Teoria dos Grafos

FLUXO MÁXIMO

Prof. Tiago Eugenio de Melo
tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

- Introduction to Algorithms 3rd Edition by Clifford Stein, Thomas H. **Cormen**, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest.
- Medium.

INTRODUÇÃO

Problema Fluxo de Redes

Problema Fluxo de Redes

- Problemas de fluxo em redes estão usualmente relacionados à circulação de uma determinada entidade em uma rede (ou grafo) de uma fonte **s** a um destino **t**.

Problema Fluxo de Redes

- Problemas de fluxo em redes estão usualmente relacionados à circulação de uma determinada entidade em uma rede (ou grafo) de uma fonte **s** a um destino **t**.
- As arestas têm então uma capacidade, associada à quantidade máxima daquela entidade que pode passar por ela.

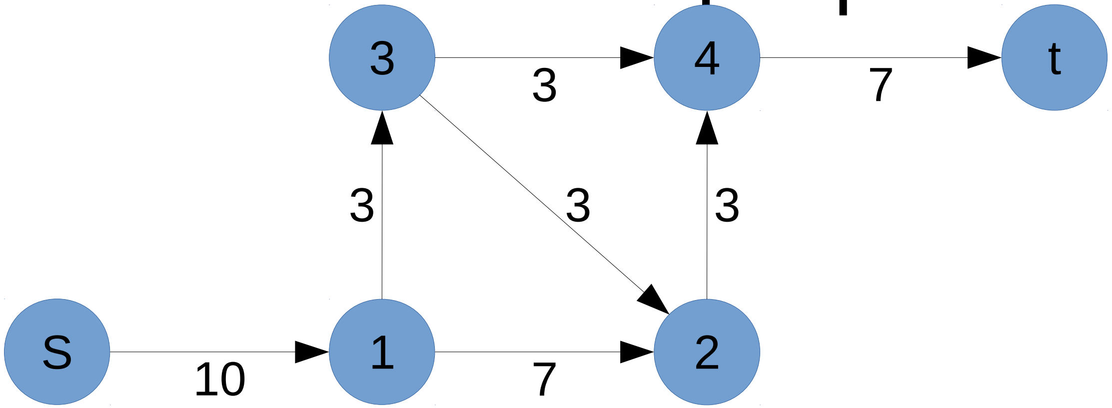
Problema Fluxo de Redes

Problema Fluxo de Redes

- Qual é o valor máximo que pode fluir de s até t?

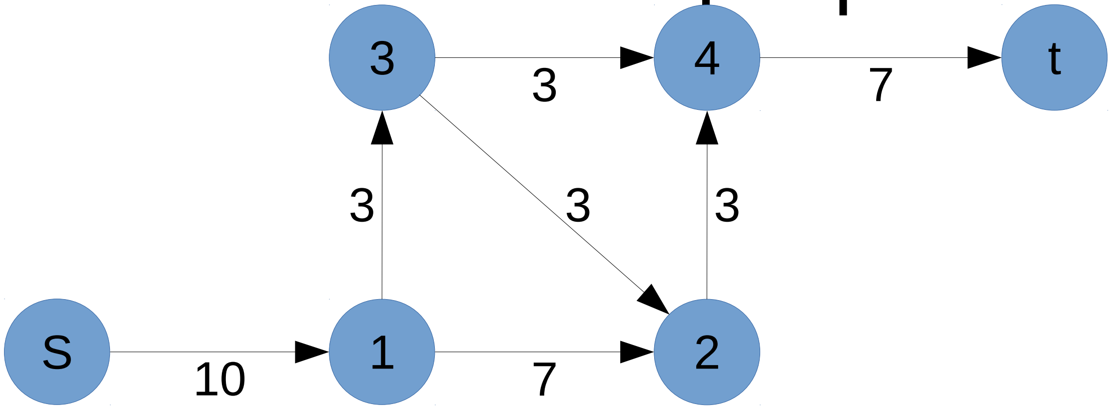
Problema Fluxo de Redes

- Qual é o valor máximo que pode fluir de s até t?



Problema Fluxo de Redes

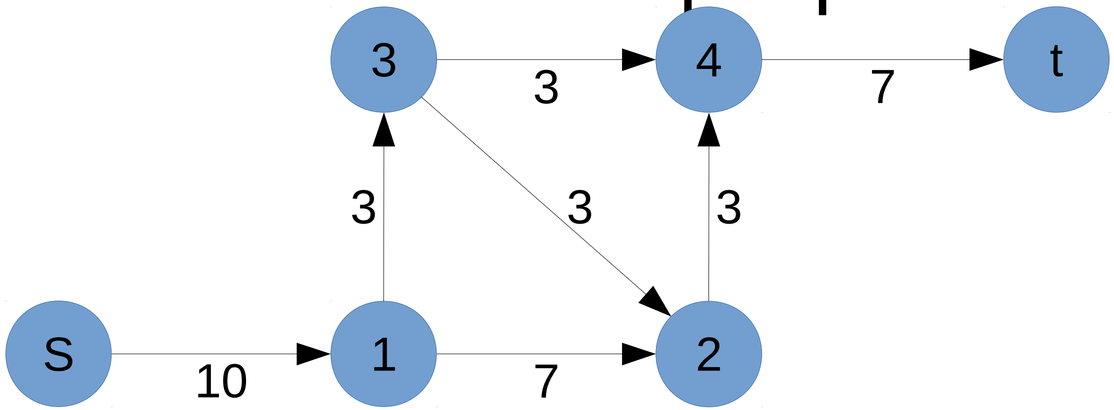
- Qual é o valor máximo que pode fluir de s até t?



- Existem dois possíveis caminhos:

Problema Fluxo de Redes

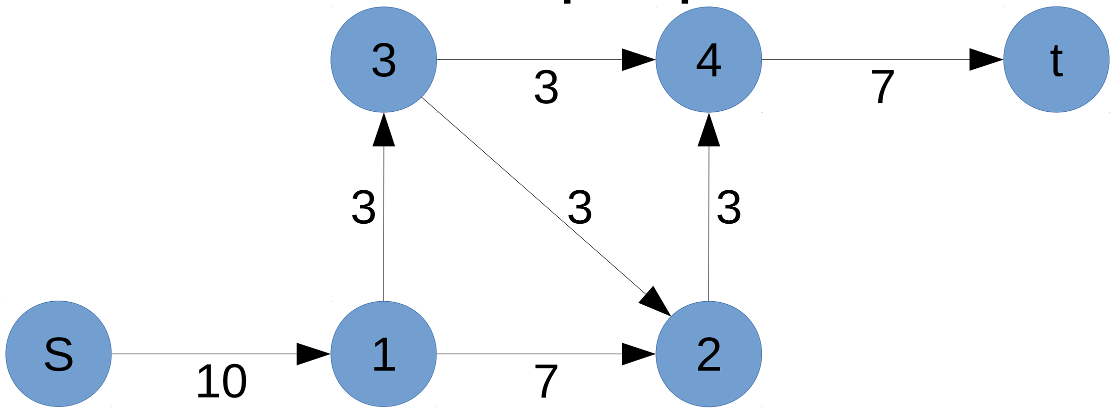
- Qual é o valor máximo que pode fluir de s até t?



- Existem dois possíveis caminhos:
  - S → 1 → 2 → 4 → t : 3

Problema Fluxo de Redes

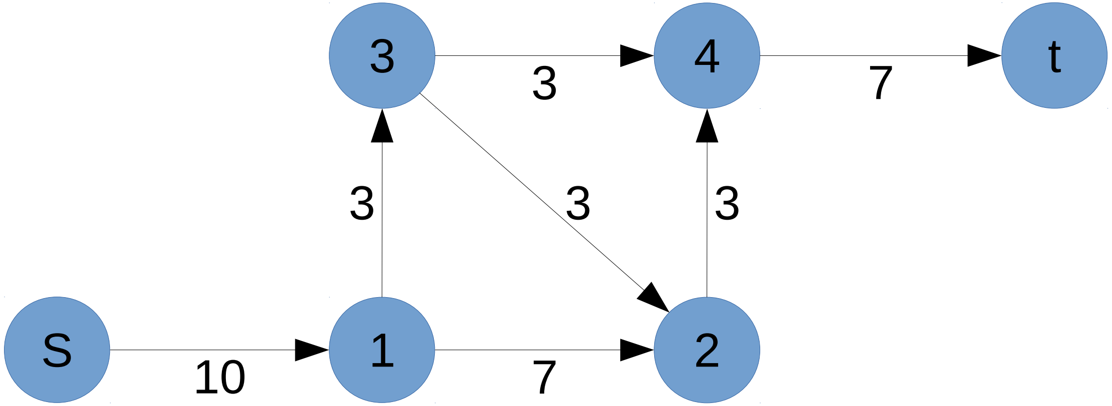
- Qual é o valor máximo que pode fluir de s até t?



- Existem dois possíveis caminhos:
  - S → 1 → 2 → 4 → t : 3
  - S → 1 → 3 → 4 → t : 3

Problema Fluxo de Redes

- Qual é o valor máximo que pode fluir de s até t?



- Existem dois possíveis caminhos:
  - S → 1 → 2 → 4 → t : 3
  - S → 1 → 3 → 4 → t : 3
  - Totalizando 6 unidades.

Problema Fluxo de Redes

Problema Fluxo de Redes

- É tipicamente um problema de otimização de redes.

Problema Fluxo de Redes

- É tipicamente um problema de otimização de redes.
- Problema aparece em diversos contextos:

Problema Fluxo de Redes

- É tipicamente um problema de otimização de redes.
- Problema aparece em diversos contextos:
  - Redes: rotear uma quantidade máxima possível de pacotes em uma rede de computadores.

Problema Fluxo de Redes

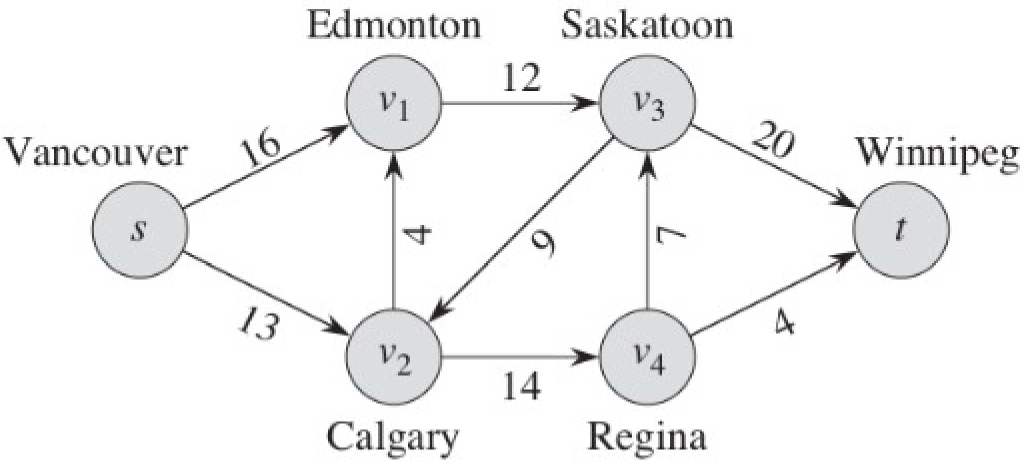
- É tipicamente um problema de otimização de redes.
- Problema aparece em diversos contextos:
  - Redes: rotear uma quantidade máxima possível de pacotes em uma rede de computadores.
  - Transporte: enviar o número máximo de caminhões, onde as rodovias têm um limite máximo quanto ao número de veículos por vez.

Problema Fluxo de Redes

- Dado um grafo direcionado **G = (V, E)**, onde cada aresta **e** está associada com a sua capacidade **c(e) > 0**. Existem dois nós especiais **s (fonte)** e **t (sorvedouro)**, onde **s ≠ t**.

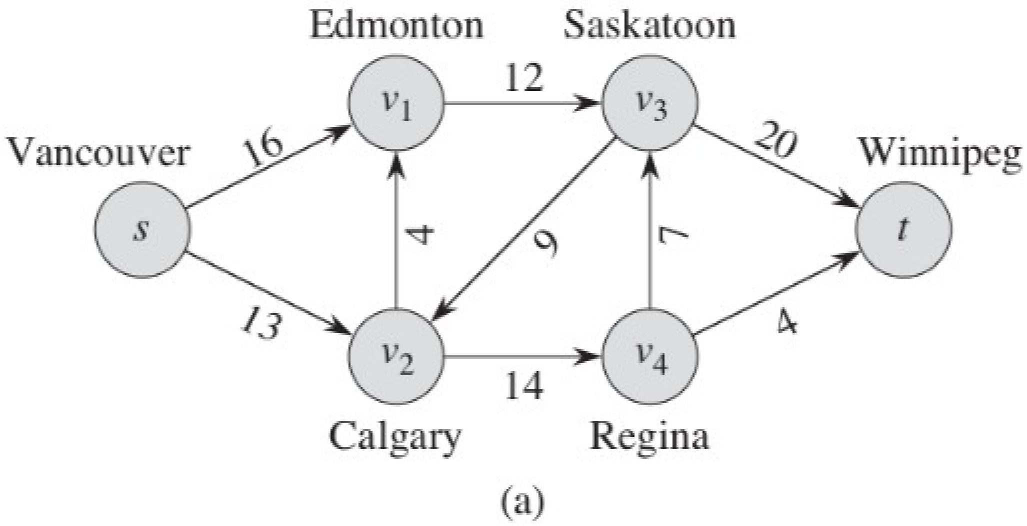
Problema Fluxo de Redes

Problema Fluxo de Redes



(a)

Problema Fluxo de Redes



Redes com Múltiplas Fontes

Redes com Múltiplas Fontes

- Redes com múltiplas fontes e sumidouros:

Redes com Múltiplas Fontes

- Redes com múltiplas fontes e sumidouros:
  - A empresa poderia ter mais que uma fábrica e mais que um depósito.

Redes com Múltiplas Fontes

- Redes com múltiplas fontes e sumidouros:
  - A empresa poderia ter mais que uma fábrica e mais que um depósito.
  - Não está de acordo com a definição de rede.

Redes com Múltiplas Fontes

- Redes com múltiplas fontes e sumidouros:
  - A empresa poderia ter mais que uma fábrica e mais que um depósito.
  - Não está de acordo com a definição de rede.
  - Podemos transformá-la em uma rede equivalente:

Redes com Múltiplas Fontes

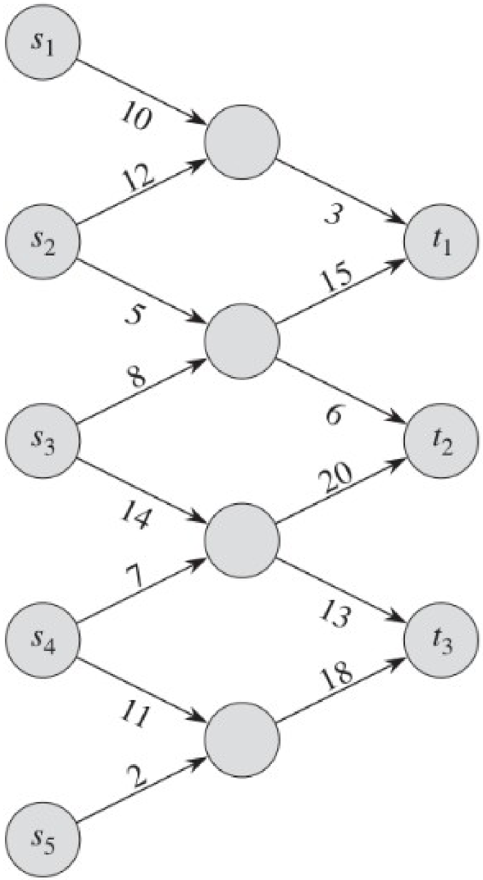
- Redes com múltiplas fontes e sumidouros:
  - A empresa poderia ter mais que uma fábrica e mais que um depósito.
  - Não está de acordo com a definição de rede.
  - Podemos transformá-la em uma rede equivalente:
    - Adicionamos uma super fonte s e arestas com capacidade ∞ de s para cada fonte original.

Redes com Múltiplas Fontes

- Redes com múltiplas fontes e sumidouros:
  - A empresa poderia ter mais que uma fábrica e mais que um depósito.
  - Não está de acordo com a definição de rede.
  - Podemos transformá-la em uma rede equivalente:
    - Adicionamos uma super fonte s e arestas com capacidade ∞ de s para cada fonte original.
    - Adicionamos um super sumidouro e arestas com capacidade ∞ de cada sumidouro original para o super sumidouro.

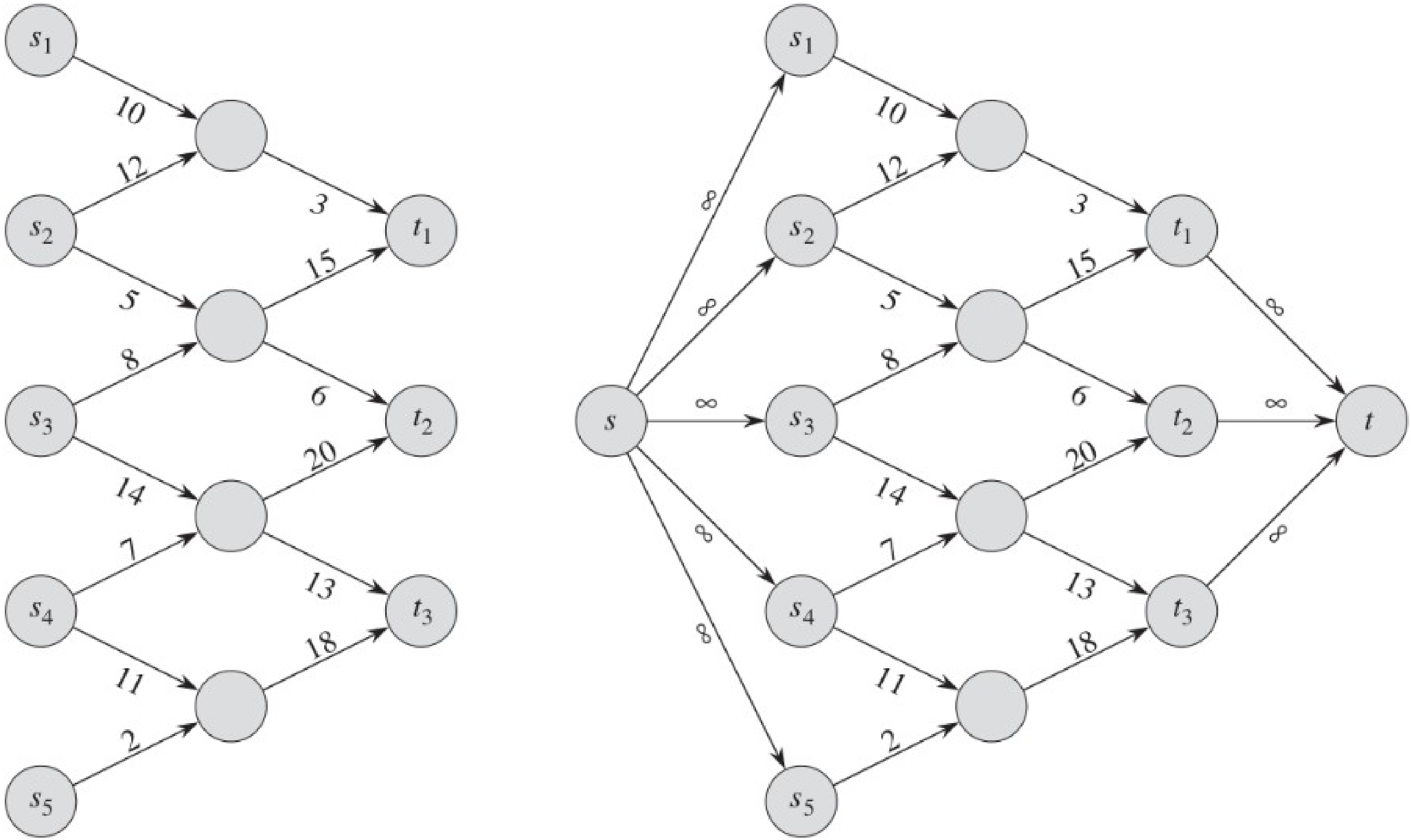
Redes com Múltiplas Fontes

Redes com Múltiplas Fontes



(a)

Redes com Múltiplas Fontes



(a) (b)

Problema Fluxo de Redes

Problema Fluxo de Redes

- Maximizar a quantidade de total de fluxo de s até t, mantendo-se as seguintes propriedades:

Problema Fluxo de Redes

- Maximizar a quantidade de total de fluxo de s até t, mantendo-se as seguintes propriedades:
  - O fluxo de e não pode exceder c(e).

Problema Fluxo de Redes

- Maximizar a quantidade de total de fluxo de s até t, mantendo-se as seguintes propriedades:
  - O fluxo de e não pode exceder c(e).
  - Para cada nó v ≠ {s, t}, o fluxo de entrada deve ser igual ao fluxo de saída.

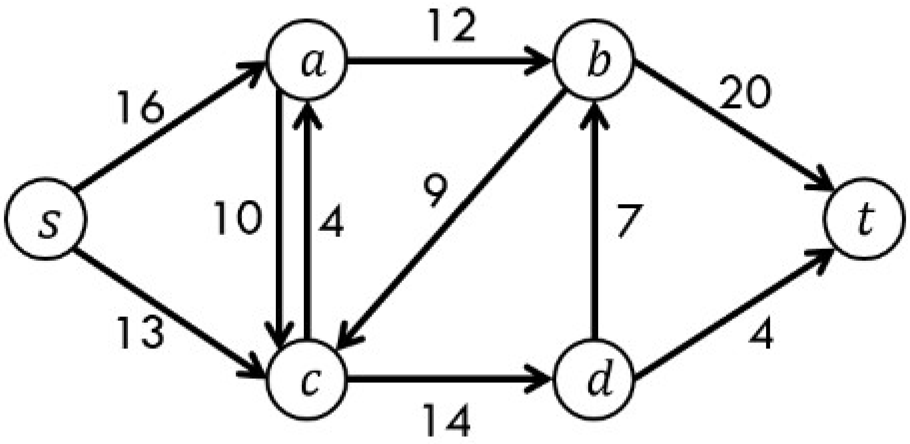
Problema Fluxo de Redes

Problema Fluxo de Redes

- Capacidades:

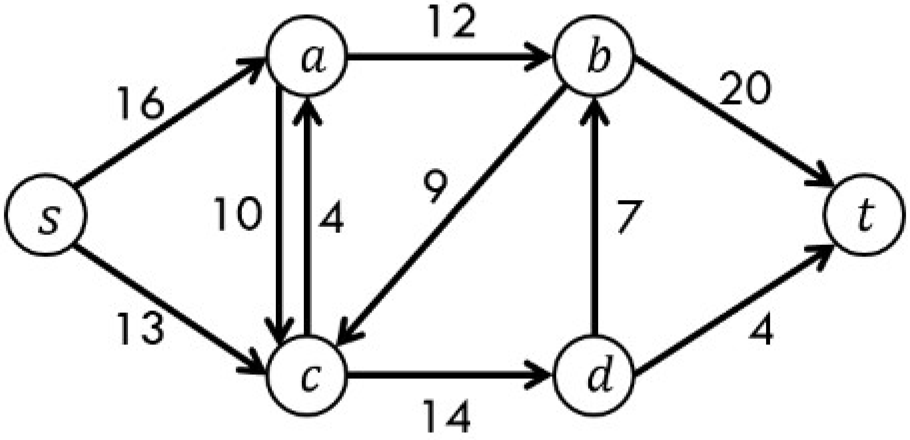
Problema Fluxo de Redes

- Capacidades:



Problema Fluxo de Redes

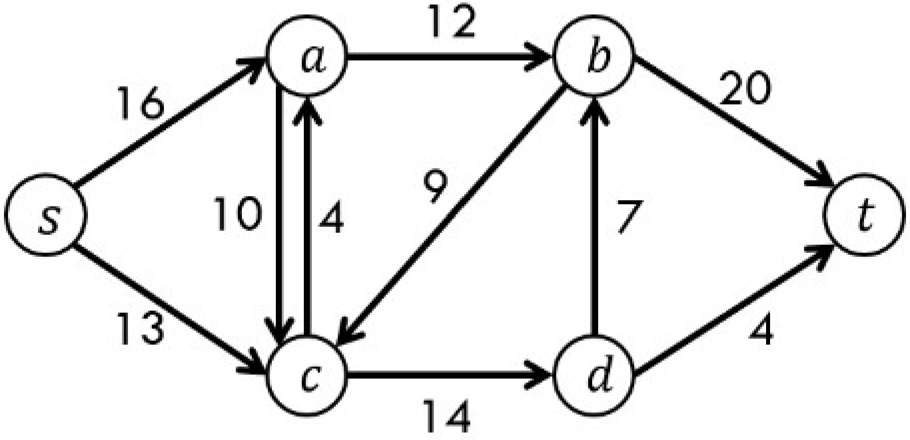
- Capacidades:



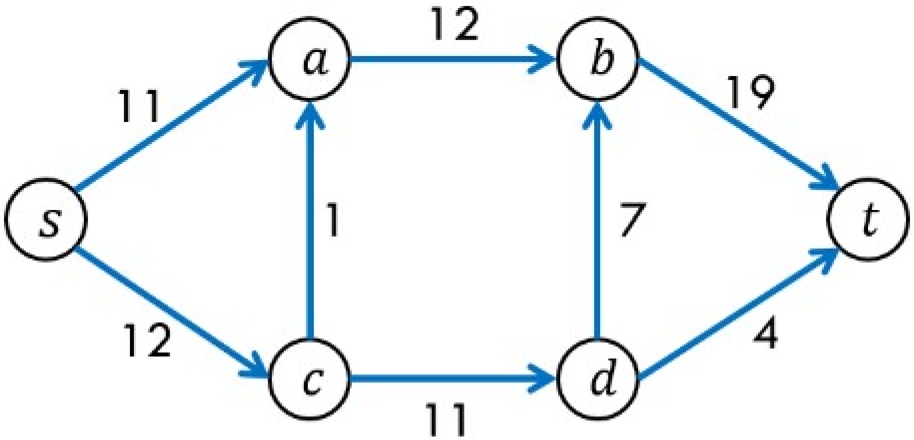
- Fluxo máximo:

Problema Fluxo de Redes

- Capacidades:



- Fluxo máximo:



Ford-Fulkerson

Algoritmo Ford-Fulkerson

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Ideia geral:

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Ideia geral:
  - Incrementar iterativamente o valor do fluxo.

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Ideia geral:
  - Incrementar iterativamente o valor do fluxo.
  - Começamos com $f(u,v) = 0$ para todo $u, v \in G$, o que gera um fluxo de valor 0.

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Ideia geral:
  - Incrementar iterativamente o valor do fluxo.
  - Começamos com f (u,v) = 0 para todo u, v ∈ G, o que gera um fluxo de valor 0.
  - A cada iteração, aumentamos o valor do fluxo encontrado um **caminho aumentante** na **rede residual** Gf associada a G.

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Ideia geral:
  - Incrementar iterativamente o valor do fluxo.
  - Começamos com f (u,v) = 0 para todo u, v $\in$ G, o que gera um fluxo de valor 0.
  - A cada iteração, aumentamos o valor do fluxo encontrado um **caminho aumentante** na **rede residual** Gf associada a G.
  - O processo continua até que nenhum caminho aumentante seja encontrado.

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Ideia geral:
  - Incrementar iterativamente o valor do fluxo.
  - Começamos com f (u,v) = 0 para todo u, v ∈ G, o que gera um fluxo de valor 0.
  - A cada iteração, aumentamos o valor do fluxo encontrado um **caminho aumentante** na **rede residual** Gf associada a G.
  - O processo continua até que nenhum caminho aumentante seja encontrado.
  - O teorema do fluxo máximo e corte mínimo garante que este processo produz o fluxo máximo no término.

Redes Residuais

Redes Residuais

- Uma rede residual Gf de uma rede G e um fluxo f consiste de arestas com capacidades que representam como o fluxo das arestas de G podem ser alterados.

Redes Residuais

- Uma rede residual Gf de uma rede G e um fluxo f consiste de arestas com capacidades que representam como o fluxo das arestas de G podem ser alterados.
  - O fluxo em uma aresta pode aumentar ou diminuir.

Redes Residuais

Redes Residuais

- Seja $G = (V,E)$ uma rede com fonte s e sumidouro t, f um fluxo em G e $u,v \in V$.

Redes Residuais

- Seja G = (V,E) uma rede com fonte s e sumidouro t, f um fluxo em G e $u,v \in V$.
- A capacidade residual cf (u,v) é definida como:

Redes Residuais

- Seja G = (V,E) uma rede com fonte s e sumidouro t, f um fluxo em G e u,v ∈ V.
- A capacidade residual cf (u,v) é definida como:

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & \text{se } (u,v) \in E \\ f(v,u) & \text{se } (v,u) \in E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Redes Residuais

- Seja G = (V,E) uma rede com fonte s e sumidouro t, f um fluxo em G e u,v ∈ V.
- A capacidade residual cf (u,v) é definida como:

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & \text{se } (u,v) \in E \\ f(v,u) & \text{se } (v,u) \in E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- A rede residual de G induzida por f é Gf=(V,Ef), onde:

Redes Residuais

- Seja G = (V,E) uma rede com fonte s e sumidouro t, f um fluxo em G e u,v ∈ V.
- A capacidade residual cf (u,v) é definida como:

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & \text{se } (u,v) \in E \\ f(v,u) & \text{se } (v,u) \in E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- A rede residual de G induzida por f é Gf=(V,Ef), onde:

$$E = \{(u,v) \in V \times V : c_f(u,v) > 0\}$$

e $|E_f| \leq 2|E|$

Redes Residuais

Redes Residuais

- Criação das redes residuais:

Redes Residuais

- Criação das redes residuais:
  - Consideramos uma rede original e atualizamos a capacidade de cada aresta com o valor adicional ao fluxo.

Redes Residuais

- Criação das redes residuais:
  - Consideramos uma rede original e atualizamos a capacidade de cada aresta com o valor adicional ao fluxo.
  - Então nós também adicionamos arestas invertidas para indicar a quantidade de fluxo que está percorrendo a rede original.

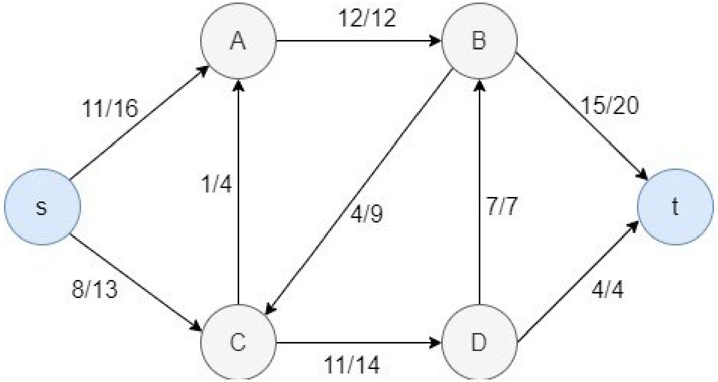
Redes Residuais

Redes Residuais

- Considere o exemplo abaixo:

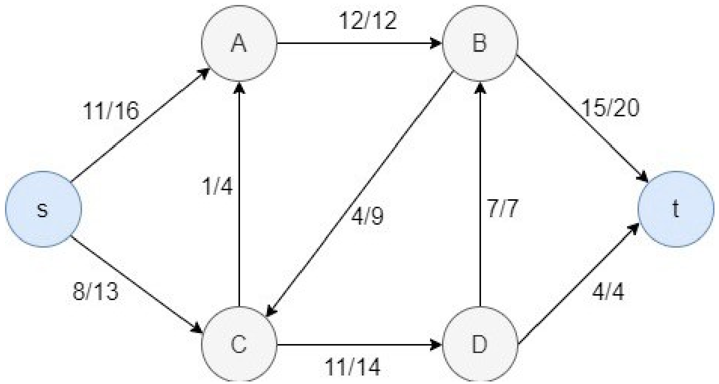
Redes Residuais

- Considere o exemplo abaixo:



Redes Residuais

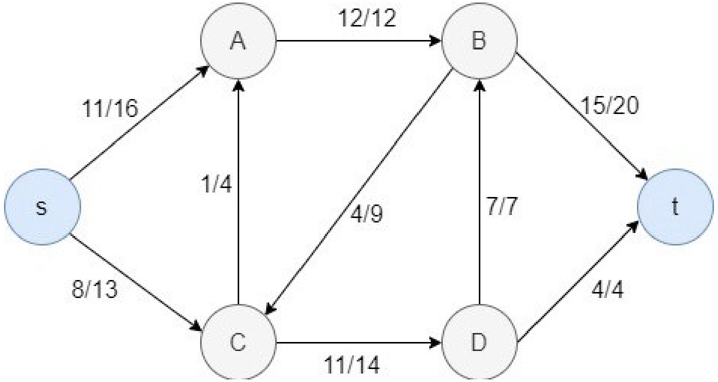
- Considere o exemplo abaixo:



  - O primeiro valor representa o fluxo.

Redes Residuais

- Considere o exemplo abaixo:



  - O primeiro valor representa o fluxo.
  - O segundo valor a capacidade da aresta.

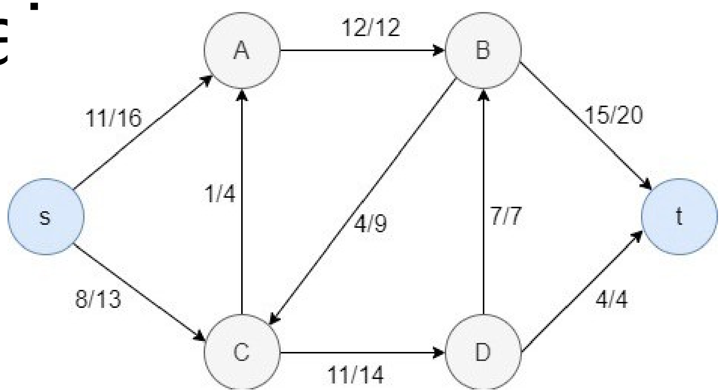
Redes Residuais

Redes Residuais

- Considere o exemplo abaixo:

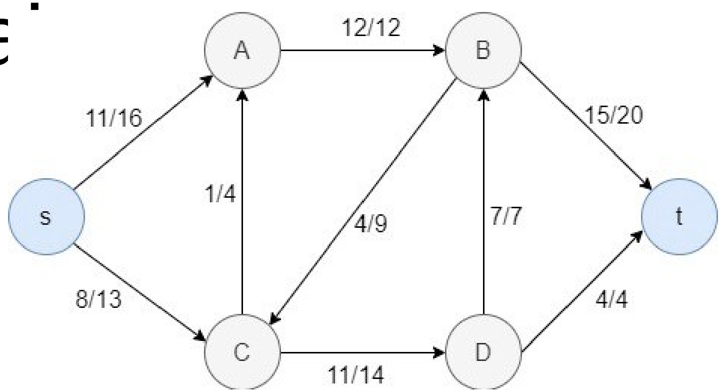
Redes Residuais

- Considere o exemplo abai



Redes Residuais

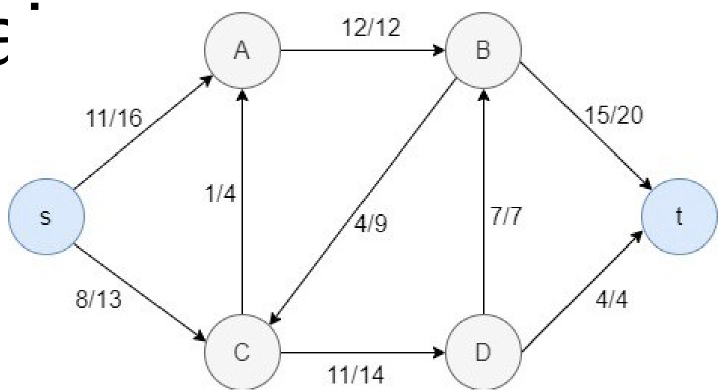
- Considere o exemplo aba



  - A aresta C→D tem capacidade 14 e fluxo 11.

Redes Residuais

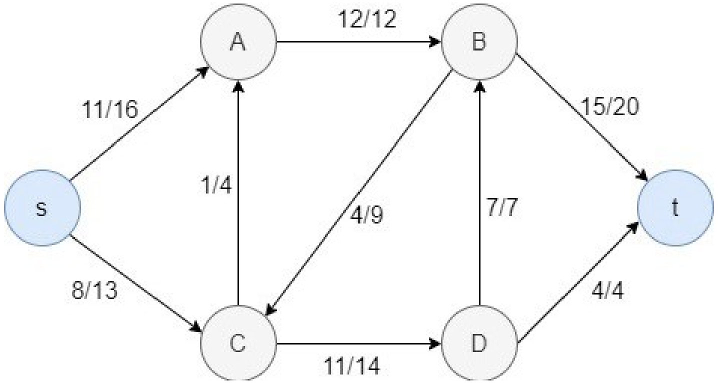
- Considere o exemplo aba



  – A aresta C→D tem capacidade 14 e fluxo 11.
  – Fluxo adicional: 14 – 11 = 3.

Redes Residuais

- Considere o exemplo abaixo:



  - A aresta C→D tem capacidade 14 e fluxo 11.
  - Fluxo adicional: 14 – 11 = 3.
  - Na rede residual nós podemos atualizar a capacidade de C→D para 3 e então adicionar uma aresta invertida com valor 11.

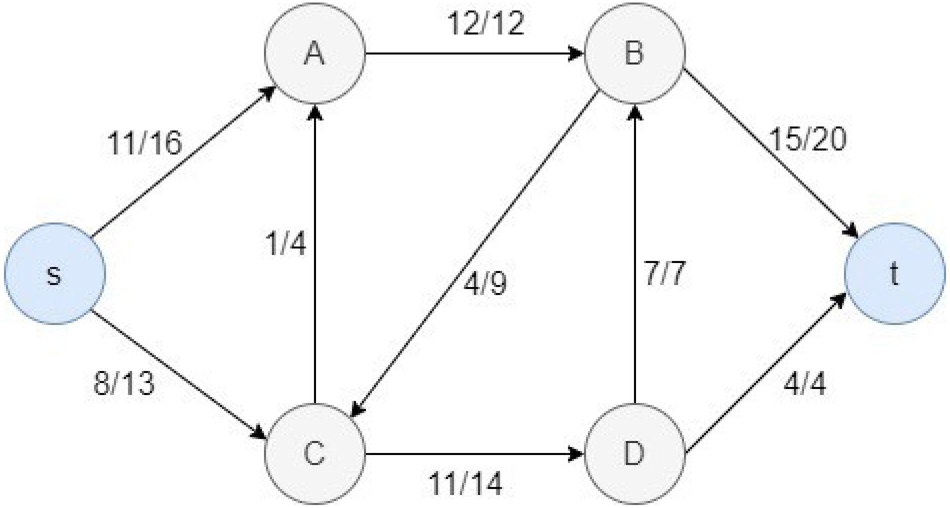
Redes Residuais

Redes Residuais

- Exemplo:

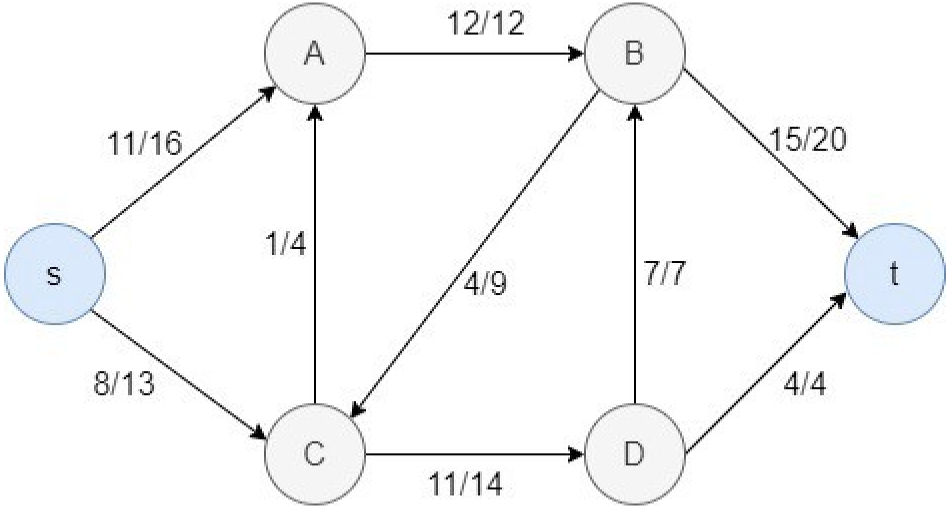
Redes Residuais

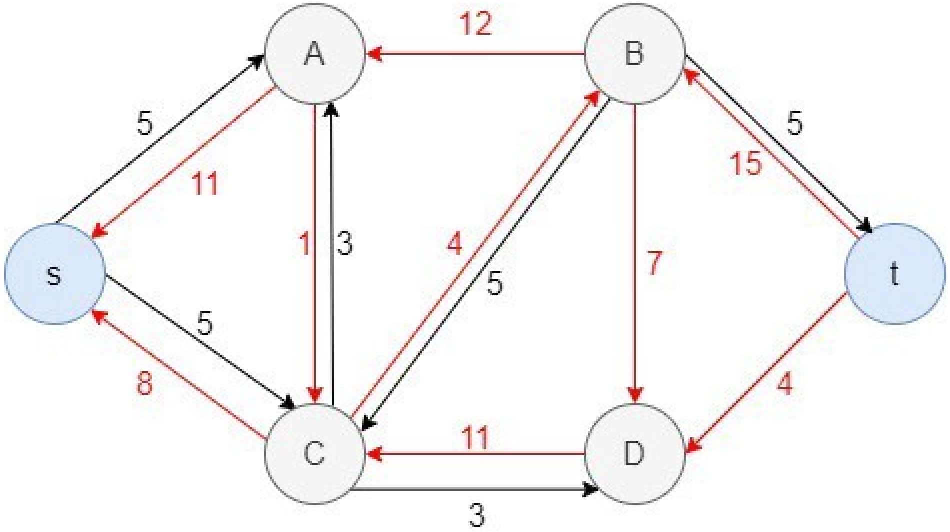
- Exemplo:



Redes Residuais

- Exemplo:





Caminho Aumentante

Caminho Aumentante

- Dado uma rede G = (V, E) e um fluxo f, um caminho aumentante p é um caminho simples de s para t na rede residual Gf.

Caminho Aumentante

- Dado uma rede G = (V, E) e um fluxo f, um caminho aumentante p é um caminho simples de s para t na rede residual Gf.
- O valor máximo que pode ser aumentado no fluxo de cada aresta no caminho aumentante p é chamado capacidade residual de p, e é dado por:

Caminho Aumentante

- Dado uma rede G = (V, E) e um fluxo f, um caminho aumentante p é um caminho simples de s para t na rede residual Gf.
- O valor máximo que pode ser aumentado no fluxo de cada aresta no caminho aumentante p é chamado capacidade residual de p, e é dado por:

$$c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}$$

Caminho Aumentante

- Em suma, pode-se afirmar que o caminho aumentante de um fluxo de rede G = (V,E) é um simples caminho de s até t na correspondente rede residual do fluxo de redes.

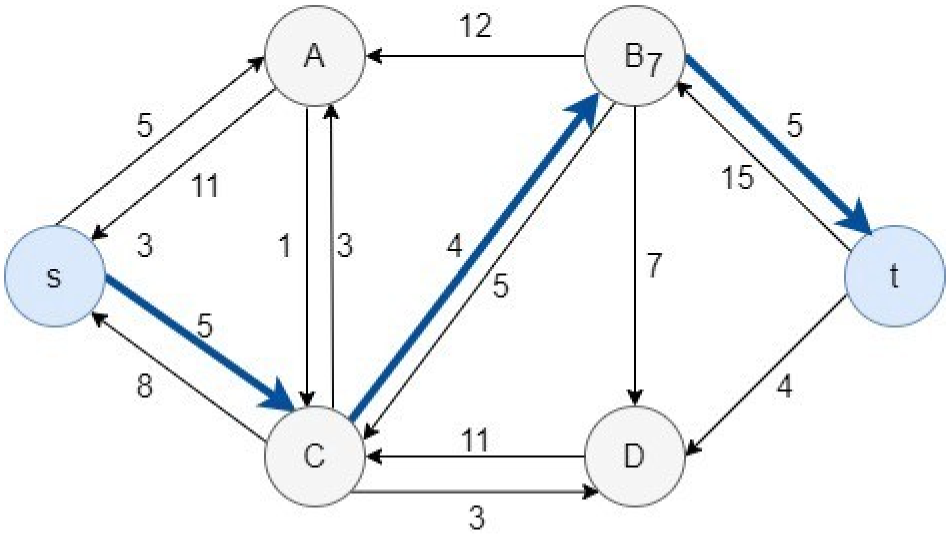
Caminho Aumentante

Caminho Aumentante

- Exemplo:

Caminho Aumentante

- Exemplo:



Algoritmo Ford-Fulkerson

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Inicia-se com fluxo de f com todas arestas iguais a 0.

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Inicia-se com fluxo de f com todas arestas iguais a 0.
- Enquanto existir um caminho aumentante p na rede residual, aumente o fluxo f de p.

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Inicia-se com fluxo de f com todas arestas iguais a 0.
- Enquanto existir um caminho aumentante p na rede residual, aumente o fluxo f de p.
- Retorna o fluxo f.

Algoritmo Ford-Fulkerson

Algoritmo Ford-Fulkerson

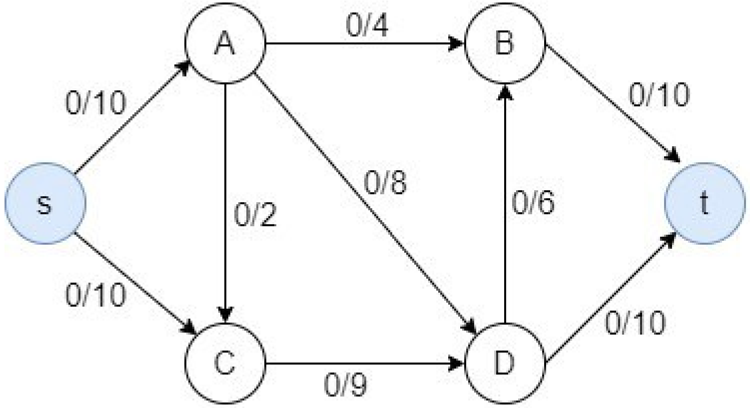
- Exemplo:

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Exemplo:
  - Passo 1

Algoritmo Ford-Fulkerson

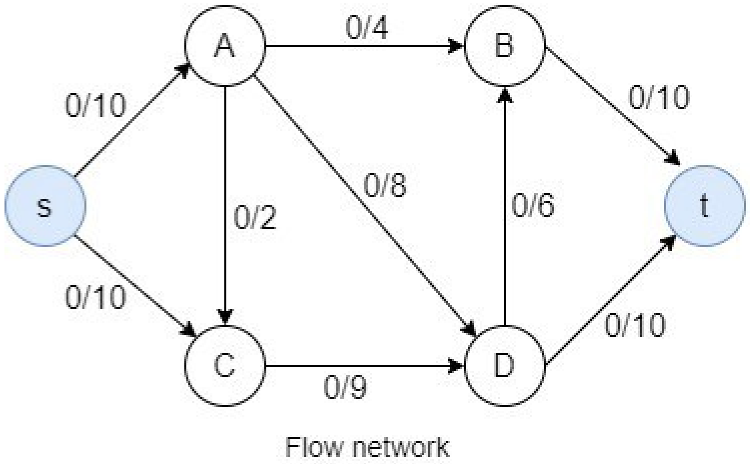
- Exemplo:
  - Passo 1

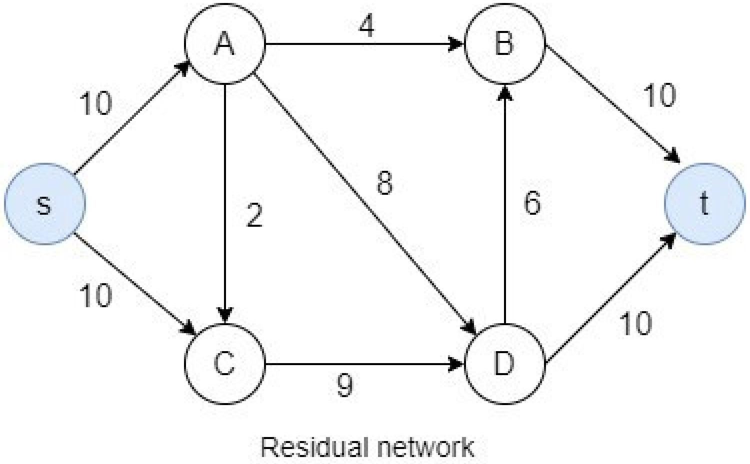


Flow network

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Exemplo:
  - Passo 1





Algoritmo Ford-Fulkerson

Algoritmo Ford-Fulkerson

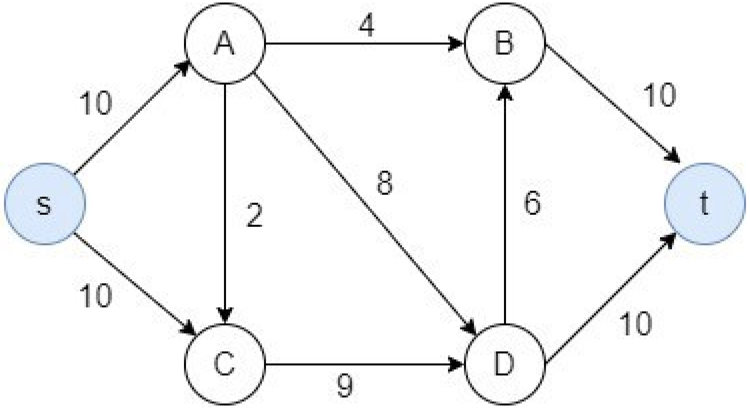
- Passo 2:

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Passo 2:
  - Achar o caminho aumentante na rede residual.

Algoritmo Ford-Fulkerson

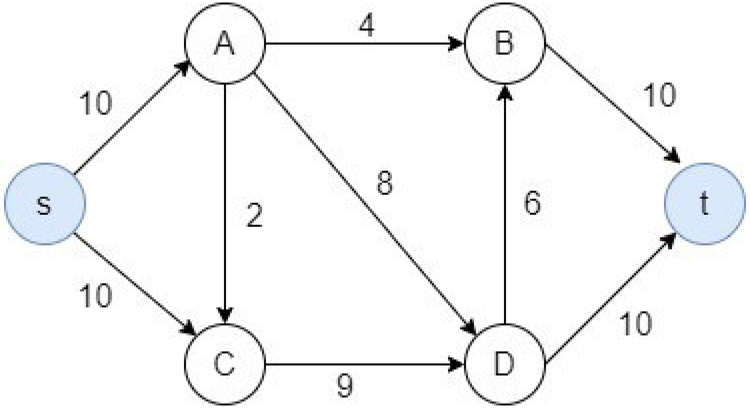
- Passo 2:
  - Achar o caminho aumentante na rede residual.



Residual network

Algoritmo Ford-Fulkerson

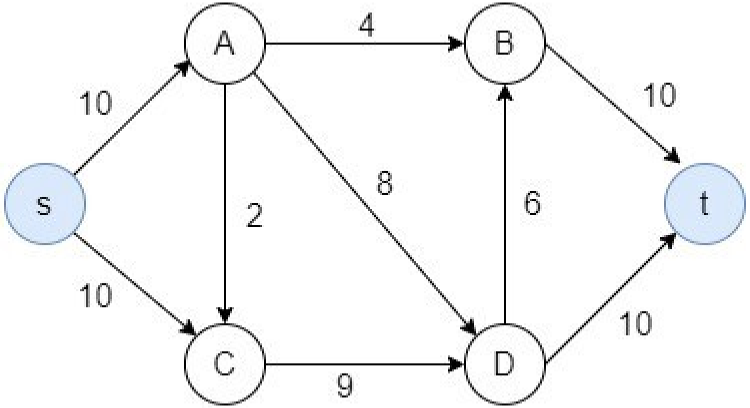
- Passo 2:
  - Achar o caminho aumentante na rede residual.
  - Vamos selecionar o caminho s → A → D → t.



Residual network

Algoritmo Ford-Fulkerson

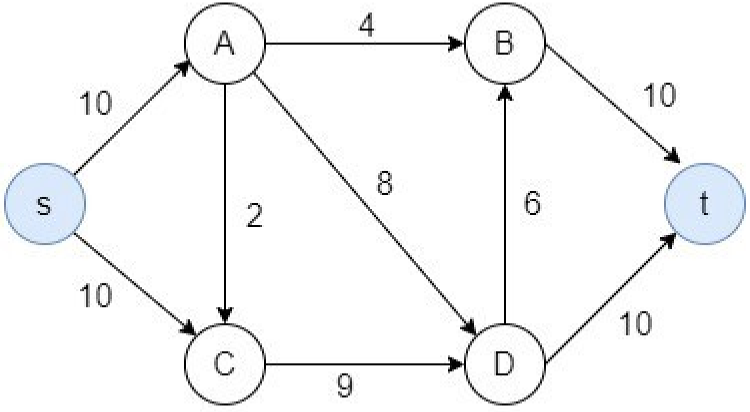
- Passo 2:
  - Achar o caminho aumentante na rede residual.
  - Vamos selecionar o caminho s → A → D → t.
  - O limite de capacidade é 8.



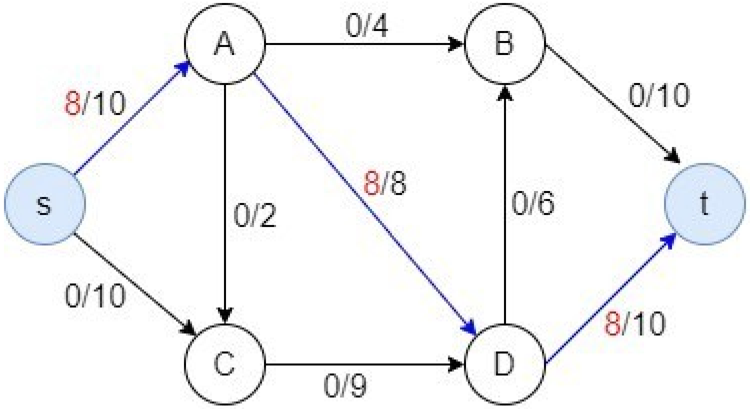
Residual network

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Passo 2:
  - Achar o caminho aumentante na rede residual.
  - Vamos selecionar o caminho s → A → D → t.
  - O limite de capacidade é 8.



Residual network



Flow network

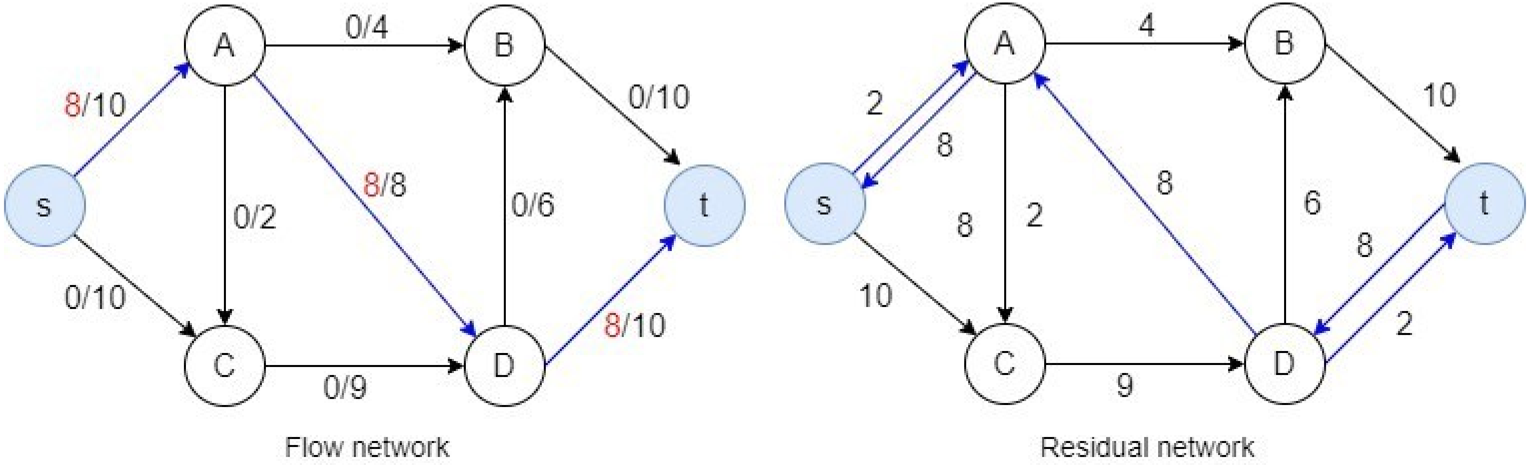
Algoritmo Ford-Fulkerson

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Passo 2:

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Passo 2:



Algoritmo Ford-Fulkerson

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Passo 3:

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Passo 3:
  - Achar o caminho aumentante na rede residual.

Algoritmo Ford-Fulkerson

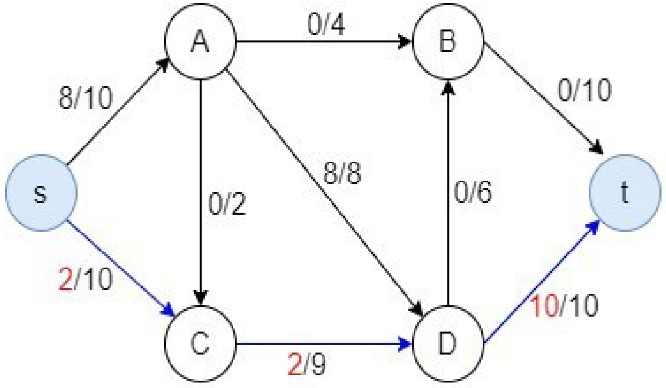
- Passo 3:
  - Achar o caminho aumentante na rede residual.
  - Vamos selecionar o caminho s → C → D → t.

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Passo 3:
  - Achar o caminho aumentante na rede residual.
  - Vamos selecionar o caminho s → C → D → t.
  - O limite da capacidade é 2

Algoritmo Ford-Fulkerson

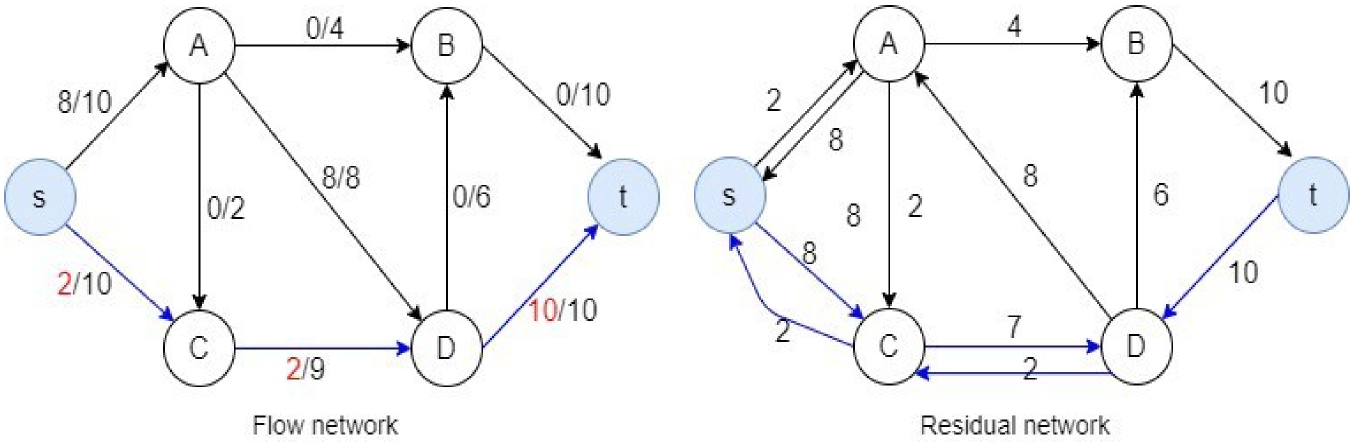
- Passo 3:
  - Achar o caminho aumentante na rede residual.
  - Vamos selecionar o caminho s → C → D → t.
  - O limite da capacidade é 2



Flow network

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Passo 3:
  - Achar o caminho aumentante na rede residual.
  - Vamos selecionar o caminho s → C → D → t.
  - O limite da capacidade é 2



Algoritmo Ford-Fulkerson

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Exemplo:

Algoritmo Ford-Fulkerson

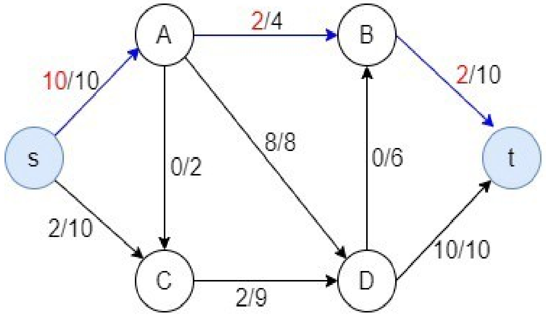
- Exemplo:
  - Passo 4:

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Exemplo:
  - Passo 4:
    - Achar o caminho aumentante na rede residual.

Algoritmo Ford-Fulkerson

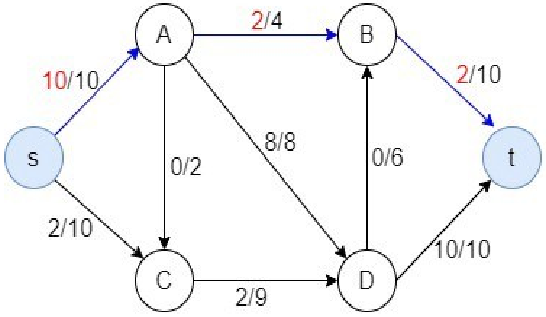
- Exemplo:
  - Passo 4:
    - Achar o caminho aumentante na rede residual.



Flow network

Algoritmo Ford-Fulkerson

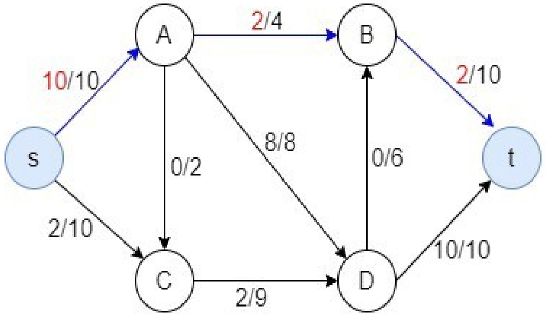
- Exemplo:
  - Passo 4:
    - Achar o caminho aumentante na rede residual.
    - Vamos selecionar o caminho s → A → B → t.



Flow network

Algoritmo Ford-Fulkerson

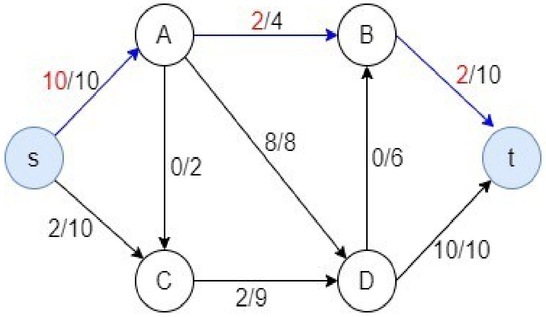
- Exemplo:
  - Passo 4:
    - Achar o caminho aumentante na rede residual.
    - Vamos selecionar o caminho s → A → B → t.
    - O limite da capacidade é 2.



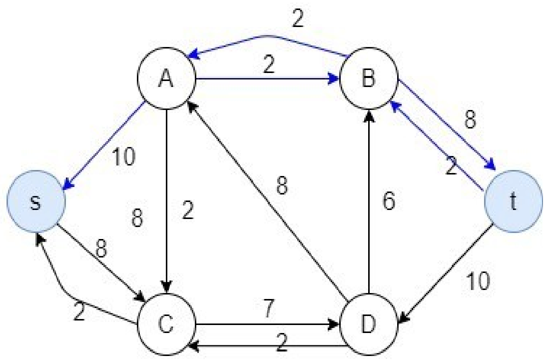
Flow network

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Exemplo:
  - Passo 4:
    - Achar o caminho aumentante na rede residual.
    - Vamos selecionar o caminho s → A → B → t.
    - O limite da capacidade é 2.



Flow network



Residual network

Algoritmo Ford-Fulkerson

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Exemplo:

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Exemplo:
  - Passo 5:

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Exemplo:
  - Passo 5:
    - Achar o caminho aumentante na rede residual.

Algoritmo Ford-Fulkerson

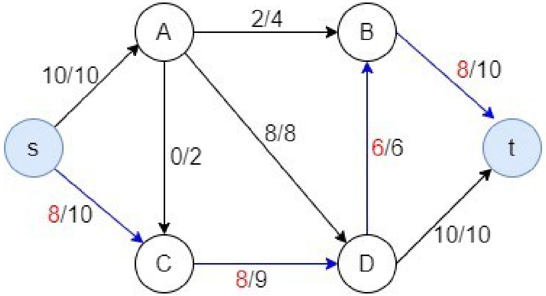
- Exemplo:
  - Passo 5:
    - Achar o caminho aumentante na rede residual.
    - Vamos selecionar o caminho s → C → D → B → t.

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Exemplo:
  - Passo 5:
    - Achar o caminho aumentante na rede residual.
    - Vamos selecionar o caminho s → C → D → B → t.
    - O limite da capacidade é 6.

Algoritmo Ford-Fulkerson

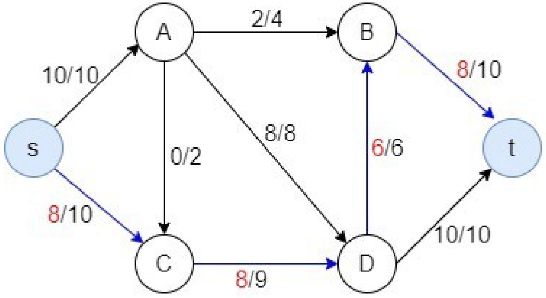
- Exemplo:
  - Passo 5:
    - Achar o caminho aumentante na rede residual.
    - Vamos selecionar o caminho s → C → D → B → t.
    - O limite da capacidade é 6.



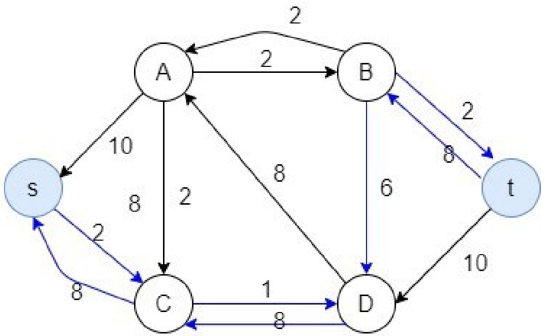
Flow network

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Exemplo:
  - Passo 5:
    - Achar o caminho aumentante na rede residual.
    - Vamos selecionar o caminho s → C → D → B → t.
    - O limite da capacidade é 6.



Flow network



Residual network

Algoritmo Ford-Fulkerson

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Exemplo:

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Exemplo:
  - Passo 6:

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Exemplo:
  - Passo 6:
    - Achar o caminho aumentante na rede residual.

Algoritmo Ford-Fulkerson

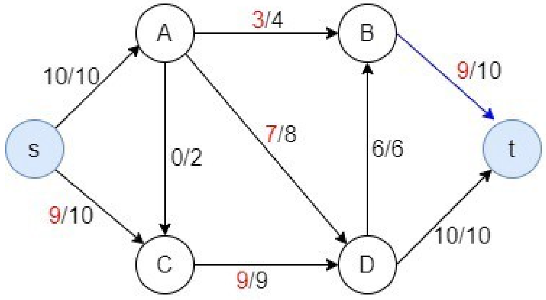
- Exemplo:
  - Passo 6:
    - Achar o caminho aumentante na rede residual.
    - Vamos selecionar o caminho s → C → D → A → B → t.

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Exemplo:
  - Passo 6:
    - Achar o caminho aumentante na rede residual.
    - Vamos selecionar o caminho s → C → D → A → B → t.
    - O limite da capacidade é 1.

Algoritmo Ford-Fulkerson

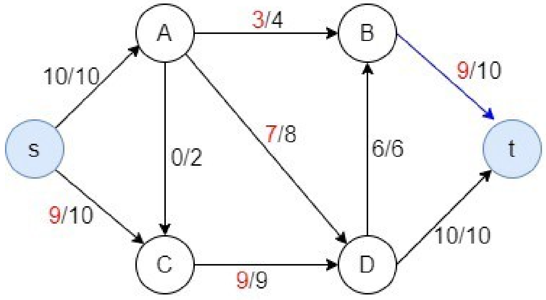
- Exemplo:
  - Passo 6:
    - Achar o caminho aumentante na rede residual.
    - Vamos selecionar o caminho s → C → D → A → B → t.
    - O limite da capacidade é 1.



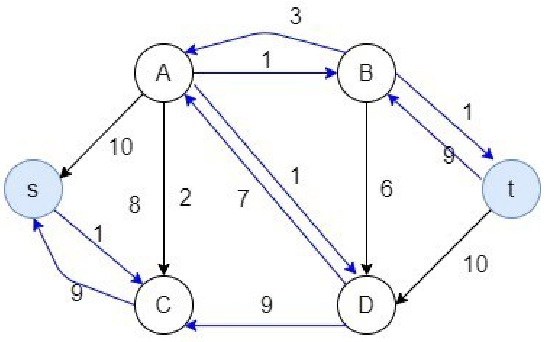
Flow network

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Exemplo:
  - Passo 6:
    - Achar o caminho aumentante na rede residual.
    - Vamos selecionar o caminho s → C → D → A → B → t.
    - O limite da capacidade é 1.



Flow network



Residual network

Algoritmo Ford-Fulkerson

Algoritmo Ford-Fulkerson

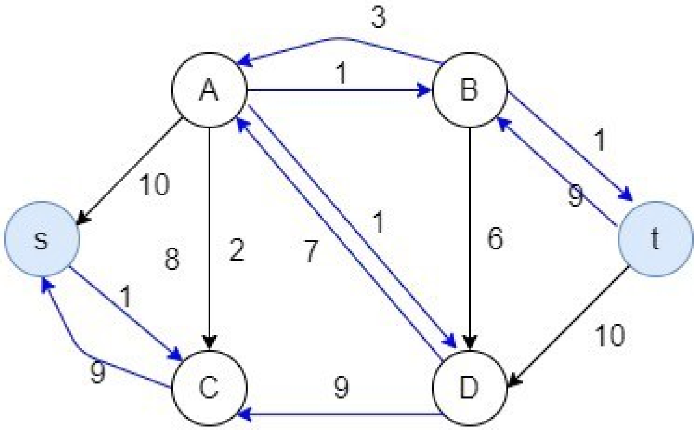
- Agora não existe caminho disponível de s até t no grafo residual.

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Agora não existe caminho disponível de s até t no grafo residual.
- Portanto, não é mais possível adicionar fluxo.

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Agora não existe caminho disponível de s até t no grafo residual.
- Portanto, não é mais possível adicionar fluxo.



Residual network

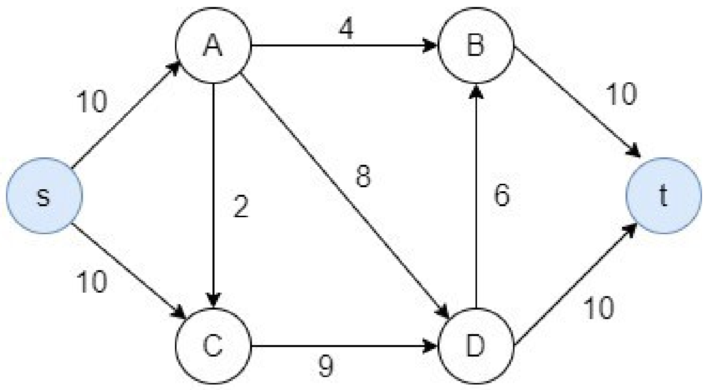
Algoritmo Ford-Fulkerson

Algoritmo Ford-Fulkerson

- Isso significa que o método está completo e alcançamos o fluxo máximo.

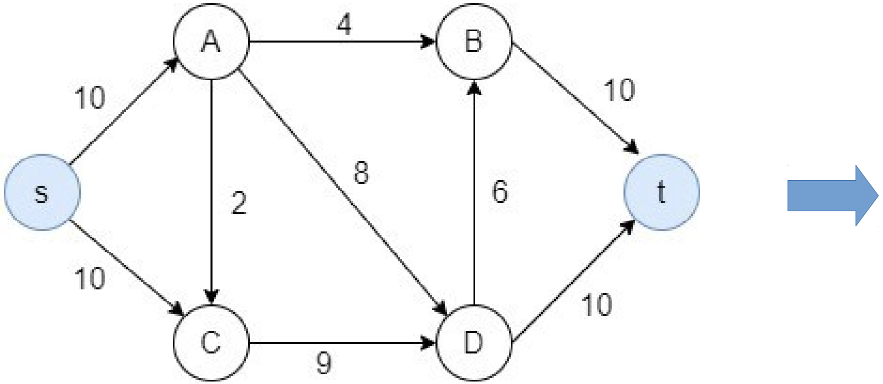
Algoritmo Ford-Fulkerson

- Isso significa que o método está completo e alcançamos o fluxo máximo.



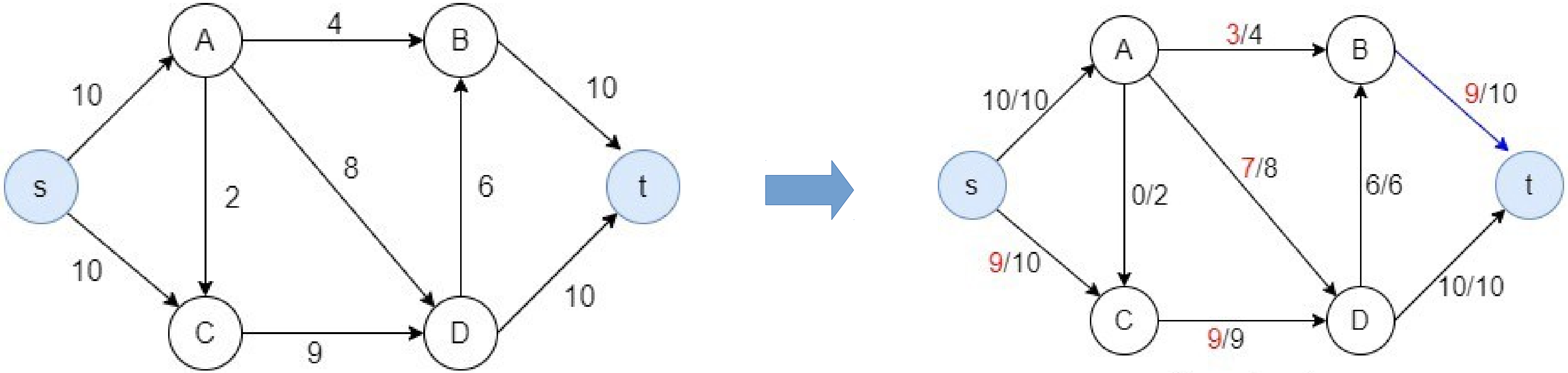
Algoritmo Ford-Fulkerson

- Isso significa que o método está completo e alcançamos o fluxo máximo.



Algoritmo Ford-Fulkerson

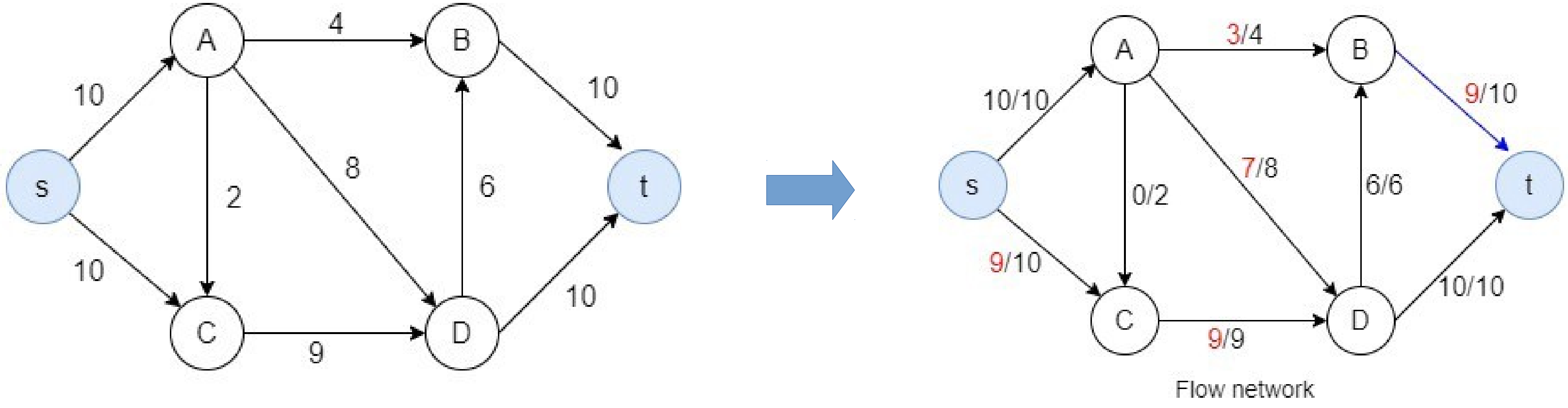
- Isso significa que o método está completo e alcançamos o fluxo máximo.



Flow network

Algoritmo Ford-Fulkerson

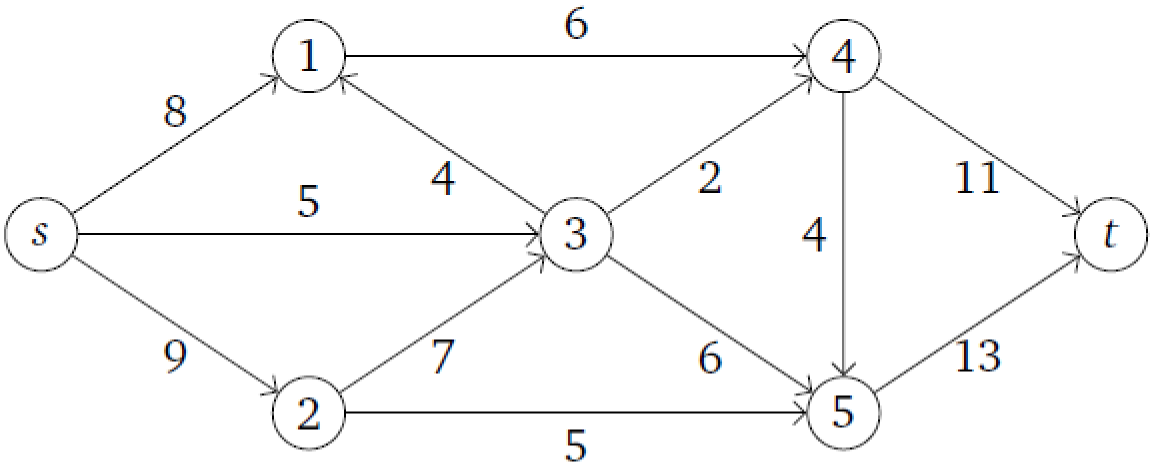
- Isso significa que o método está completo e alcançamos o fluxo máximo.
- O fluxo máximo é 10 + 9 = 19.



EXERCÍCIOS

Exercícios

- Considere o grafo abaixo e faça o que se pede. Calcule o valor de fluxo máximo usando o método de Ford-Fulkerson. Desenhe também o grafo com as suas respectivas capacidade.
  - Resposta: 19.



Exercícios

- Calcule o valor de fluxo máximo do grafo abaixo usando o método de Ford-Fulkerson.
  - Resposta: 23.