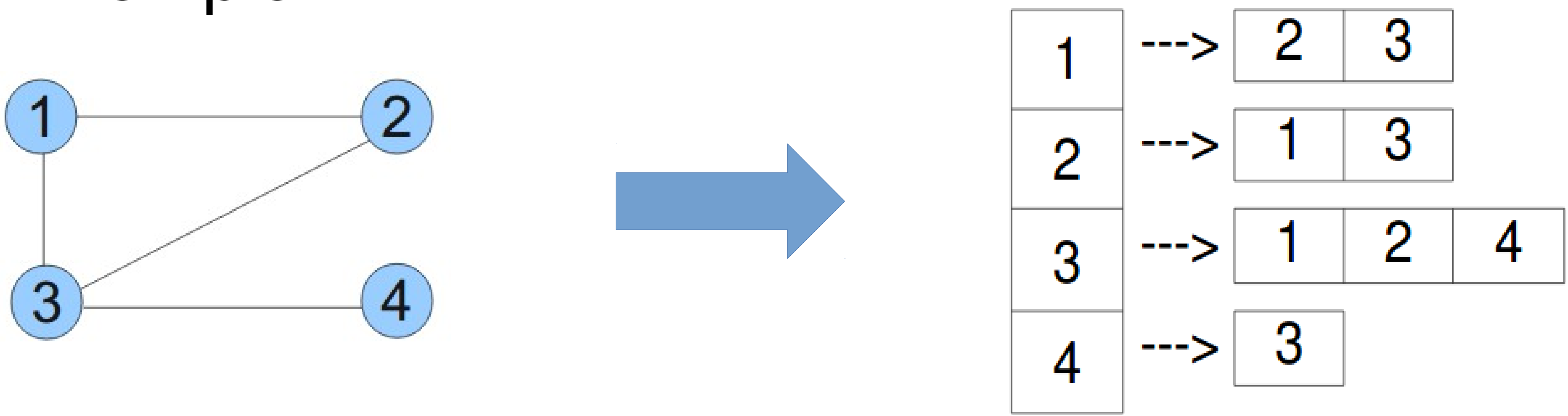
Representação – Listas de Adjacência

- Exemplo:



Representação – Listas de Adjacência

- Exemplo:



Comentários

Comentários

- Considere um grafo cujos vértices possuem um grande número de vizinhos.

Comentários

- Considere um grafo cujos vértices possuem um grande número de vizinhos.
- Qual seria o problema?

Comentários

- Considere um grafo cujos vértices possuem um grande número de vizinhos.
- Qual seria o problema?
  - As listas serão muito grandes (longas).

Comparação das estruturas

Tempo de execução	Matriz	Lista
Inserção de aresta	O(1)	O(1)
Remoção de aresta	O(1)	O(g’)
Teste da adjacência	O(1)	O(g’)
Listar os vizinhos de v	O(N*)	O(1)

Exercícios

- A representação matricial de grafos sempre terá a diagonal principal com valores 0 (zero)? Justifique a sua resposta.
- Qual seria o pior caso de representação de grafos através de listas de adjacências? Dê um exemplo.
- Compare a tarefa de remoção de arestas e vértices nas estruturas de matriz de adjacência e listas de adjacência em termos de desempenho.

Exercícios

- Faça o desenho do grafo da matriz de adjacência abaixo:

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	1	0	1	0	1
3	1	1	0	1	0
4	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0

Exercícios

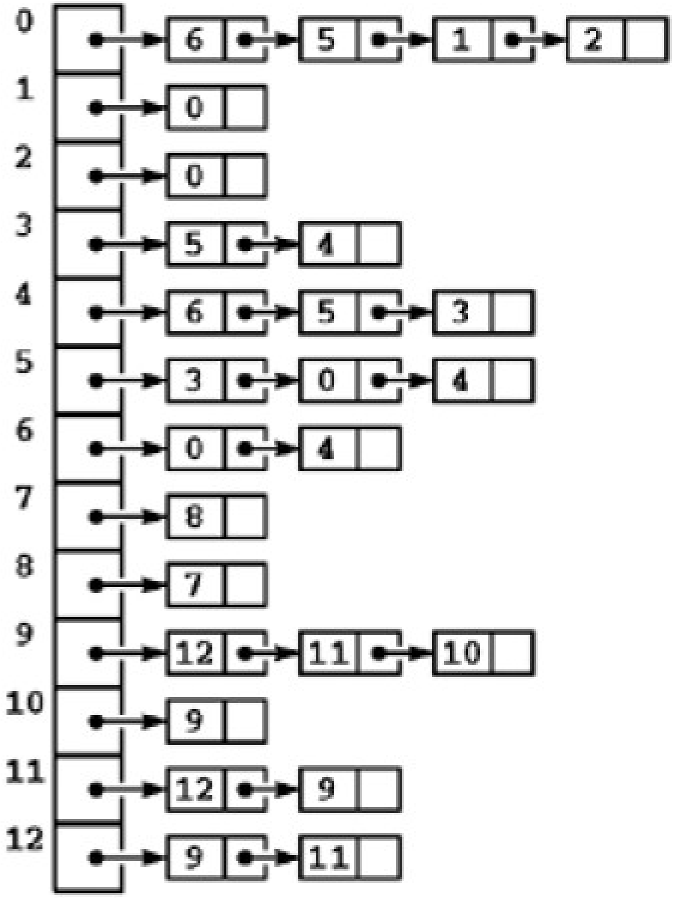
- Os Turistas Jensen, Leuzingner, Dufour e Medeiros se encontram em um bar de Paris e começam a conversar. As línguas disponíveis são o inglês, o francês, o português e o alemão. Jensen fala todas. Leuzingner não fala apenas o português. Dufour fala francês e alemão. Medeiros fala inglês e português. Represente por meio de um grafo todas as possibilidades de um deles dirigir a palavra a outro, sendo compreendido.

Exercícios

- Você usaria uma lista de adjacência ou uma matriz de adjacência em cada um dos casos abaixo? Justifique sua escolha.
  - a) O grafo tem 10.000 vértices e 20.000 arestas e é importante usar tão pouco espaço quanto possível.
  - b) O grafo tem 10.000 vértices e 20.000.000 arestas, e é importante usar tão pouco espaço quanto possível.
  - c) Você deve ter a aresta adjacente tão rápido quanto possível, sem se importar quanto espaço você usa.

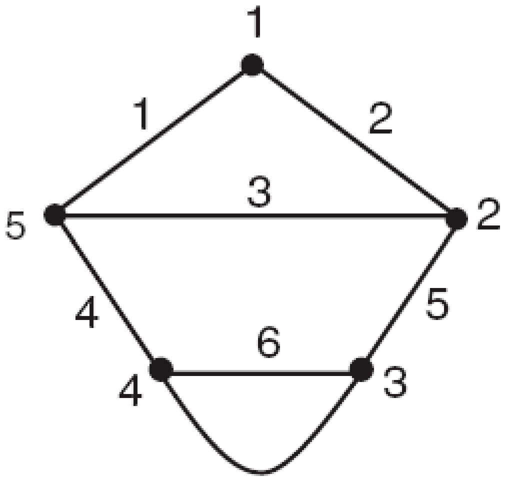
Exercícios

- Desenhe o grafo representado pela lista de adjacências abaixo:



Exercícios

- Constru a matriz de adjacência e de incidência do grafo mostrado a seguir:



- Desenhe um grafo cuja matriz de incidência é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercícios

- Se G é um grafo sem loops, o que você pode dizer sobre a soma das entradas em:
  - qualquer linha ou coluna da matriz de adjacência de G?
  - qualquer linha da matriz de incidência de G?
  - qualquer coluna da matriz de incidência de G?
- Se um grafo tem vértices de graus 1,2,3,3,4,5, quantas arestas ele tem? Justifique sua resposta.
- Pode um grafo ter vértices com graus 2,2,3,4,5,5,6,8 e nenhum outro vértice? Justifique sua resposta.

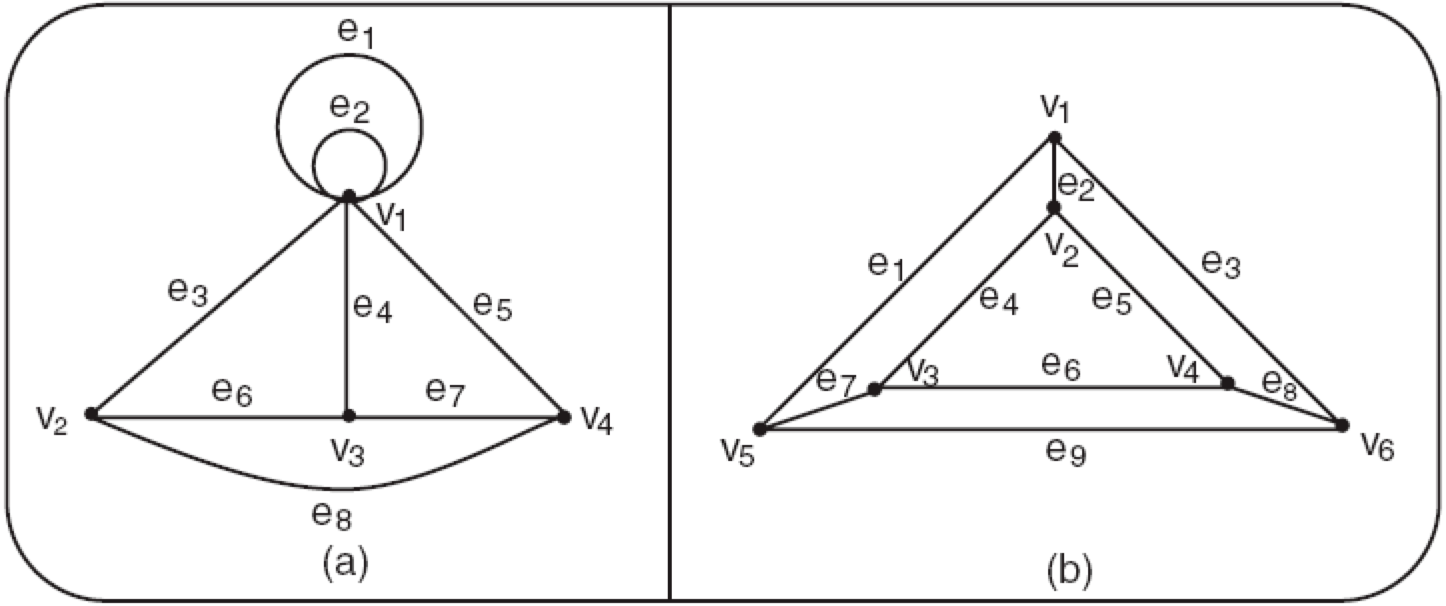
Exercícios

- Desenhe cada um dos grafos com as seguintes matrizes de adjacência:

$$(a)\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\quad(b)\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\quad(c)\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&2&2\\0&2&1&2\\0&2&2&1\end{pmatrix}\quad(d)\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&0&3&2\\2&3&0&1\\3&2&1&0\end{pmatrix}$$

Exercícios

- Escreva a matriz de adjacência e a matriz de incidência para os grafos mostrados em (a) e (b) a seguir, usando as ordenações de vértices e arestas dadas.



Exercícios

- Por que em uma matriz de adjacências verificar a existência de uma aresta é O(1)?
- Qual estrutura usa mais espaço, lista de adjacências ou matriz de adjacências? Justique a sua resposta.