Teoria dos Grafos

COLORAÇÃO DE GRAFOS

Prof. Tiago Eugenio de Melo
tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

- Material elaborado a partir da apresentação “Coloração de grafos e suas aplicações” por Atílio Gomes Luiz no V Workshop de Tecnologia da Informação – Universidade Federal do Ceará.

COLORAÇÃO DE GRAFOS

Problema

Problema

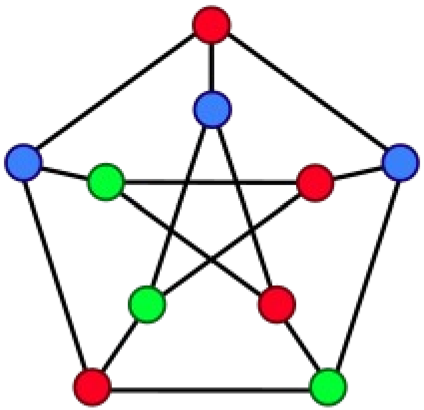
- Atribuir cores a certos elementos do grafo sujeito a determinadas condições.

Problema

- Atribuir cores a certos elementos do grafo sujeito a determinadas condições.
- Exemplo:

Problema

- Atribuir cores a certos elementos do grafo sujeito a determinadas condições.
- Exemplo:



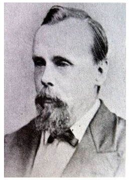
Problema

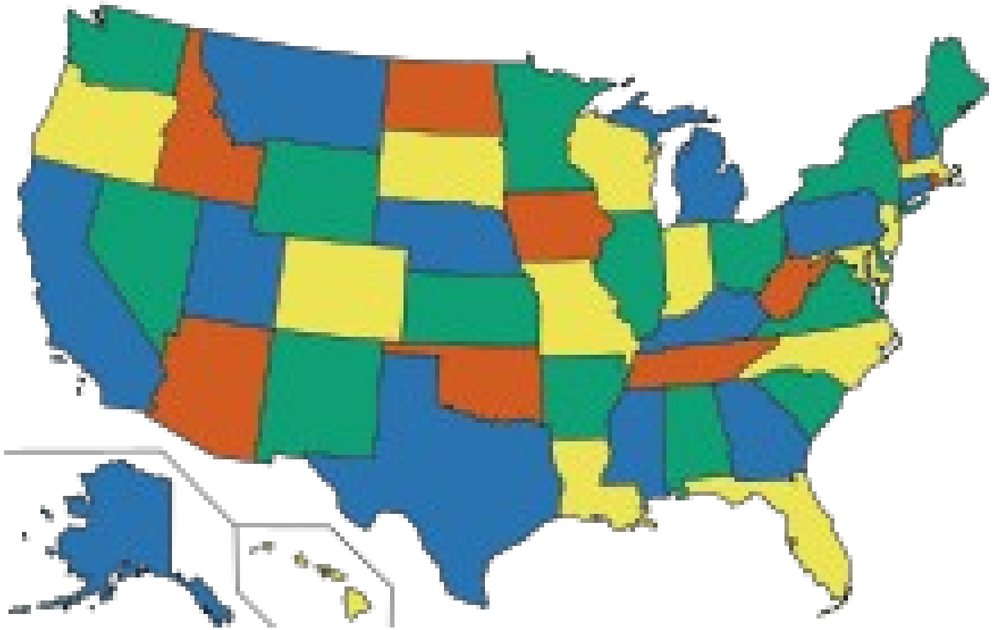
- Qual é o número mínimo de cores para colorir os estados?

BREVE HISTÓRICO

Origem do Problema

- Francis Guthrie (1852): Qualquer mapa político pode ser colorido com no máximo quatro cores?





Histórico

Histórico

- 1852 - Francis Guthrie propõe o problema das 4 cores.

Histórico

- 1852 - Francis Guthrie propõe o problema das 4 cores.
- 1879 - Kempe apresenta uma suposta “solução”.

Histórico

- 1852 - Francis Guthrie propõe o problema das 4 cores.
- 1879 - Kempe apresenta uma suposta “solução”.
- 1880 - Tait, na tentativa de resolver o problema, inicia o estudo da coloração de arestas.

Histórico

- 1852 - Francis Guthrie propõe o problema das 4 cores.
- 1879 - Kempe apresenta uma suposta “solução”.
- 1880 - Tait, na tentativa de resolver o problema, inicia o estudo da coloração de arestas.
- 1890 - Heawood apresenta uma falha na demonstração de Kempe e prova o Teorema das 5 cores.

Histórico

Histórico

- 1977 - Appel e Haken resolvem o problema: Todo mapa no plano pode ser colorido com no máximo 4 cores.

Histórico

- 1977 - Appel e Haken resolvem o problema: Todo mapa no plano pode ser colorido com no máximo 4 cores.
- A demonstração gerou um debate na Matemática por envolver uso de computadores.

Histórico

- 1977 - Appel e Haken resolvem o problema: Todo mapa no plano pode ser colorido com no máximo 4 cores.
- A demonstração gerou um debate na Matemática por envolver uso de computadores.
- Os autores definiram 1936 configurações que deveriam ser verificadas por computador, usando aproximadamente 1200 horas de computação.

Mapas e Grafos

Mapas e Grafos

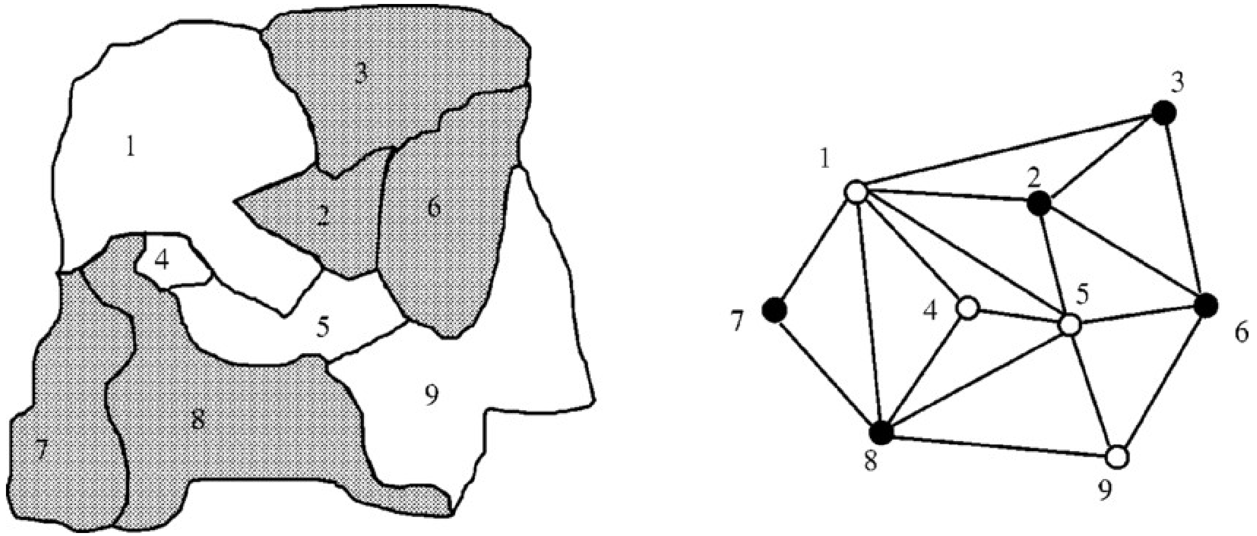
- Um mapa no plano pode ser representado por um grafo chamado de **grafo dual**.

Mapas e Grafos

- Um mapa no plano pode ser representado por um grafo chamado de **grafo dual**.
- Um grafo dual G’ de um grafo planar G é um grafo plano cujos vértices correspondem às faces de G.

Mapas e Grafos

- Um mapa no plano pode ser representado por um grafo chamado de **grafo dual**.
- Um grafo dual G’ de um grafo planar G é um grafo plano cujos vértices correspondem às faces de G.



Teorema das Quatro Cores

- Todo grafo planar possui uma coloração de vértices com no máximo quatro cores [Appel e Haken, 1977].

APLICAÇÕES

Separação de Produtos Explosivos

Separação de Produtos Explosivos

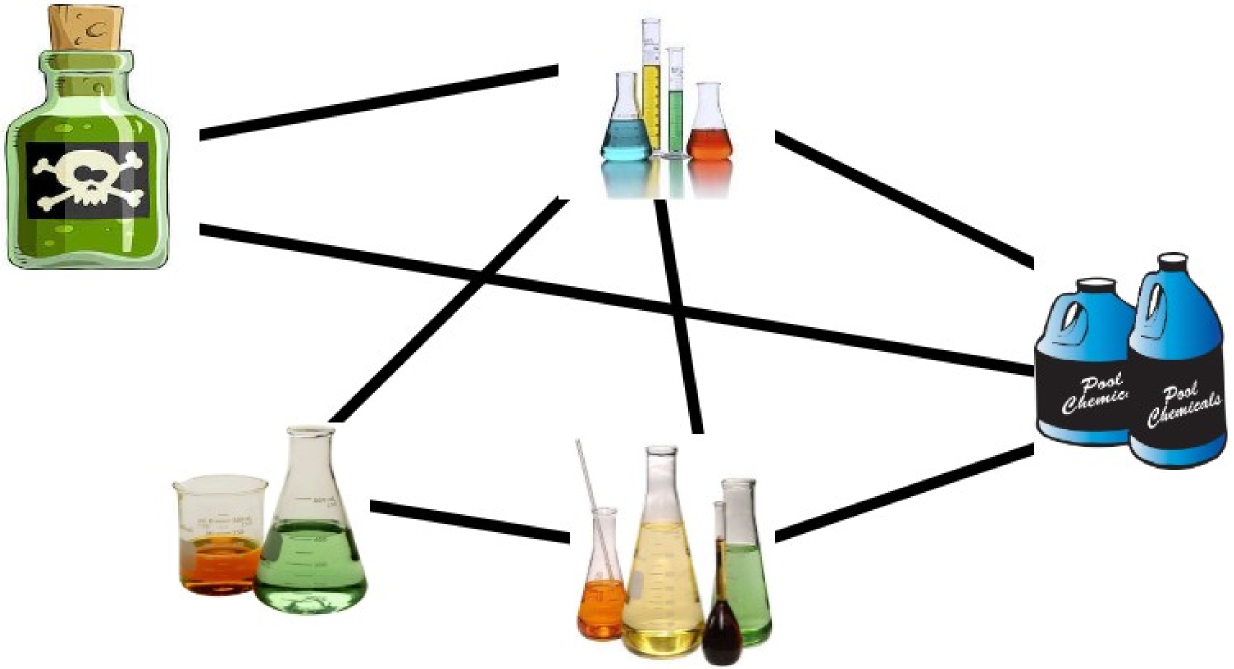
- Os vértices representam produtos químicos necessários em algum processo de produção.

Separação de Produtos Explosivos

- Os vértices representam produtos químicos necessários em algum processo de produção.

Separação de Produtos Explosivos

- Os vértices representam produtos químicos necessários em algum processo de produção.



Separação de Produtos Explosivos

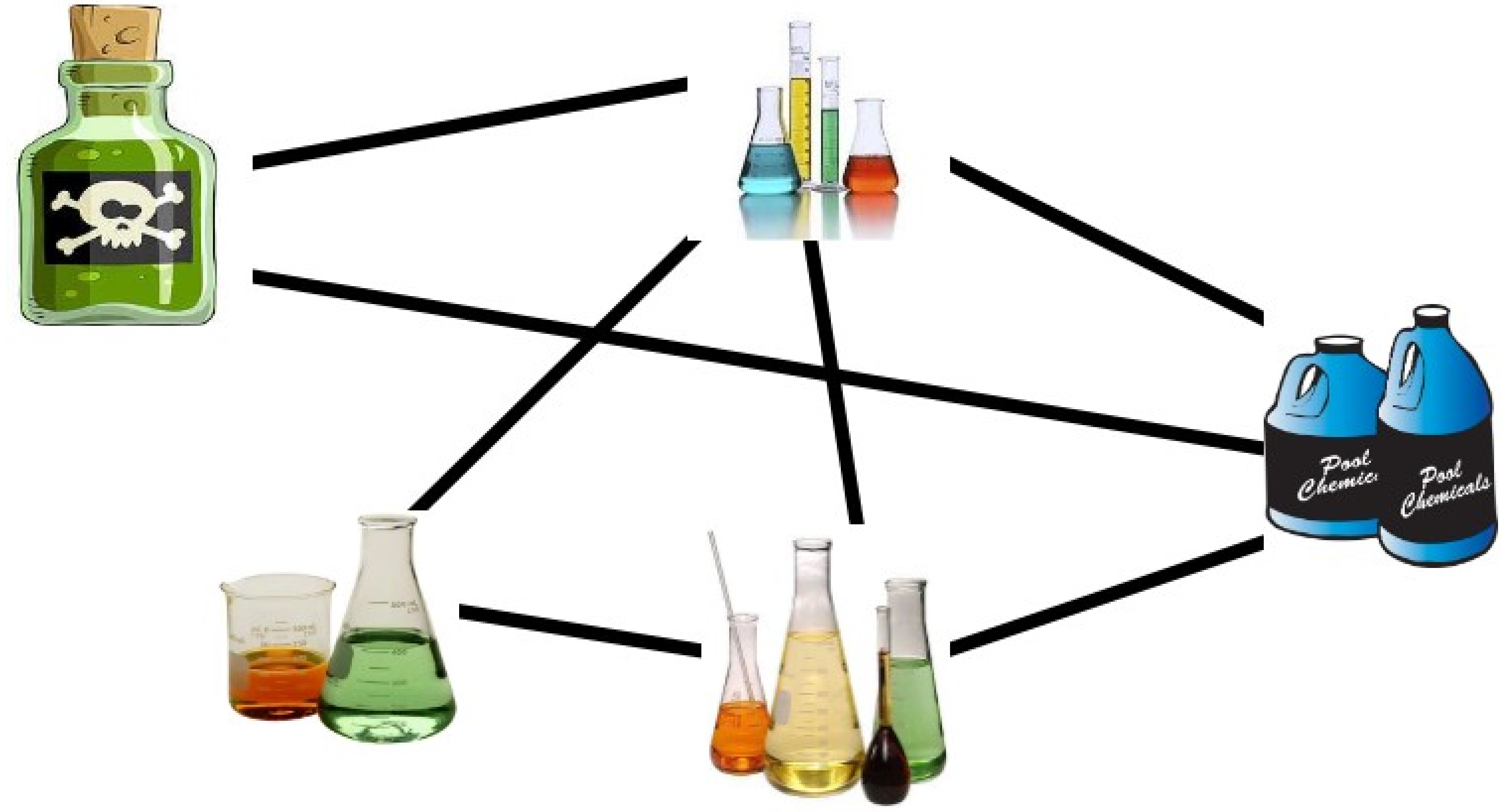
Separação de Produtos Explosivos

- Existe uma aresta ligando cada par de produtos que podem explodir, se combinados.

Separação de Produtos Explosivos

- Existe uma aresta ligando cada par de produtos que podem explodir, se combinados.
- O **número cromático** representa o número mínimo de compartimentos para guardar estes produtos químicos em segurança.

Separação de Produtos Explosivos



Atribuição de Frequências de Rádio

Atribuição de Frequências de Rádio

- Os vértices representam os transmissores das estações de rádio.

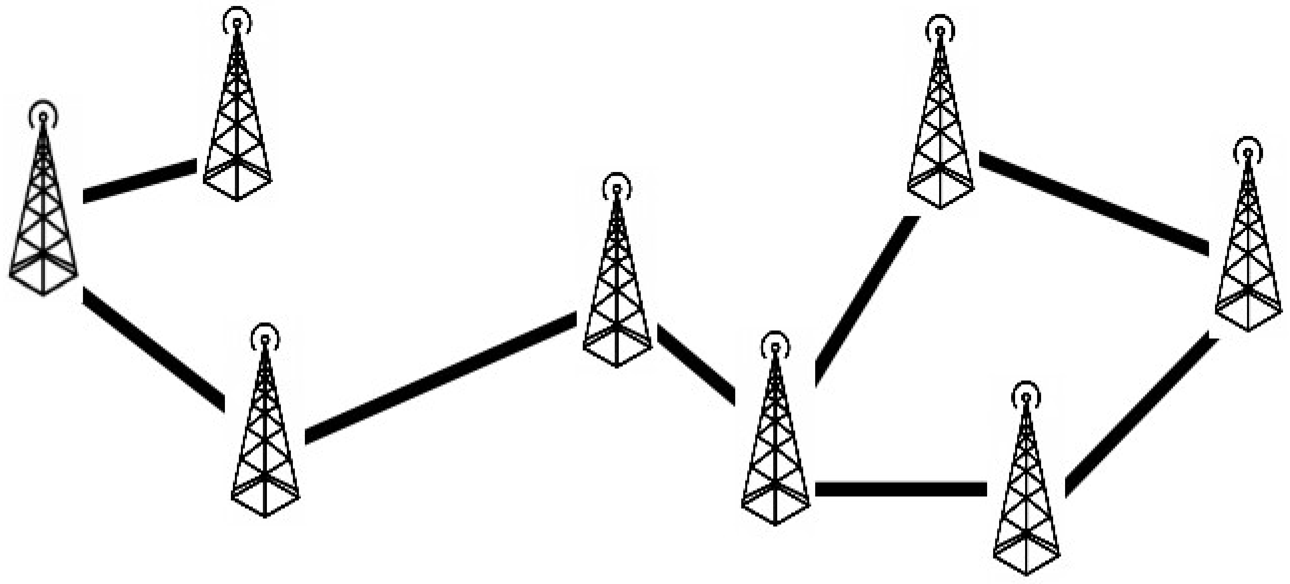
Atribuição de Frequências de Rádio

- Os vértices representam os transmissores das estações de rádio.
- Duas estações são adjacentes quando suas áreas de transmissão se sobrepõem, o que resultaria em interferência se elas usassem a mesma frequência.

Atribuição de Frequências de Rádio

- Os vértices representam os transmissores das estações de rádio.
- Duas estações são adjacentes quando suas áreas de transmissão se sobrepõem, o que resultaria em interferência se elas usassem a mesma frequência.
- Cada cor contém estações que podem receber a mesma frequência.

Atribuição de Frequências de Rádio



Agendamento de Provas

Agendamento de Provas

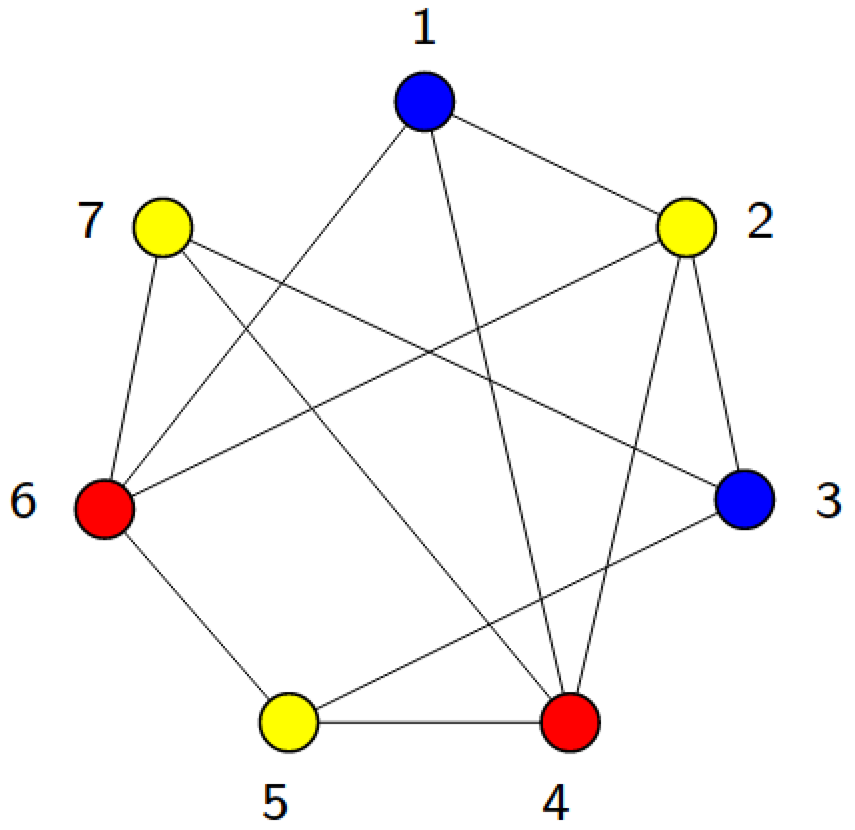
- Queremos agendar os exames de uma universidade de modo que duas disciplinas com estudantes em comum não tenham suas provas agendadas para o mesmo horário.

Agendamento de Provas

- Queremos agendar os exames de uma universidade de modo que duas disciplinas com estudantes em comum não tenham suas provas agendadas para o mesmo horário.
- Qual o número mínimo de horários necessários para agendar as provas?

Agendamento de Provas

	1	2	3	4	5	6	7
1	—	×	—	×	—	×	—
2		—	×	×	—	×	—
3			—	—	×	—	×
4				—	×	—	×
5					—	×	—
6						—	×
7							—



Alocação de Registradores

Alocação de Registradores

- Sete variáveis ocorrem em um laço num programa de computador.

Alocação de Registradores

- Sete variáveis ocorrem em um laço num programa de computador.
- Quantos diferentes registradores serão necessários para armazenar essas variáveis durante a execução?

Alocação de Registradores

- Sete variáveis ocorrem em um laço num programa de computador.
- Quantos diferentes registradores serão necessários para armazenar essas variáveis durante a execução?
- O número cromático representa o número mínimo de registradores necessários para evitar o problema de *overswapping*.

Alocação de Registradores

r: 1 a 6

u: passo 2

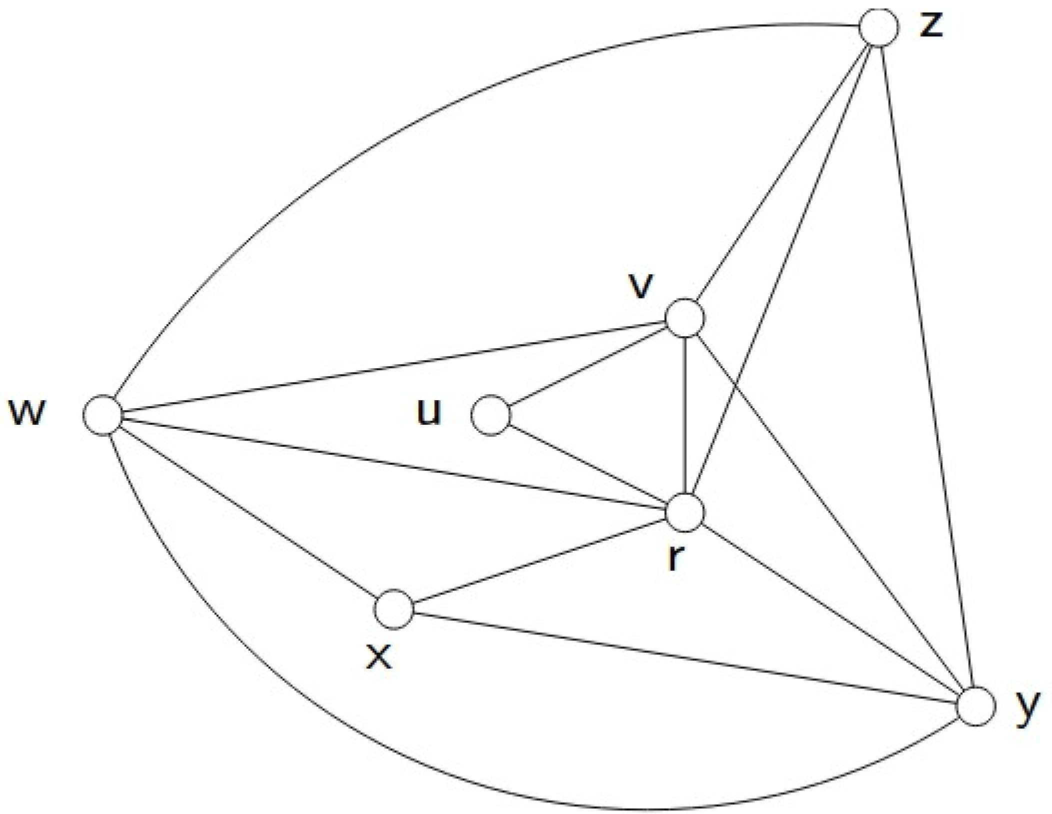
v: de 2 a 4

w: 1, 3 e 5

x: 1 e 6

y: 3 a 6

z: 4 e 5



Alocação de Registradores

r: 1 a 6

u: passo 2

v: de 2 a 4

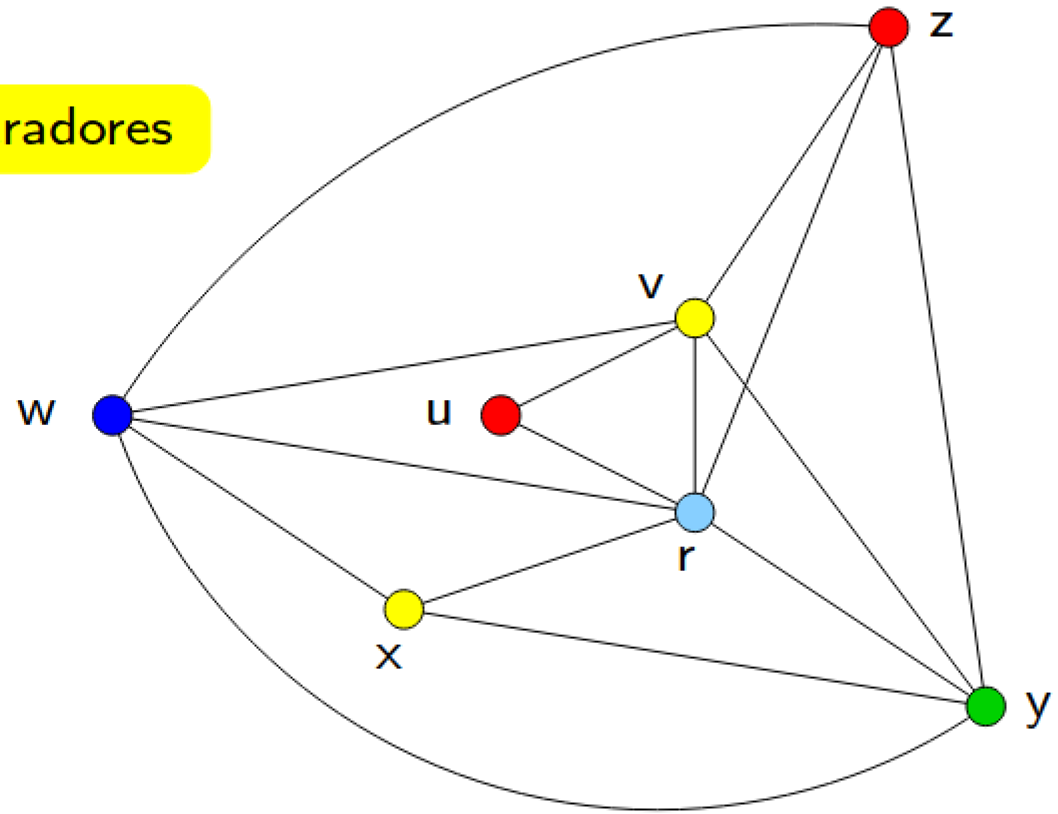
w: 1, 3 e 5

x: 1 e 6

y: 3 a 6

z: 4 e 5

5 registradores



Sudoku

	6		1		4		5	
		8	3		5	6		
								1
8			4		7			6
		6				3		
7			9		1			4
5								2
		7	2		6	9		
	4		5		8		7	

→

9	6	3	1	7	4	2	5	8
1	7	8	3	2	5	6	4	9
2	5	4	6	8	9	7	3	1
8	2	1	4	3	7	5	9	6
4	9	6	8	5	2	3	1	7
7	3	5	9	6	1	8	2	4
5	8	9	7	1	3	4	6	2
3	1	7	2	4	6	9	8	5
6	4	2	5	9	8	1	7	3

Sudoku

Sudoku

- O sudoku é uma variação da coloração de vértices.

Sudoku

- O sudoku é uma variação da coloração de vértices.
- Cada célula representa um vértice e existe uma aresta entre dois vértices se eles estão em uma mesma linha, mesma coluna ou no mesmo bloco.

O PROBLEMA DE COLORAÇÃO **MÍNIMA**

Requisitos

Requisitos

- Não consideramos grafos com *loops*.

Requisitos

- Não consideramos grafos com *loops*.
- Não consideramos grafos com arestas paralelas.

Requisitos

- Não consideramos grafos com *loops*.
- Não consideramos grafos com arestas paralelas.
- Considerados apenas grafos simples.

Definições

Definições

- Dado um grafo simples G e v um vértice de G:

Definições

- Dado um grafo simples G e v um vértice de G:
  - grau(v): o número de arestas incidentes em v.

Definições

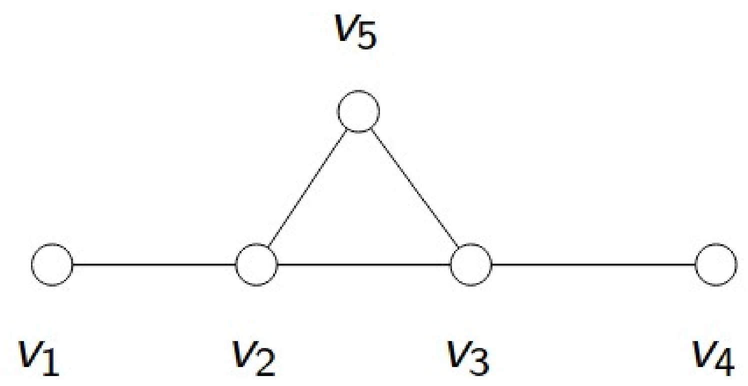
- Dado um grafo simples G e v um vértice de G:
  - grau(v): o número de arestas incidentes em v.
  - grau máximo(v): é o maior grau dentre todos os graus dos vértices de G.

Definições

- Dado um grafo simples G e v um vértice de G:
  - grau(v): o número de arestas incidentes em v.
  - grau máximo(v): é o maior grau dentre todos os graus dos vértices de G.
  - Dois vértices que possuem uma aresta em comum são chamados de **adjacentes**.

Definições

- Dado um grafo simples G e v um vértice de G:
  - grau(v): o número de arestas incidentes em v.
  - grau máximo(v): é o maior grau dentre todos os graus dos vértices de G.
  - Dois vértices que possuem uma aresta em comum são chamados de **adjacentes**.



$$grau(v_1) = grau(v_4) = 1$$

$$grau(v_2) = grau(v_3) = 3$$

$$grau(v_5) = 2$$

Definições

Definições

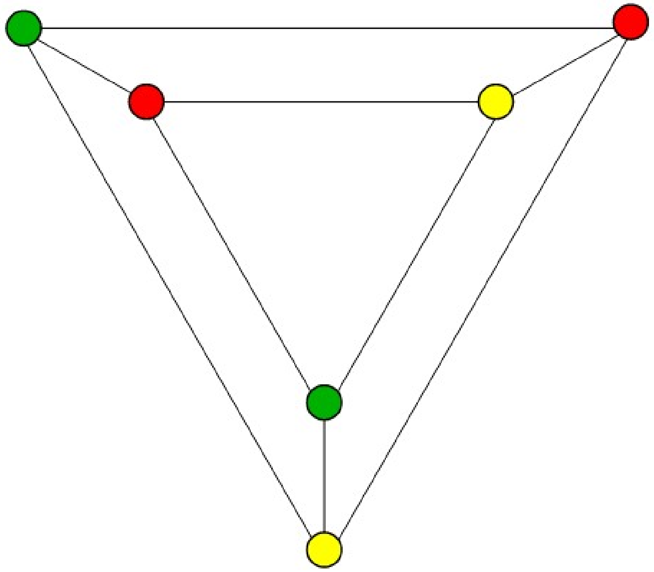
- Conjunto independente: subconjunto de vértices de G que não possuem arestas em comum.

Definições

- Conjunto independente: subconjunto de vértices de G que não possuem arestas em comum.
- $\alpha(G)$: tamanho do maior conjunto independente de G.

Definições

- Conjunto independente: subconjunto de vértices de G que não possuem arestas em comum.
- α(G): tamanho do maior conjunto independente de G.



$$\alpha(G) = 2$$

Definições

Definições

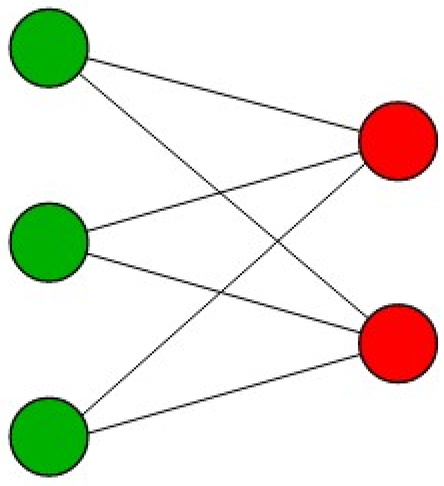
- Grafo bipartido: seus vértices podem ser particionados em dois conjuntos independentes.

Definições

- Grafo bipartido: seus vértices podem ser particionados em dois conjuntos independentes.
- Kn (Grafo completo com n vértices): quaisquer dois vértices são ligados por uma aresta.

Definições

- Grafo bipartido: seus vértices podem ser particionados em dois conjuntos independentes.
- Kn (Grafo completo com n vértices): quaisquer dois vértices são ligados por uma aresta.



Número Cromático

Número Cromático

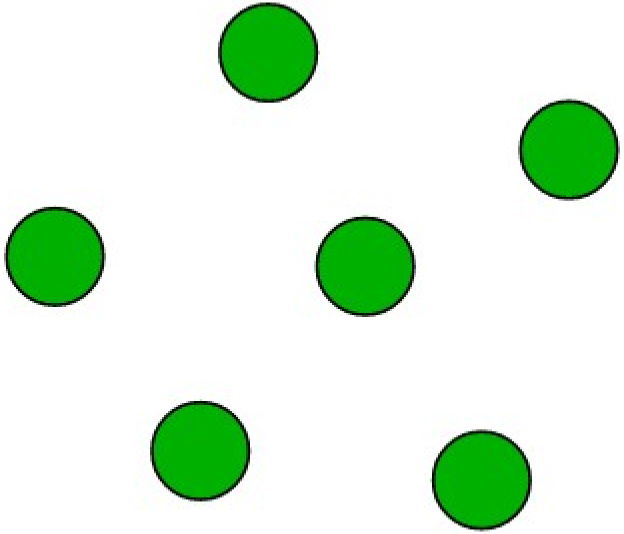
- Número cromático de um grafo G: é o menor inteiro positivo k tal que G possui uma k-coloração própria de vértices.

Número Cromático

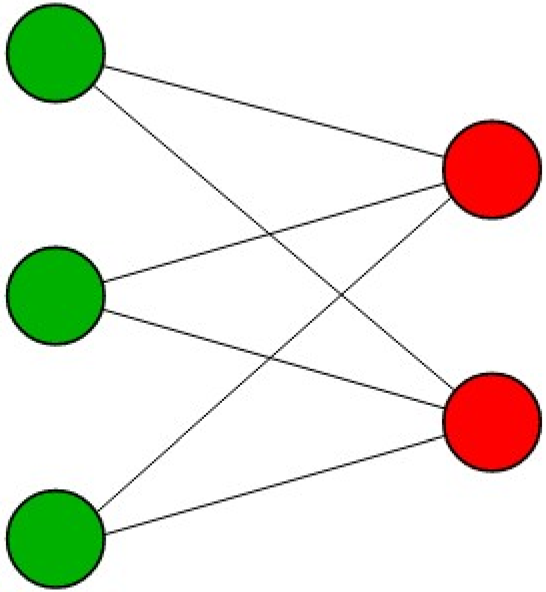
- Número cromático de um grafo G: é o menor inteiro positivo k tal que G possui uma k-coloração própria de vértices.
- Esse número é representado por $\chi(G)$.

Número Cromático

G_1



$\chi(G_1) = 1$



G_2

$\chi(G_2) = 2$

Grafo bipartido

Número Cromático

Número Cromático

- É possível colorir H com menos que três cores?

Número Cromático

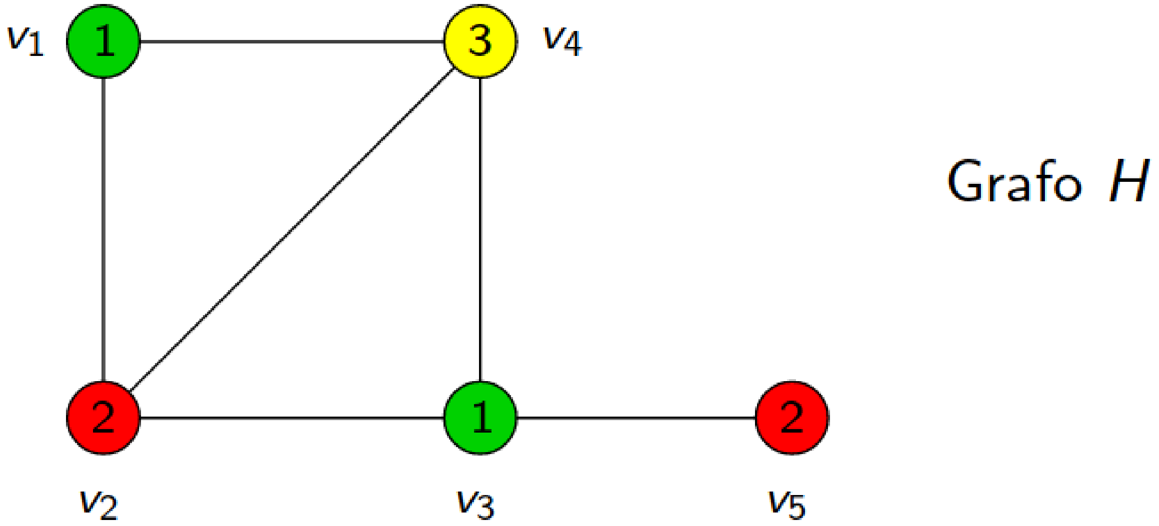
- É possível colorir H com menos que três cores?
- Como H contém um triângulo, temos que $\chi(H) \geq 3$.

Número Cromático

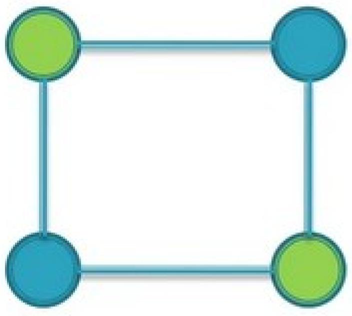
- É possível colorir H com menos que três cores?
- Como H contém um triângulo, temos que $\chi(H) \geq 3$.
- Logo, $\chi(H) = 3$.

Número Cromático

- É possível colorir H com menos que três cores?
- Como H contém um triângulo, temos que $\chi(H) \geq 3$.
- Logo, $\chi(H) = 3$.

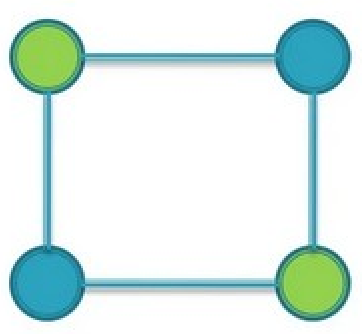


Grafos Bipartidos



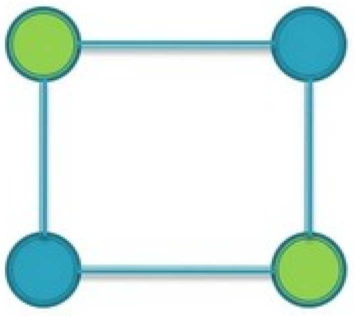
Grafos Bipartidos

- Teorema:



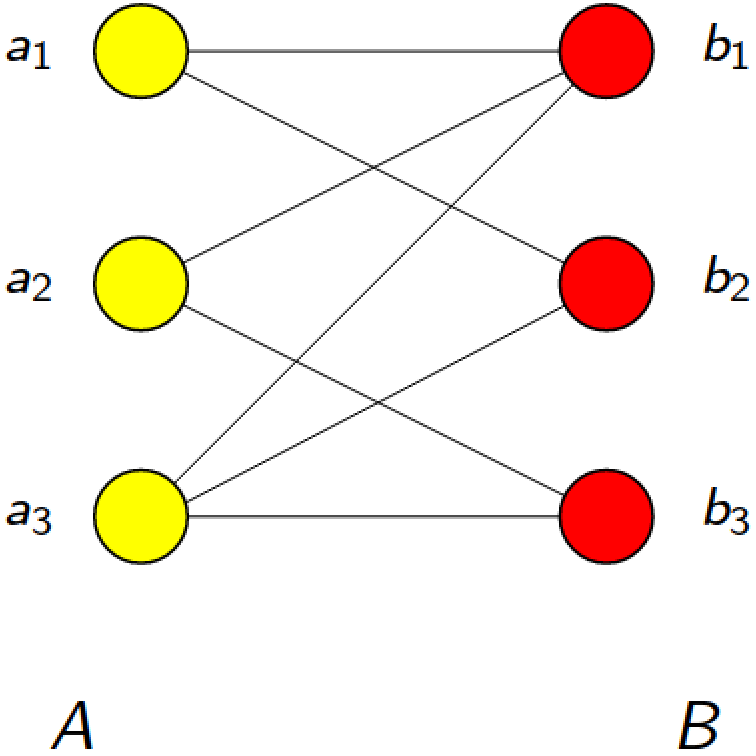
Grafos Bipartidos

- Teorema:
  - Um grafo G é bipartido se e somente se ele não contém ciclo ímpar.



Grafos Bipartidos

- Como checar se um grafo é bipartido?



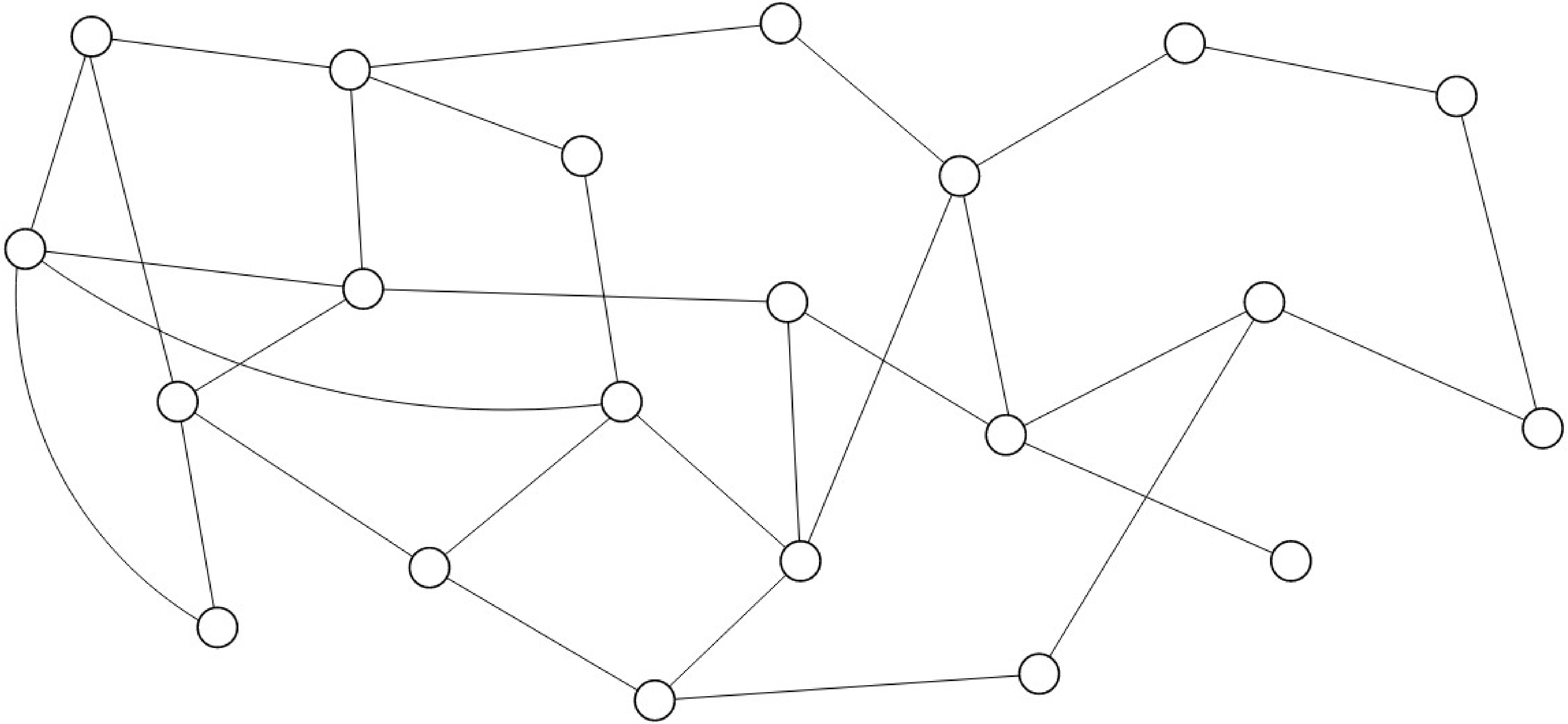
Algoritmo para checar se χ(G) = 2

Algorithm 1 Algoritmo para checar se G é bipartido

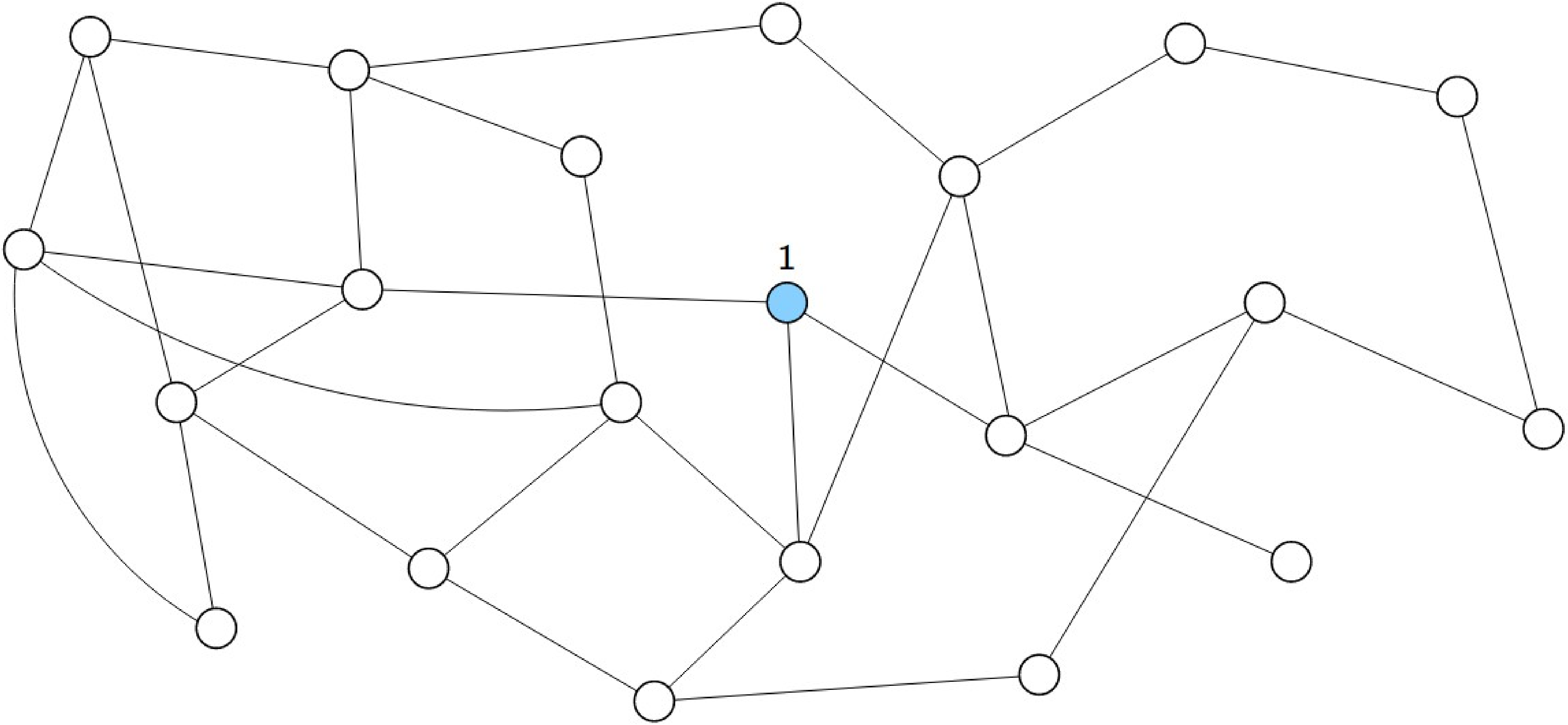
Entrada: Grafo G. Vértice inicial $v \in V(G)$.

1: Comece com o vértice inicial v e pinte-o de AZUL.
2: Pinte todos os vizinhos de v de VERMELHO.
3: Continue a coloração pintando os vizinhos dos vértices já coloridos, usando ou o AZUL ou o VERMELHO. Ao atribuir cores, se encontrarmos um vizinho colorido com a mesma cor do vértice atual, então o grafo não pode ser colorido com duas cores.

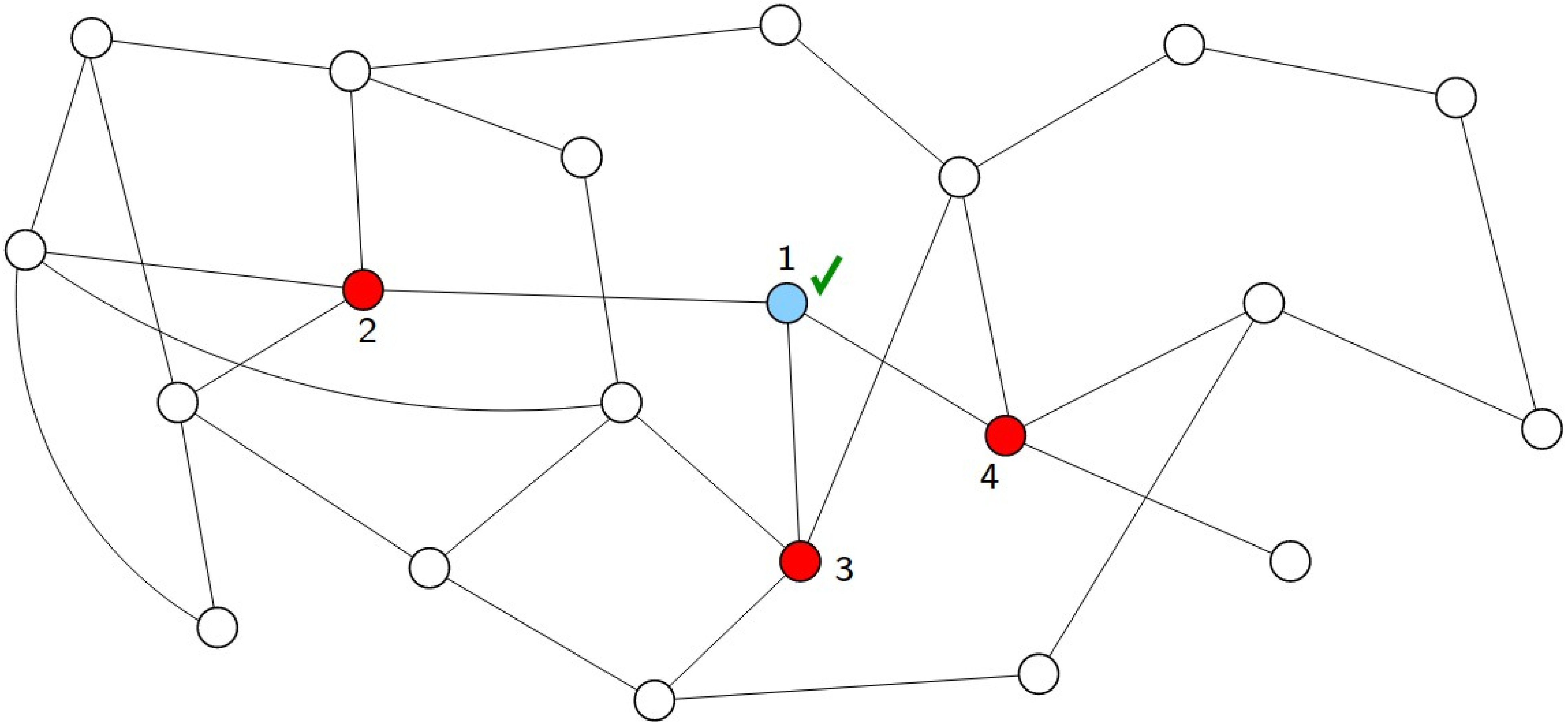
Teste do Algoritmo



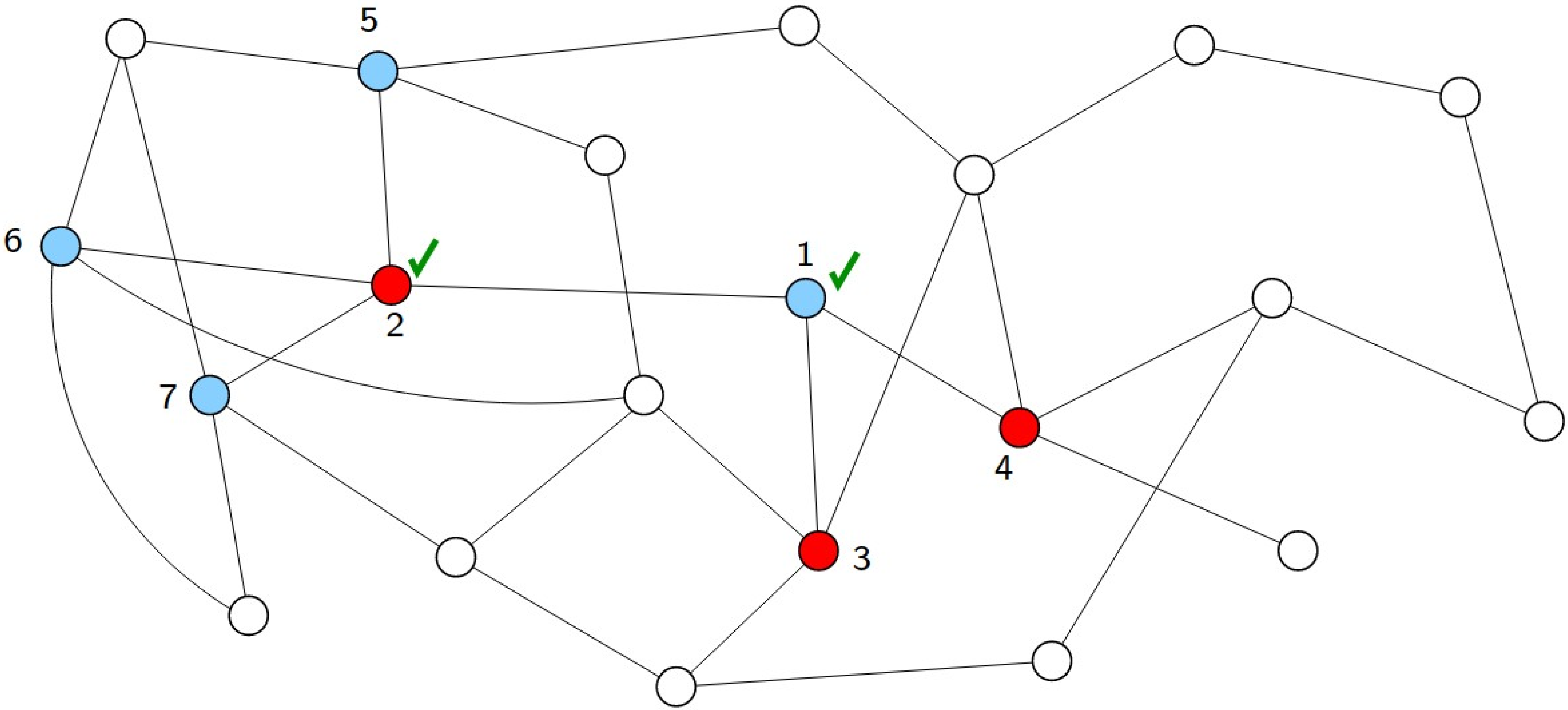
Teste do Algoritmo



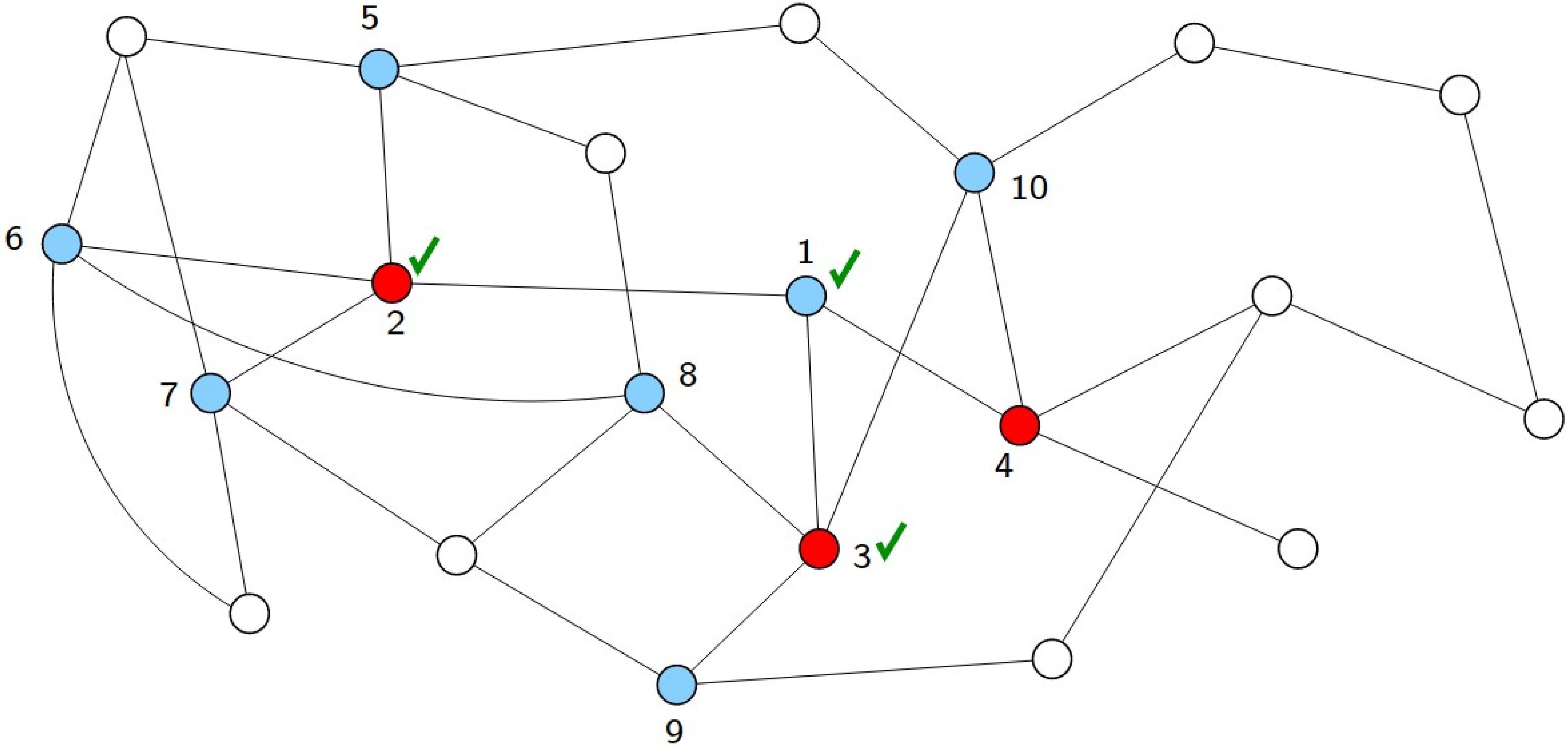
Teste do Algoritmo



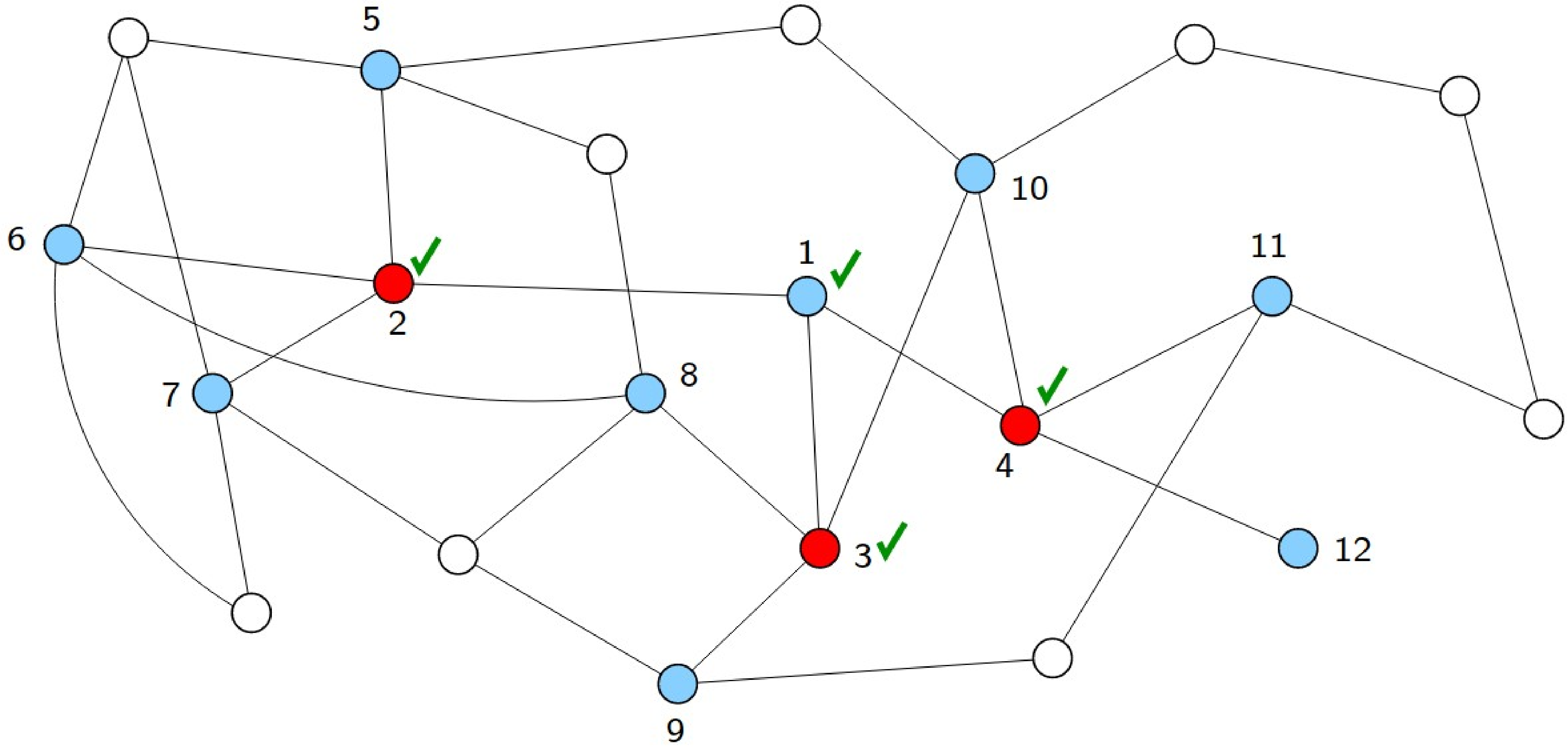
Teste do Algoritmo



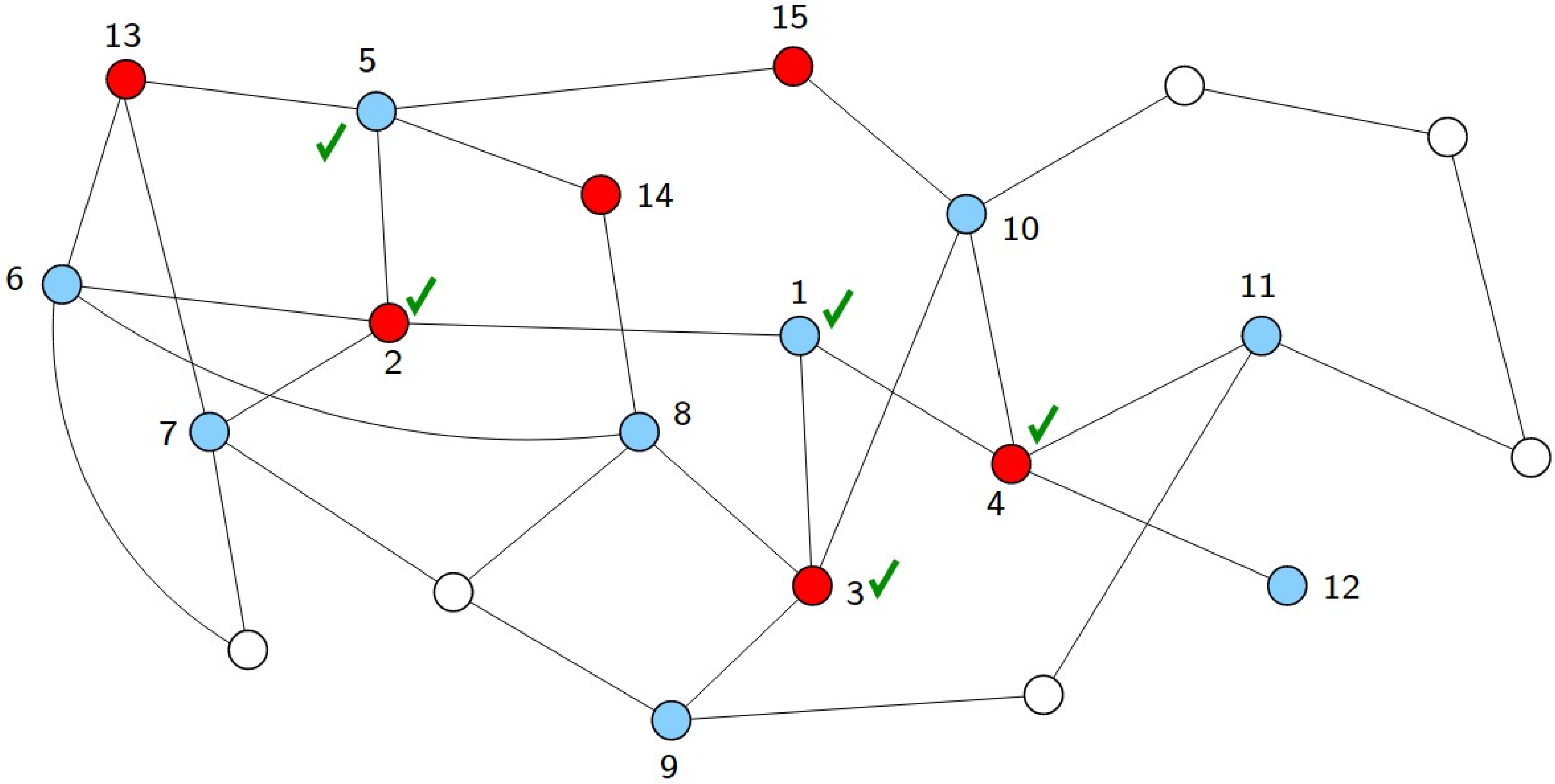
Teste do Algoritmo



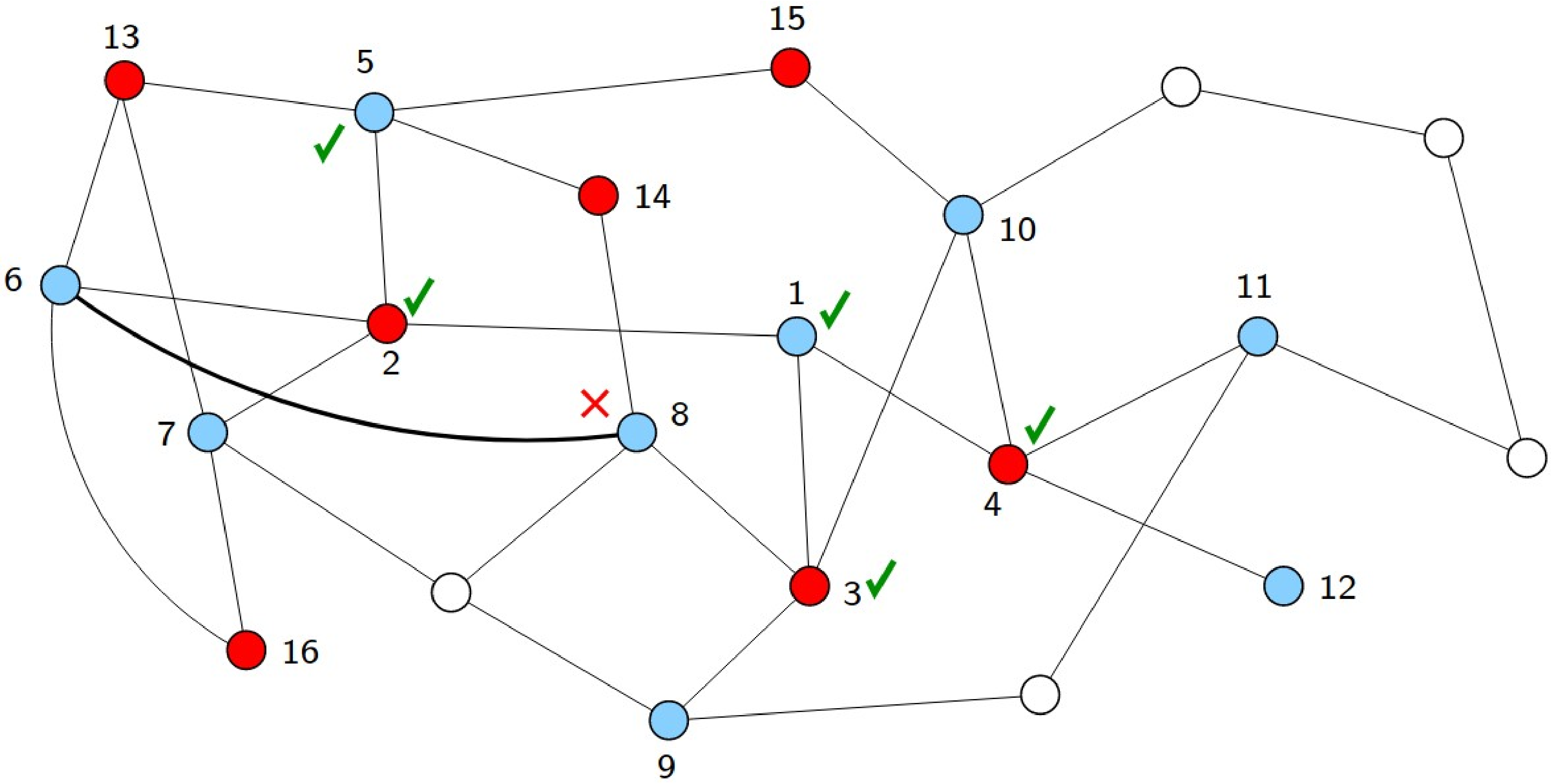
Teste do Algoritmo



Teste do Algoritmo



Teste do Algoritmo



Limitantes inferiores para $\chi(G)$

Limitantes inferiores para $\chi(G)$

- Até hoje, não se conhece nenhum bom algoritmo para checar se um grafo G possui $\chi(G) = k$, para $k \geq 3$.

Limitantes inferiores para $\chi(G)$

- Até hoje, não se conhece nenhum bom algoritmo para checar se um grafo G possui $\chi(G) = k$, para $k \geq 3$.
- Dado um grafo G, gostaríamos de determinar limitantes inferiores e superiores para $\chi(G)$.

ALGORITMOS DE COLORAÇÃO

Complexidade da Coloração de Vértices

- (Garey e Johnson, 1974): O problema de achar o número cromático de um grafo é NP-difícil.

Força Bruta

Força Bruta

- O algoritmo de força bruta busca por uma k-coloração de G é considerando cada uma das k^n atribuições possíveis e checa se cada uma delas é correta.

Força Bruta

- O algoritmo de força bruta busca por uma k-coloração de G é considerando cada uma das k^n atribuições possíveis e checa se cada uma delas é correta.
- Para calcular $\chi(G)$, este procedimento é testado para $k = 1, \ldots, n - 1$.

Força Bruta

- O algoritmo de força bruta busca por uma k-coloração de G é considerando cada uma das k^n atribuições possíveis e checa se cada uma delas é correta.
- Para calcular $\chi(G)$, este procedimento é testado para $k = 1, \ldots, n - 1$.
- Computacionalmente inviável para grandes instâncias.

Algoritmo Guloso

Algoritmo Guloso

- Algoritmo guloso é aquele que sempre realiza a escolha que parece ser a melhor no momento, fazendo uma escolha ótima local, na esperança de que esta escolha leve até a solução ótima global.

Algoritmo Guloso

- Algoritmo guloso é aquele que sempre realiza a escolha que parece ser a melhor no momento, fazendo uma escolha ótima local, na esperança de que esta escolha leve até a solução ótima global.
- Ele nunca volta atrás.

Algoritmo Guloso

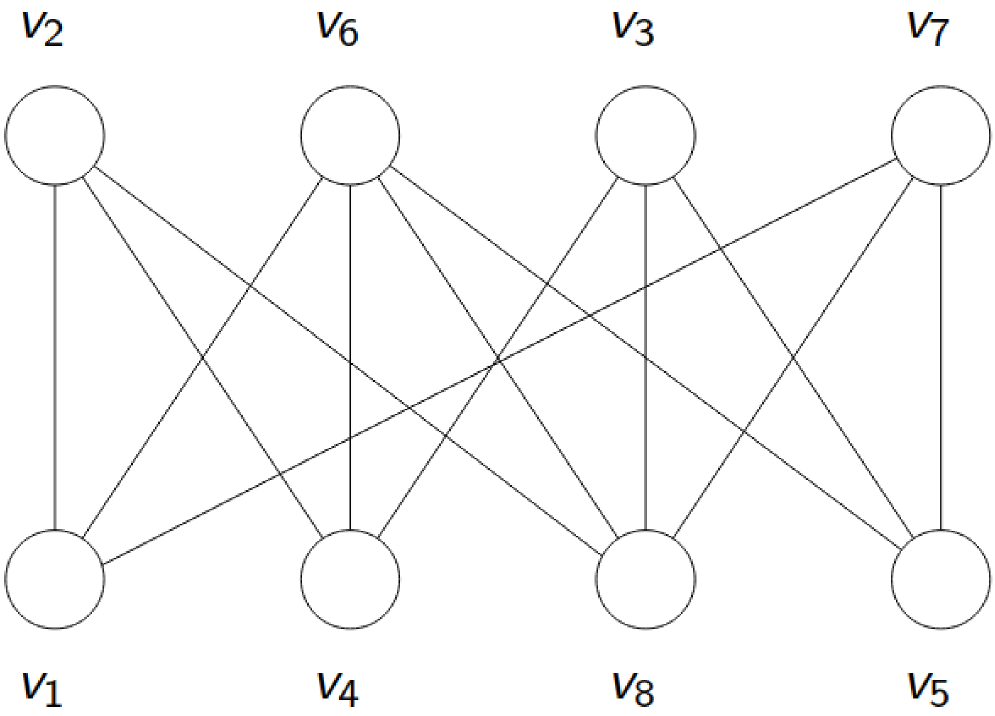
Algorithm 2 Algoritmo Guloso para coloração de vértices

Input: Vértices de G listados em ordem $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
Conjunto de cores disponíveis $C = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Output: Uma coloração própria dos vértices de G.

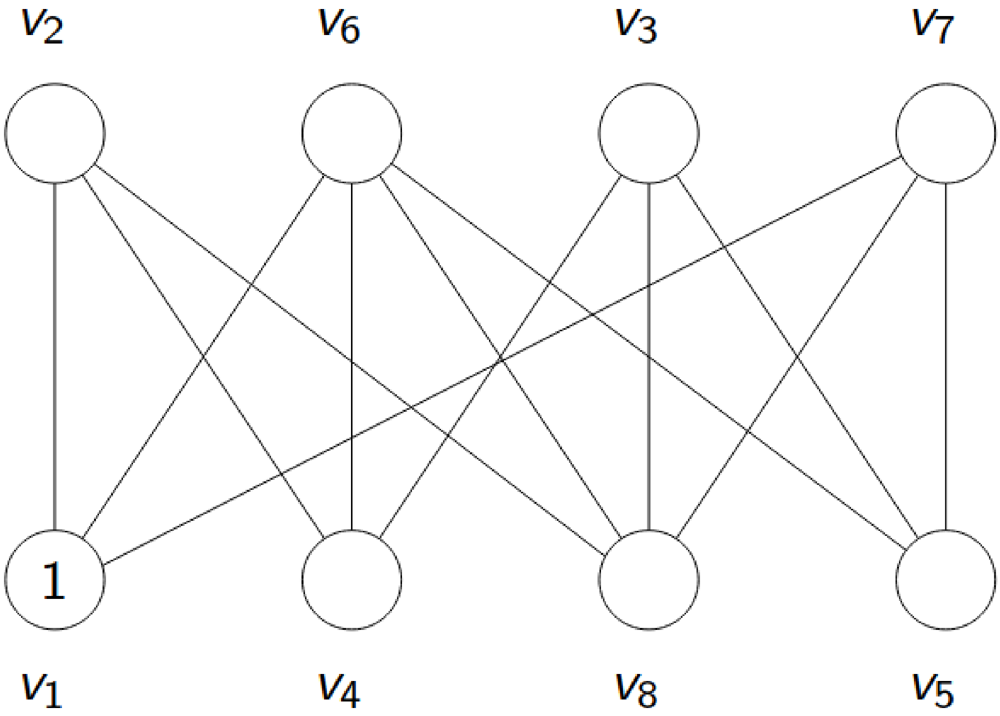
1: **for** $i := 1$ **to** n **do**
2: O vértice v_i recebe a menor cor disponível que ainda não foi atribuída a nenhum de seus vizinhos já coloridos.
3: **end for**

Algoritmo Guloso



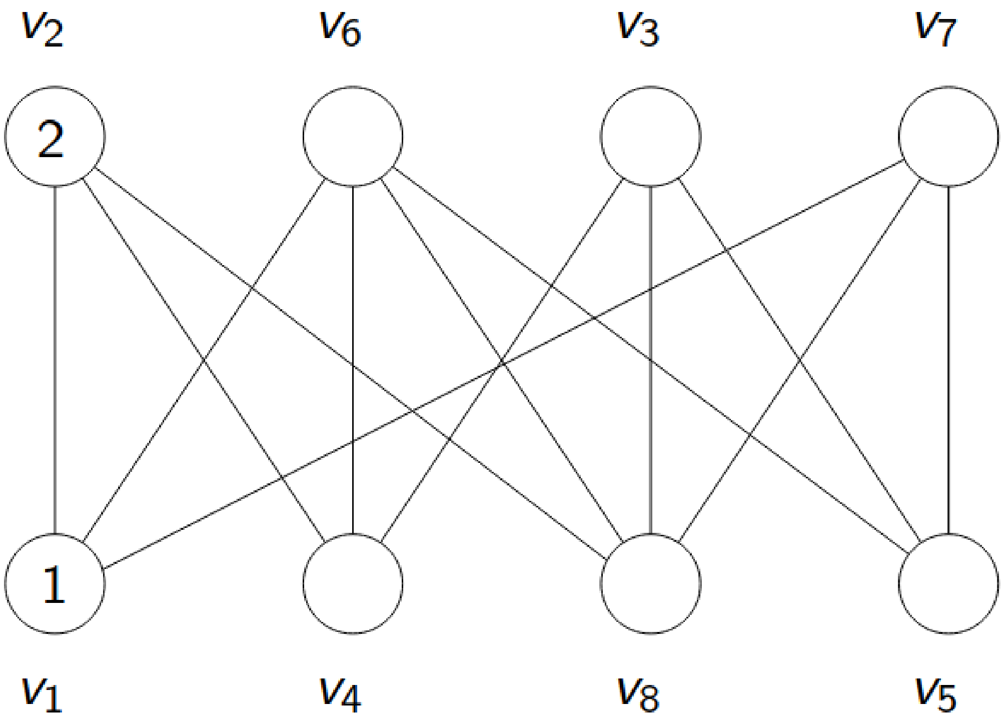
$$C = \{1, 2, \ldots, 8\}$$

Algoritmo Guloso



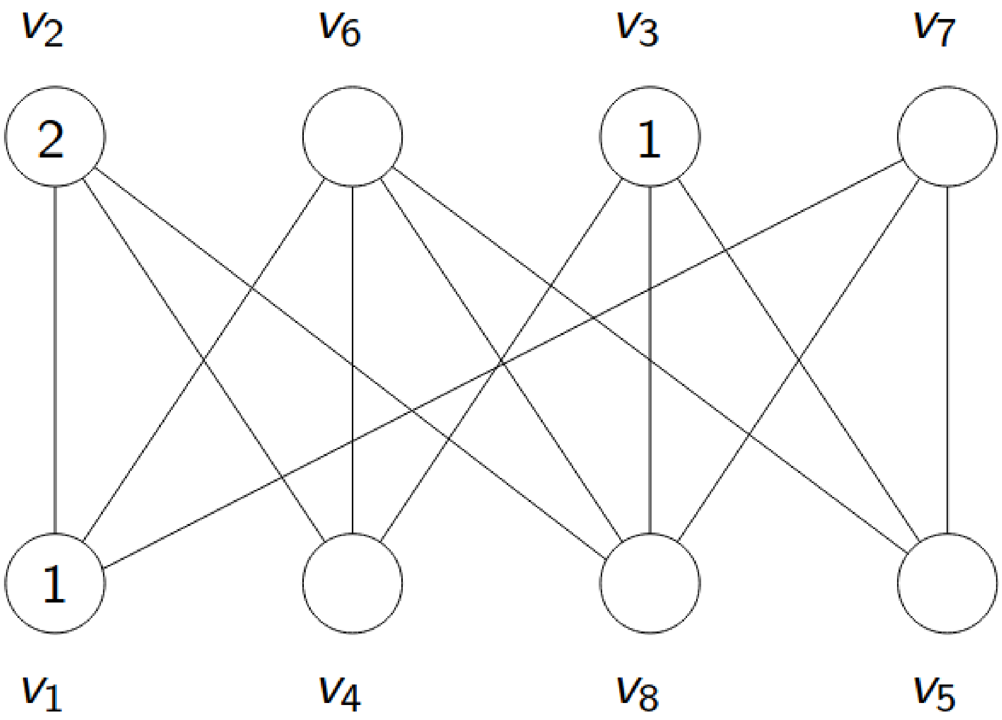
$$C = \{1, 2, \ldots, 8\}$$

Algoritmo Guloso



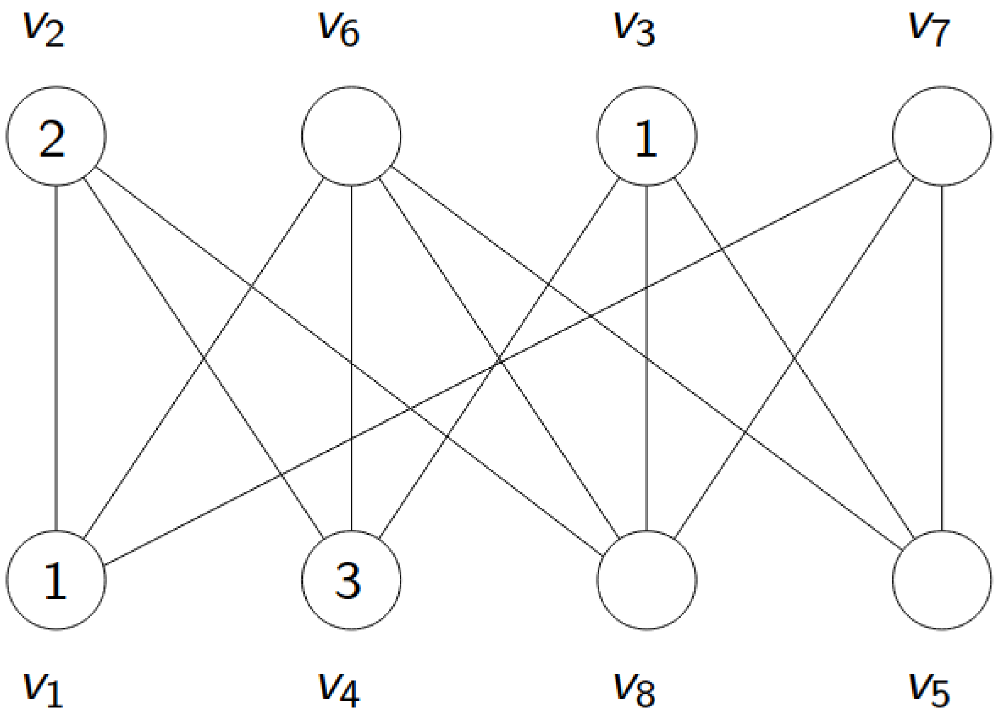
$$C = \{1, 2, \ldots, 8\}$$

Algoritmo Guloso



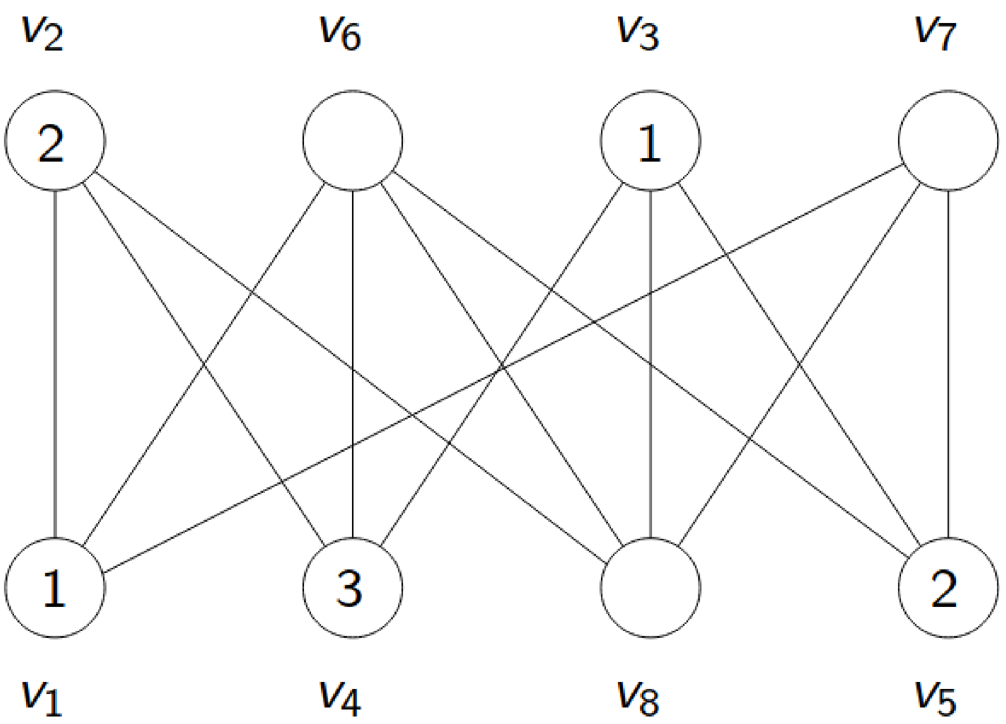
$$C = \{1, 2, \ldots, 8\}$$

Algoritmo Guloso



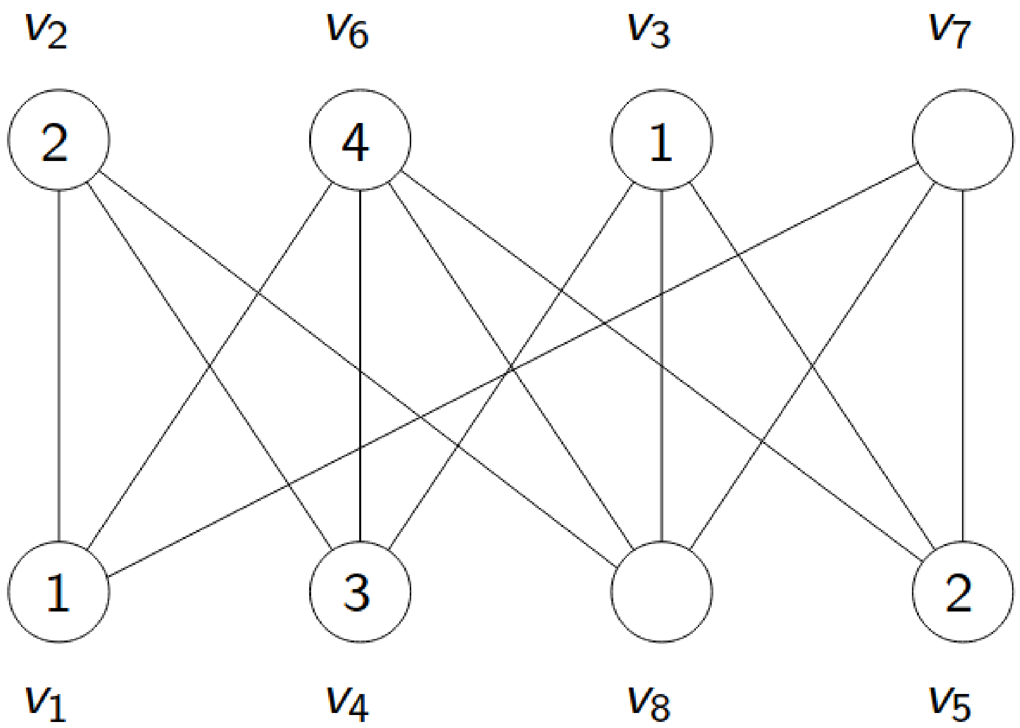
$$C = \{1, 2, \ldots, 8\}$$

Algoritmo Guloso



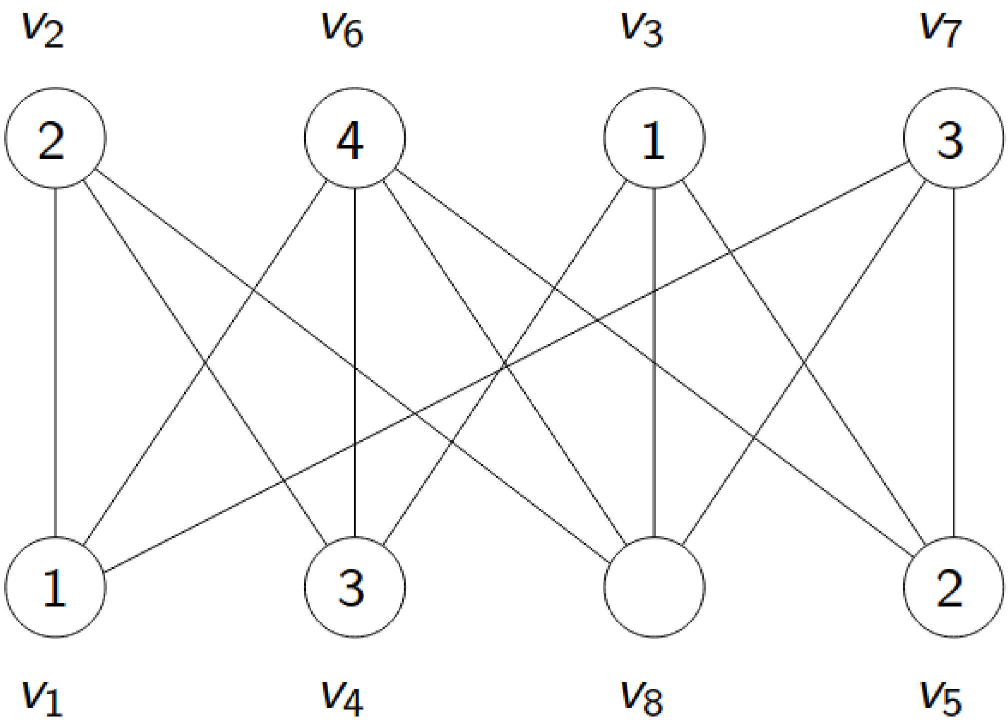
$$C = \{1, 2, \ldots, 8\}$$

Algoritmo Guloso



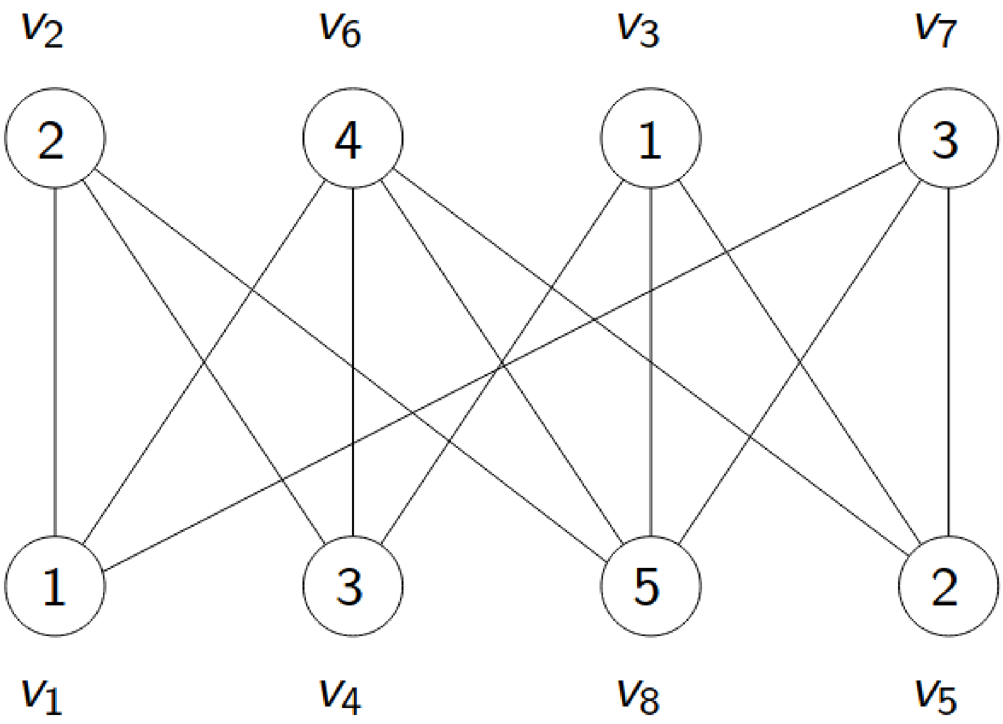
$$C = \{1, 2, \ldots, 8\}$$

Algoritmo Guloso



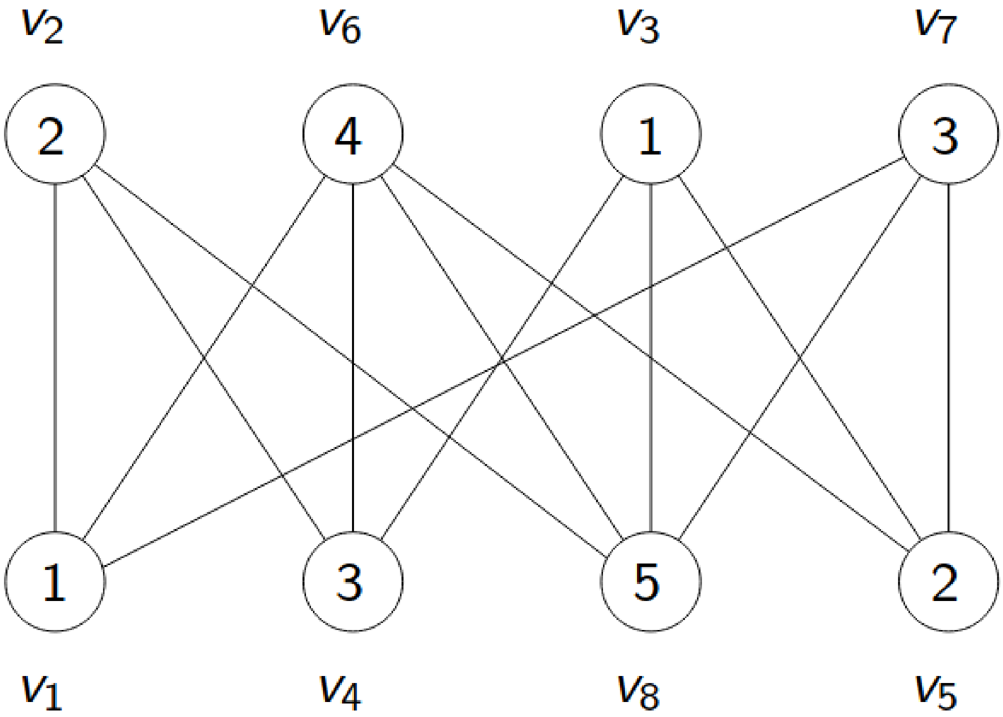
$$C = \{1, 2, \ldots, 8\}$$

Algoritmo Guloso



$C = \{1, 2, \ldots, 8\}$

Algoritmo Guloso



$$C = \{1, 2, \ldots, 8\}$$

Heurística

Heurística

- Heurística é um método ou processo criado com o objetivo de encontrar soluções para um problema.

Heurística

- Heurística é um método ou processo criado com o objetivo de encontrar soluções para um problema.
- É um procedimento simplificador que, em face de questões difíceis, envolve a substituição destas por outras de resolução mais fácil a fim de encontrar respostas viáveis, ainda que imperfeitas.

Heurística

- Heurística é um método ou processo criado com o objetivo de encontrar soluções para um problema.
- É um procedimento simplificador que, em face de questões difíceis, envolve a substituição destas por outras de resolução mais fácil a fim de encontrar respostas viáveis, ainda que imperfeitas.
- Muitas heurísticas para coloração de vértices se baseiam na intuição de que um vértice de maior grau será mais difícil de colorir mais tarde do que um de menor grau.

Heurística

Algorithm 3 Algoritmo de Welsh-Powell

Input: Grafo G com n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
Output: Uma coloração própria dos vértices de G.

1: Calcule o grau de cada vértice de G.

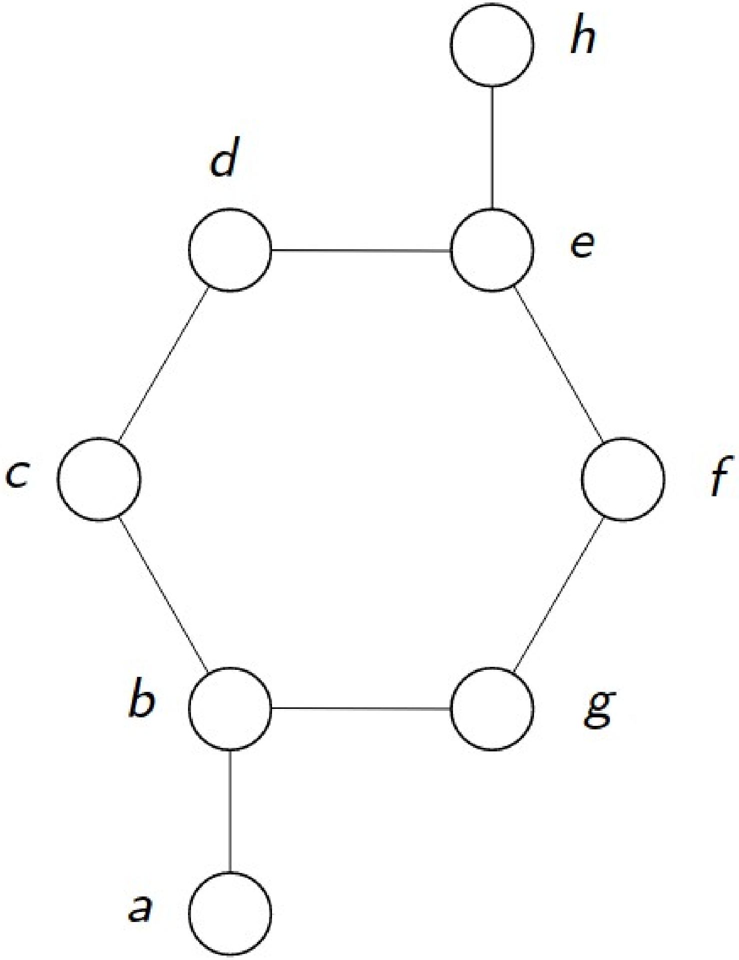
2: Liste os vértices em ordem decrescente de grau.

3: Associe a cor 1 ao primeiro vértice da lista e ao próximo vértice da lista não adjacente a ele, e sucessivamente para cada nó da lista não adjacente a um nó com a cor 1.

4: Associe a cor 2 ao próximo vértice da lista ainda sem cor. Sucessivamente associe a cor 2 para o próximo vértice da lista não adjacente aos vértices com cor 2 e que ainda não está colorido.

5: Continue esse processo até que todos os vértices sejam coloridos.

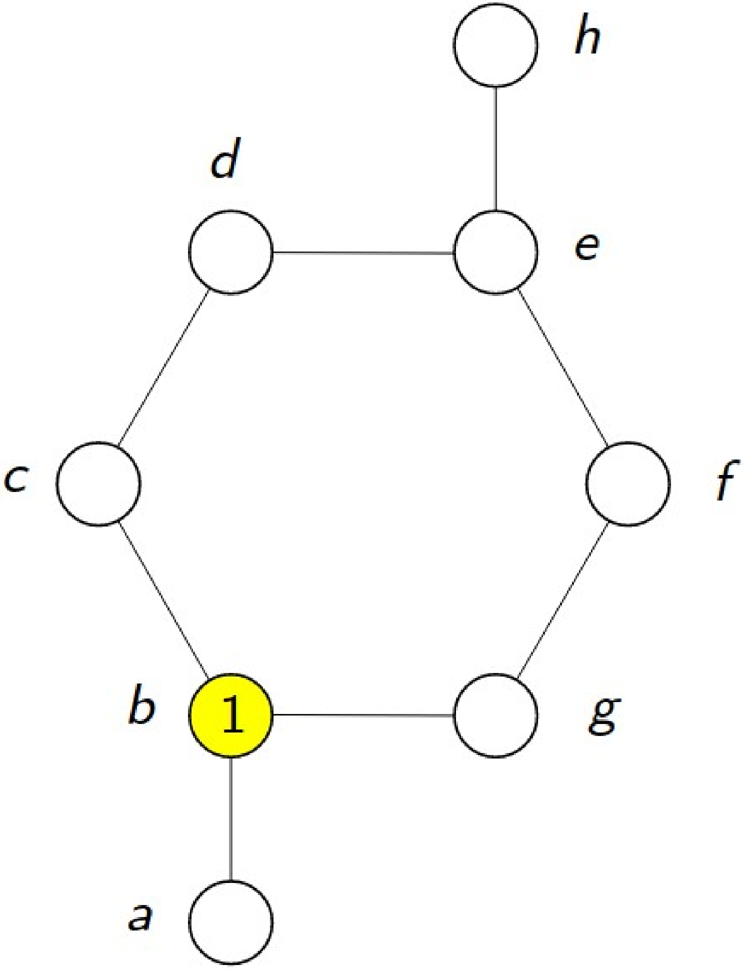
Heurística



Ordenação dos vértices

Passo 1: b e c d g f a h

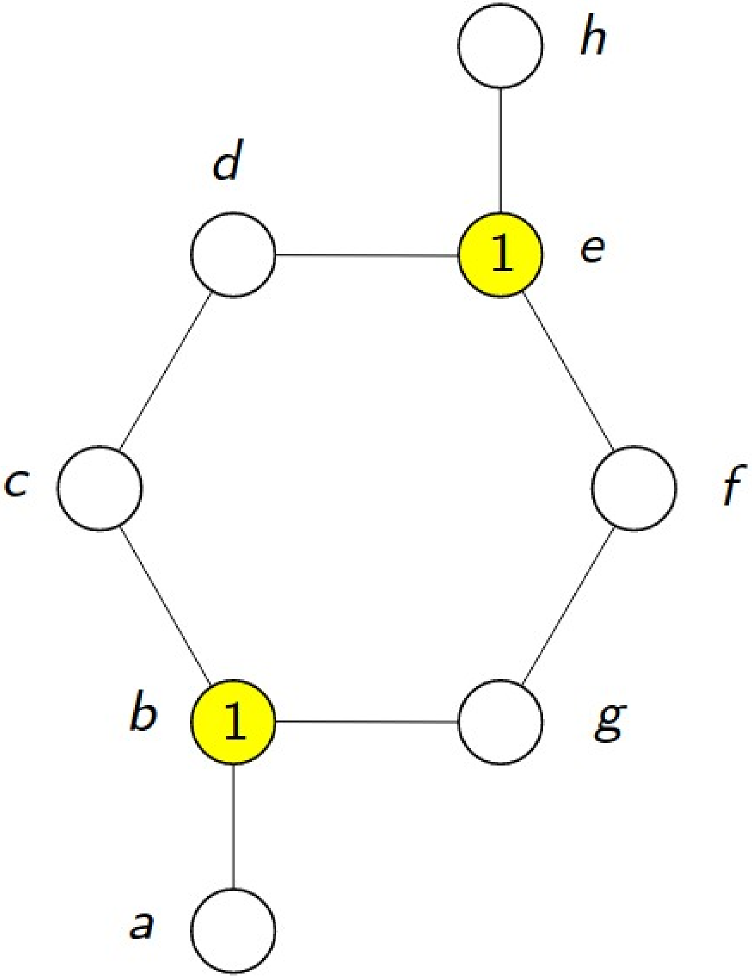
Heurística



Ordenação dos vértices

Passo 1: b e c d g f a h

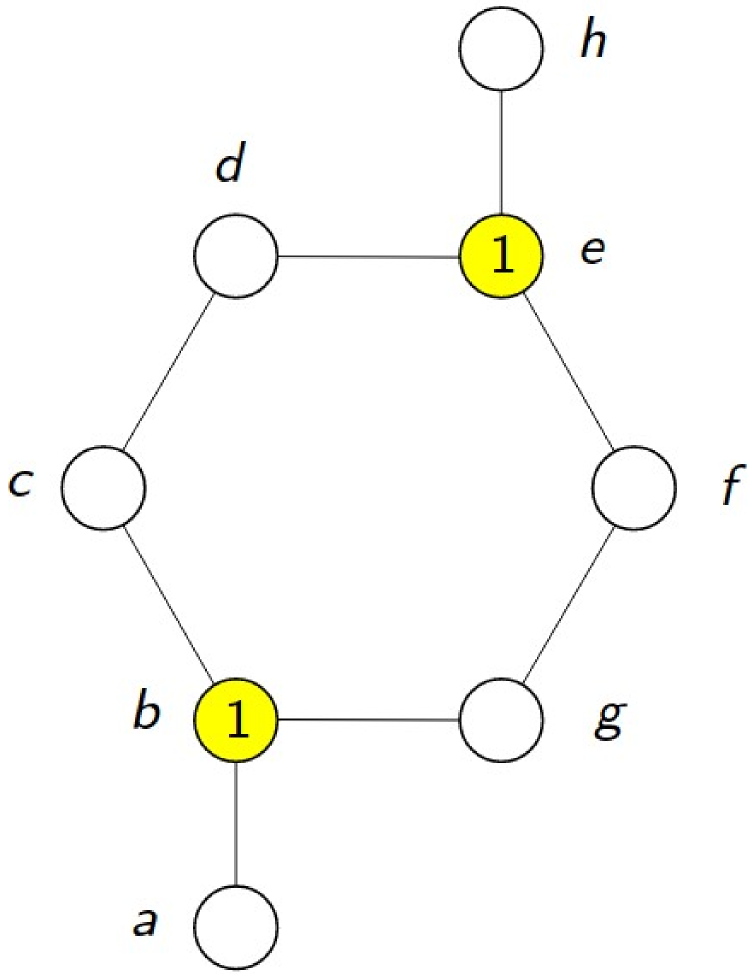
Heurística



Ordenação dos vértices

Passo 1: b e c d g f a h

Heurística

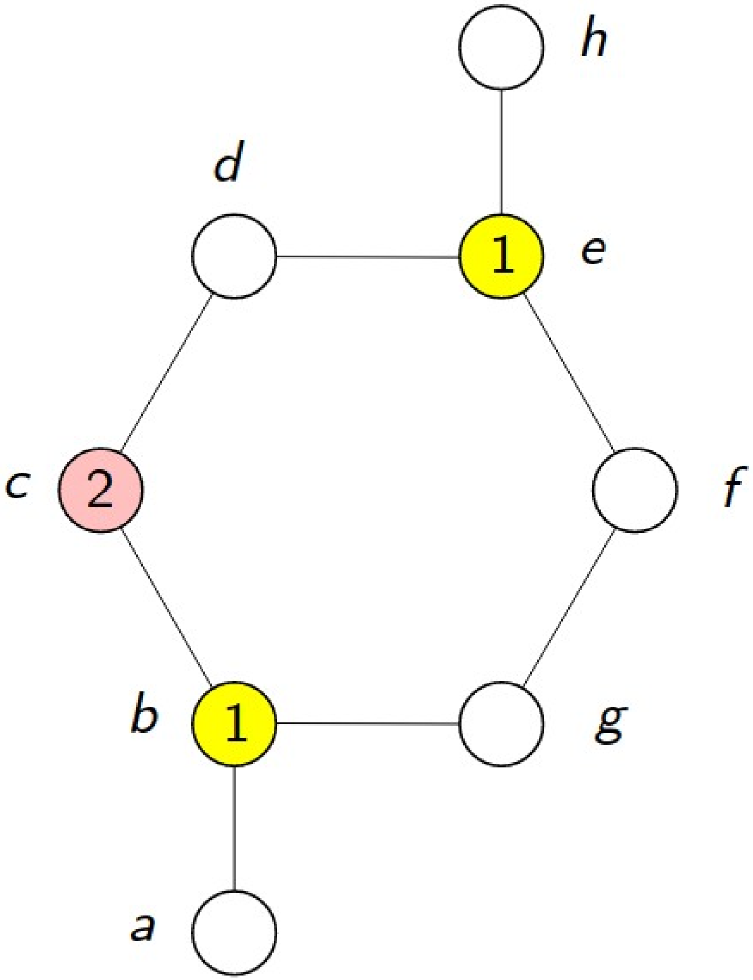


Ordenação dos vértices

Passo 1: b e c d g f a h

Passo 2: **b** **e** c d g f a h

Heurística

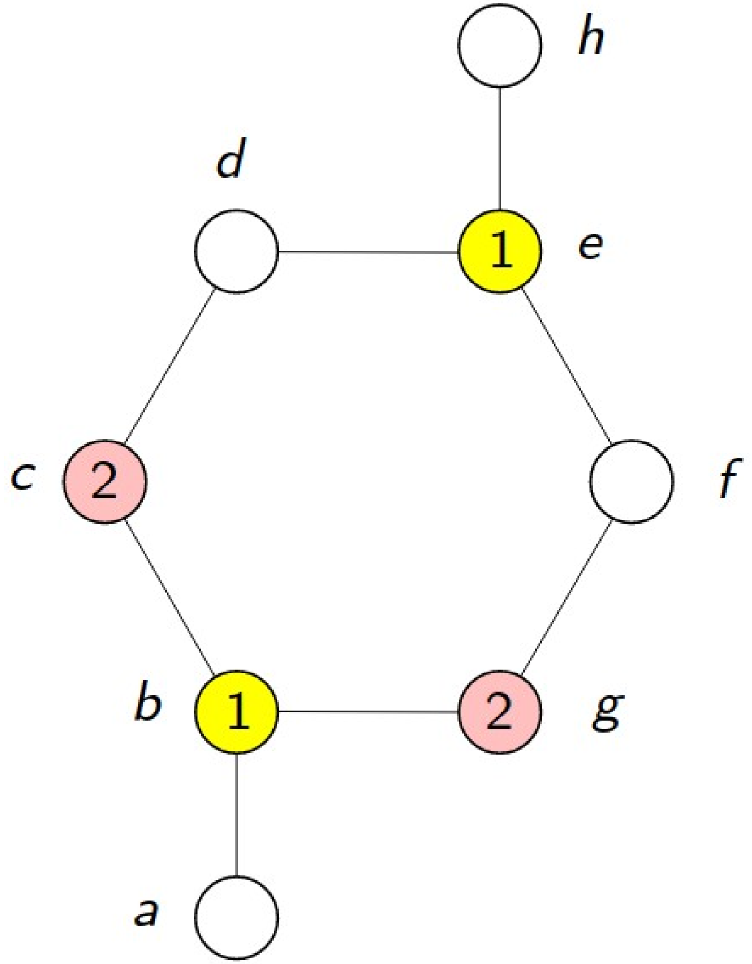


Ordenação dos vértices

Passo 1: b e c d g f a h

Passo 2: **b** **e** c d g f a h

Heurística

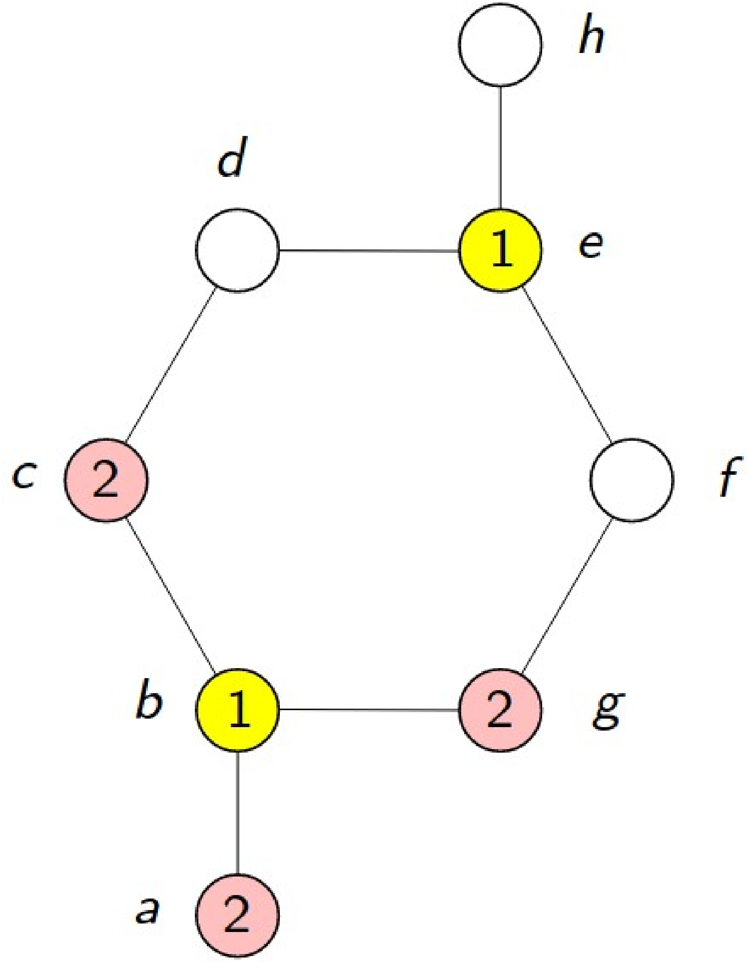


Ordenação dos vértices

Passo 1: b e c d g f a h

Passo 2: **b** **e** c d g f a h

Heurística

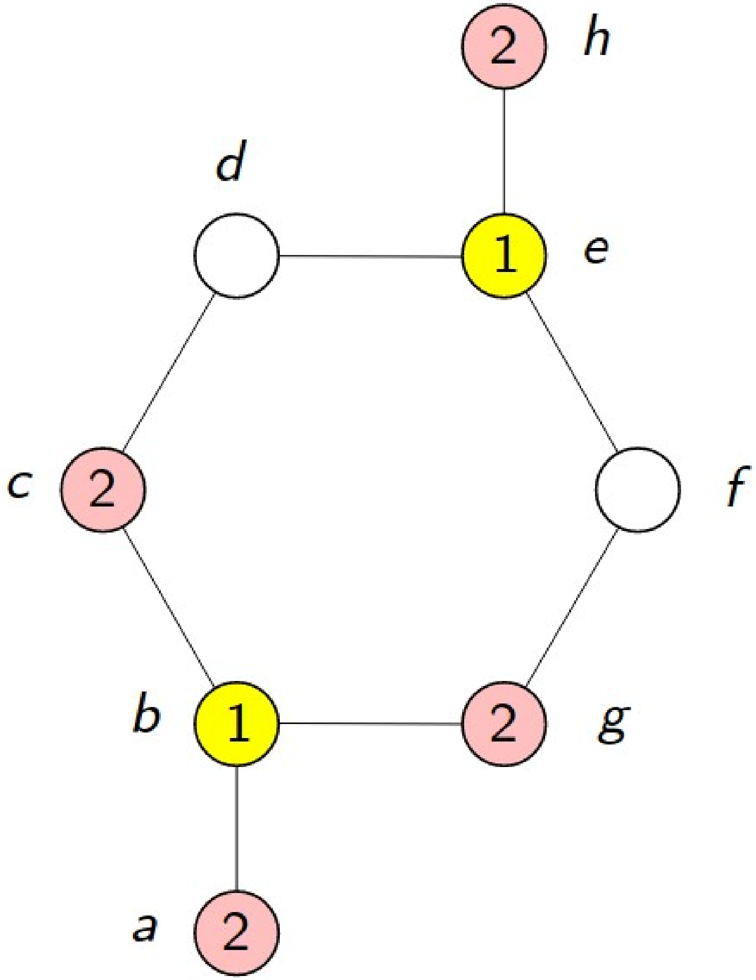


Ordenação dos vértices

Passo 1: b e c d g f a h

Passo 2: **b** **e** c d g f a h

Heurística

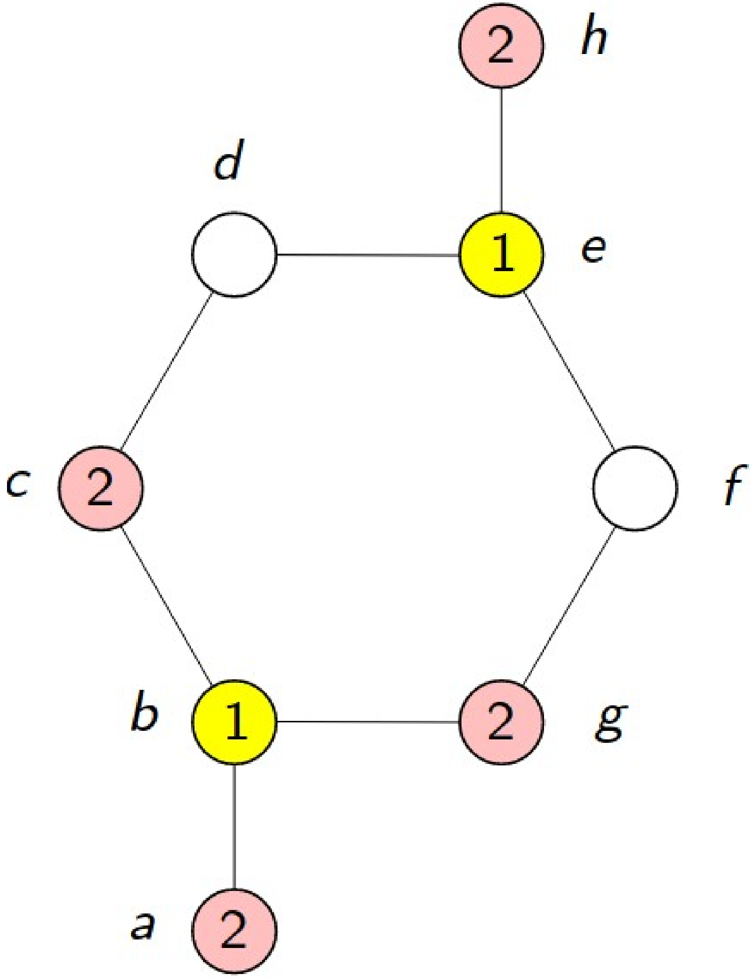


Ordenação dos vértices

Passo 1: b e c d g f a h

Passo 2: **b** **e** c d g f a h

Heurística



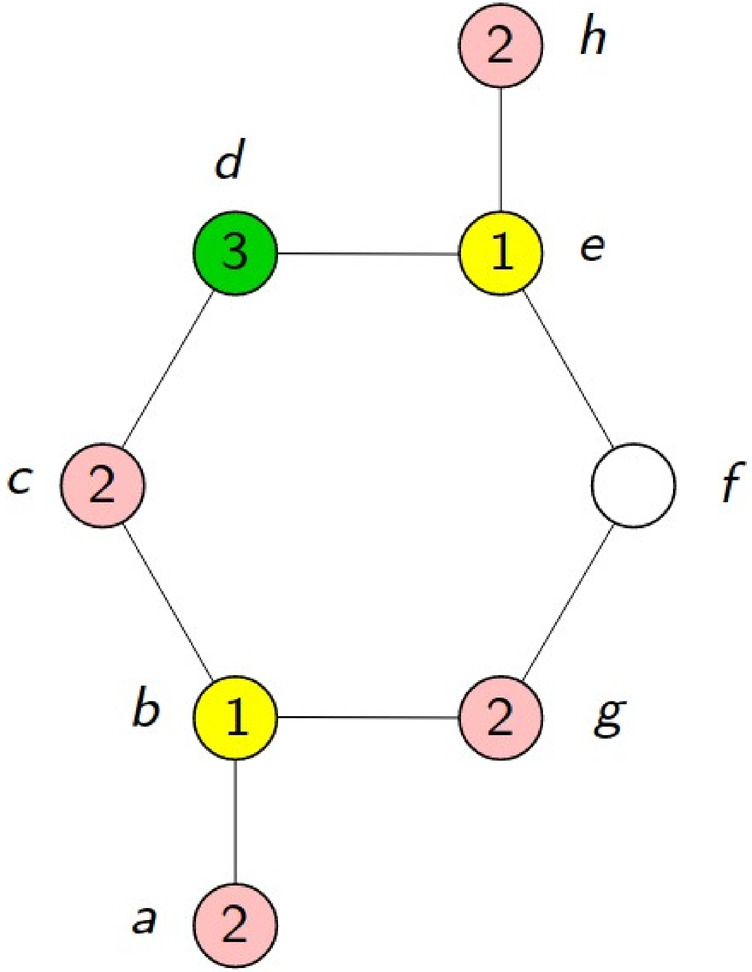
Ordenação dos vértices

Passo 1: b e c d g f a h

Passo 2: **b** **e** c d g f a h

Passo 3: **b** **e** **c** d **g** f **a** **h**

Heurística



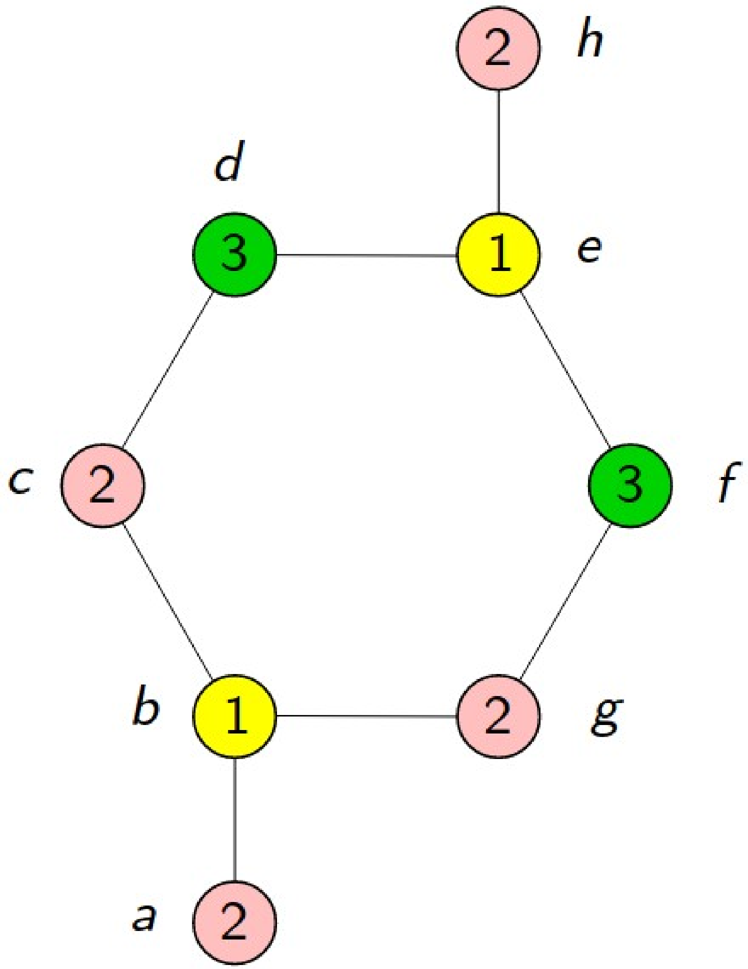
Ordenação dos vértices

Passo 1: b e c d g f a h

Passo 2: **b** **e** c d g f a h

Passo 3: **b** **e** **c** d **g** f **a** **h**

Heurística



Ordenação dos vértices

Passo 1: b e c d g f a h

Passo 2: **b** **e** c d g f a h

Passo 3: **b** **e** **c** d **g** f **a** **h**

No entanto, $\chi(G) = 2$,
pois G não possui ciclo ímpar

CONCLUSÕES

Conclusões

Conclusões

- Coloração de vértices de um grafo surgiu em 1852 a partir de um problema de coloração de mapas.

Conclusões

- Coloração de vértices de um grafo surgiu em 1852 a partir de um problema de coloração de mapas.
- Coloração de vértices possui diversas aplicações práticas.

Conclusões

- Coloração de vértices de um grafo surgiu em 1852 a partir de um problema de coloração de mapas.
- Coloração de vértices possui diversas aplicações práticas.
- Não existem algoritmos eficientes que garantam uma coloração mínima para grafos arbitrários.

Conclusões

- Coloração de vértices de um grafo surgiu em 1852 a partir de um problema de coloração de mapas.
- Coloração de vértices possui diversas aplicações práticas.
- Não existem algoritmos eficientes que garantam uma coloração mínima para grafos arbitrários.
  - Algoritmo guloso.

Conclusões

- Coloração de vértices de um grafo surgiu em 1852 a partir de um problema de coloração de mapas.
- Coloração de vértices possui diversas aplicações práticas.
- Não existem algoritmos eficientes que garantam uma coloração mínima para grafos arbitrários.
  - Algoritmo guloso.
  - Algoritmo de Welsh-Powell.

Conclusões

- Coloração de vértices de um grafo surgiu em 1852 a partir de um problema de coloração de mapas.
- Coloração de vértices possui diversas aplicações práticas.
- Não existem algoritmos eficientes que garantam uma coloração mínima para grafos arbitrários.
  - Algoritmo guloso.
  - Algoritmo de Welsh-Powell.
- Coloração de Grafos é um tema de pesquisa muito ativa em Teoria dos Grafos.

EXERCÍCIOS

Exercícios

- Existe uma solução polinomial para o problema da coloração de grafos? Justifique a sua resposta.
- Qual é o número cromático de um grafo completo? Justifique a sua resposta. Desenhe um exemplo que ilustre a sua explicação.
- Qual é o número cromático de uma árvore? Justifique a sua resposta. Desenhe um exemplo que ilustre a sua explicação.