

Teoria dos Grafos

INTRODUÇÃO A GRAFOS

Prof. Tiago Eugenio de Melo

tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

INTRODUÇÃO



Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

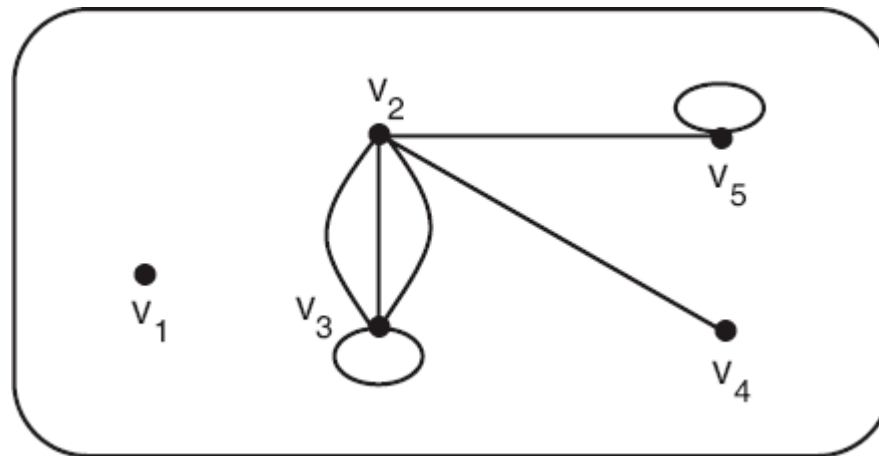
- Teoria dos Grafos (TG) é uma área do conhecimento voltada ao estudo/análise das estruturas matemáticas chamadas **grafos**.

Conceitos Iniciais

- Teoria dos Grafos (TG) é uma área do conhecimento voltada ao estudo/análise das estruturas matemáticas chamadas **grafos**.
- Um grafo pode ser informalmente definido como um conjunto de objetos chamados vértices e um conjunto de arestas que unem pares desses objetos.

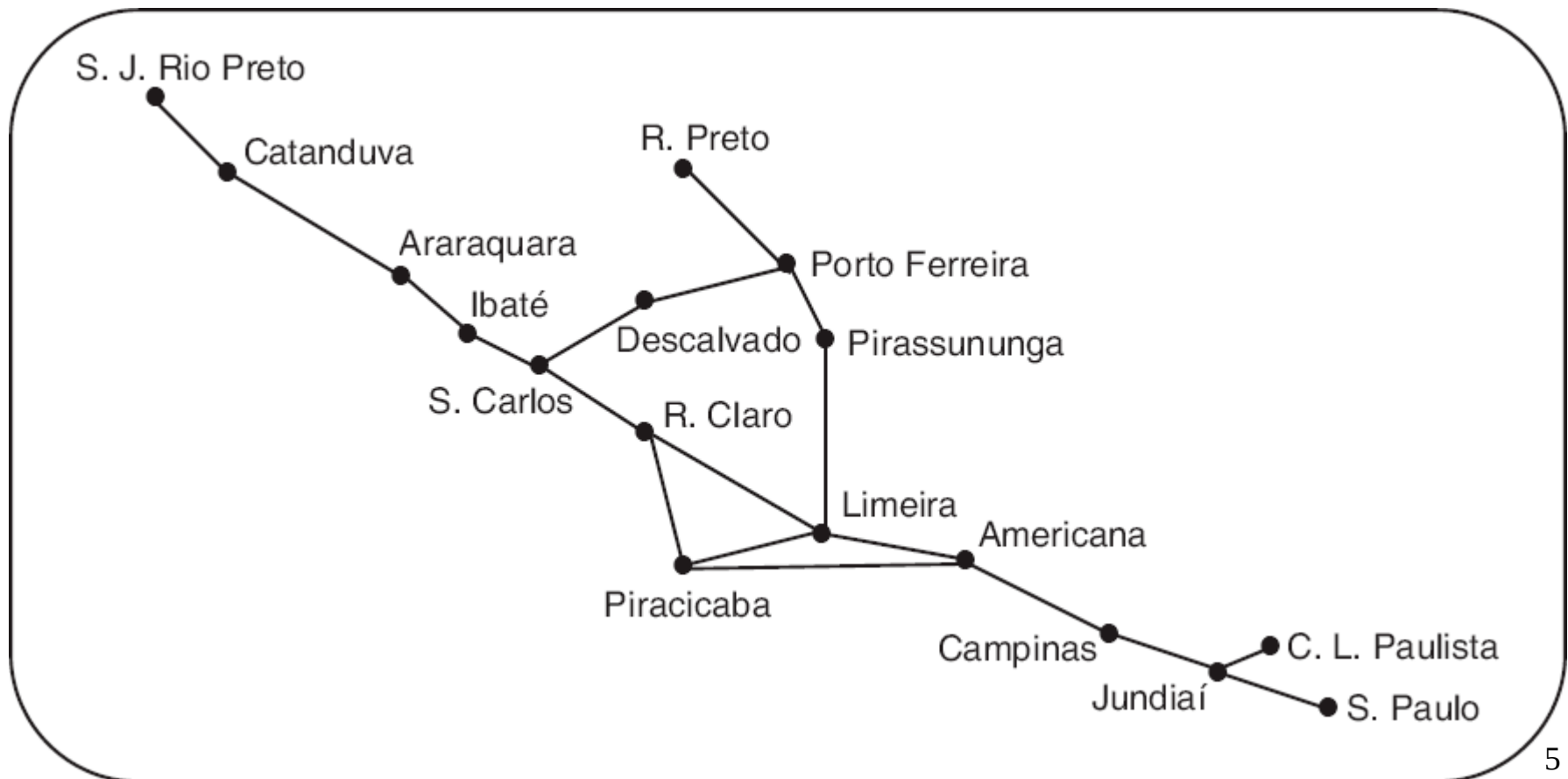
Conceitos Iniciais

- Grafo com cinco vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e sete arestas, três das quais são paralelas e duas são loops.



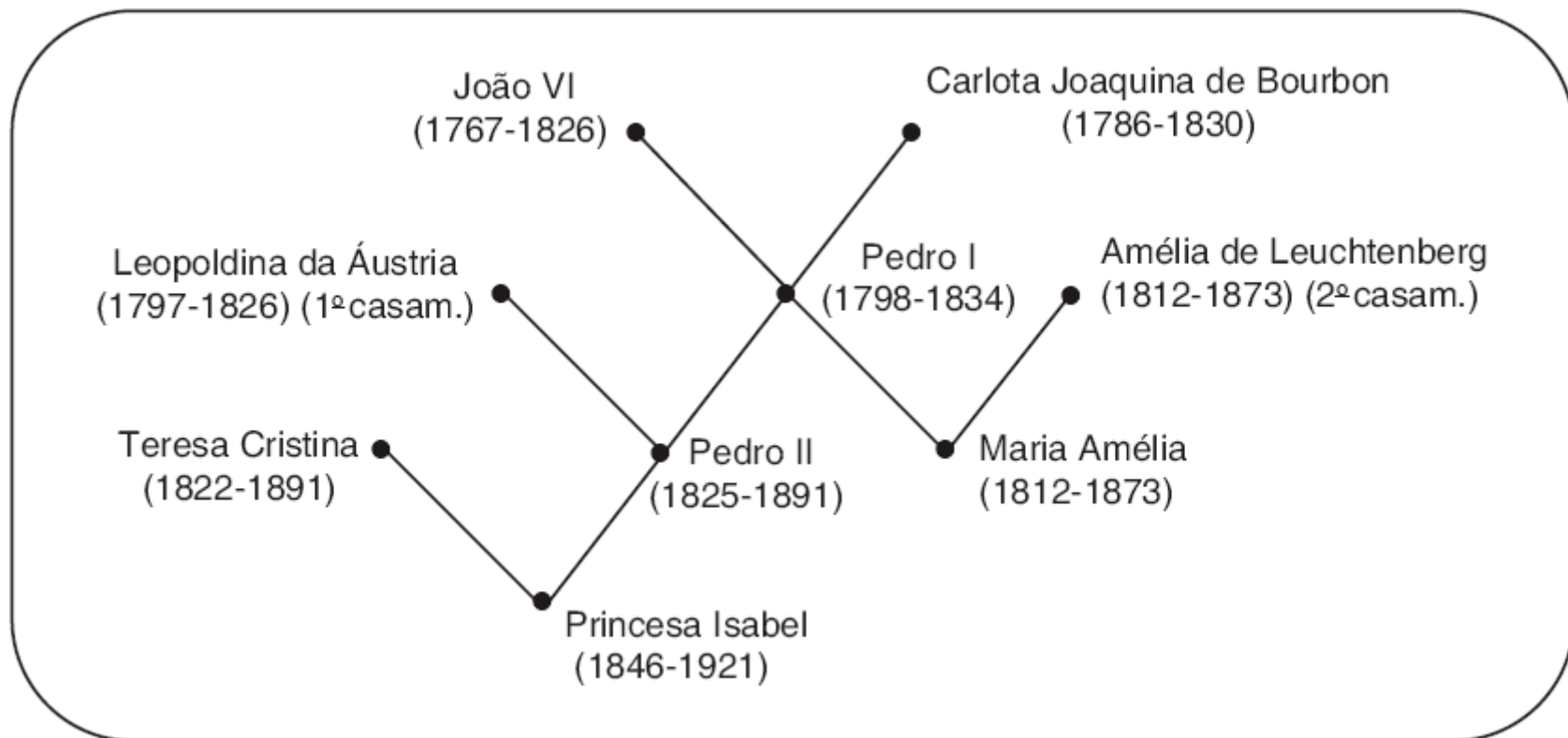
Exemplos

- Grafos podem ser usados para representar mapas.



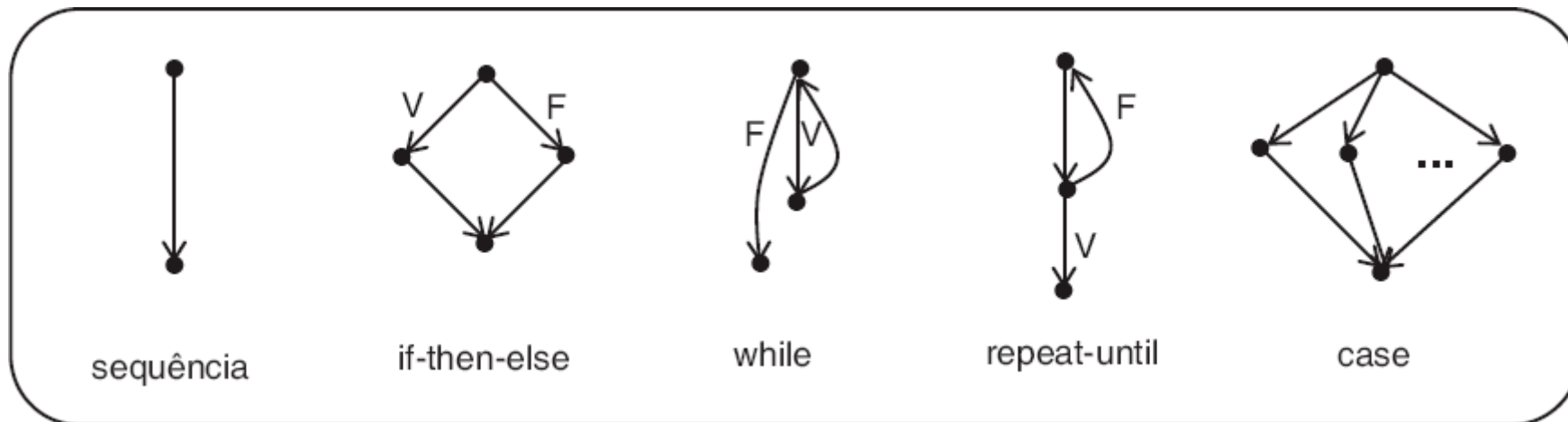
Exemplos

- Grafo como representação de relações familiares.



Exemplos

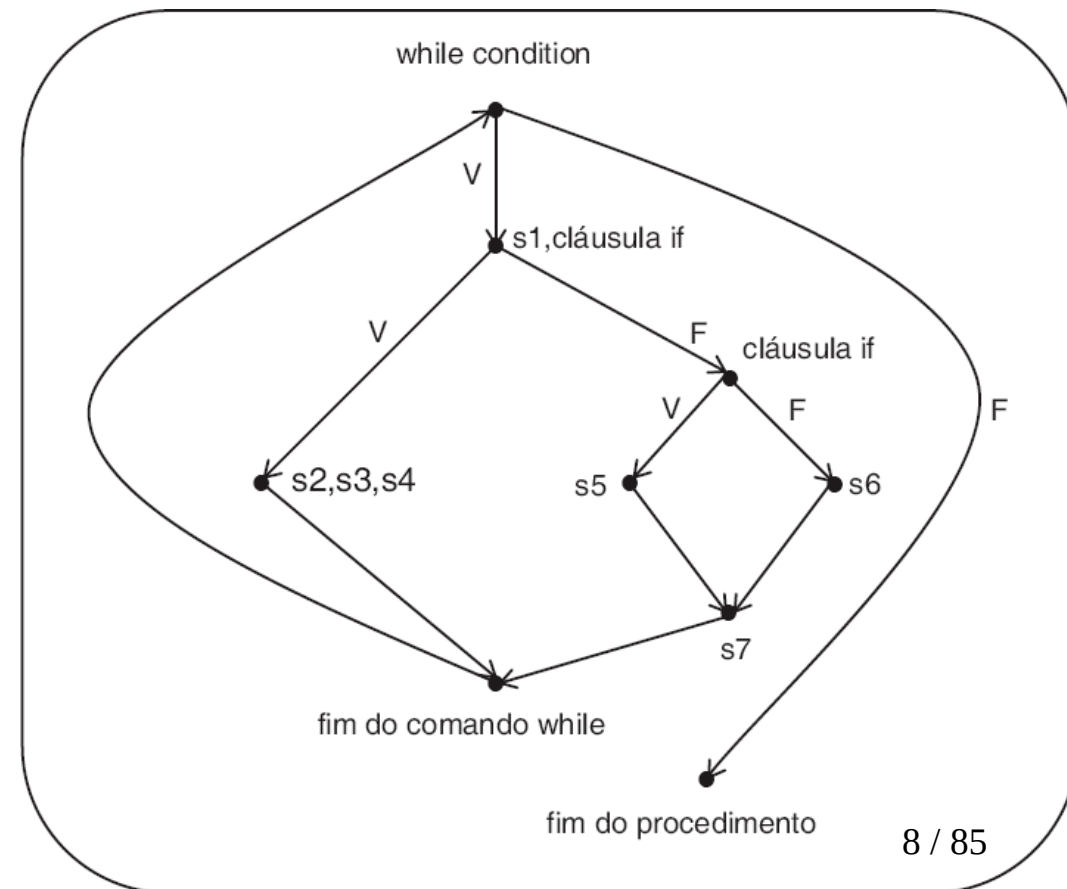
- Modelar um algoritmo ou um programa usando um grafo.



Exemplos

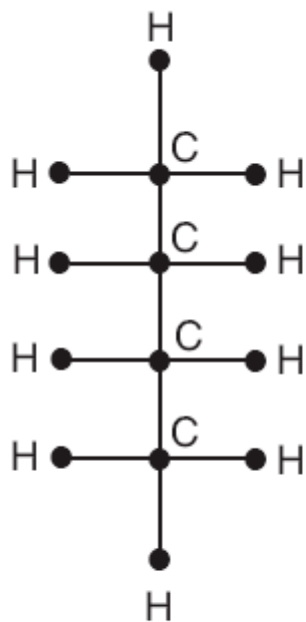
- Modelar um algoritmo ou um programa usando um grafo.

```
procedure whatever (...);  
begin  
  while (...) do  
    begin  
      s1;  
      if Flag1 = 0  
        then begin  
          s2;  
          s3;  
          s4  
        end  
        else begin  
          if Flag2 = 0  
            then s5  
            else s6;  
          s7  
        end  
    end  
  end  
end  
end
```

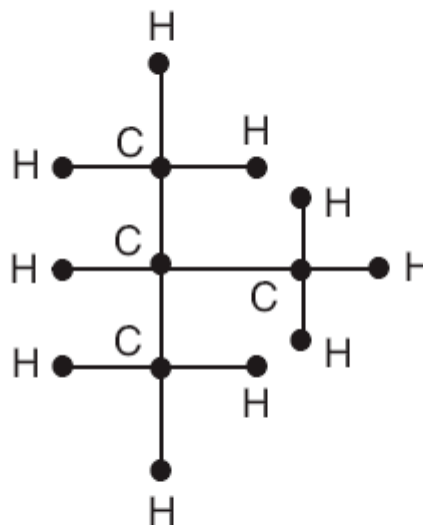


Exemplos

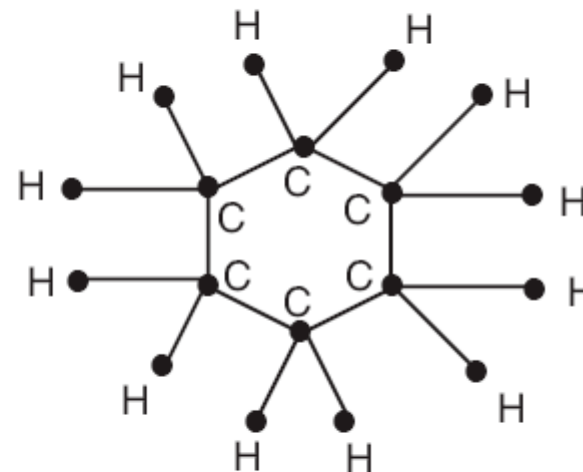
- Em Química, por exemplo, diagramas de moléculas podem ser tratados como grafos.



Butano



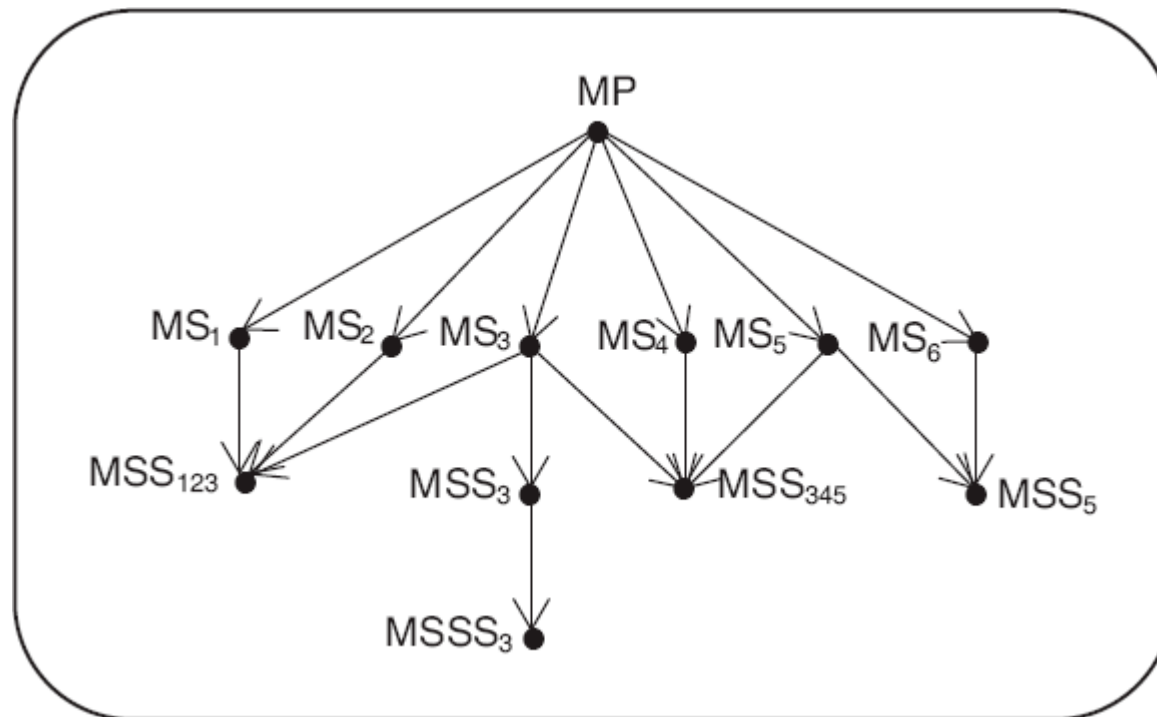
Isobutano



Cicloexano

Exemplos

- Uso de grafo na representação da estruturação de chamadas a módulos, em um sistema computacional.



CONCEITOS INICIAIS



Conceitos Iniciais

- **Definição 3.1**

- Um grafo $G = (V(G), E(G))$ ou $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ consiste em dois conjuntos finitos:

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.1**

- Um grafo $G = (V(G), E(G))$ ou $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ consiste em dois conjuntos finitos:
 - $V(G)$, (ou V), que é o conjunto de vértices do grafo, o qual é um conjunto não vazio de elementos chamados vértices.

Conceitos Iniciais

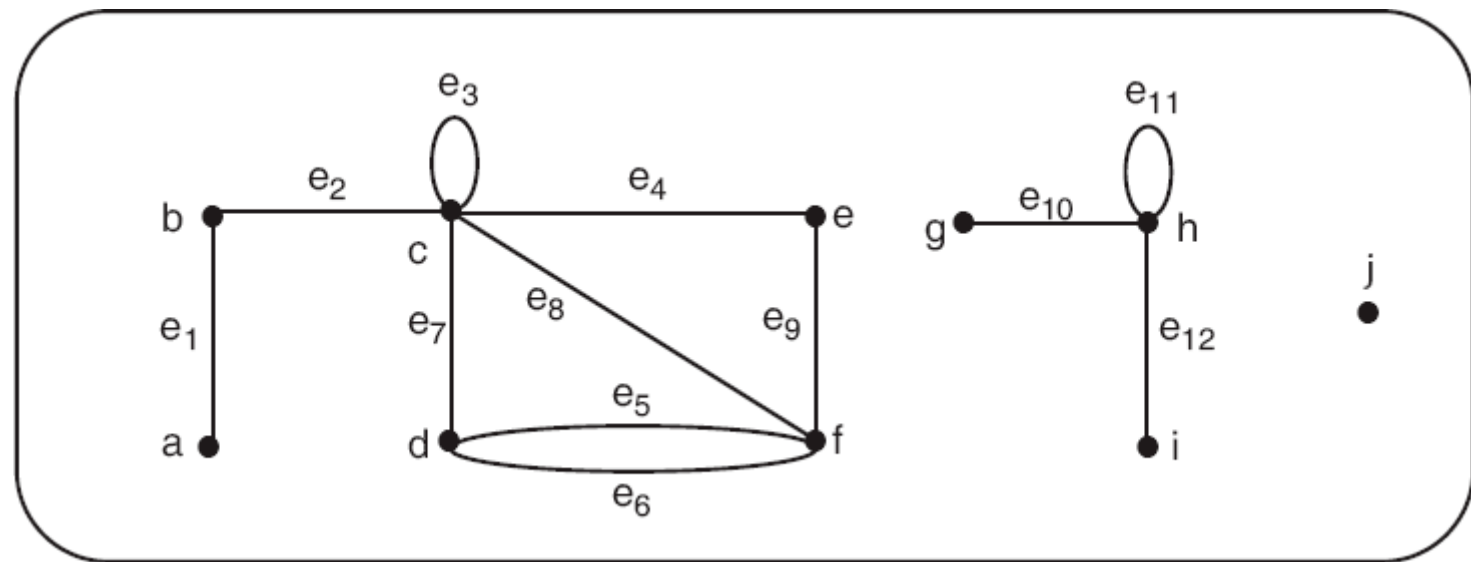
- **Definição 3.1**

- Um grafo $G = (V(G), E(G))$ ou $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ consiste em dois conjuntos finitos:
 - $V(G)$, (ou V), que é o conjunto de vértices do grafo, o qual é um conjunto não vazio de elementos chamados vértices.
 - $E(G)$, (ou E), que é o conjunto de arestas do grafo, o qual é um conjunto (que pode ser vazio) de elementos chamados arestas.

Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**

- Seja o grafo $G = (V, E)$ tal que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

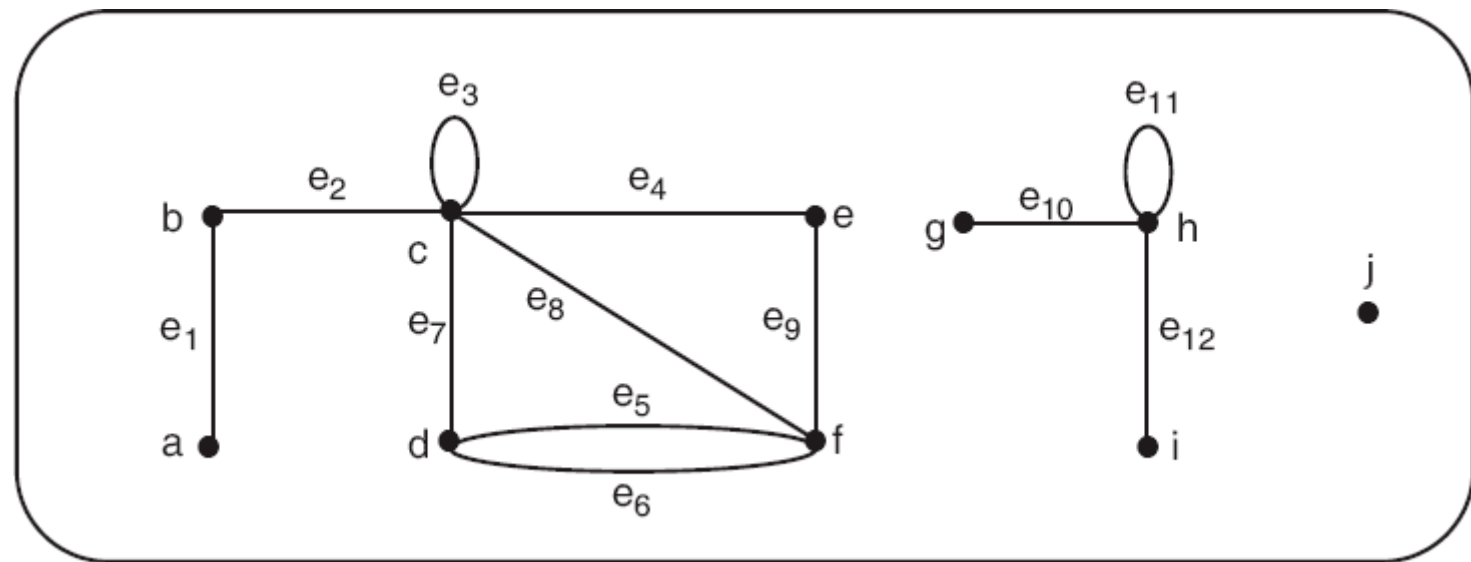


Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**

- Seja o grafo $G = (V, E)$ tal que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

- Arestas:



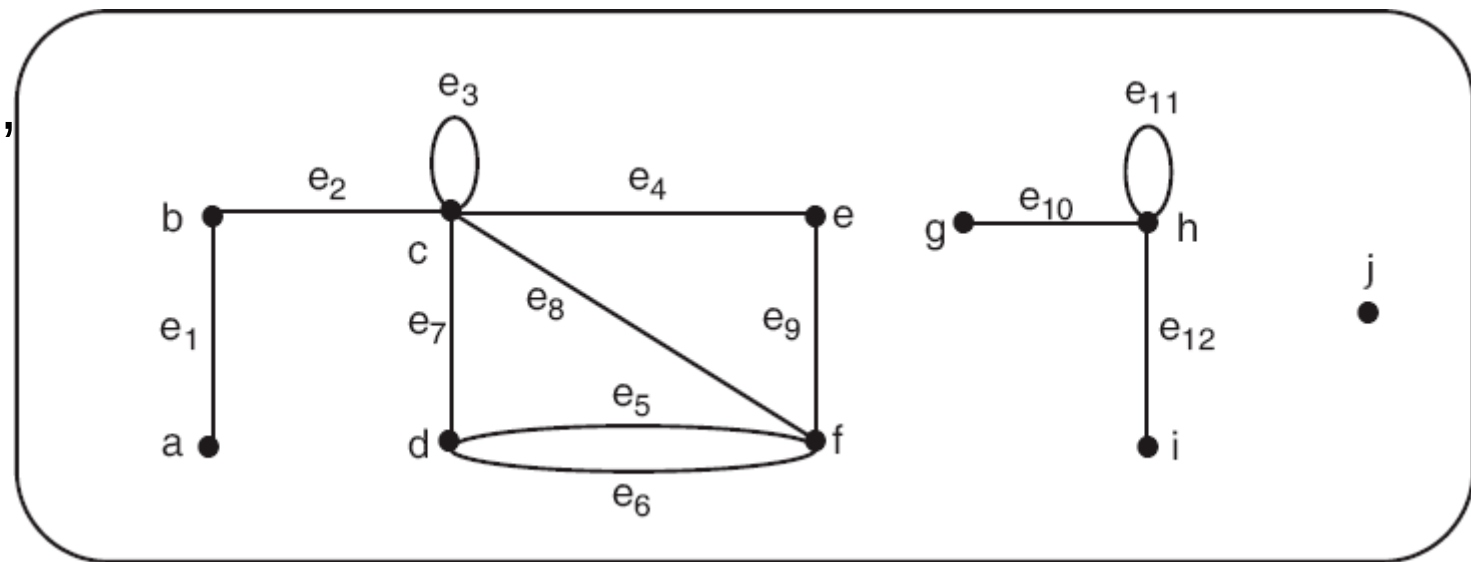
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**

- Seja o grafo $G = (V, E)$ tal que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

- Arestas:

- $e_1 \leftrightarrow (a,$



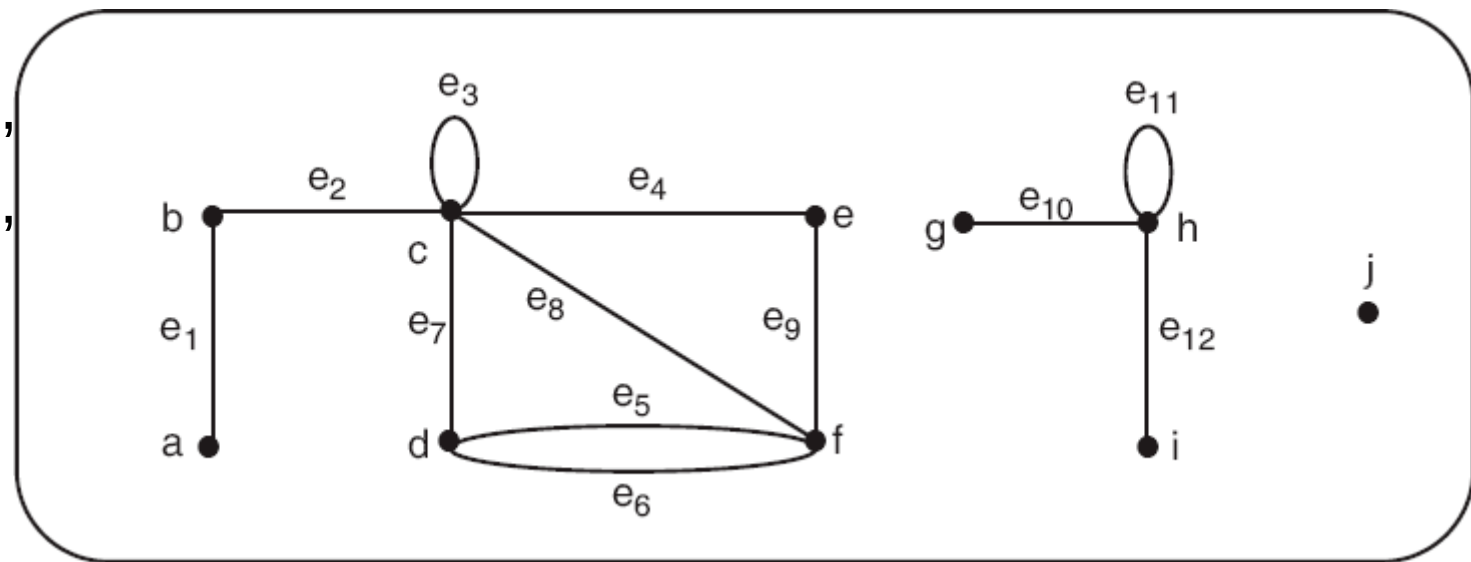
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**

- Seja o grafo $G = (V, E)$ tal que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

- Arestas:

- $e_1 \leftrightarrow (a, b)$
- $e_2 \leftrightarrow (b, c)$



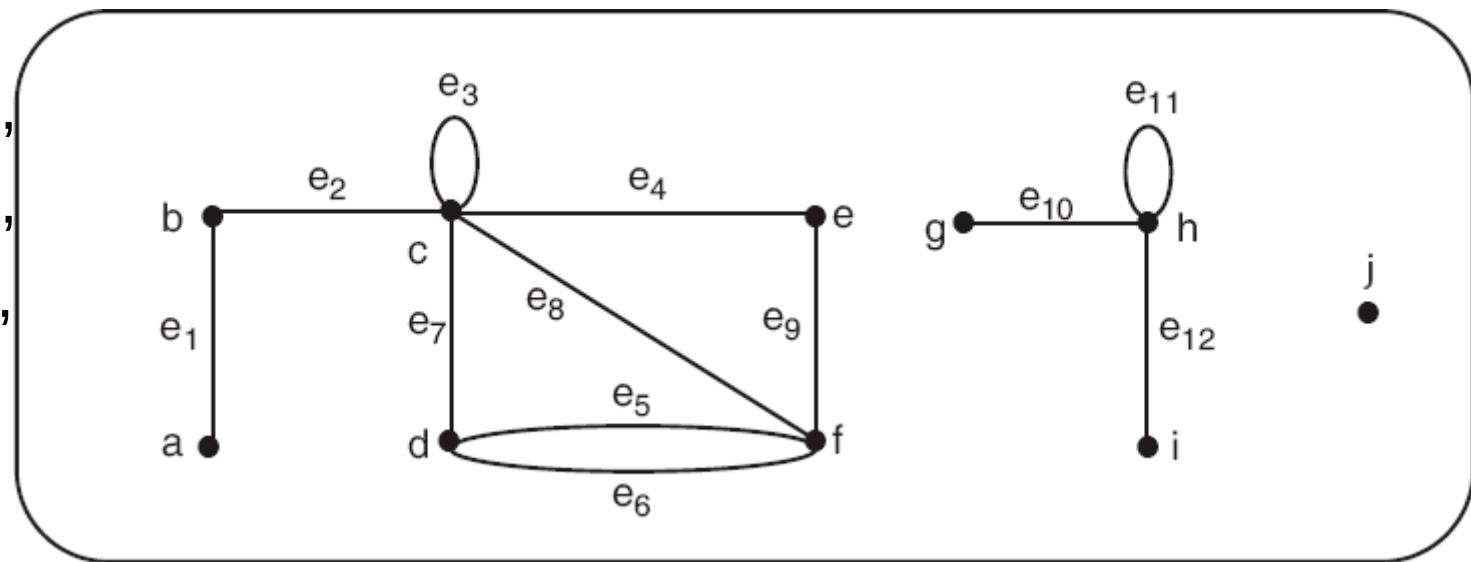
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**

- Seja o grafo $G = (V, E)$ tal que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

- Arestas:

- $e_1 \leftrightarrow (a, b)$
- $e_2 \leftrightarrow (b, c)$
- $e_3 \leftrightarrow (c, c)$



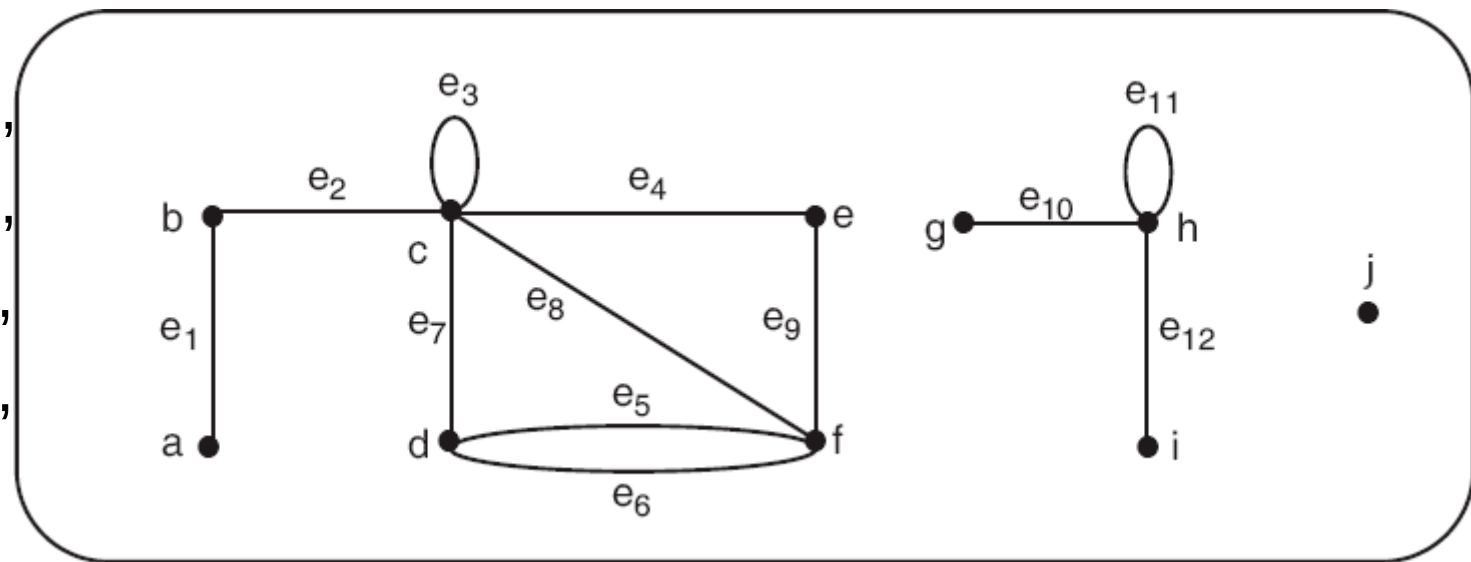
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**

- Seja o grafo $G = (V, E)$ tal que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

- Arestas:

- $e_1 \leftrightarrow (a, b)$
- $e_2 \leftrightarrow (b, c)$
- $e_3 \leftrightarrow (c, c)$
- $e_4 \leftrightarrow (c, e)$



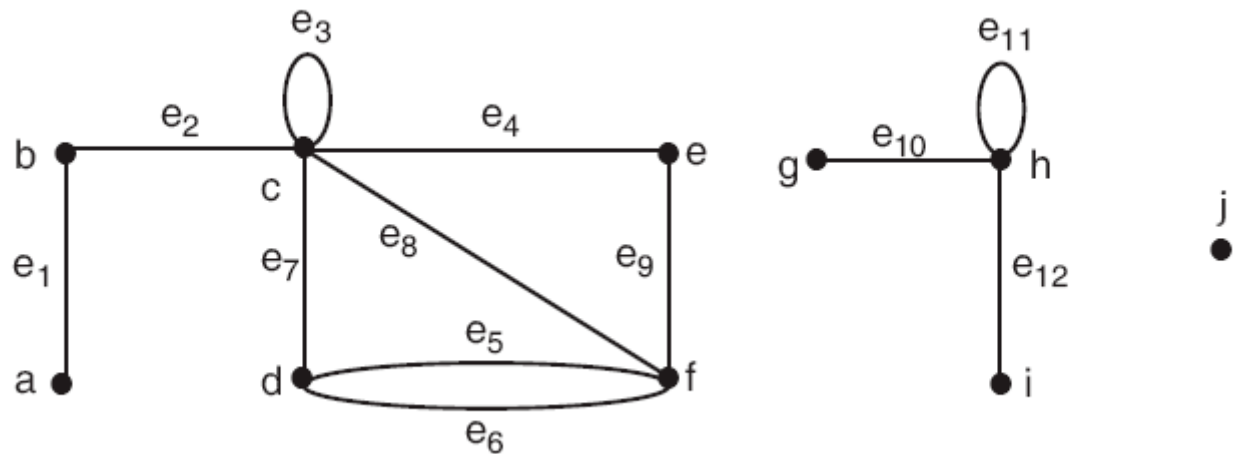
Conceitos Iniciais

- **EXEMPLO 3.1**

- Seja o grafo $G = (V, E)$ tal que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

- Arestas:

- $e_1 \leftrightarrow (a,$
- $e_2 \leftrightarrow (b,$
- $e_3 \leftrightarrow (c,$
- $e_4 \leftrightarrow (c,$
- $e_5 \leftrightarrow (d,$



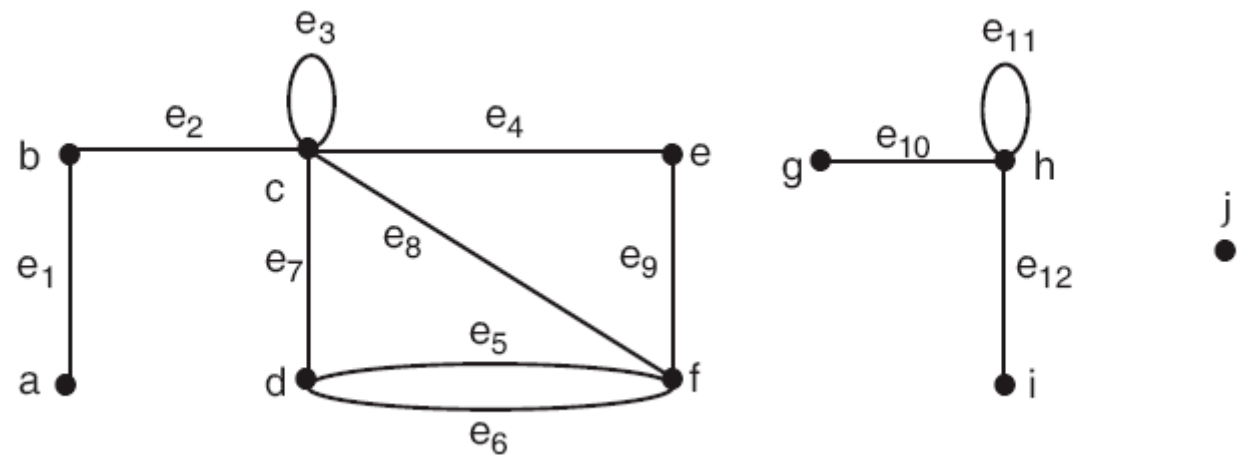
Conceitos Iniciais

• EXEMPLO 3.1

- Seja o grafo $G = (V, E)$ tal que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

- Arestas:

- $e_1 \leftrightarrow (a, b)$
- $e_2 \leftrightarrow (b, c)$
- $e_3 \leftrightarrow (c, c)$
- $e_4 \leftrightarrow (c, e)$
- $e_5 \leftrightarrow (d, f)$
- $e_6 \leftrightarrow (d, f)$



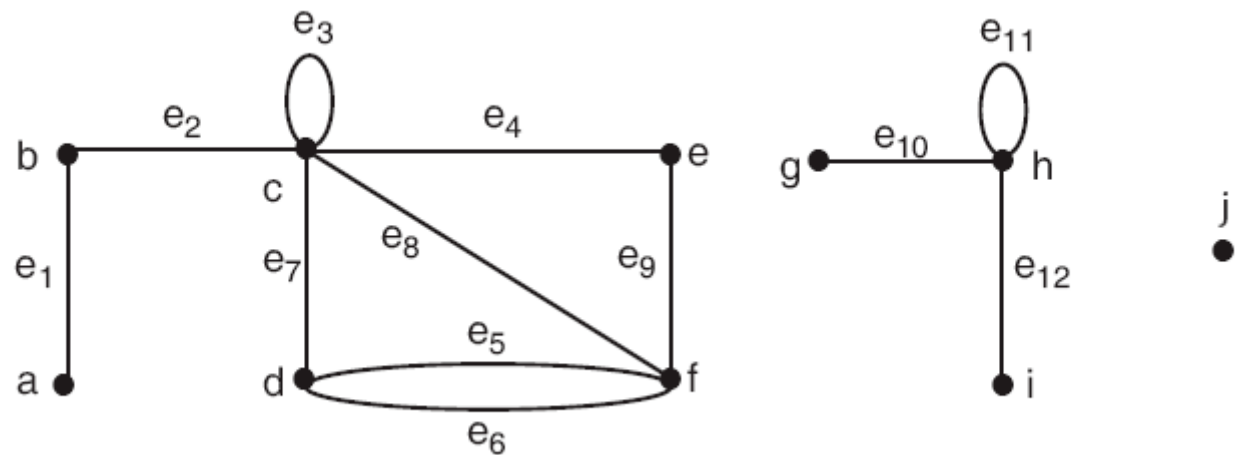
Conceitos Iniciais

• EXEMPLO 3.1

- Seja o grafo $G = (V, E)$ tal que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

- Arestas:

- $e_1 \leftrightarrow (a, b)$
- $e_2 \leftrightarrow (b, c)$
- $e_3 \leftrightarrow (c, c)$
- $e_4 \leftrightarrow (c, e)$
- $e_5 \leftrightarrow (d, f)$
- $e_6 \leftrightarrow (d, f)$
- $e_7 \leftrightarrow (c, d)$



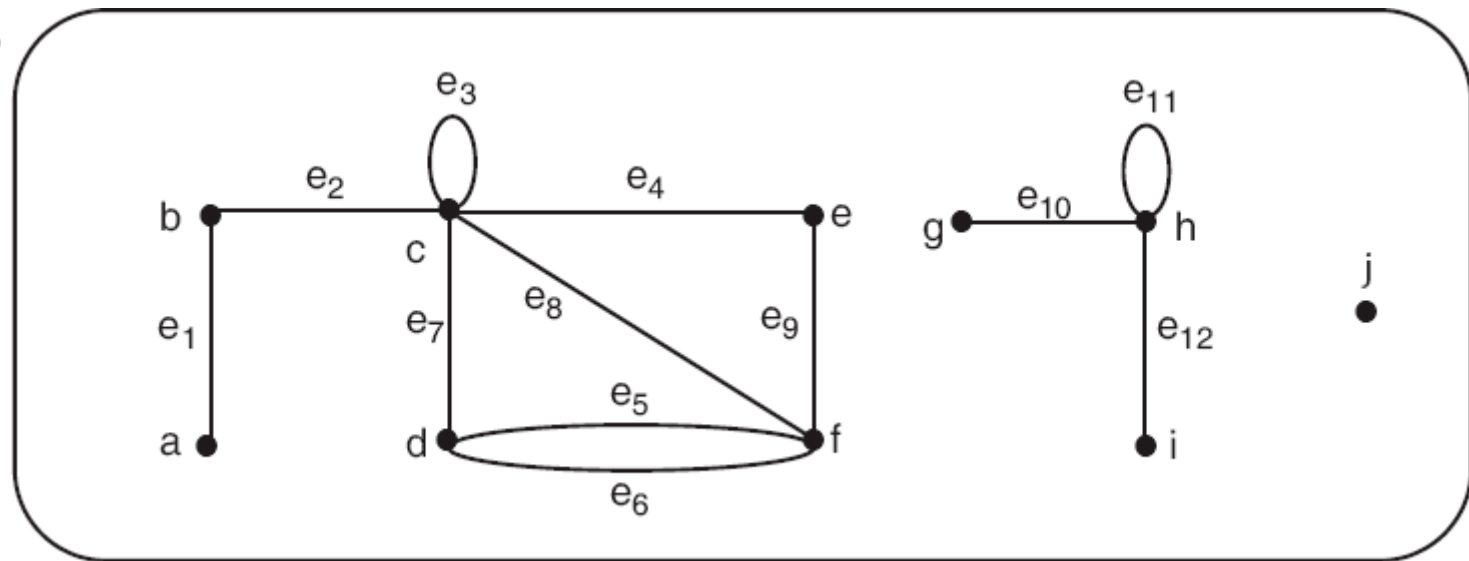
Conceitos Iniciais

• EXEMPLO 3.1

– Seja o grafo $G = (V,E)$ tal que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

– Arestas:

- $e_1 \leftrightarrow (a,b)$
- $e_2 \leftrightarrow (b,c)$
- $e_3 \leftrightarrow (c,c)$
- $e_4 \leftrightarrow (c,e)$
- $e_5 \leftrightarrow (d,f)$
- $e_6 \leftrightarrow (d,f)$
- $e_7 \leftrightarrow (c,d)$
- $e_8 \leftrightarrow (c,f)$



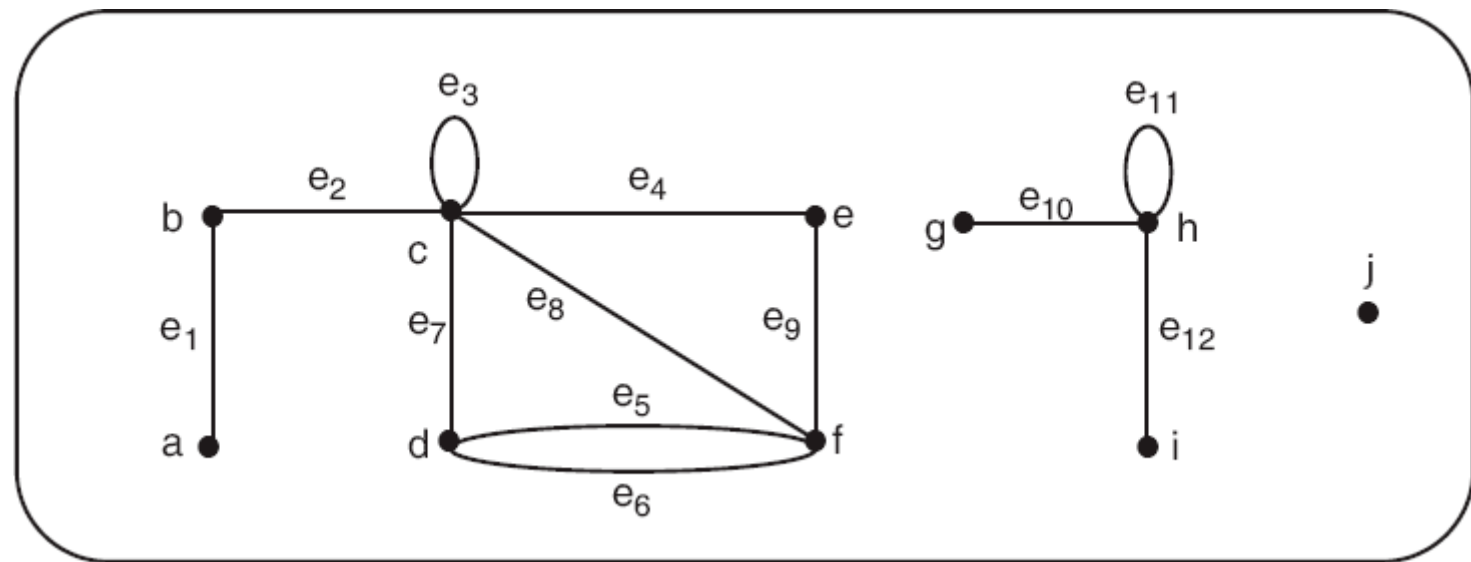
Conceitos Iniciais

• EXEMPLO 3.1

- Seja o grafo $G = (V,E)$ tal que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

- Arestas:

- $e_1 \leftrightarrow (a,b)$
- $e_2 \leftrightarrow (b,c)$
- $e_3 \leftrightarrow (c,c)$
- $e_4 \leftrightarrow (c,e)$
- $e_5 \leftrightarrow (d,f)$
- $e_6 \leftrightarrow (d,f)$
- $e_7 \leftrightarrow (c,d)$
- $e_8 \leftrightarrow (c,f)$
- $e_9 \leftrightarrow (e,f)$



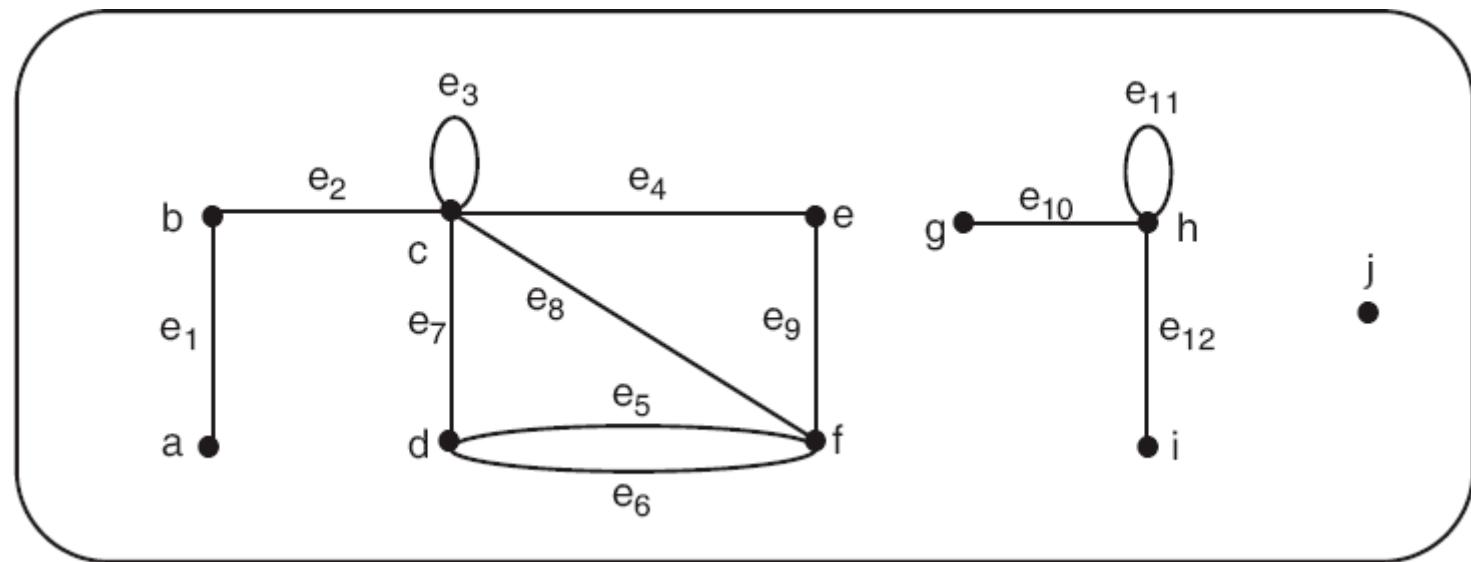
Conceitos Iniciais

• EXEMPLO 3.1

– Seja o grafo $G = (V,E)$ tal que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e
 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

– Arestas:

- $e_1 \leftrightarrow (a,b)$
- $e_2 \leftrightarrow (b,c)$
- $e_3 \leftrightarrow (c,c)$
- $e_4 \leftrightarrow (c,e)$
- $e_5 \leftrightarrow (d,f)$
- $e_6 \leftrightarrow (d,f)$
- $e_7 \leftrightarrow (c,d)$
- $e_8 \leftrightarrow (c,f)$
- $e_9 \leftrightarrow (e,f)$
- $e_{10} \leftrightarrow (g,h)$



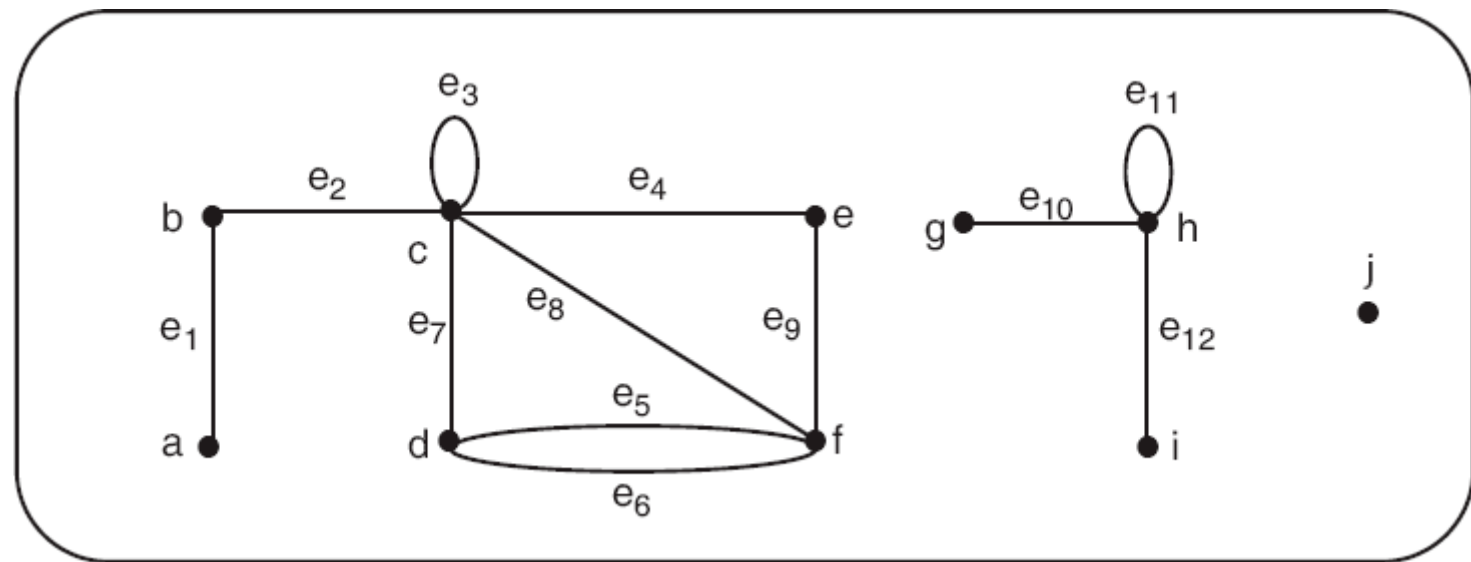
Conceitos Iniciais

• EXEMPLO 3.1

– Seja o grafo $G = (V,E)$ tal que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e
 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

– Arestas:

- $e_1 \leftrightarrow (a,b)$
- $e_2 \leftrightarrow (b,c)$
- $e_3 \leftrightarrow (c,c)$
- $e_4 \leftrightarrow (c,e)$
- $e_5 \leftrightarrow (d,f)$
- $e_6 \leftrightarrow (d,f)$
- $e_7 \leftrightarrow (c,d)$
- $e_8 \leftrightarrow (c,f)$
- $e_9 \leftrightarrow (e,f)$
- $e_{10} \leftrightarrow (g,h)$
- $e_{11} \leftrightarrow (h,h)$
- $e_{12} \leftrightarrow (h,i)$



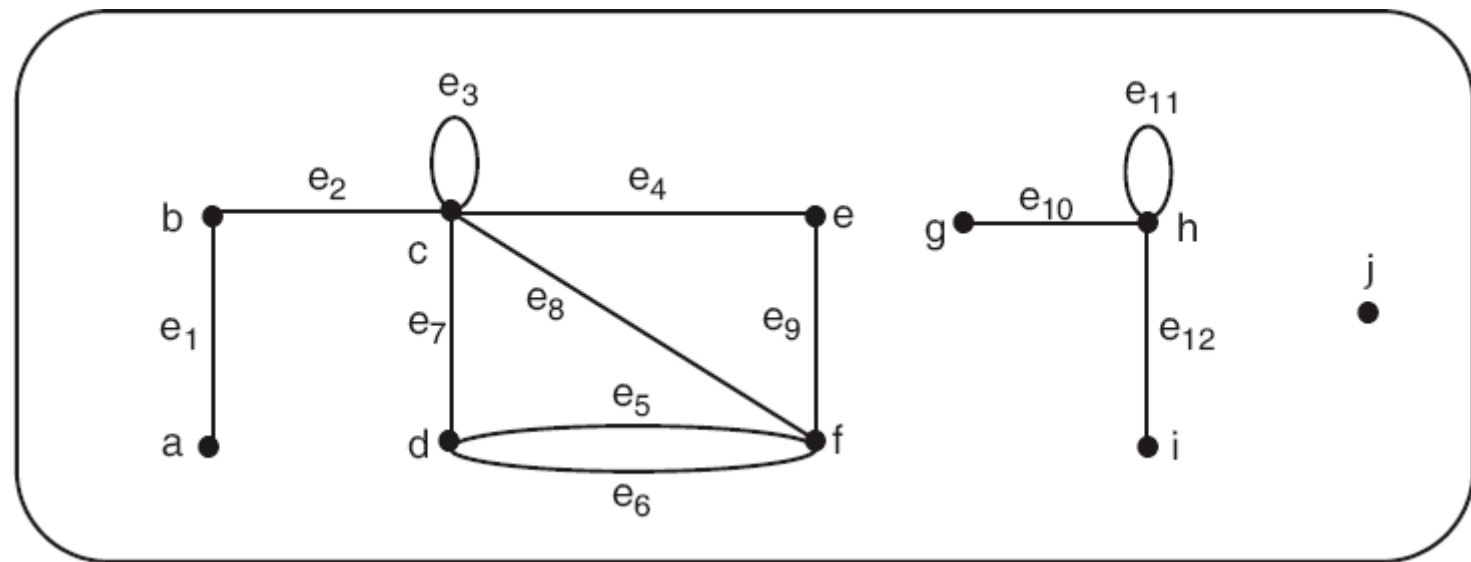
Conceitos Iniciais

• EXEMPLO 3.1

– Seja o grafo $G = (V,E)$ tal que $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e
 $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

– Arestas:

- $e_1 \leftrightarrow (a,b)$
- $e_2 \leftrightarrow (b,c)$
- $e_3 \leftrightarrow (c,c)$
- $e_4 \leftrightarrow (c,e)$
- $e_5 \leftrightarrow (d,f)$
- $e_6 \leftrightarrow (d,f)$
- $e_7 \leftrightarrow (c,d)$
- $e_8 \leftrightarrow (c,f)$
- $e_9 \leftrightarrow (e,f)$
- $e_{10} \leftrightarrow (g,h)$
- $e_{11} \leftrightarrow (h,h)$
- $e_{12} \leftrightarrow (h,i)$



Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- De acordo com a Definição 3.1, é possível que o conjunto de arestas E seja vazio.

Conceitos Iniciais

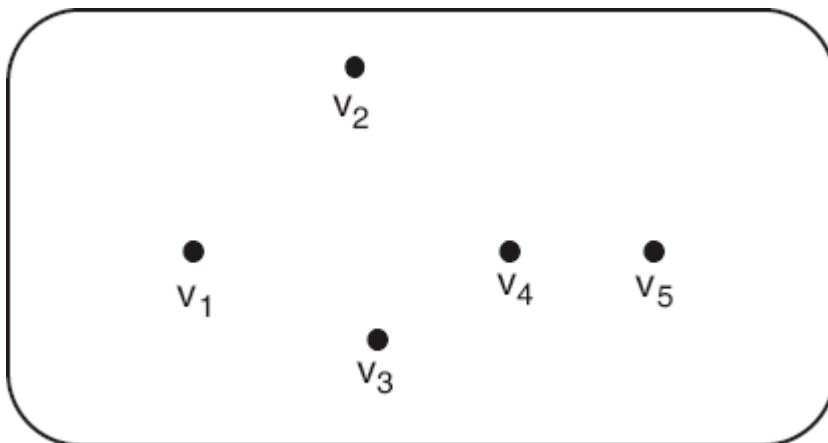
- De acordo com a Definição 3.1, é possível que o conjunto de arestas E seja vazio.
- Um grafo cujo conjunto de arestas é vazio é chamado de **grafo nulo**.

Conceitos Iniciais

- De acordo com a Definição 3.1, é possível que o conjunto de arestas E seja vazio.
- Um grafo cujo conjunto de arestas é vazio é chamado de **grafo nulo**.
- A figura abaixo mostra o diagrama de um grafo nulo com cinco vértices.

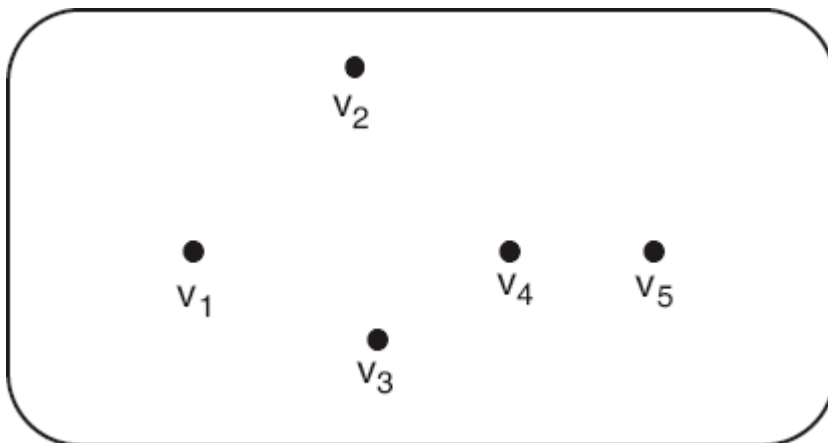
Conceitos Iniciais

- De acordo com a Definição 3.1, é possível que o conjunto de arestas E seja vazio.
- Um grafo cujo conjunto de arestas é vazio é chamado de **grafo nulo**.
- A figura abaixo mostra o diagrama de um grafo nulo com cinco vértices.



Conceitos Iniciais

- De acordo com a Definição 3.1, é possível que o conjunto de arestas E seja vazio.
- Um grafo cujo conjunto de arestas é vazio é chamado de **grafo nulo**.
- A figura abaixo mostra o diagrama de um grafo nulo com cinco vértices.

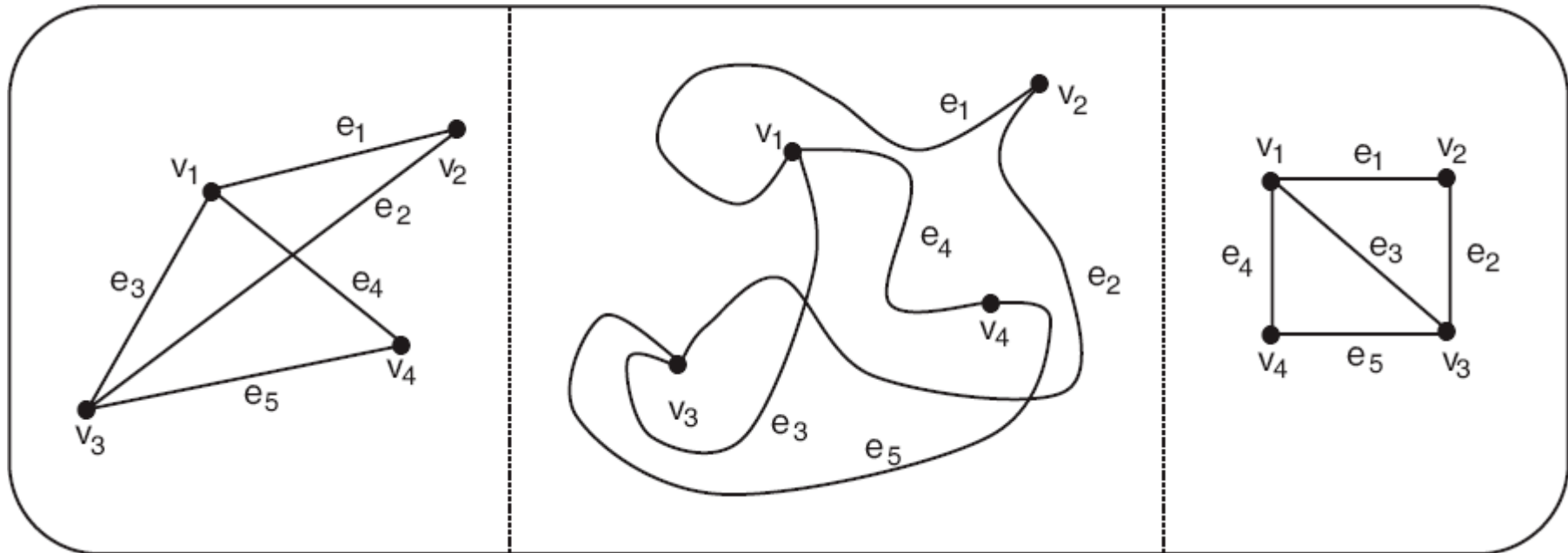


Existe grafo sem vértices?



Conceitos Iniciais

- A maneira como vértices e arestas são posicionados e desenhados em um grafo não é relevante.



Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**
 - Seja $G = (V,E)$ um grafo.

Conceitos Iniciais

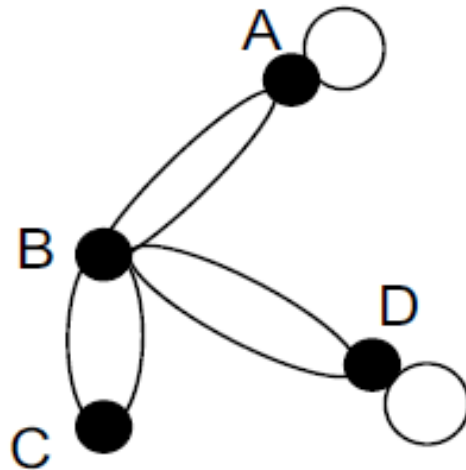
- **Definição 3.2**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- (a) Se duas (ou mais) arestas de G têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas de **arestas paralelas**.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

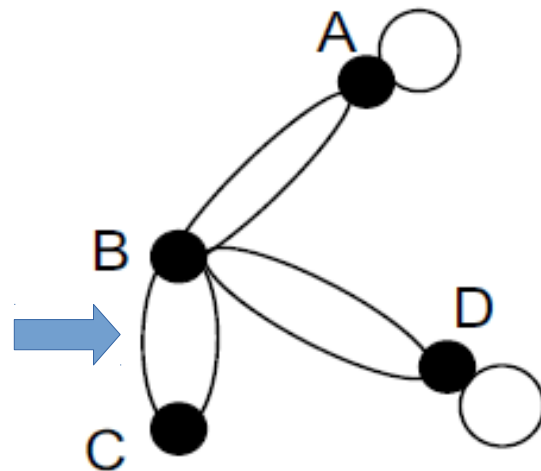
- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- (a) Se duas (ou mais) arestas de G têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas de **arestas paralelas**.



Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

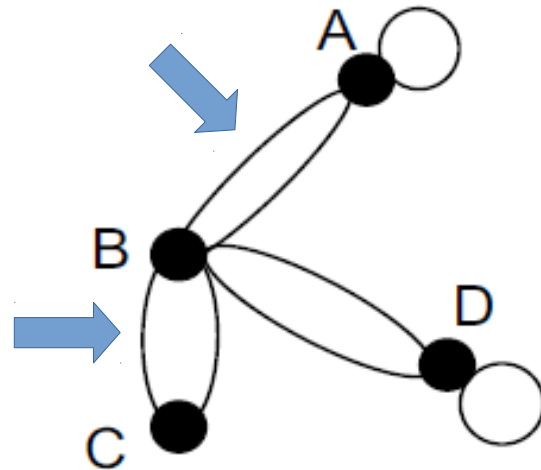
- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- (a) Se duas (ou mais) arestas de G têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas de **arestas paralelas**.



Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

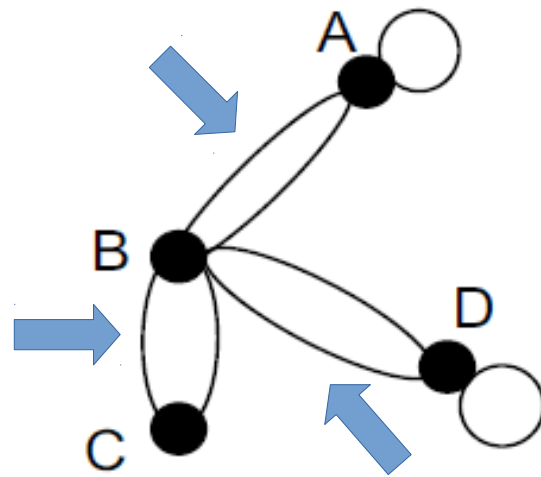
- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- (a) Se duas (ou mais) arestas de G têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas de **arestas paralelas**.



Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- (a) Se duas (ou mais) arestas de G têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas de **arestas paralelas**.



Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**
 - Seja $G = (V,E)$ um grafo.

Conceitos Iniciais

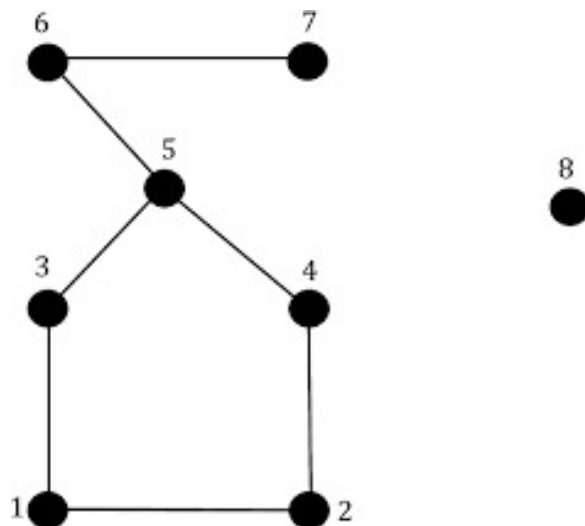
- **Definição 3.2**

- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- (b) Um vértice de G que não é extremidade de nenhuma aresta é chamado **isolado**. Adotaremos que o vértice do grafo que for vértice-extremidade apenas de loops será isolado também.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

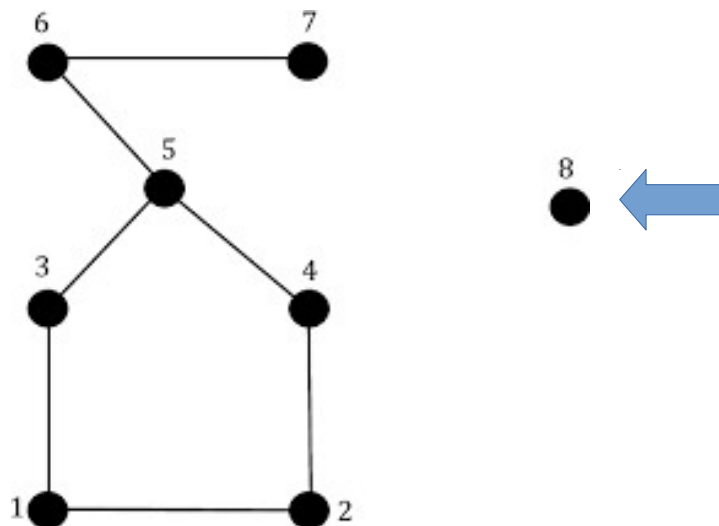
- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- (b) Um vértice de G que não é extremidade de nenhuma aresta é chamado **isolado**. Adotaremos que o vértice do grafo que for vértice-extremidade apenas de loops será isolado também.



Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- (b) Um vértice de G que não é extremidade de nenhuma aresta é chamado **isolado**. Adotaremos que o vértice do grafo que for vértice-extremidade apenas de loops será isolado também.



Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**
 - Seja $G = (V,E)$ um grafo.

Conceitos Iniciais

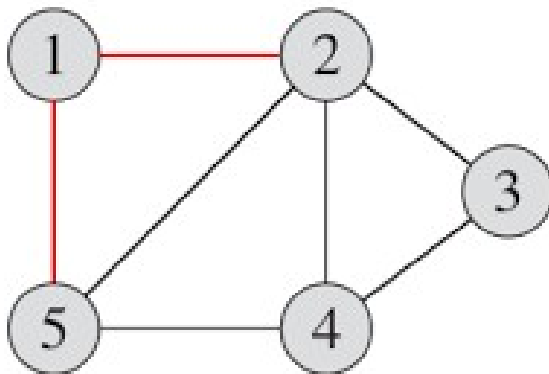
- **Definição 3.2**

- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- (c) Dois vértices que estão unidos por uma aresta são chamados de **adjacentes** ou **vizinhos**.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

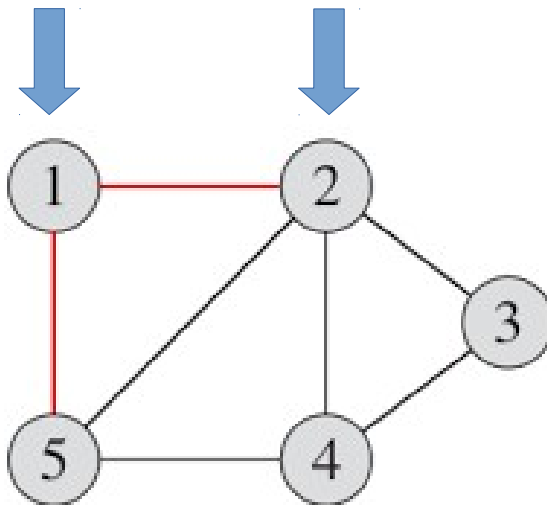
- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- (c) Dois vértices que estão unidos por uma aresta são chamados de **adjacentes** ou **vizinhos**.



Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- (c) Dois vértices que estão unidos por uma aresta são chamados de **adjacentes** ou **vizinhos**.



Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**
 - Seja $G = (V,E)$ um grafo.

Conceitos Iniciais

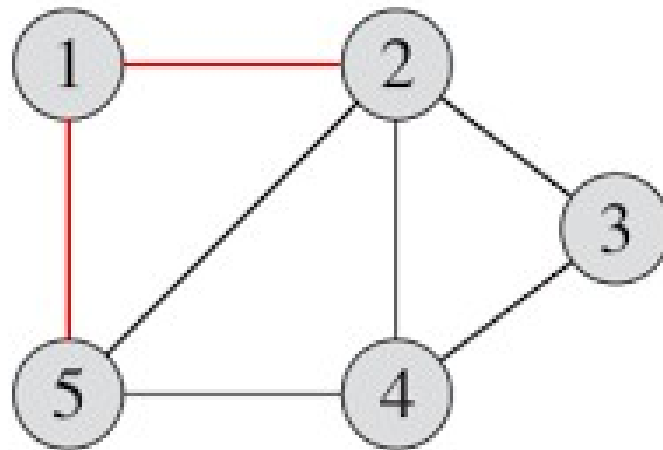
- **Definição 3.2**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- (d) Duas arestas distintas e_i e e_j são adjacentes se elas têm um vértice em comum.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

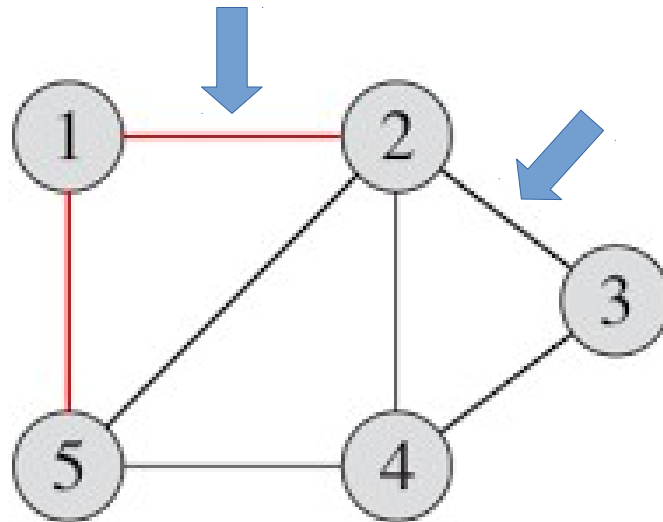
- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- (d) Duas arestas distintas e_i e e_j são adjacentes se elas têm um vértice em comum.



Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- (d) Duas arestas distintas e_i e e_j são adjacentes se elas têm um vértice em comum.



Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**
 - Seja $G = (V,E)$ um grafo.

Conceitos Iniciais

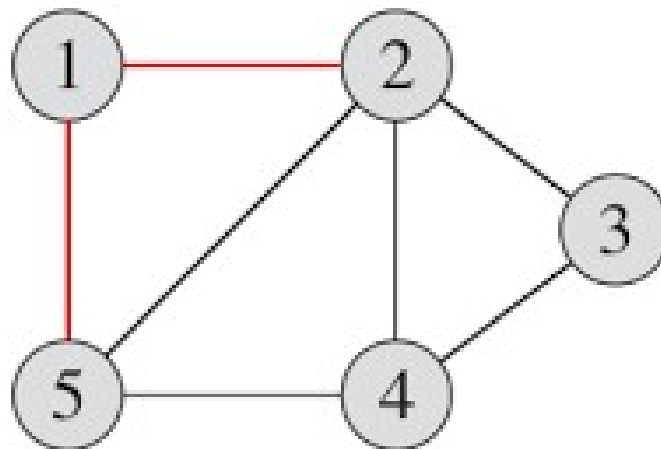
- **Definição 3.2**

- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- (e) O conjunto de todos os vizinhos de um vértice fixo v de G é chamado de **conjunto vizinhança de v** e é notado por $N(v)$.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

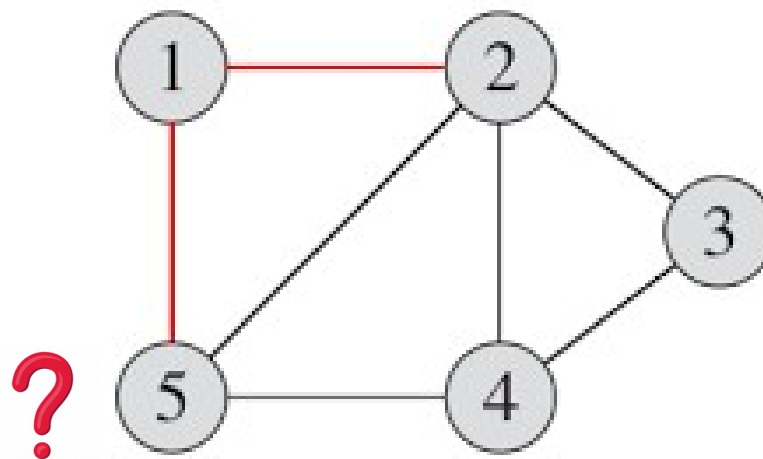
- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- (e) O conjunto de todos os vizinhos de um vértice fixo v de G é chamado de **conjunto vizinhança de v** e é notado por $N(v)$.



Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

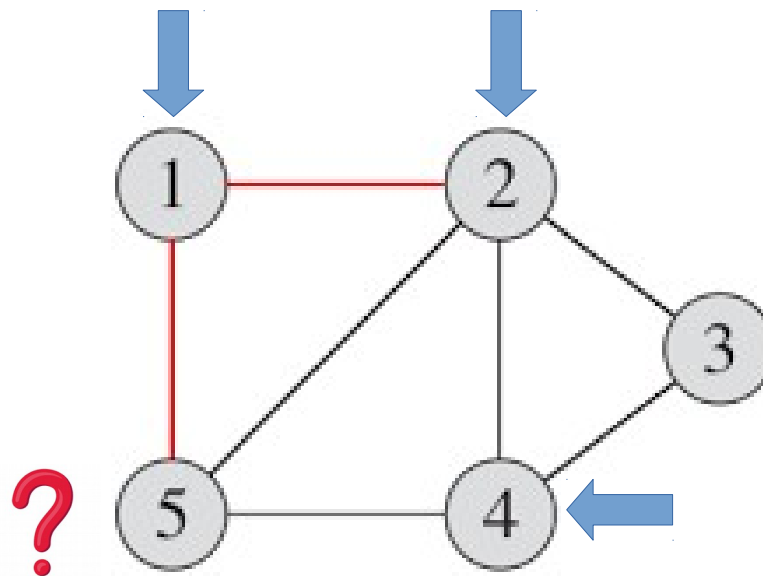
- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- (e) O conjunto de todos os vizinhos de um vértice fixo v de G é chamado de **conjunto vizinhança de v** e é notado por $N(v)$.



Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- (e) O conjunto de todos os vizinhos de um vértice fixo v de G é chamado de **conjunto vizinhança de v** e é notado por $N(v)$.



Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**
 - Seja $G = (V,E)$ um grafo.

Conceitos Iniciais

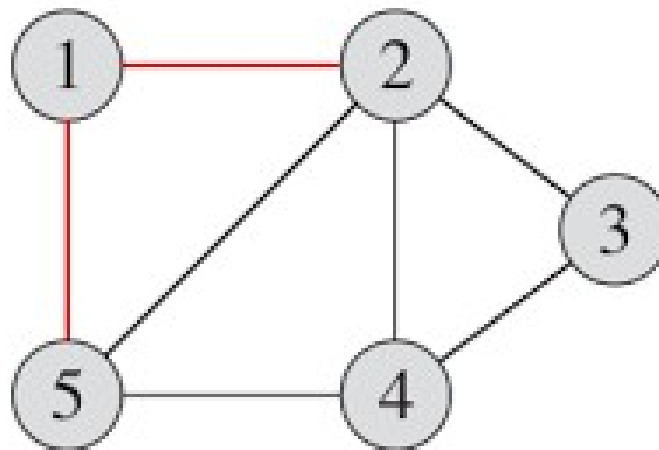
- **Definição 3.2**

- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- (f) Um grafo é chamado **simplex** se não tem loops e não tem arestas paralelas.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.2**

- Seja $G = (V,E)$ um grafo.
- (f) Um grafo é chamado **simplex** se não tem loops e não tem arestas paralelas.



Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**
 - Seja $G = (V,E)$ um grafo.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- (a) Diz-se que uma aresta e é incidente no vértice v se v for um vértice-extremidade de e . Nesse caso, diz-se também que v é incidente em e .

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- (a) Diz-se que uma aresta e é incidente no vértice v se v for um vértice-extremidade de e . Nesse caso, diz-se também que v é incidente em e .
- (b) Duas arestas que são incidentes em um mesmo vértice são adjacentes.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- (a) Diz-se que uma aresta e é incidente no vértice v se v for um vértice-extremidade de e . Nesse caso, diz-se também que v é incidente em e .
- (b) Duas arestas que são incidentes em um mesmo vértice são adjacentes.
- (c) O grau de um vértice v , notado por $d(v)$, é o número de arestas de G que são incidentes em v , contando cada loop duas vezes. É, pois, o número de vezes que v é vértice-extremidade de uma aresta.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- (a) Diz-se que uma aresta e é incidente no vértice v se v for um vértice-extremidade de e . Nesse caso, diz-se também que v é incidente em e .
- (b) Duas arestas que são incidentes em um mesmo vértice são adjacentes.
- (c) O grau de um vértice v , notado por $d(v)$, é o número de arestas de G que são incidentes em v , contando cada loop duas vezes. É, pois, o número de vezes que v é vértice-extremidade de uma aresta.
- Um vértice de grau 0 é um vértice isolado, e um vértice de grau 1 é um **vértice final**.

Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**

- (d) Um vértice de um grafo é um vértice par ou ímpar se o seu grau for um número par ou ímpar, respectivamente.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**

- (d) Um vértice de um grafo é um vértice par ou ímpar se o seu grau for um número par ou ímpar, respectivamente.
- (e) A sequência de graus de um grafo consiste na sequência dos graus de seus vértices, escritos em ordem crescente, com repetições, se for o caso.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**

- (d) Um vértice de um grafo é um vértice par ou ímpar se o seu grau for um número par ou ímpar, respectivamente.
- (e) A sequência de graus de um grafo consiste na sequência dos graus de seus vértices, escritos em ordem crescente, com repetições, se for o caso.
- (f) O número dado por $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$ é chamado de **grau mínimo de G**. O número dado por $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$ é chamado **grau máximo de G**.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**

- (d) Um vértice de um grafo é um vértice par ou ímpar se o seu grau for um número par ou ímpar, respectivamente.
- (e) A sequência de graus de um grafo consiste na sequência dos graus de seus vértices, escritos em ordem crescente, com repetições, se for o caso.
- (f) O número dado por $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$ é chamado de **grau mínimo de G**. O número dado por $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$ é chamado **grau máximo de G**.
- (g) O número dado pela fórmula (3.1) é o **grau médio do grafo G**.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.3**

- (d) Um vértice de um grafo é um vértice par ou ímpar se o seu grau for um número par ou ímpar, respectivamente.
- (e) A sequência de graus de um grafo consiste na sequência dos graus de seus vértices, escritos em ordem crescente, com repetições, se for o caso.
- (f) O número dado por $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$ é chamado de **grau mínimo de G**. O número dado por $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$ é chamado **grau máximo de G**.
- (g) O número dado pela fórmula (3.1) é o **grau médio do grafo G**.

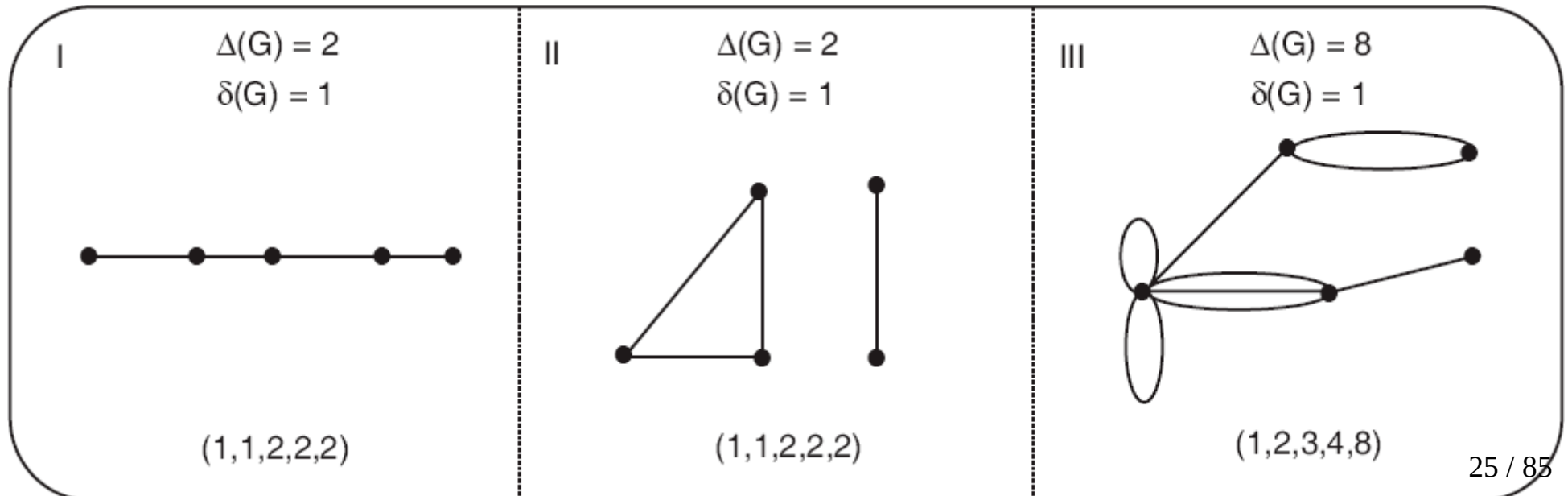
$$d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v) \quad (3.1)$$

Conceitos Iniciais

- Exemplo:

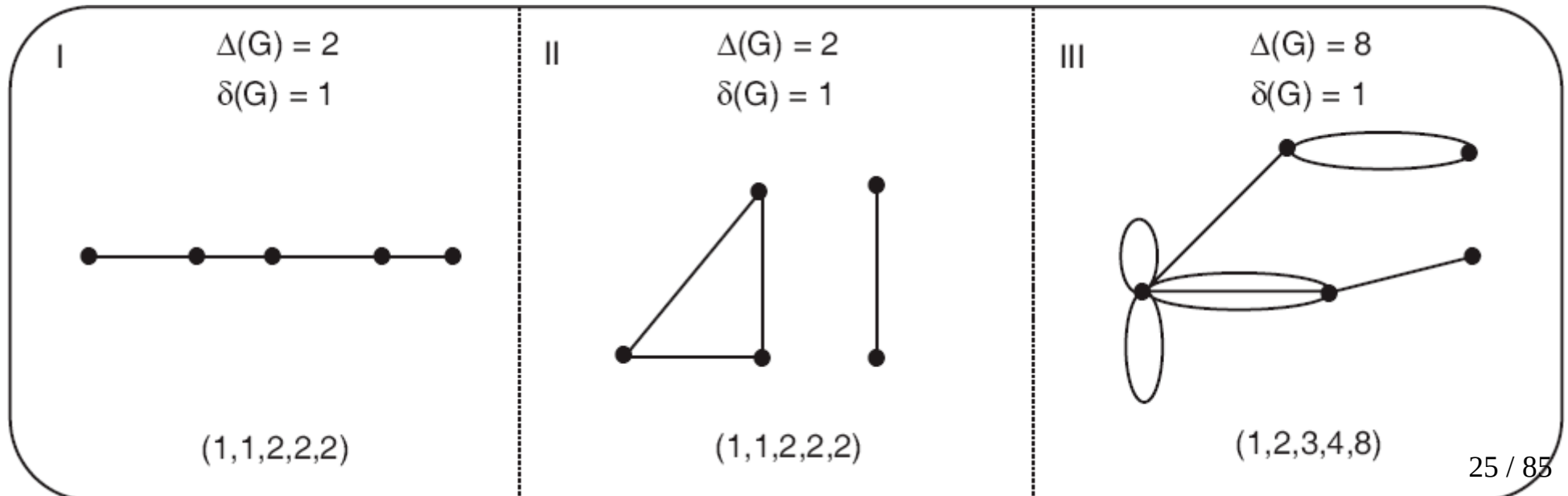
Conceitos Iniciais

- Exemplo:



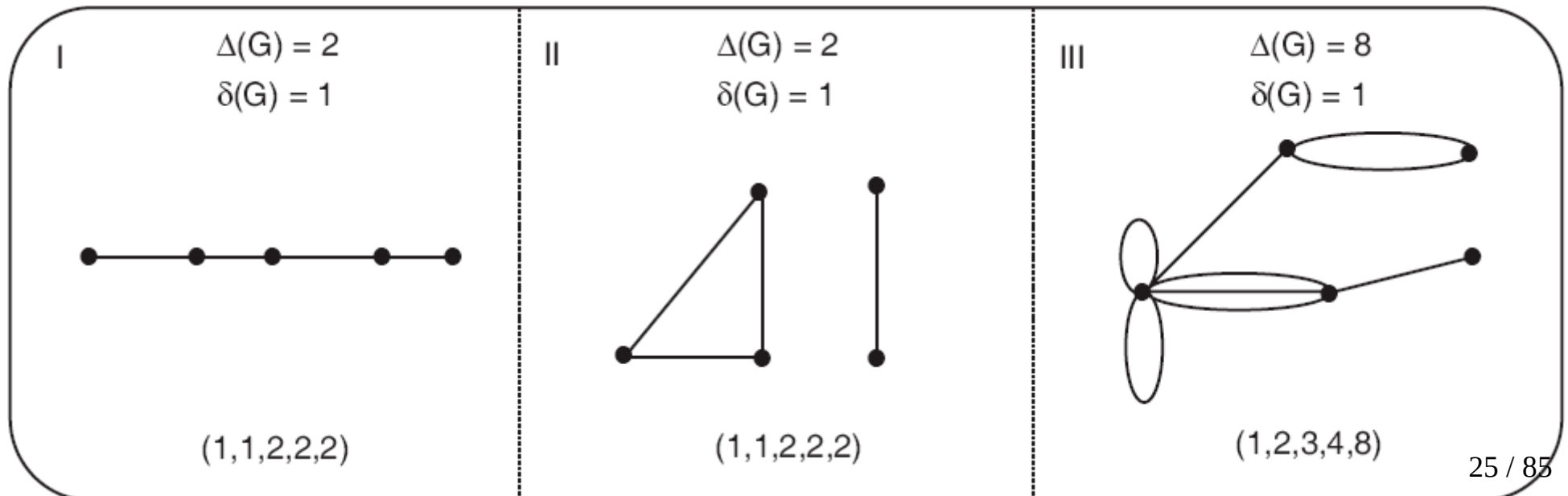
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - Os grafos em I e II têm dois vértices finais e três vértices de grau 2.



Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - Os grafos em I e II têm dois vértices finais e três vértices de grau 2.
 - O grafo em III tem 1 vértice final, 1 de grau 2, 1 de grau 3, 1 de grau 4 e 1 de grau 8.

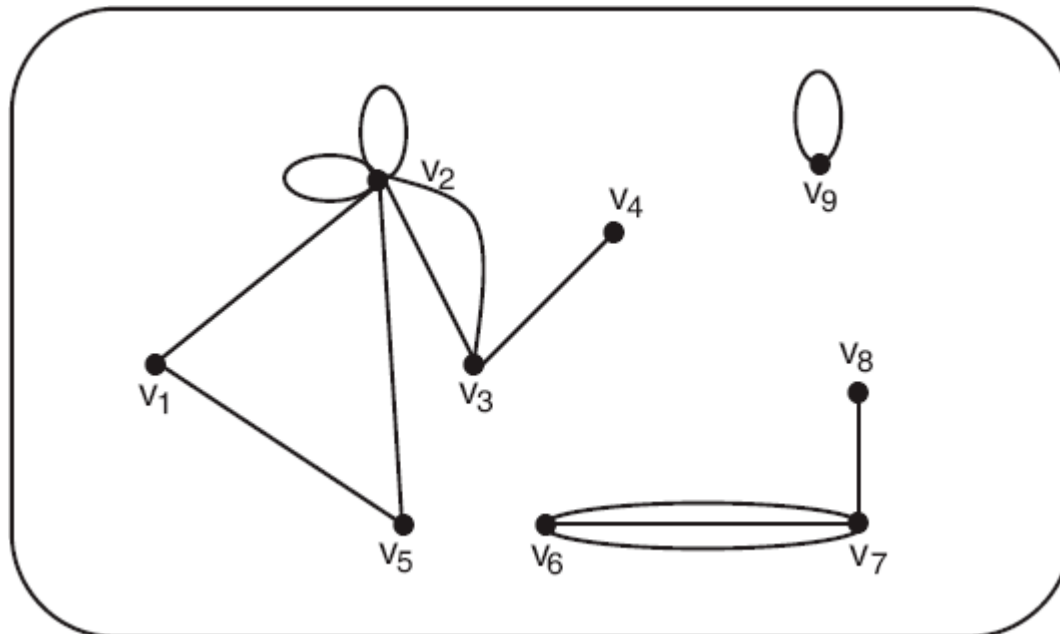


Conceitos Iniciais

- Exemplo:

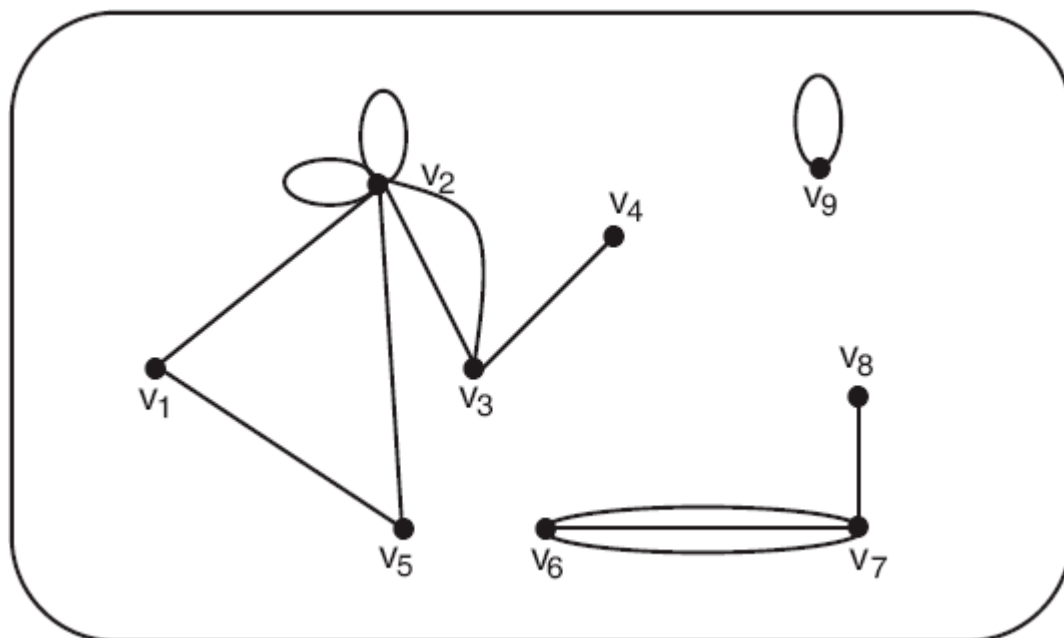
Conceitos Iniciais

- Exemplo:



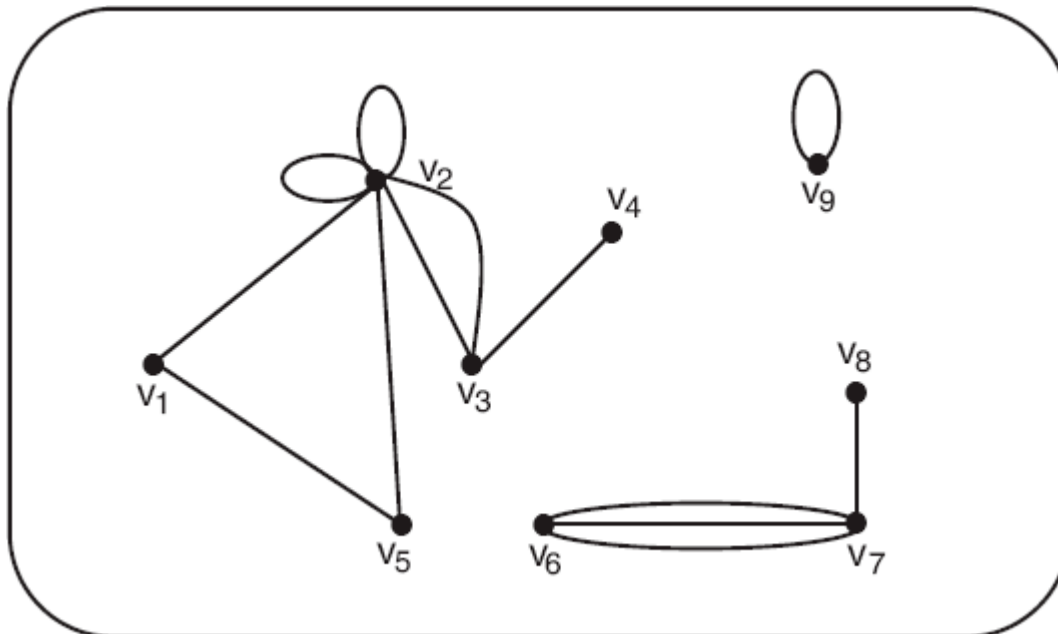
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - Os vértices v_1 e v_2 são adjacentes.



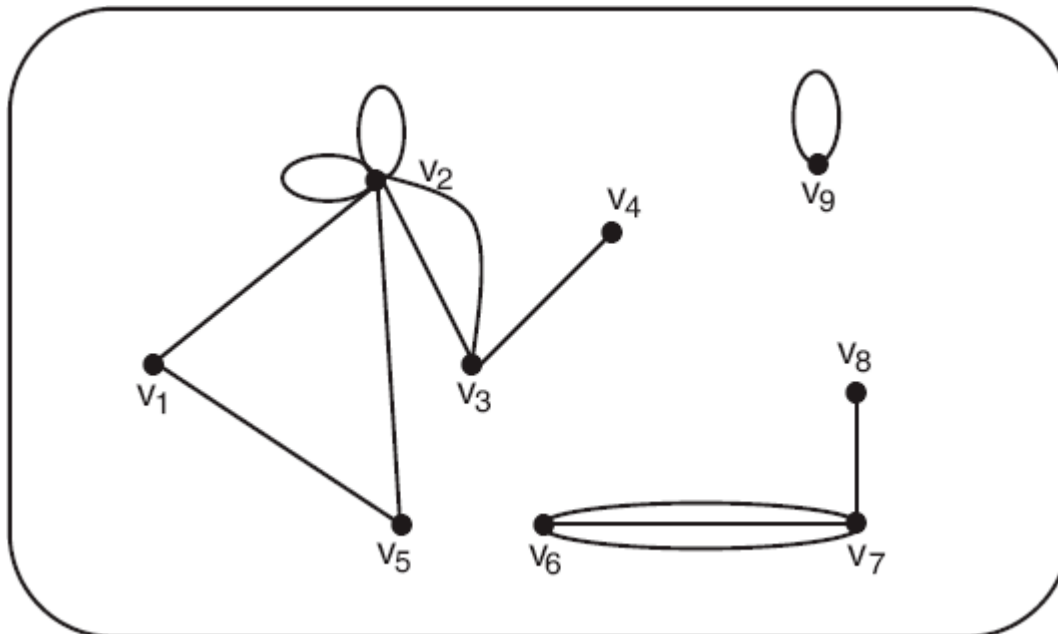
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - Os vértices v_1 e v_2 são adjacentes.
 - Os vértices v_1 e v_3 não são adjacentes.



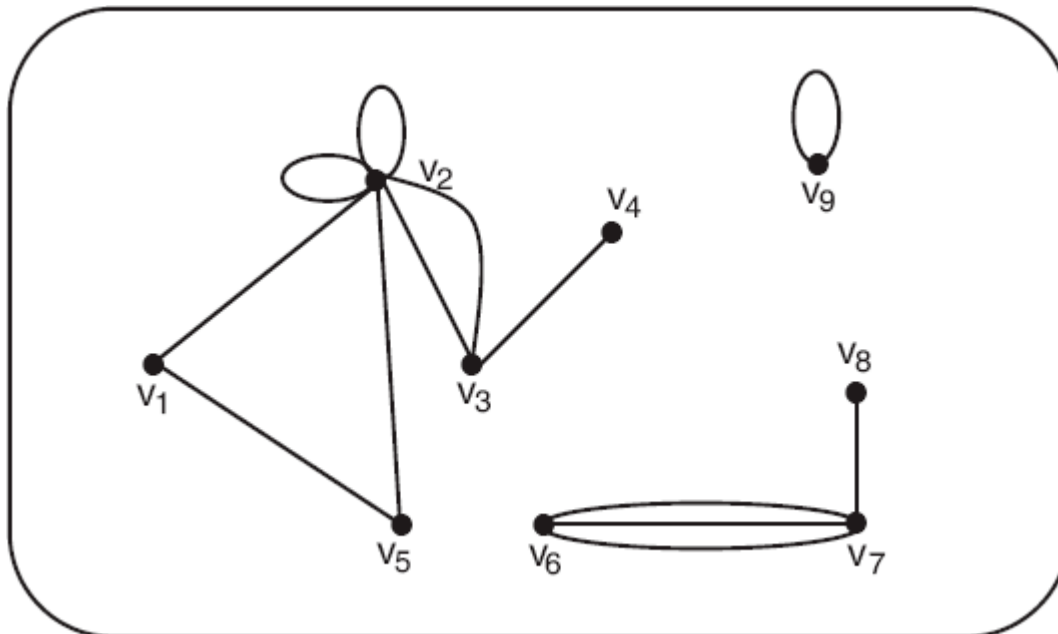
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - Os vértices v_1 e v_2 são adjacentes.
 - Os vértices v_1 e v_3 não são adjacentes.
 - As arestas (v_1, v_2) e (v_2, v_3) são adjacentes.



Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - Os vértices v_1 e v_2 são adjacentes.
 - Os vértices v_1 e v_3 não são adjacentes.
 - As arestas (v_1, v_2) e (v_2, v_3) são adjacentes.
 - As arestas (v_1, v_2) e (v_3, v_4) não são adjacentes.

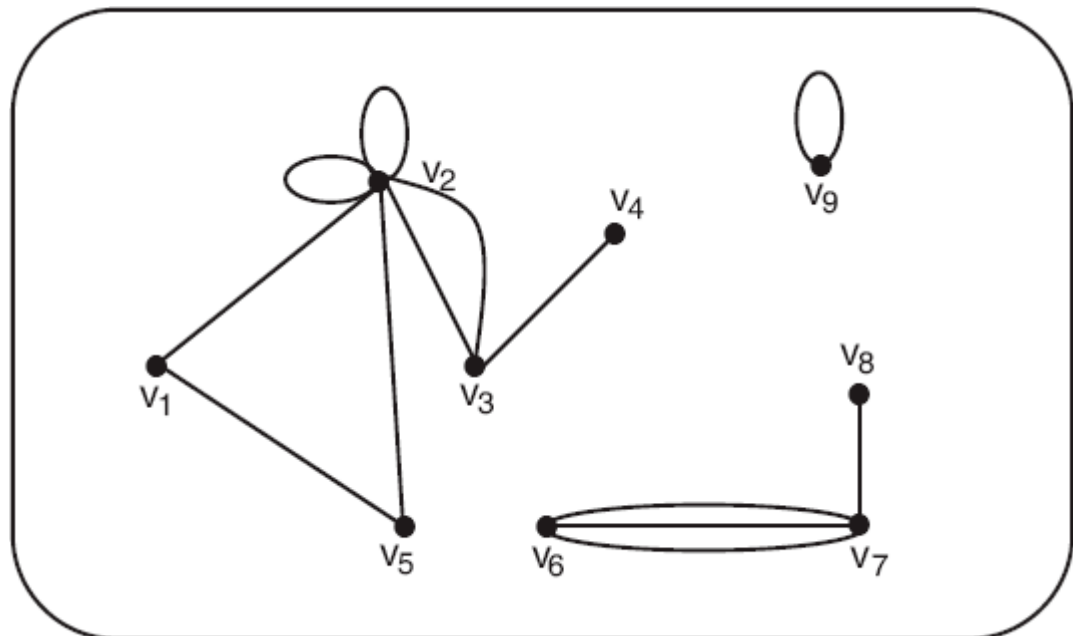


Conceitos Iniciais

- Exemplo:

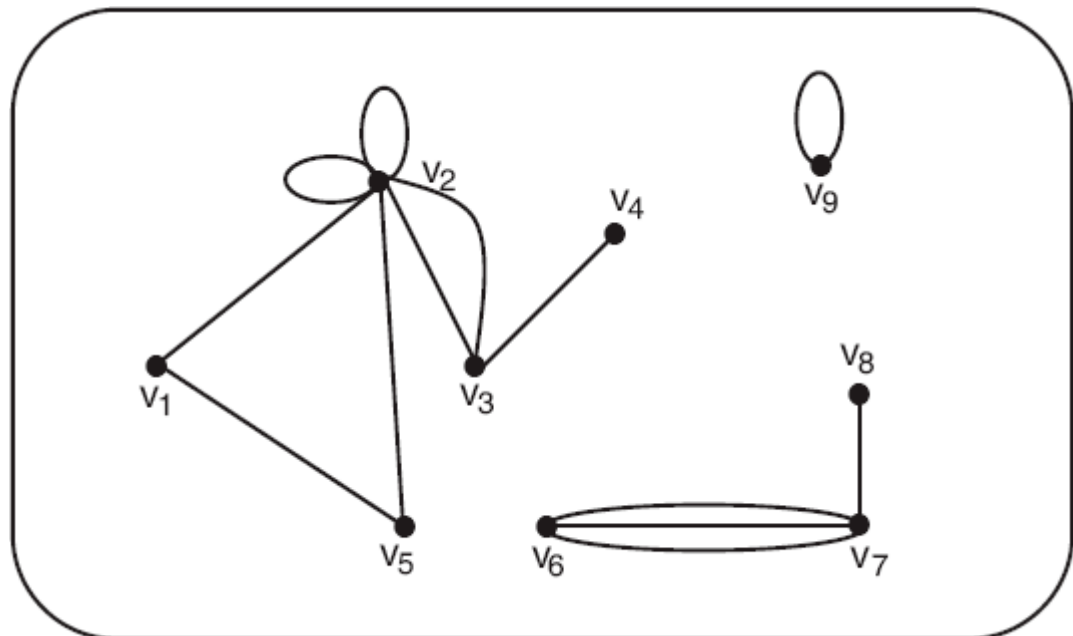
Conceitos Iniciais

- Exemplo:



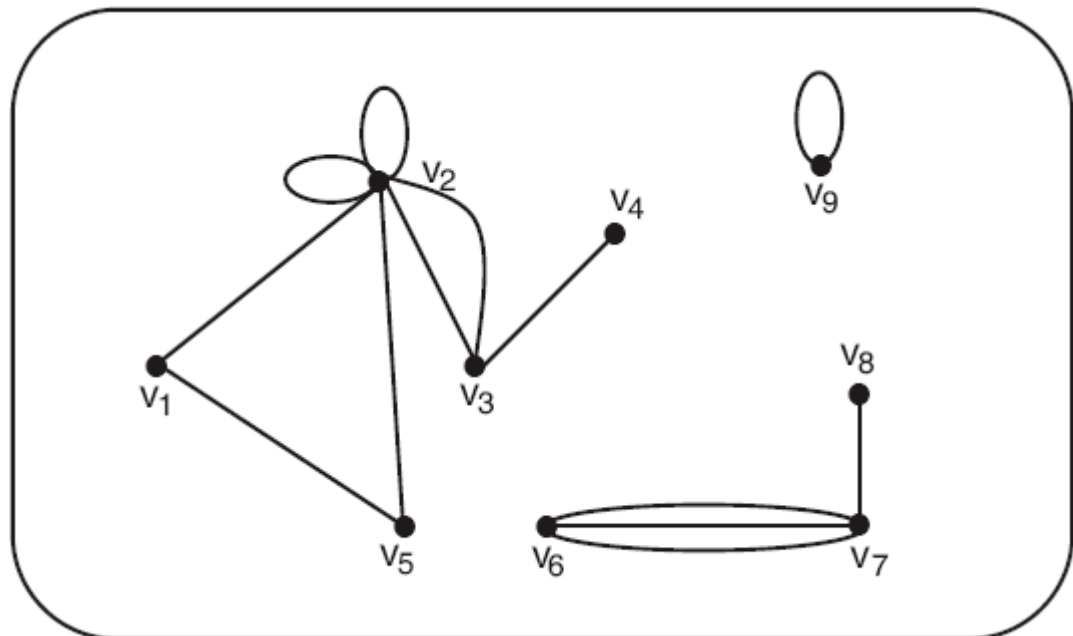
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - A aresta (v_3, v_4) é incidente nos vértices v_3 e v_4 ; os vértices v_3 e v_4 são incidentes com a aresta (v_3, v_4) .



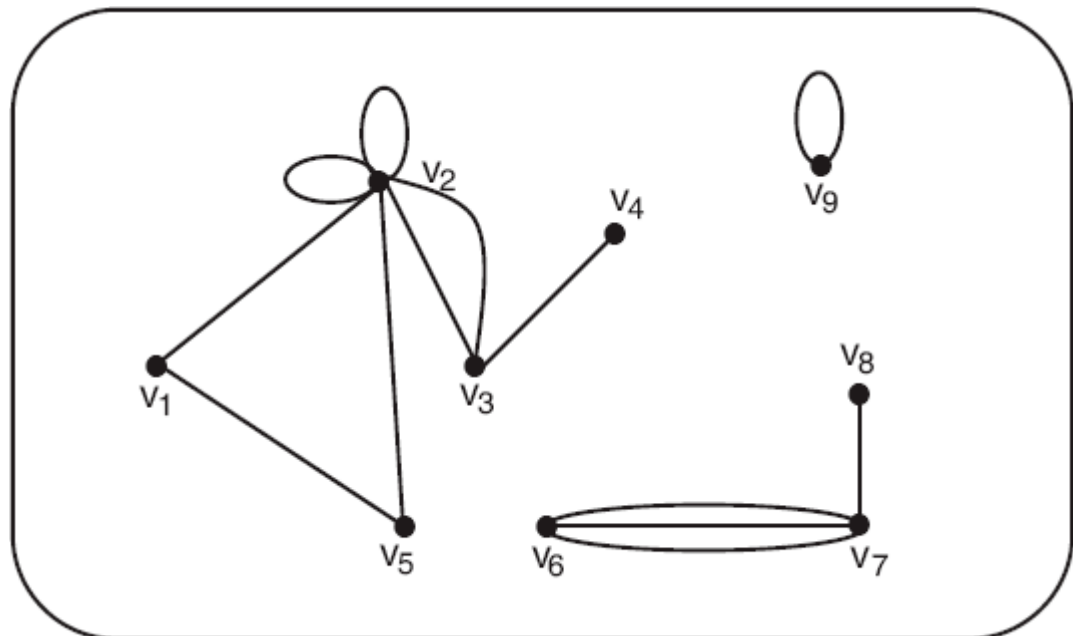
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - A aresta (v_3, v_4) é incidente nos vértices v_3 e v_4 ; os vértices v_3 e v_4 são incidentes com a aresta (v_3, v_4) .
 - Os graus dos vários vértices são:



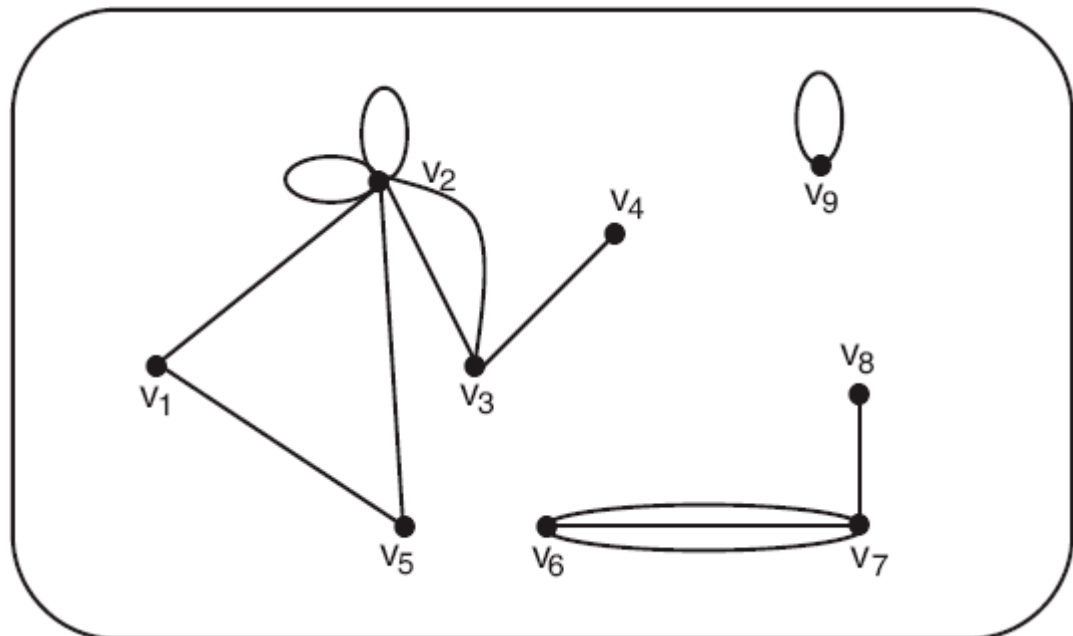
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - A aresta (v_3, v_4) é incidente nos vértices v_3 e v_4 ; os vértices v_3 e v_4 são incidentes com a aresta (v_3, v_4) .
 - Os graus dos vários vértices são:
 - $d(v_1) = 2$



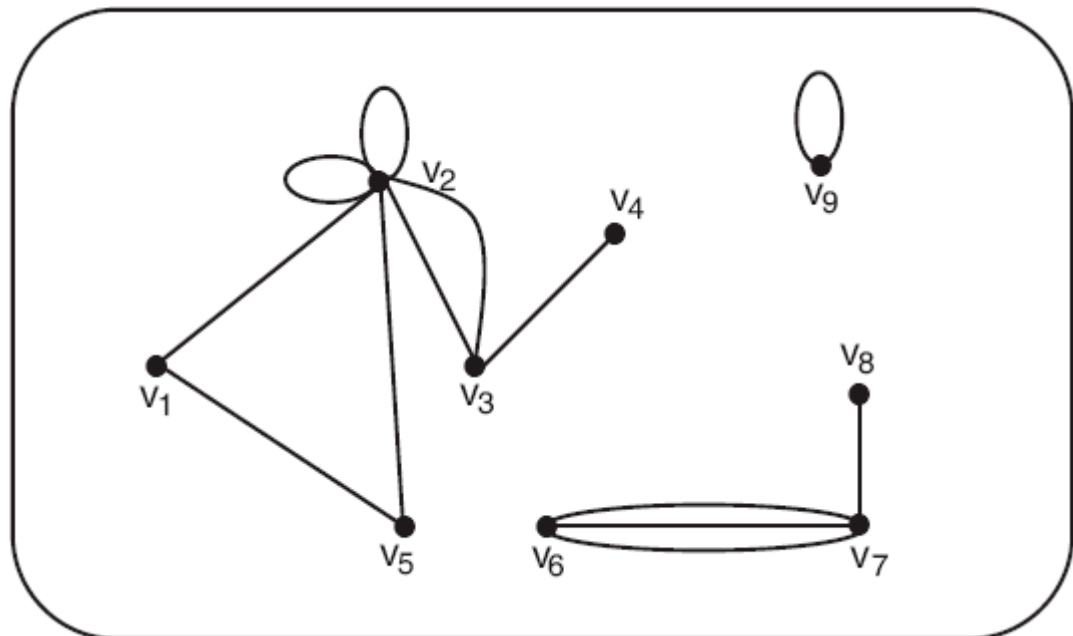
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - A aresta (v_3, v_4) é incidente nos vértices v_3 e v_4 ; os vértices v_3 e v_4 são incidentes com a aresta (v_3, v_4) .
 - Os graus dos vários vértices são:
 - $d(v_1) = 2$
 - $d(v_2) = 8$



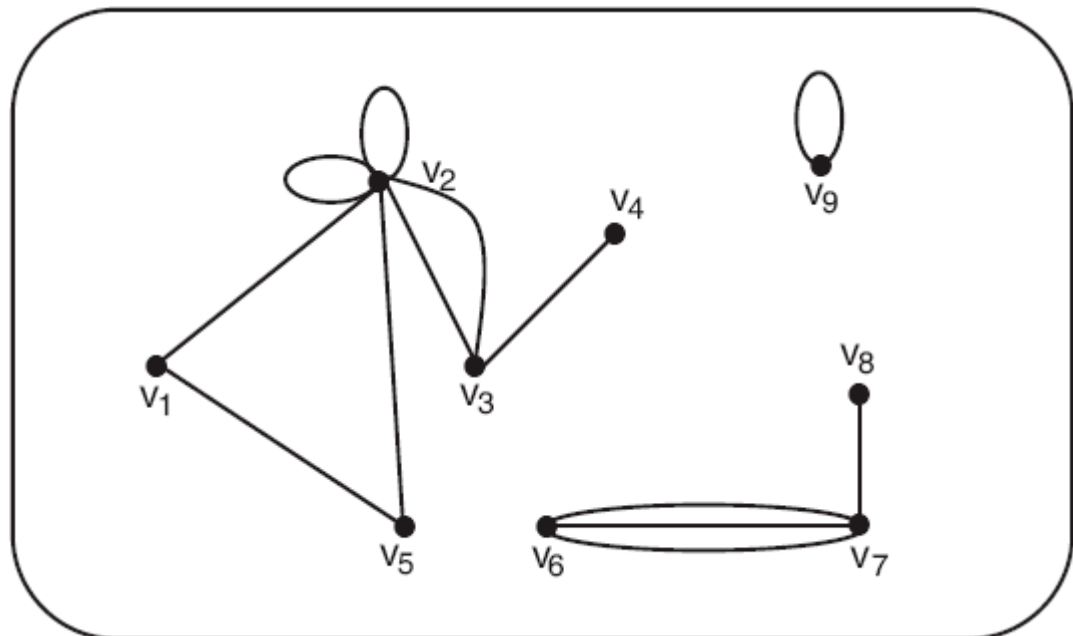
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - A aresta (v_3, v_4) é incidente nos vértices v_3 e v_4 ; os vértices v_3 e v_4 são incidentes com a aresta (v_3, v_4) .
 - Os graus dos vários vértices são:
 - $d(v_1) = 2$
 - $d(v_2) = 8$
 - $d(v_3) = 3$



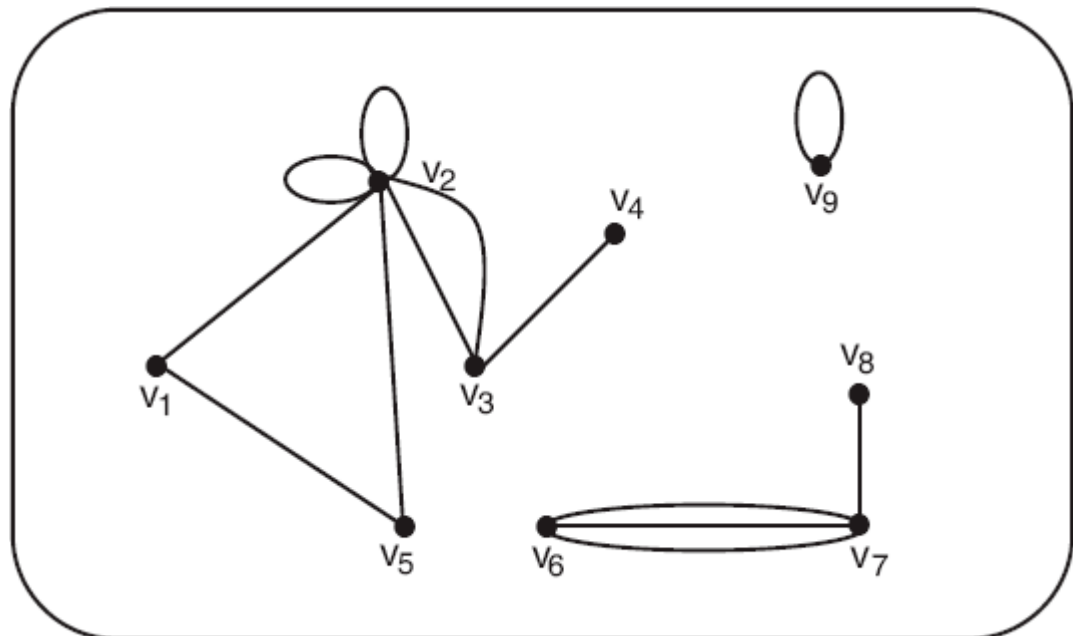
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - A aresta (v_3, v_4) é incidente nos vértices v_3 e v_4 ; os vértices v_3 e v_4 são incidentes com a aresta (v_3, v_4) .
 - Os graus dos vários vértices são:
 - $d(v_1) = 2$
 - $d(v_2) = 8$
 - $d(v_3) = 3$
 - $d(v_4) = 1$



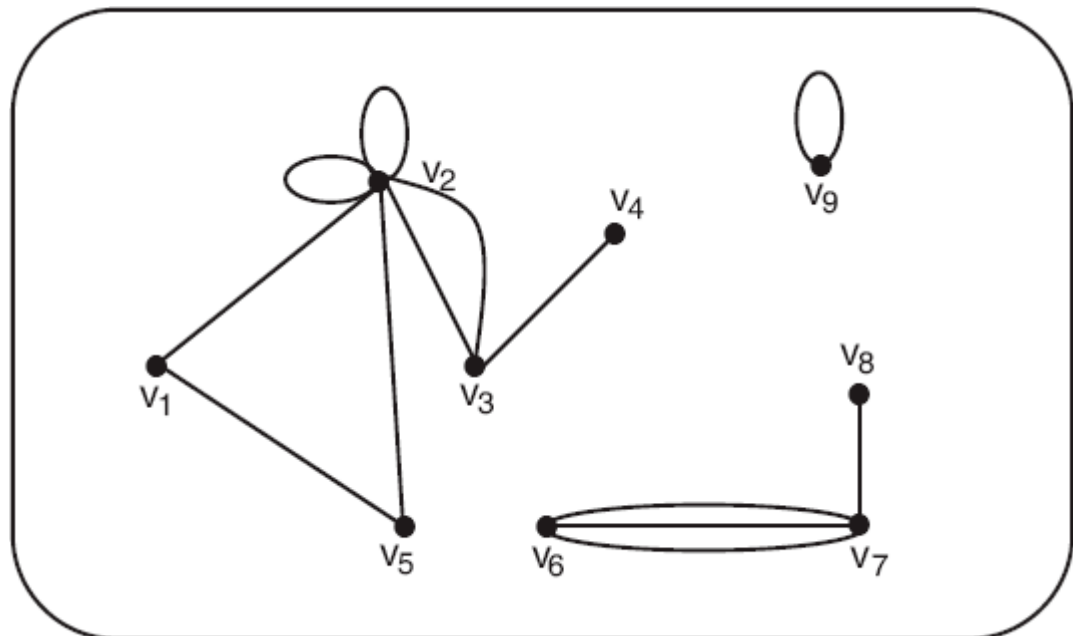
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - A aresta (v_3, v_4) é incidente nos vértices v_3 e v_4 ; os vértices v_3 e v_4 são incidentes com a aresta (v_3, v_4) .
 - Os graus dos vários vértices são:
 - $d(v_1) = 2$
 - $d(v_2) = 8$
 - $d(v_3) = 3$
 - $d(v_4) = 1$
 - $d(v_5) = 2$



Conceitos Iniciais

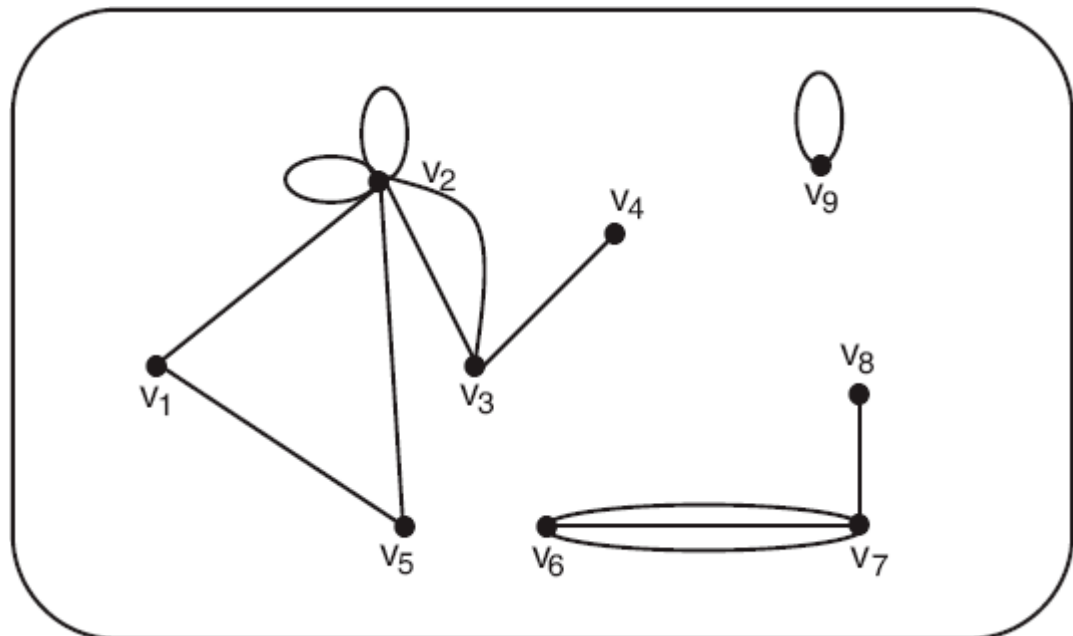
- Exemplo:
 - A aresta (v_3, v_4) é incidente nos vértices v_3 e v_4 ; os vértices v_3 e v_4 são incidentes com a aresta (v_3, v_4) .
 - Os graus dos vários vértices são:
 - $d(v_1) = 2$
 - $d(v_2) = 8$
 - $d(v_3) = 3$
 - $d(v_4) = 1$
 - $d(v_5) = 2$
 - $d(v_6) = 3$



Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - A aresta (v_3, v_4) é incidente nos vértices v_3 e v_4 ; os vértices v_3 e v_4 são incidentes com a aresta (v_3, v_4) .
 - Os graus dos vários vértices são:

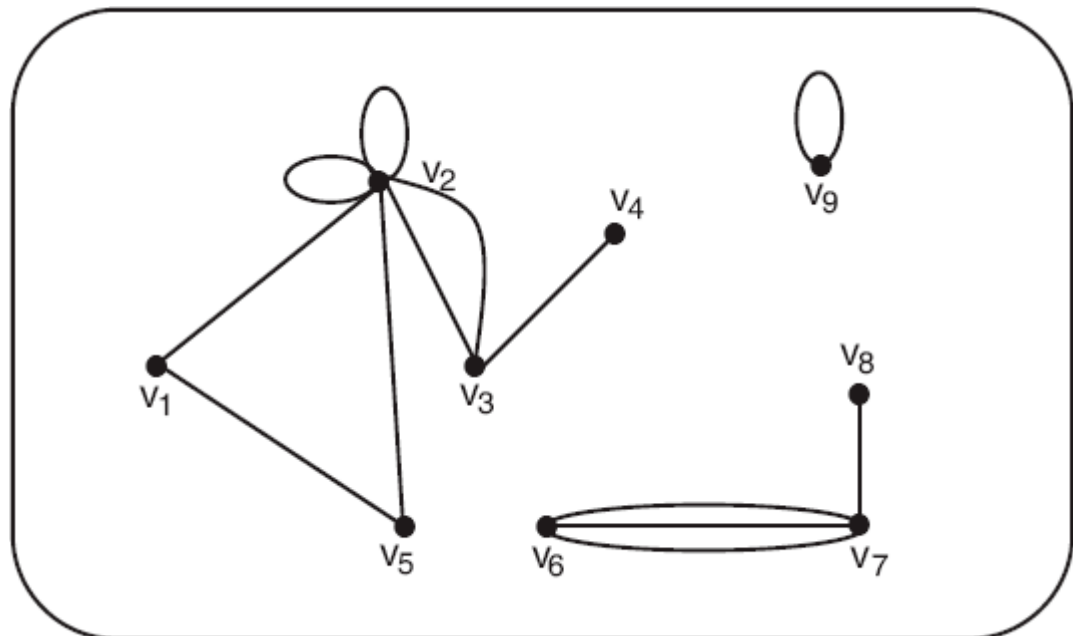
- $d(v_1) = 2$
- $d(v_2) = 8$
- $d(v_3) = 3$
- $d(v_4) = 1$
- $d(v_5) = 2$
- $d(v_6) = 3$
- $d(v_7) = 4$



Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - A aresta (v_3, v_4) é incidente nos vértices v_3 e v_4 ; os vértices v_3 e v_4 são incidentes com a aresta (v_3, v_4) .
 - Os graus dos vários vértices são:

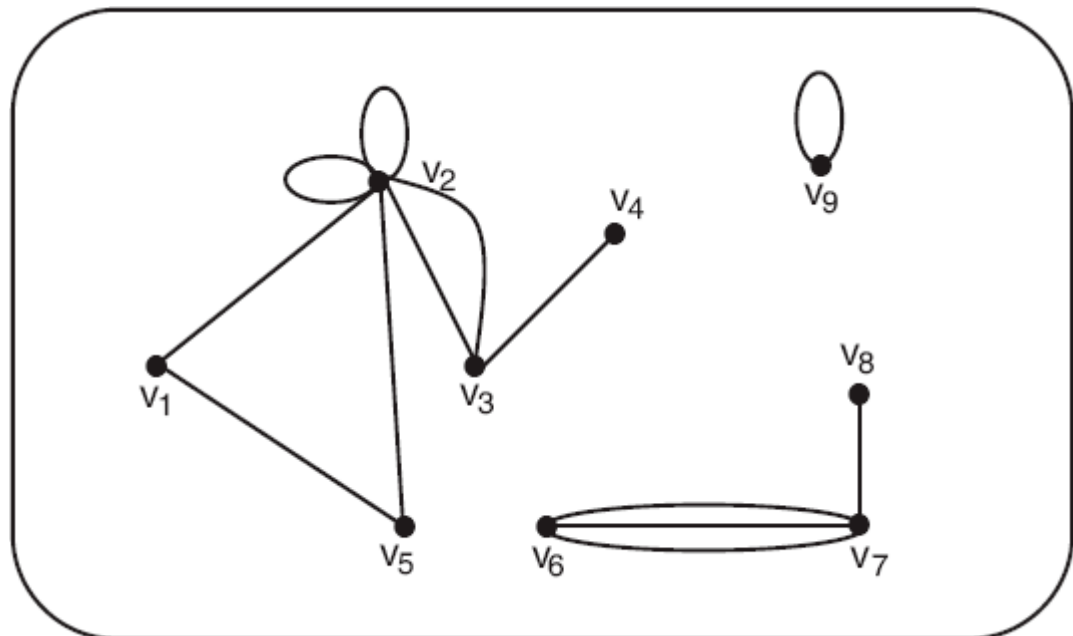
- $d(v_1) = 2$
- $d(v_2) = 8$
- $d(v_3) = 3$
- $d(v_4) = 1$
- $d(v_5) = 2$
- $d(v_6) = 3$
- $d(v_7) = 4$
- $d(v_8) = 1$



Conceitos Iniciais

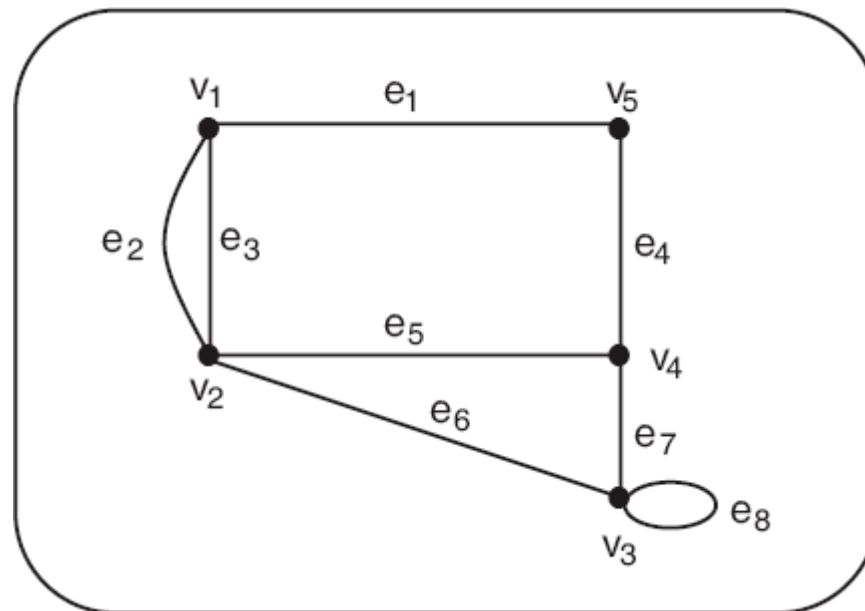
- Exemplo:
 - A aresta (v_3, v_4) é incidente nos vértices v_3 e v_4 ; os vértices v_3 e v_4 são incidentes com a aresta (v_3, v_4) .
 - Os graus dos vários vértices são:

- $d(v_1) = 2$
- $d(v_2) = 8$
- $d(v_3) = 3$
- $d(v_4) = 1$
- $d(v_5) = 2$
- $d(v_6) = 3$
- $d(v_7) = 4$
- $d(v_8) = 1$
- $d(v_9) = 2$



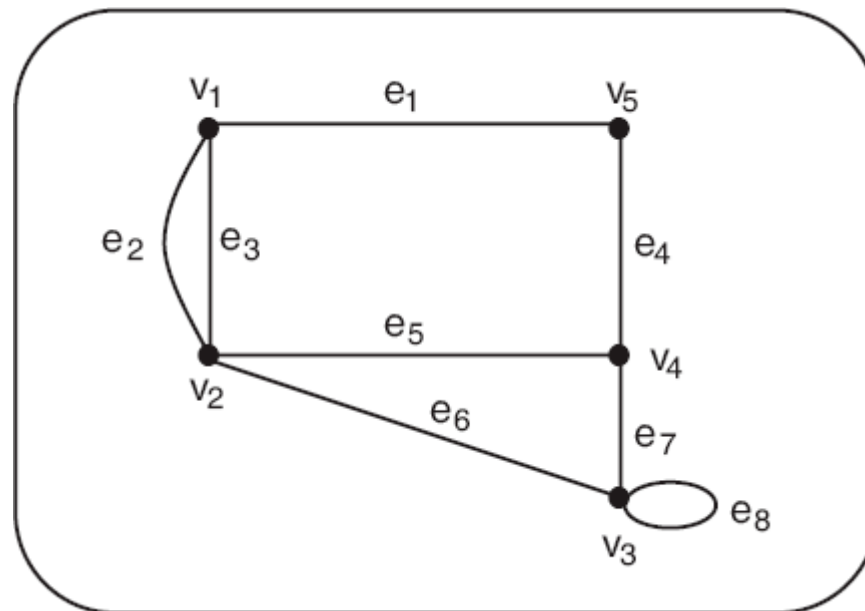
Conceitos Iniciais

- Exemplo:



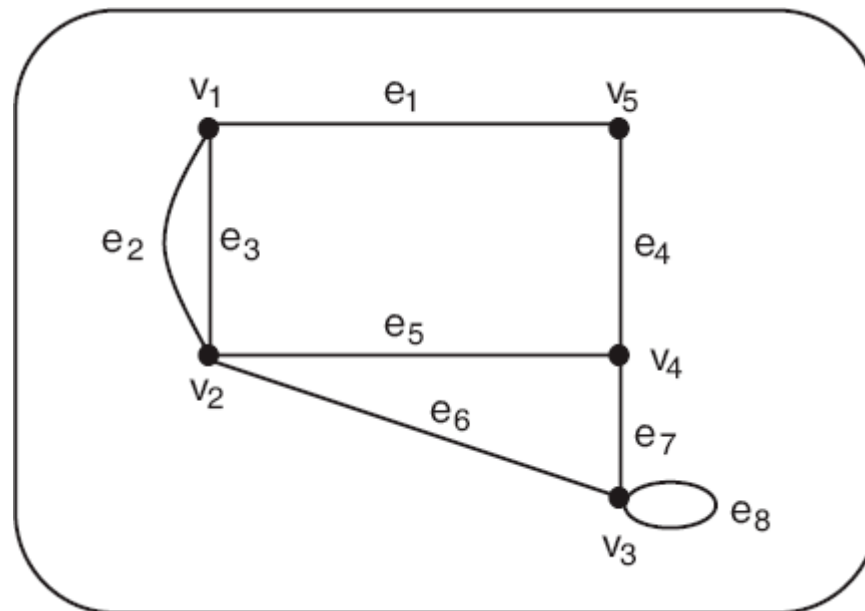
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - O grafo G é definido por cinco vértices e oito arestas.



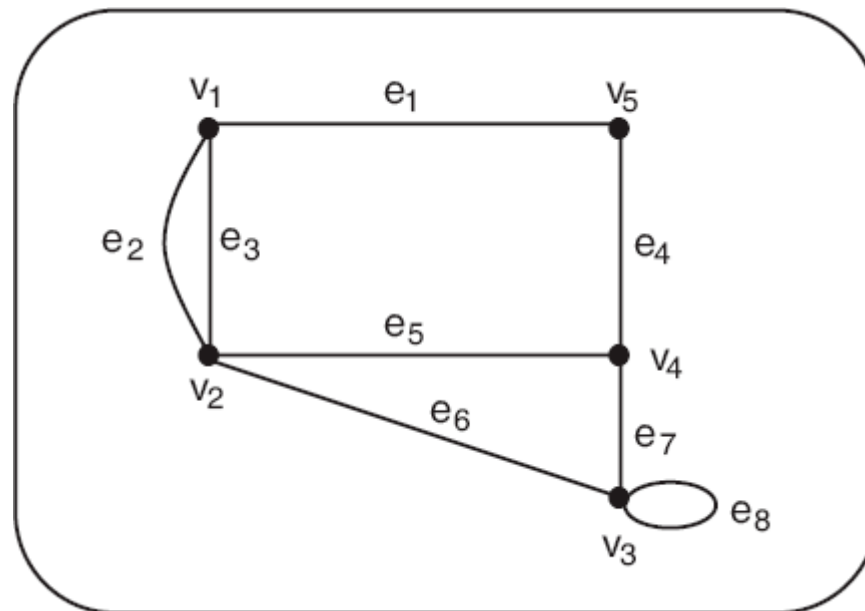
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - O grafo G é definido por cinco vértices e oito arestas.
 - $d(v_1) = 3$



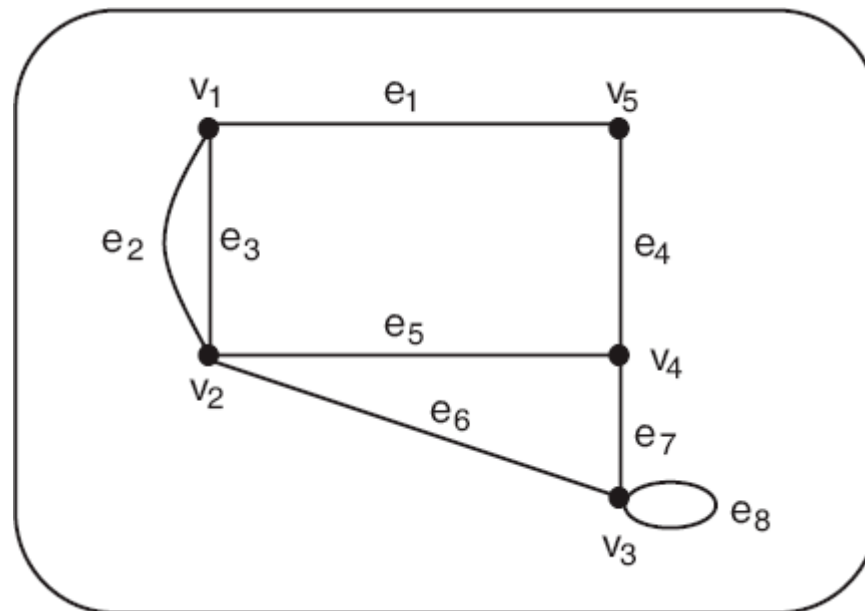
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - O grafo G é definido por cinco vértices e oito arestas.
 - $d(v_1) = 3$
 - $d(v_2) = 4$



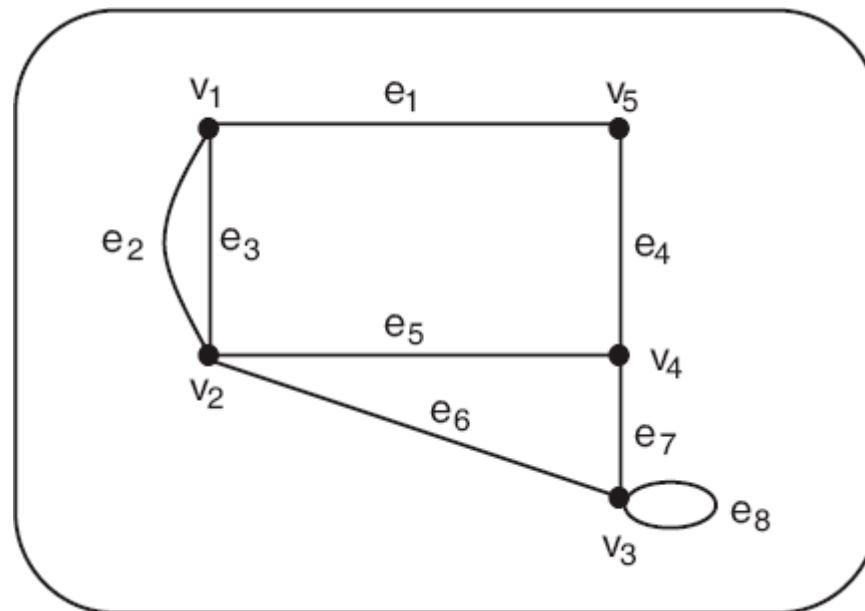
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - O grafo G é definido por cinco vértices e oito arestas.
 - $d(v_1) = 3$
 - $d(v_2) = 4$
 - $d(v_3) = 4$



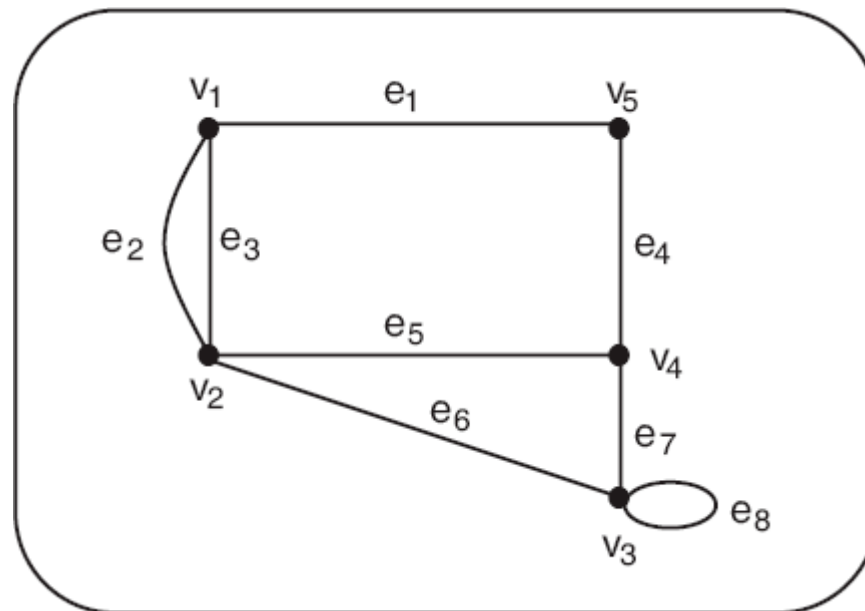
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - O grafo G é definido por cinco vértices e oito arestas.
 - $d(v_1) = 3$
 - $d(v_2) = 4$
 - $d(v_3) = 4$
 - $d(v_4) = 3$



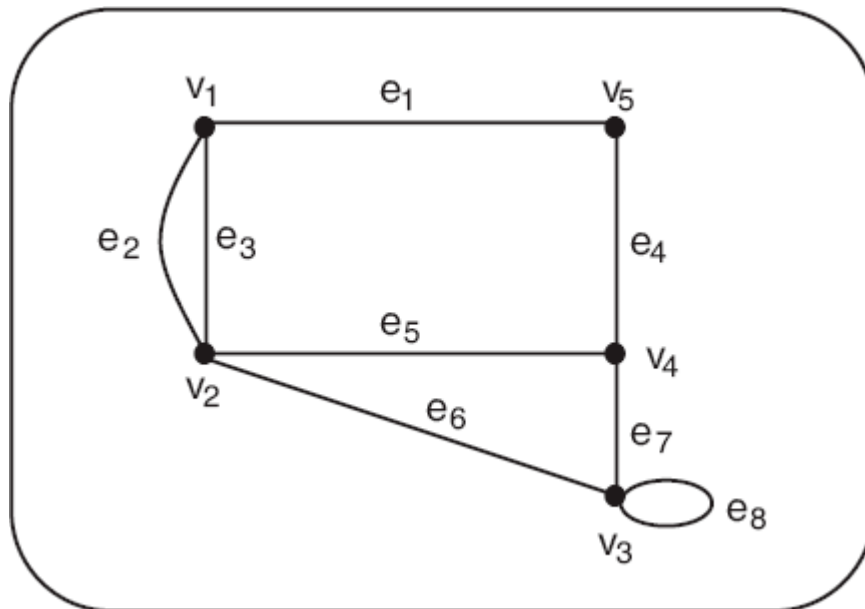
Conceitos Iniciais

- Exemplo:
 - O grafo G é definido por cinco vértices e oito arestas.
 - $d(v_1) = 3$
 - $d(v_2) = 4$
 - $d(v_3) = 4$
 - $d(v_4) = 3$
 - $d(v_5) = 2$



Conceitos Iniciais

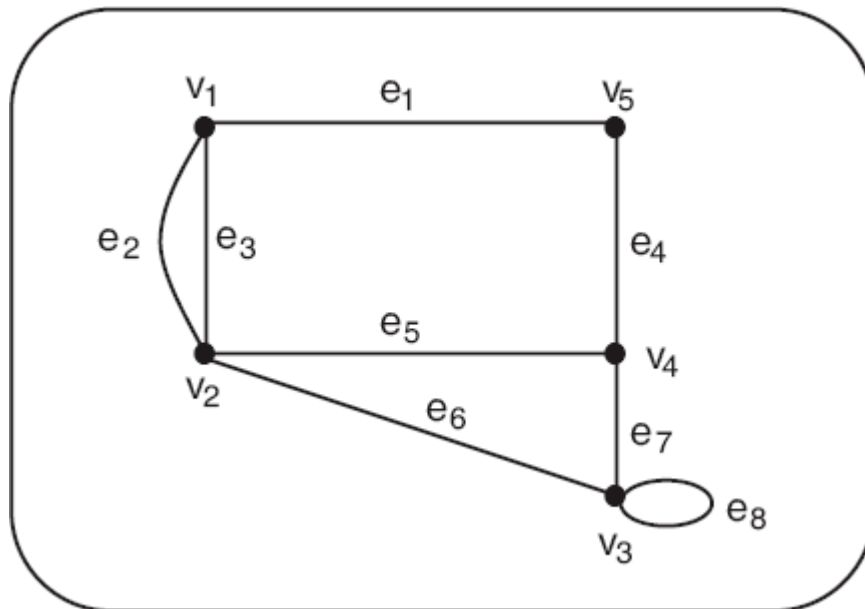
- Exemplo:



Conceitos Iniciais

- Exemplo:

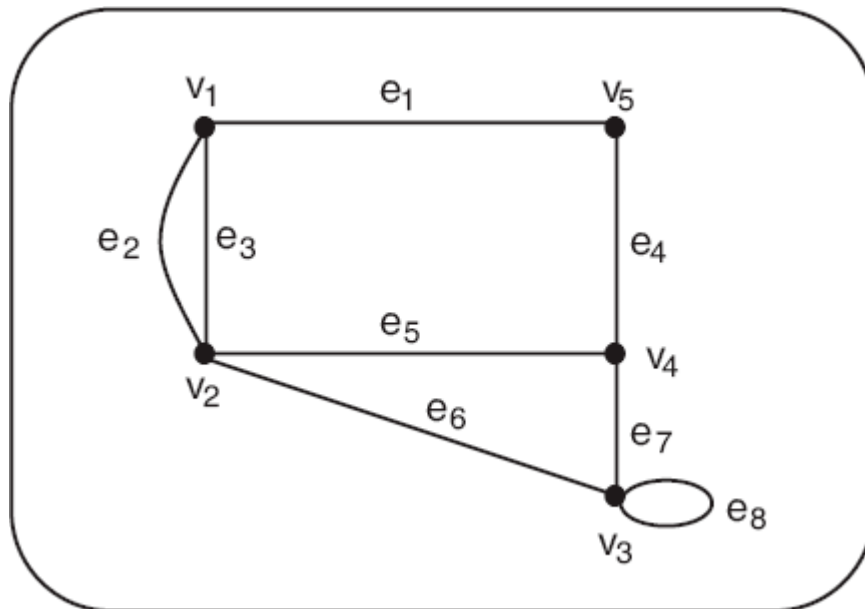
- Note que $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) = 3 + 4 + 4 + 3 + 2 = 16 = 2 \times 8 = 2 \times \text{número de arestas do grafo}$.



Conceitos Iniciais

- Exemplo:

- Note que $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) = 3 + 4 + 4 + 3 + 2 = 16 = 2 \times 8 = 2 \times \text{número de arestas do grafo}$.
- Esse resultado não é coincidência e é estabelecido pelo Teorema 3.1.



Conceitos Iniciais

Conceitos Iniciais

- **Teorema 3.1**

Conceitos Iniciais

- **Teorema 3.1**

- Para um grafo $G = (V, E)$, tal que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ($|V| = n$) e $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ($|E| = m$), tem-se:

Conceitos Iniciais

- **Teorema 3.1**

- Para um grafo $G = (V, E)$, tal que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ($|V| = n$) e $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ($|E| = m$), tem-se:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2 \times m \quad (3.2)$$

Conceitos Iniciais

- **Teorema 3.1**

- Para um grafo $G = (V, E)$, tal que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ($|V| = n$) e $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ($|E| = m$), tem-se:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2 \times m \quad (3.2)$$

- **Prova**

Conceitos Iniciais

- **Teorema 3.1**

- Para um grafo $G = (V, E)$, tal que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ($|V| = n$) e $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ($|E| = m$), tem-se:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2 \times m \quad (3.2)$$

- **Prova**

- Uma vez que cada aresta contribui com dois graus, a soma dos graus de todos os vértices em G é igual a duas vezes o número de arestas em G .

Conceitos Iniciais

- **Corolário do Teorema 3.1**

- Para um grafo $G = (V, E)$, tal que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ($|V| = n$) e $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ($|E| = m$), a desigualdade mostrada em (3.3) é válida.

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G) \quad (3.3)$$

Conceitos Iniciais

- **Teorema 3.2**

- Em um grafo $G = (V, E)$, tal que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $|E| = |\{e_1, e_2, \dots, e_m\}| = m$, o número de vértices ímpares é sempre par.

Conceitos Iniciais

- **Prova do Teorema 3.2:**

Conceitos Iniciais

- **Prova do Teorema 3.2:**
 - O conjunto total de vértices V de G pode ser escrito como $V = P \cup I$, tal que P é o conjunto dos vértices pares e I , o conjunto dos vértices ímpares. Com base no resultado estabelecido pelo Teorema 3.1, pode-se escrever que:

Conceitos Iniciais

- **Prova do Teorema 3.2:**

- O conjunto total de vértices V de G pode ser escrito como $V = P \cup I$, tal que P é o conjunto dos vértices pares e I , o conjunto dos vértices ímpares. Com base no resultado estabelecido pelo Teorema 3.1, pode-se escrever que:

$$2 \times m = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{u \in P} d(u) + \sum_{w \in I} d(w)$$

Conceitos Iniciais

- **Prova do Teorema 3.2:**

- O conjunto total de vértices V de G pode ser escrito como $V = P \cup I$, tal que P é o conjunto dos vértices pares e I , o conjunto dos vértices ímpares. Com base no resultado estabelecido pelo Teorema 3.1, pode-se escrever que:

$$2 \times m = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{u \in P} d(u) + \sum_{w \in I} d(w)$$

- Assim, tem-se:

Conceitos Iniciais

- **Prova do Teorema 3.2:**

- O conjunto total de vértices V de G pode ser escrito como $V = P \cup I$, tal que P é o conjunto dos vértices pares e I , o conjunto dos vértices ímpares. Com base no resultado estabelecido pelo Teorema 3.1, pode-se escrever que:

$$2 \times m = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{u \in P} d(u) + \sum_{w \in I} d(w)$$

- Assim, tem-se:

$$\sum_{w \in I} d(w) = 2 \times m - \sum_{u \in P} d(u)$$

Conceitos Iniciais

- **Prova do Teorema 3.2 (cont.):**

- A diferença anterior é um número par, uma vez que é a diferença de dois números pares. Como cada um dos termos na soma $\sum_{w \in I} d(w)$ é ímpar (uma vez que cada um deles é o grau de um vértice ímpar), e como essa soma é par, deve existir um número par desses termos (uma vez que uma soma de um número ímpar de números ímpares é sempre ímpar).

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.4**

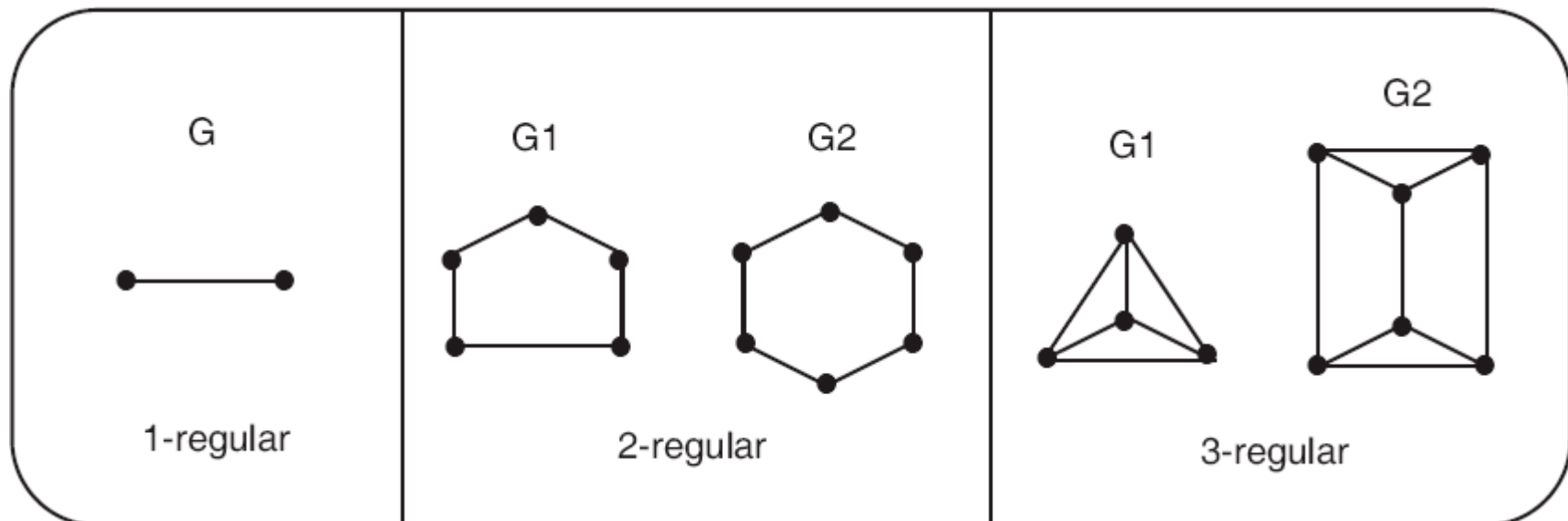
Conceitos Iniciais

- **Definição 3.4**
 - Seja o grafo $G = (V, E)$.

Conceitos Iniciais

- **Definição 3.4**

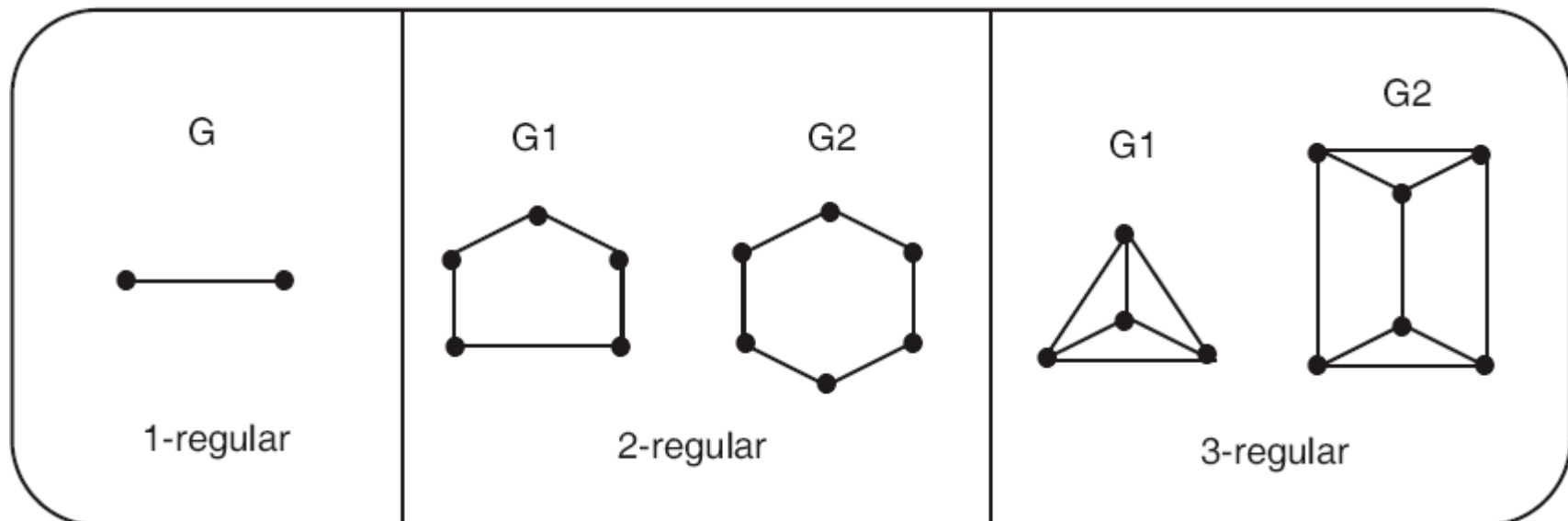
- Seja o grafo $G = (V, E)$.



Conceitos Iniciais

- **Definição 3.4**

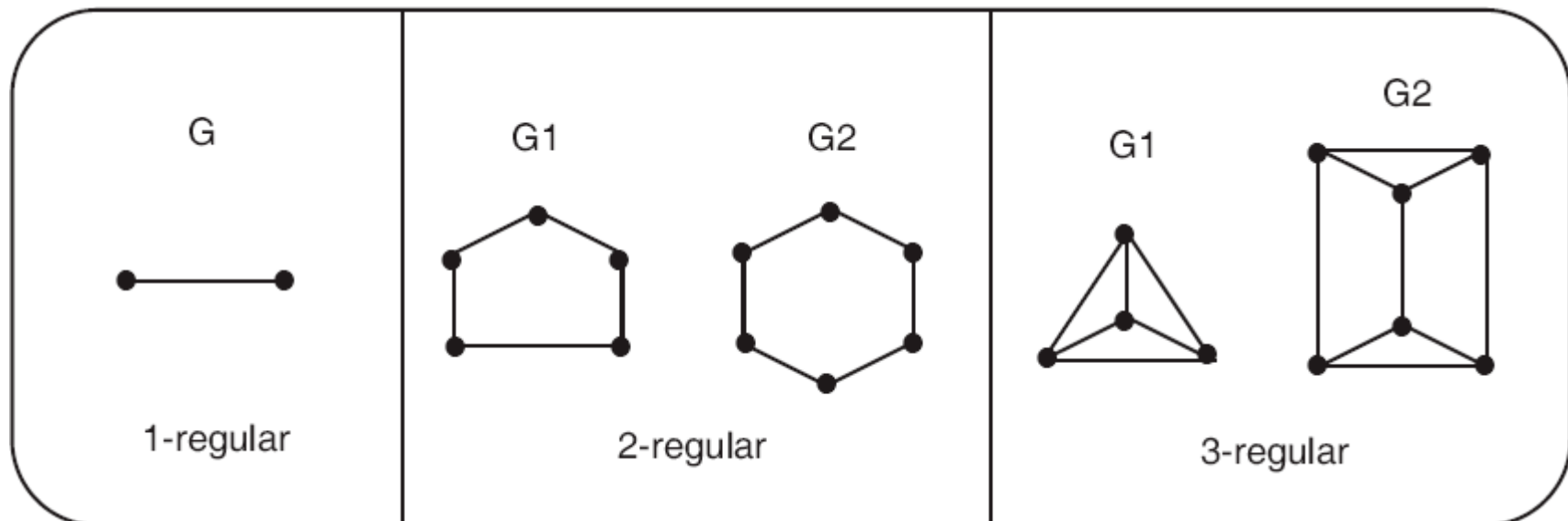
- Seja o grafo $G = (V, E)$.
- Se para algum inteiro positivo k , $d(v) = k$ para todo vértice $v \in V$, então G é chamado de **k -regular**.



Conceitos Iniciais

- **Definição 3.4**

- Seja o grafo $G = (V, E)$.
- Se para algum inteiro positivo k , $d(v) = k$ para todo vértice $v \in V$, então G é chamado de **k -regular**.
- Um grafo regular é um grafo que é k -regular para algum k .



GRAFO COMPLETO E GRAFO R-PARTIDO

Grafo Completo

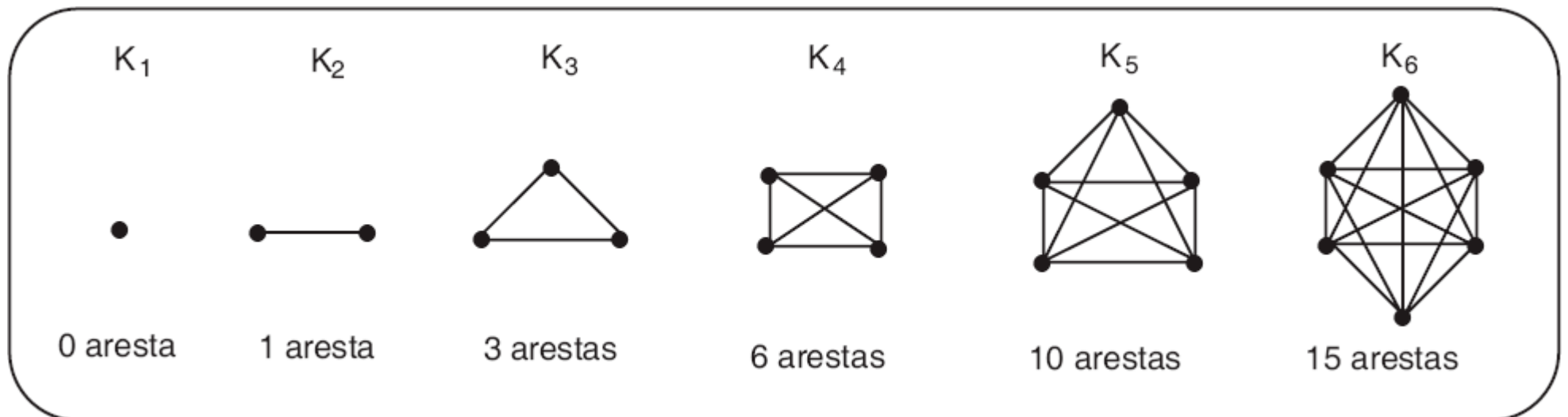
- **Definição 3.7**

- Um grafo completo de ordem n , notado por K_n , é um grafo que tem n vértices e exatamente uma aresta conectando cada um dos possíveis pares de vértices distintos.

Grafo Completo

- **Definição 3.7**

- Um grafo completo de ordem n , notado por K_n , é um grafo que tem n vértices e exatamente uma aresta conectando cada um dos possíveis pares de vértices distintos.



Grafo Bipartido

Grafo Bipartido

- **Definição 3.8**

Grafo Bipartido

- **Definição 3.8**
 - Seja $G = (V,E)$ um grafo.

Grafo Bipartido

- **Definição 3.8**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- Se o conjunto de vértices V de G puder ser particionado em dois subconjuntos não vazios, X e Y ($X \cup Y = V$ e $X \cap Y = \emptyset$) de tal maneira que cada aresta de G tenha uma extremidade em X e a outra em Y , então G é chamado de bipartido.

Grafo Bipartido

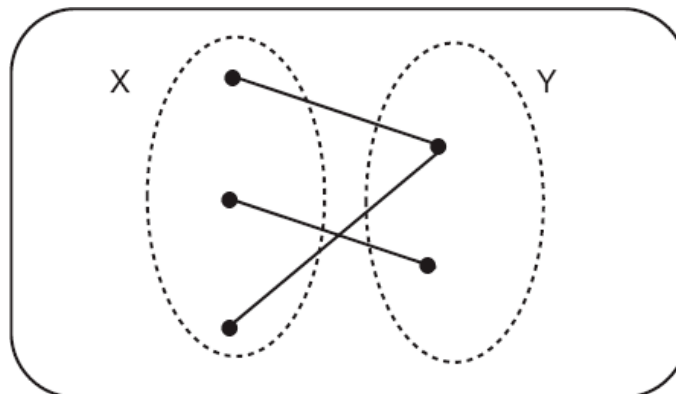
- **Definição 3.8**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- Se o conjunto de vértices V de G puder ser particionado em dois subconjuntos não vazios, X e Y ($X \cup Y = V$ e $X \cap Y = \emptyset$) de tal maneira que cada aresta de G tenha uma extremidade em X e a outra em Y , então G é chamado de bipartido.
- A partição $V = X \cup Y$ é chamada de bipartição de G .

Grafo Bipartido

- **Definição 3.8**

- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- Se o conjunto de vértices V de G puder ser particionado em dois subconjuntos não vazios, X e Y ($X \cup Y = V$ e $X \cap Y = \emptyset$) de tal maneira que cada aresta de G tenha uma extremidade em X e a outra em Y , então G é chamado de bipartido.
- A partição $V = X \cup Y$ é chamada de bipartição de G .



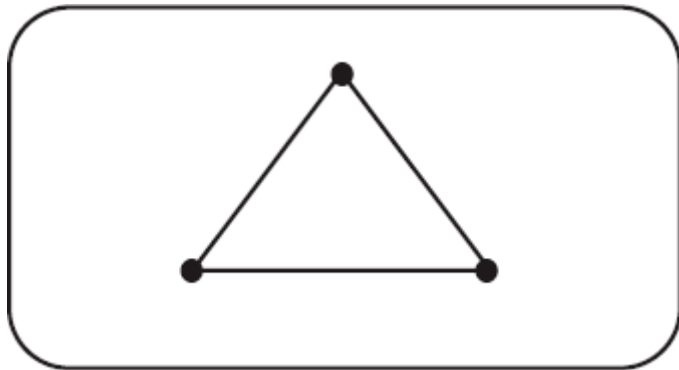
Grafo Bipartido

Grafo Bipartido

- A figura abaixo mostra um grafo que não é bipartido:

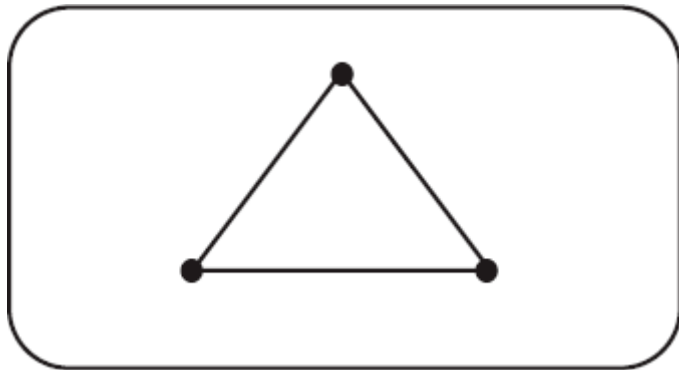
Grafo Bipartido

- A figura abaixo mostra um grafo que não é bipartido:



Grafo Bipartido

- A figura abaixo mostra um grafo que não é bipartido:



- Uma vez que o conjunto de vértices não pode ser particionado em dois subconjuntos não vazios disjuntos, de maneira que as arestas apenas conectem vértices de um subconjunto a vértices do outro subconjunto.

Grafo Partido

Grafo Partido

- **Definição 3.10**

Grafo Partido

- **Definição 3.10**

- Um grafo bipartido completo é um grafo simples bipartido G , com a bipartição $V = X \cup Y$, no qual **todo** vértice em X está unido a todo vértice em Y .

Grafo Partido

- **Definição 3.10**

- Um grafo bipartido completo é um grafo simples bipartido G , com a bipartição $V = X \cup Y$, no qual **todo** vértice em X está unido a todo vértice em Y .
- Se $|X| = m$ e $|Y| = n$ então tal grafo é denotado por $K_{m,n}$.

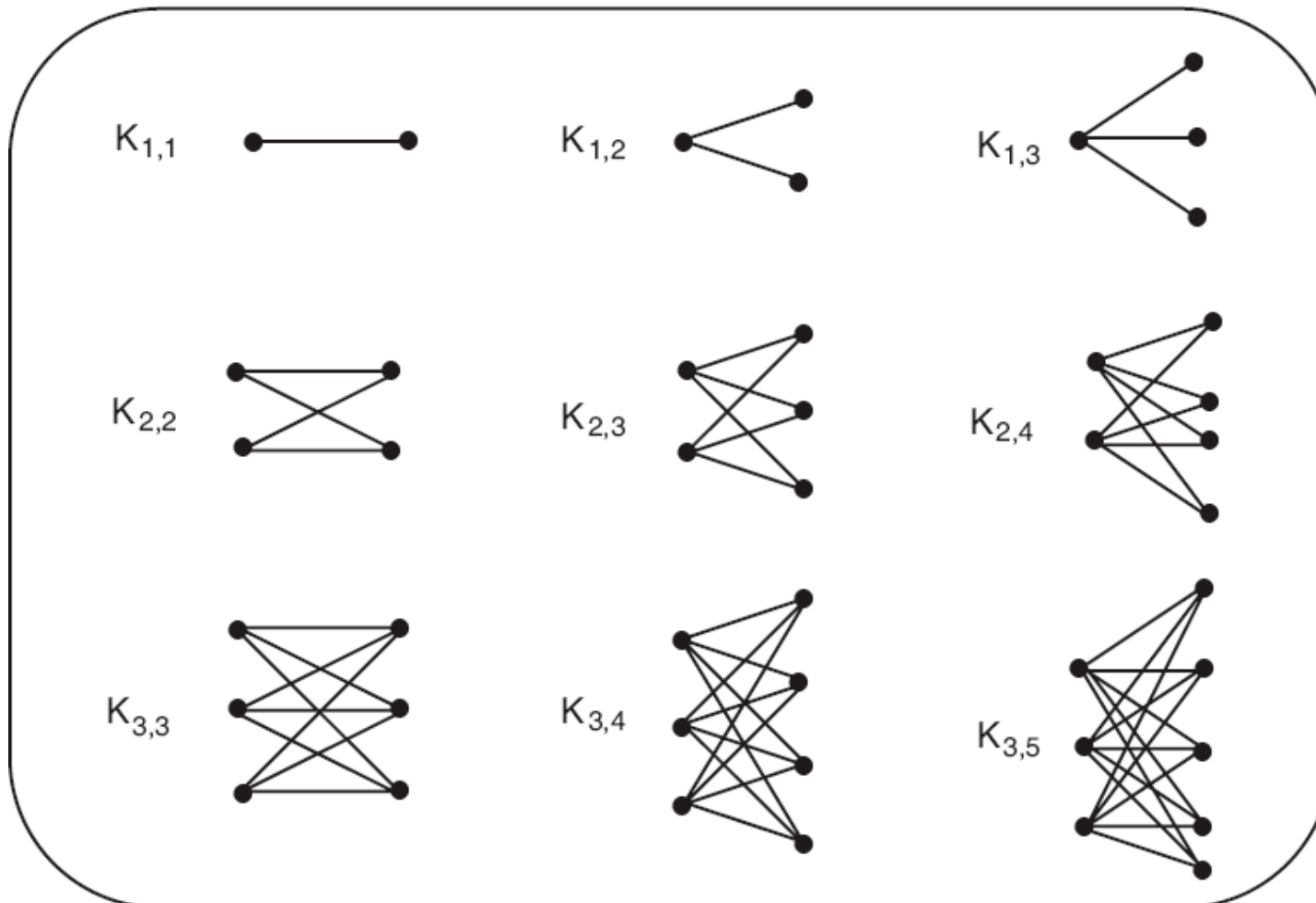
Grafo Partido

- **Definição 3.10**

- Um grafo bipartido completo é um grafo simples bipartido G , com a bipartição $V = X \cup Y$, no qual **todo** vértice em X está unido a todo vértice em Y .
- Se $|X| = m$ e $|Y| = n$ então tal grafo é denotado por $K_{m,n}$.
- Para padronizar, assume-se que $m \leq n$. Note que $K_{n,n}$ é um grafo regular de grau n .

Grafo Partido

- A figura abaixo mostra os diagramas de $K_{m,n}$, para $m = 1, 2, 3$ e $n = m, m + 1, m + 2$.



Exercícios

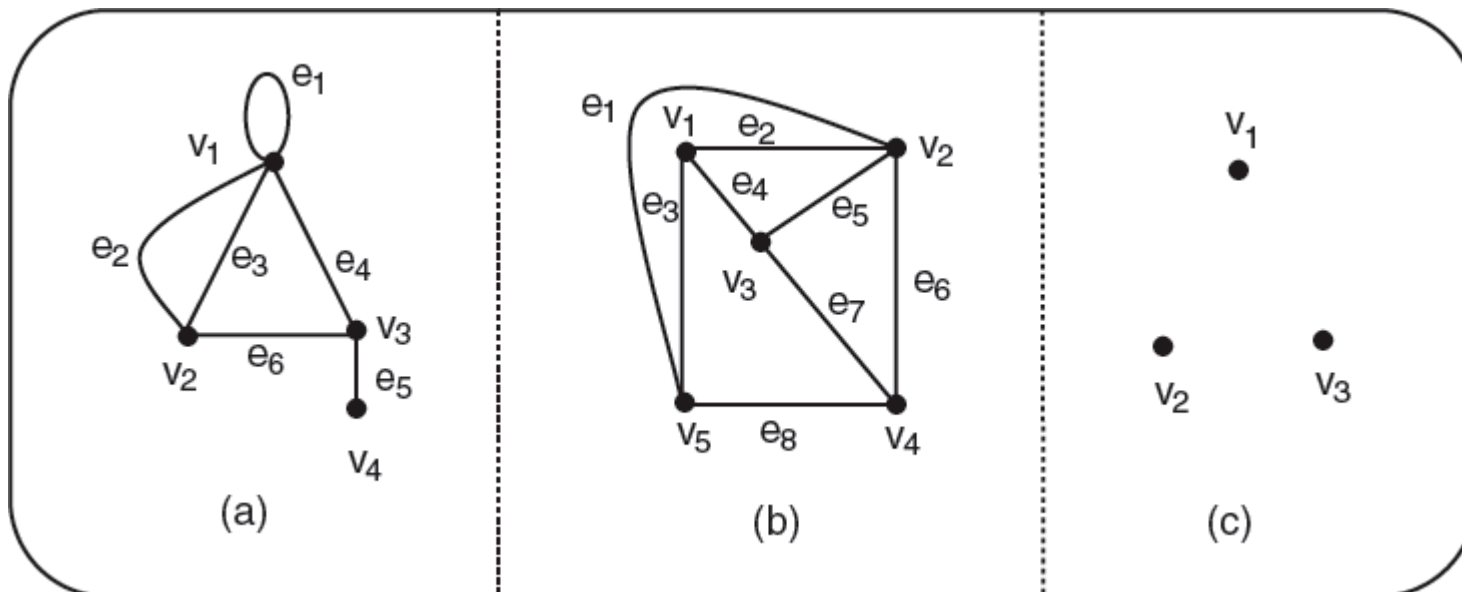
- O que são grafos isomorfos? Desenhe um exemplo.
- Escreva um algoritmo que verifique se dois grafos G_1 e G_2 não são isomorfos com base no número de vértices e arestas e, também, comparando a lista ordenada dos graus de seus vértices.
- Qual é a diferença entre grafos simples e grafos complexos?

Exercícios

- Dê um exemplo de um grafo simples: (a) que não tenha vértices com grau ímpar. (b) que não tenha vértices com grau par.

Exercícios

- Para cada um dos três grafos $G = (V, E)$, encontre V , E , todas as arestas paralelas, todos os loops, todos os vértices isolados, e diga se G é um grafo simples. Diga também a quais vértices e_1 é incidente.

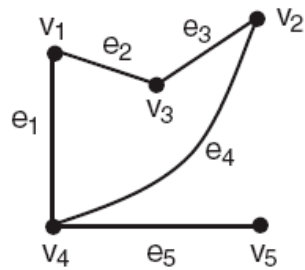


Exercícios

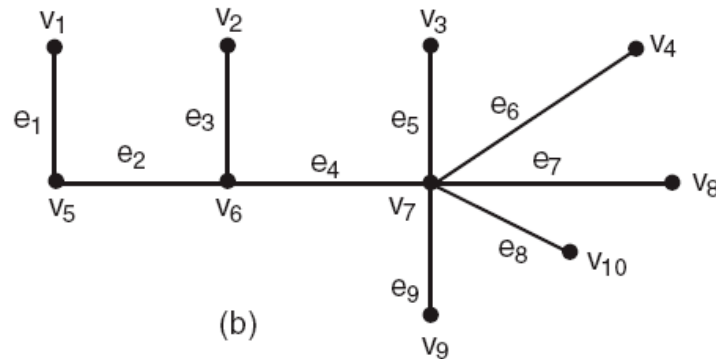
- Justifique cada uma das afirmações a seguir:
 - (a) todo grafo é seu próprio subgrafo.
 - (b) um subgrafo de um subgrafo de G é um subgrafo de G .
 - (c) um único vértice em um grafo G é um subgrafo de G .
 - (d) uma única aresta de G , junto com os seus vértices-extremidade é também um subgrafo de G .

Exercícios

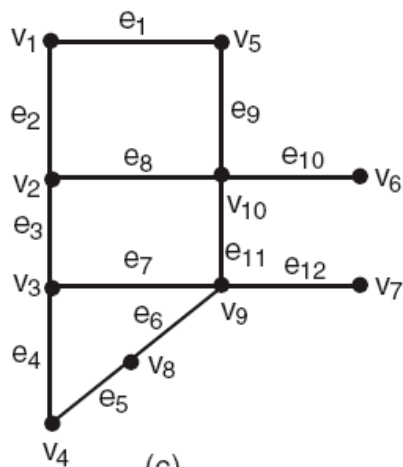
- Verifique se cada um dos grafos a seguir é bipartido. Se o grafo em questão for bipartido, especifique os conjuntos disjuntos de vértices.



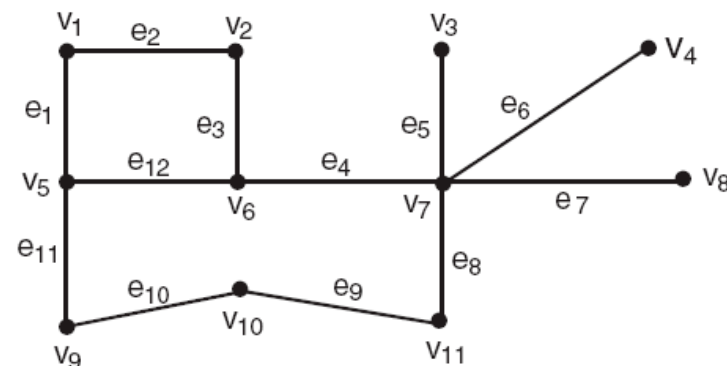
(a)



(b)



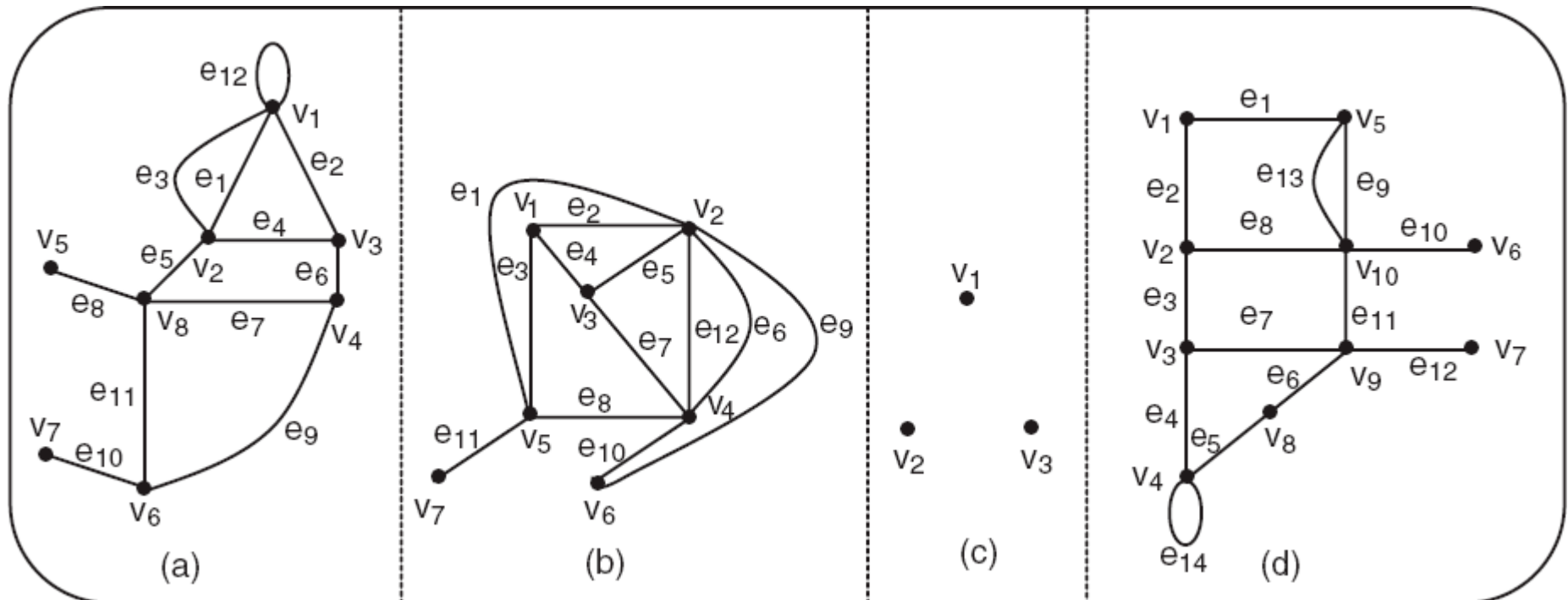
(c)



(d)

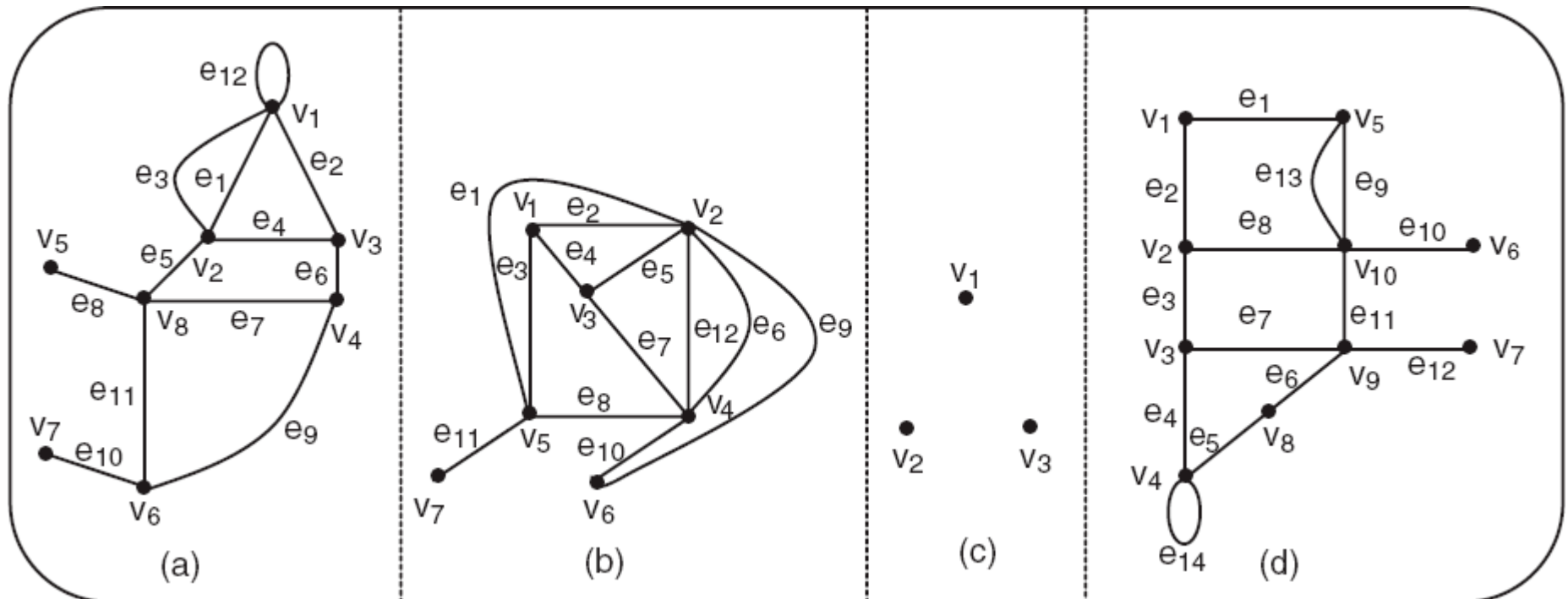
Exercícios

- Especifique três subgrafos spanning para cada um dos grafos (a), (b), (c) e (d).



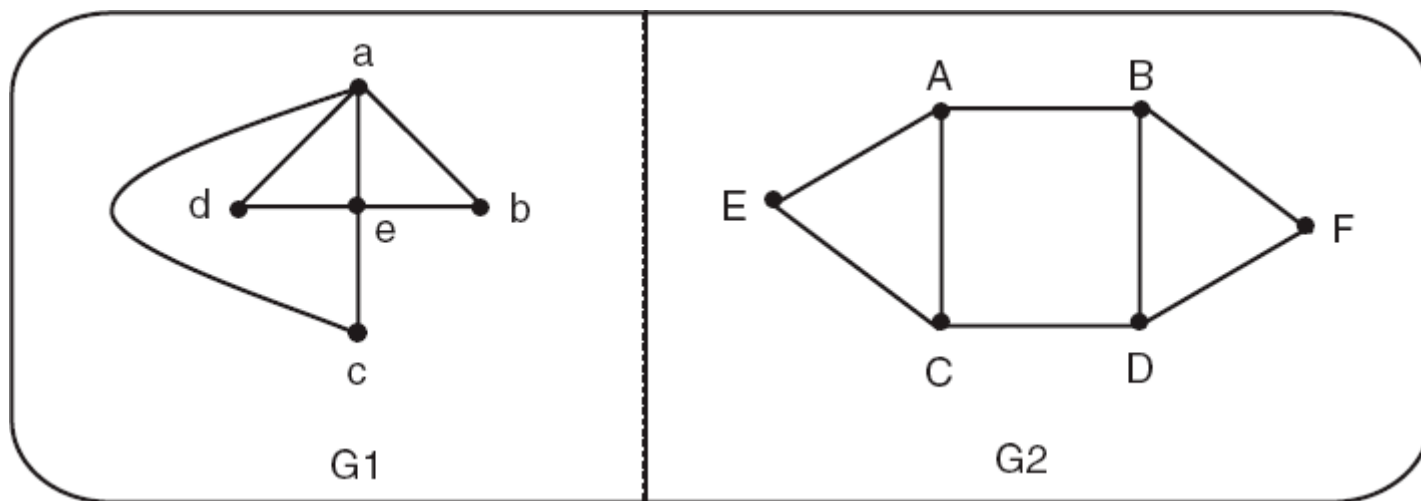
Exercícios

- Construa o grafo básico simples de (a), (b), (c) e (d).



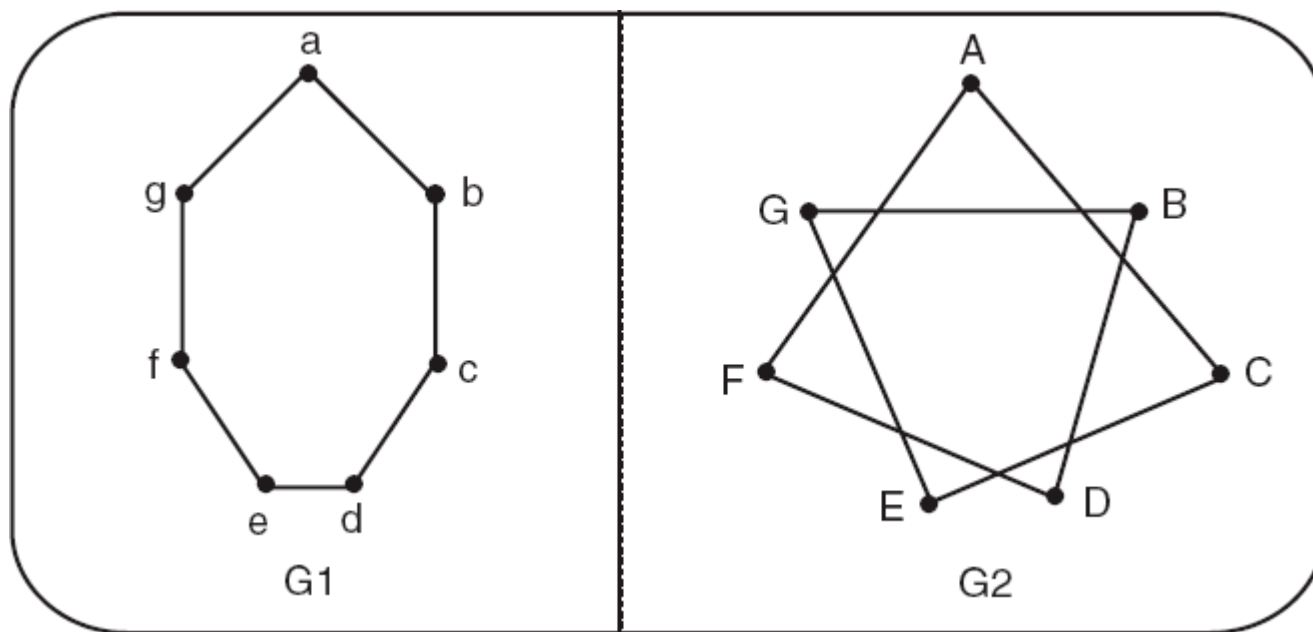
Exercícios

- Determine se os grafos G1 e G2 a seguir são isomorfos.



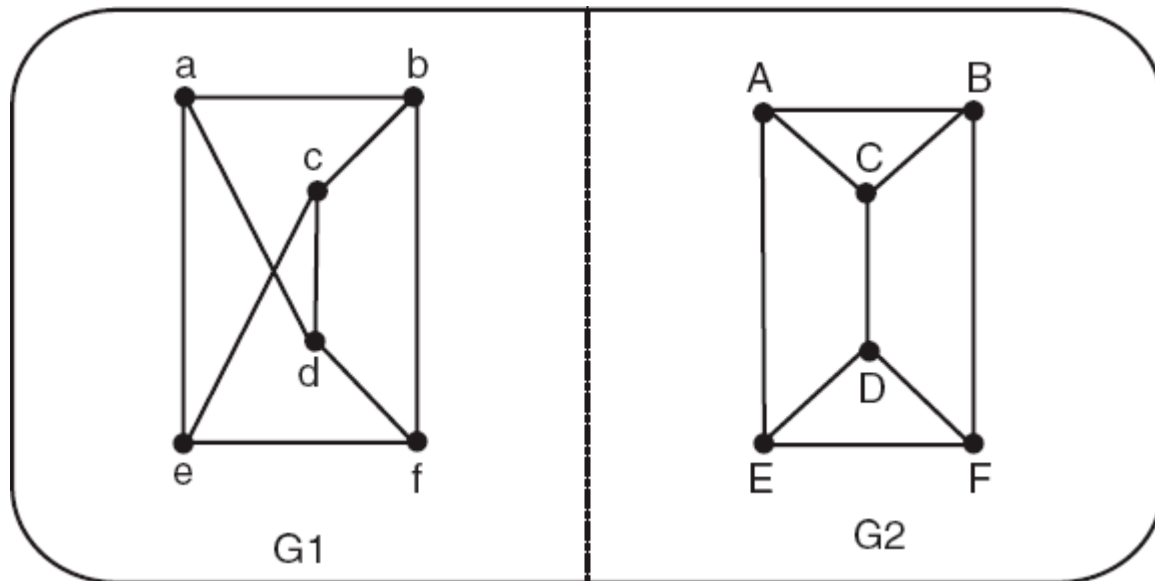
Exercícios

- Determine se os grafos $G1$ e $G2$ a seguir são isomorfos.



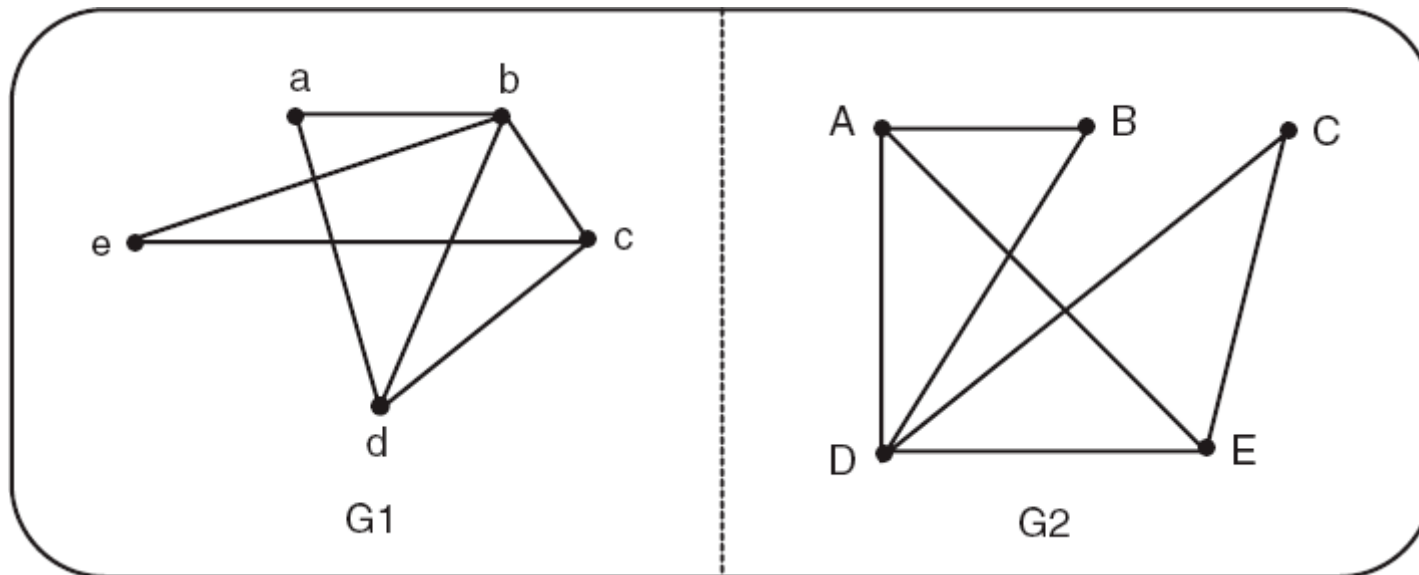
Exercícios

- Determine se os grafos G_1 e G_2 a seguir são isomorfos.



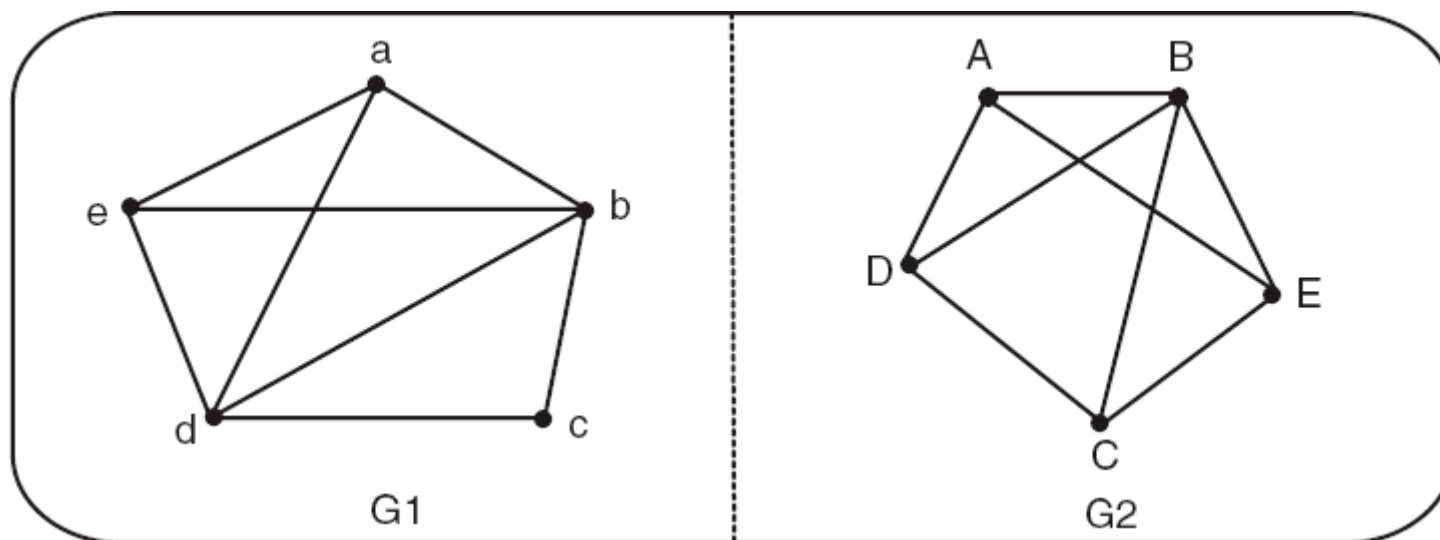
Exercícios

- Determine se os grafos G1 e G2 a seguir são isomorfos.



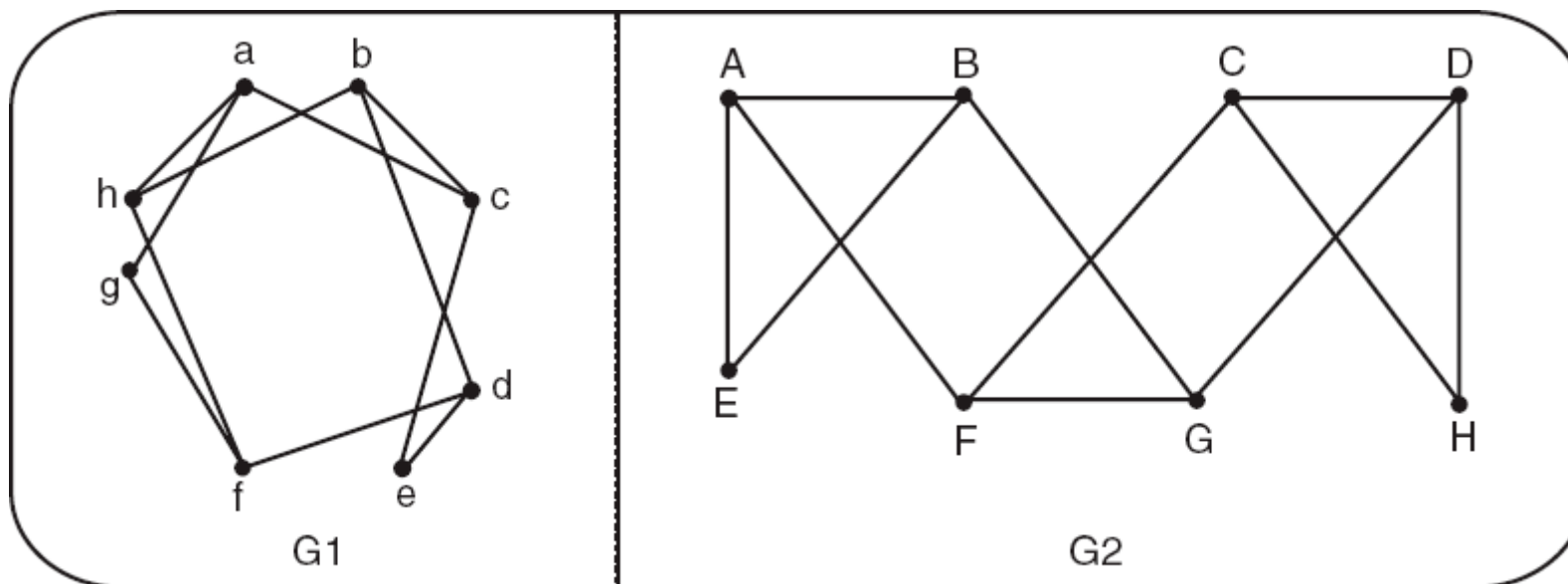
Exercícios

- Determine se os grafos G_1 e G_2 a seguir são isomorfos.



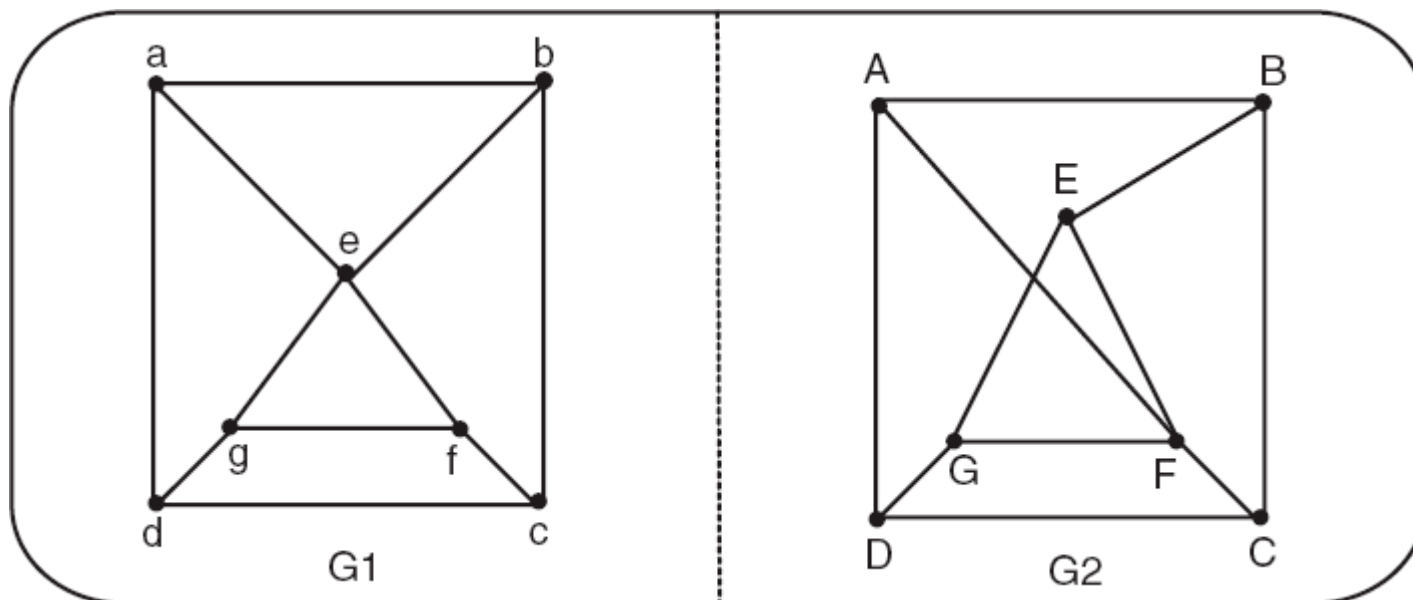
Exercícios

- Determine se os grafos G1 e G2 a seguir são isomorfos.



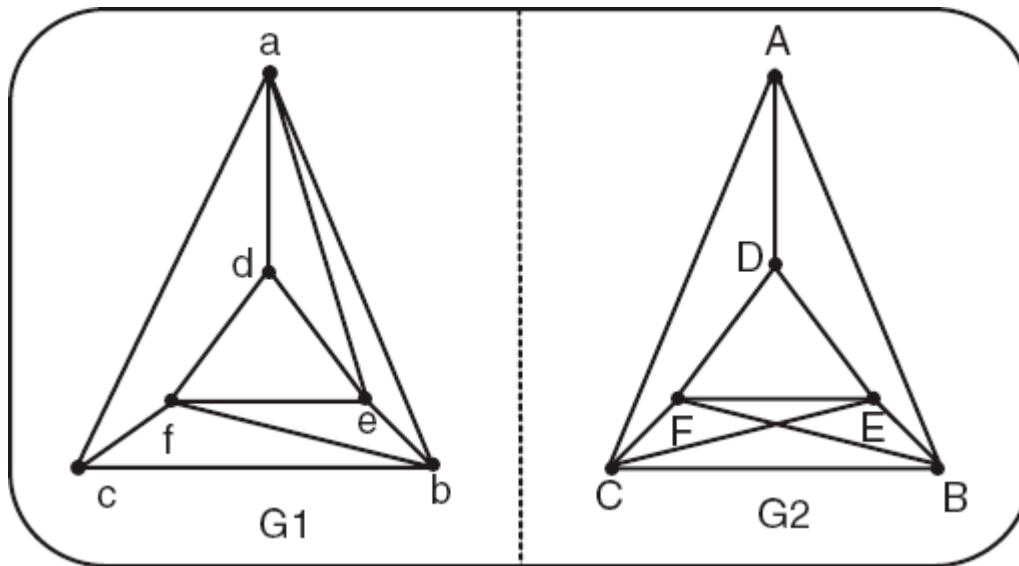
Exercícios

- Determine se os grafos G_1 e G_2 a seguir são isomorfos.



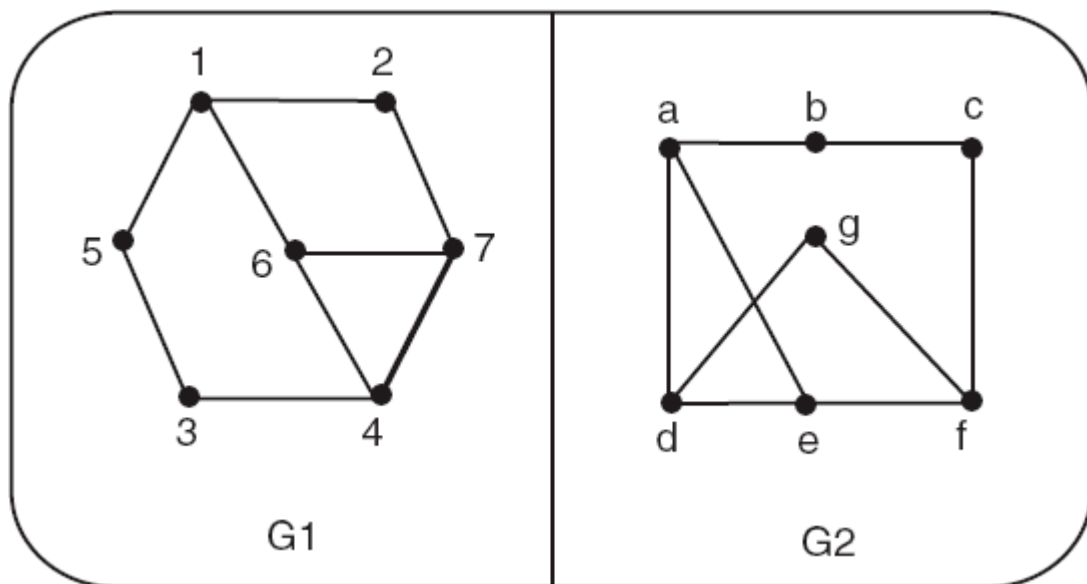
Exercícios

- Determine se os grafos G_1 e G_2 a seguir são isomorfos.



Exercícios

- Determine se os grafos G1 e G2 a seguir são isomorfos.



Exercícios

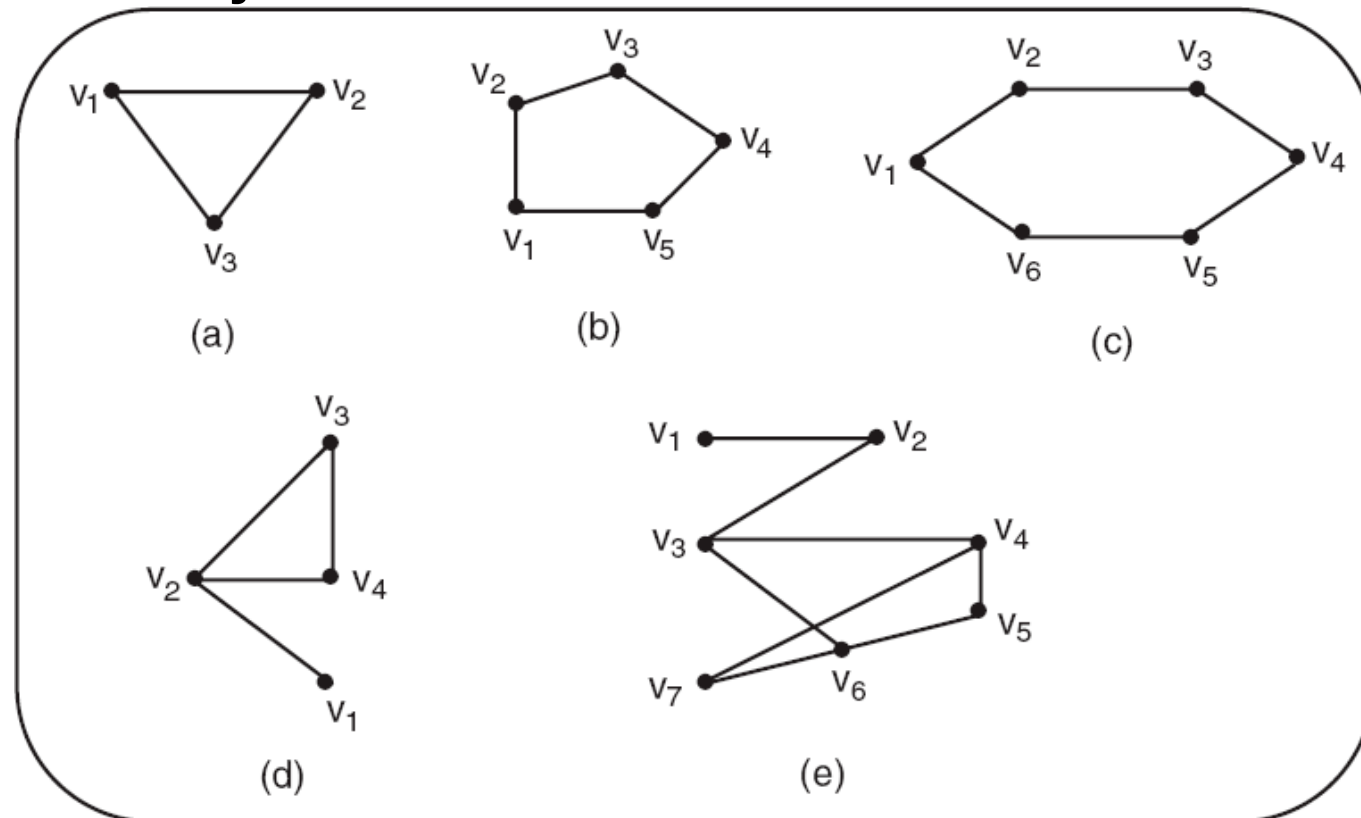
- Desenhe o grafo com a propriedade solicitada ou, então, explique por que tal grafo não existe:
 - Seis vértices, cada um com grau 3.
 - Cinco vértices, cada um com grau 3.
 - Quatro vértices, cada um com grau 1.
 - Seis vértices e quatro arestas.
 - Quatro arestas, quatro vértices tendo graus 1,2,3,4.
 - Quatro vértices com graus 1,2,3,4.
 - Grafo simples; seis vértices tendo graus 1,2,3,4,5,5.
 - Grafo simples; cinco vértices tendo graus 2,3,3,4,4.
 - Grafo simples; cinco vértices tendo graus 2,2,4,4,4.

Exercícios

- Dê um exemplo de um grafo conectado tal que a remoção de qualquer aresta resulta em um grafo que não é conectado (assuma que a remoção de uma aresta não remove qualquer vértice).

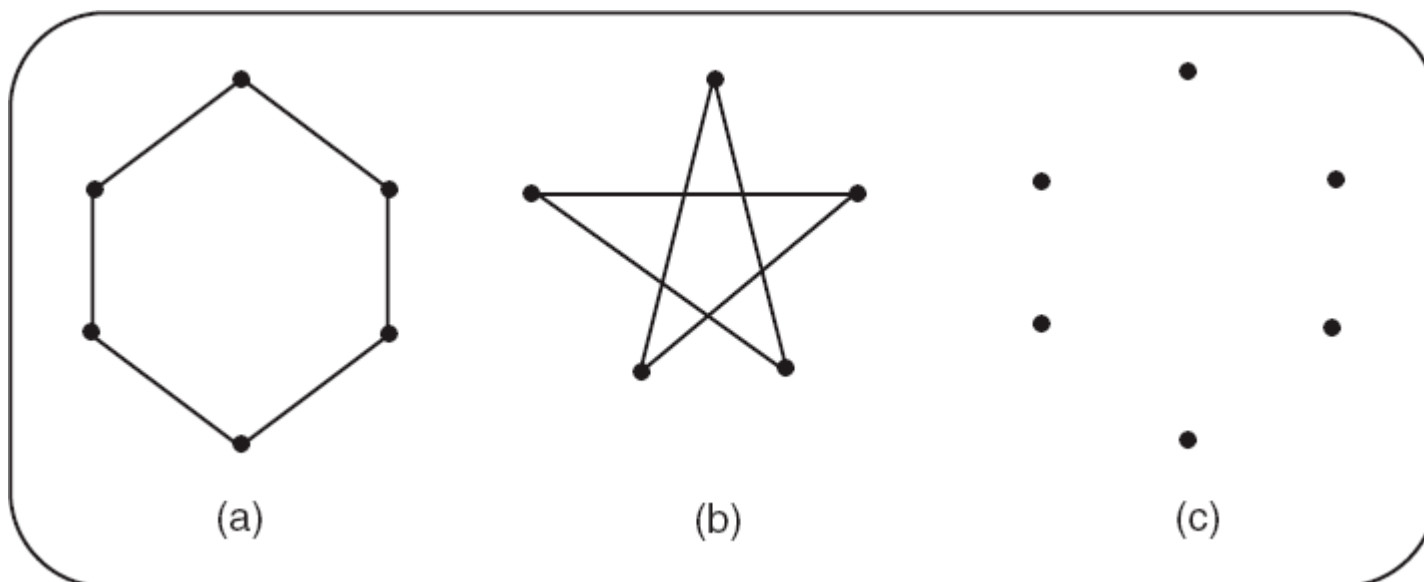
Exercícios

- Dados os grafos a seguir, quais deles são bipartidos e quais não? Para os bipartidos, redesenhe-os, de modo que fiquem evidentes os dois conjuntos de vértices.



Exercícios

- Um grafo simples é chamado de autocomplementar se for isomorfo ao seu próprio complemento.
 - Quais dos grafos (a), (b) e (c) a seguir são autocomplementares?



Exercícios

- Faça uma lista de todas as árvores spanning, inclusive daquelas isomorfas, dos grafos conexos (a), (b), (c) e (d) a seguir. Quantas árvores spanning não isomorfas existem em cada caso?

