Teoria dos Grafos

PLANARIDADE

Prof. Tiago Eugenio de Melo
tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

INTRODUÇÃO

Observações

- Baseada nas aulas do professor Marco Antônio M. Carvalho.
- Baseada nas aulas da professora Sheila Moraes de Almeida.

Sólidos Platônicos

Sólidos Platônicos

- Conceito:
  - Os sólidos platônicos (em homenagem ao filósofo Platão) são figuras tridimensionais nas quais todas as faces são polígonos regulares congruentes, tal que cada vértice possui o mesmo número de faces incidentes.

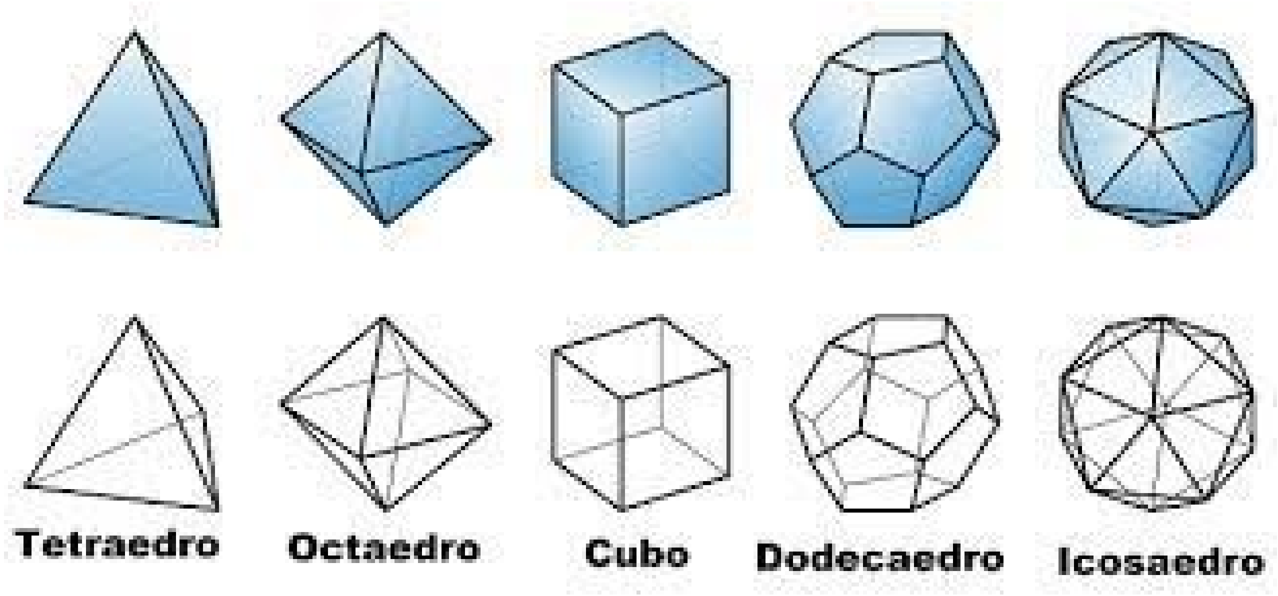
Sólidos Platônicos

Sólidos Platônicos

- Existem somente 5 sólidos platônicos:

Sólidos Platônicos

- Existem somente 5 sólidos platônicos:



Sólidos Platônicos

Sólidos Platônicos

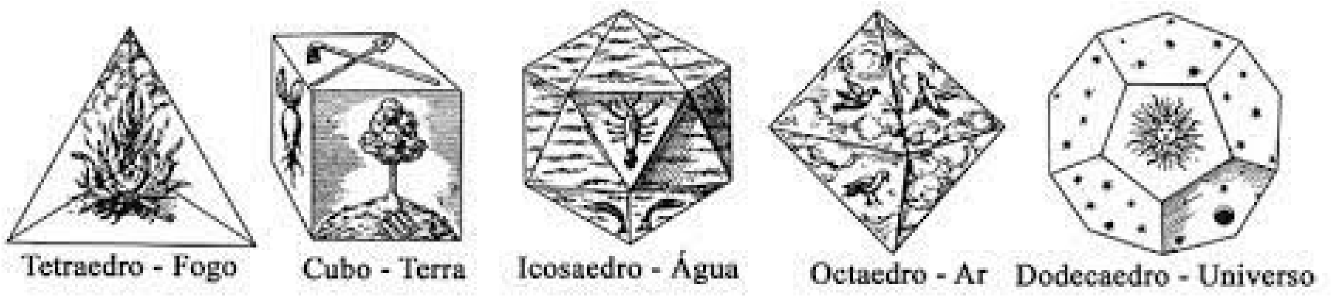
- Histórico:

Sólidos Platônicos

- Histórico:
  - Platão associou cada sólido com um dos elementos que acreditava serem a composição de tudo no universo: ar (octaedro), água (icosaedro), fogo (tetraedro), terra (cubo) e (às vezes) éter (dodecaedro).

Sólidos Platônicos

- Histórico:
  - Platão associou cada sólido com um dos elementos que acreditava serem a composição de tudo no universo: ar (octaedro), água (icosaedro), fogo (tetraedro), terra (cubo) e (às vezes) éter (dodecaedro).



Sólidos Platônicos

Sólidos Platônicos

- A fórmula de Euler:

Sólidos Platônicos

- A fórmula de Euler:
  - Um sólido platônico é composto por vértices (V), arestas (E) e faces (F).

Sólidos Platônicos

- A fórmula de Euler:
  - Um sólido platônico é composto por vértices (V), arestas (E) e faces (F).
  - A relação entre estes valores é dada pela Fórmula de Euler:

Sólidos Platônicos

- A fórmula de Euler:
  - Um sólido platônico é composto por vértices (V), arestas (E) e faces (F).
  - A relação entre estes valores é dada pela Fórmula de Euler:

    $\mathbf{V - E + F = 2}$

Grafos Platônicos

Grafos Platônicos

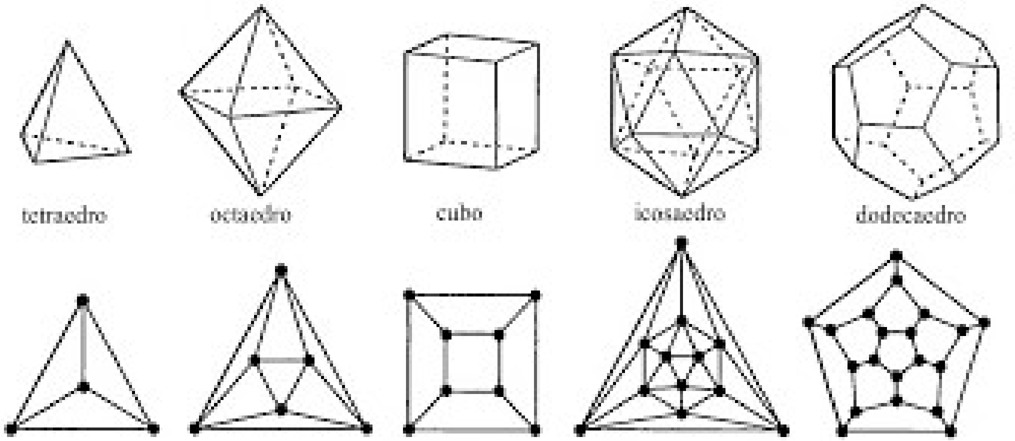
- Correspondência:

Grafos Platônicos

- Correspondência:
  - Para cada sólido platônico, há um grafo platônico correspondente, que na verdade representa o “esqueleto” de cada sólido.

Grafos Platônicos

- Correspondência:
  - Para cada sólido platônico, há um grafo platônico correspondente, que na verdade representa o “esqueleto” de cada sólido.



Sólidos Platônicos e Planaridade

- Correlação:
  - Veremos a seguir que o conceito de planaridade possui propriedades dos sólidos platônicos, como a aplicação da fórmula de Euler.

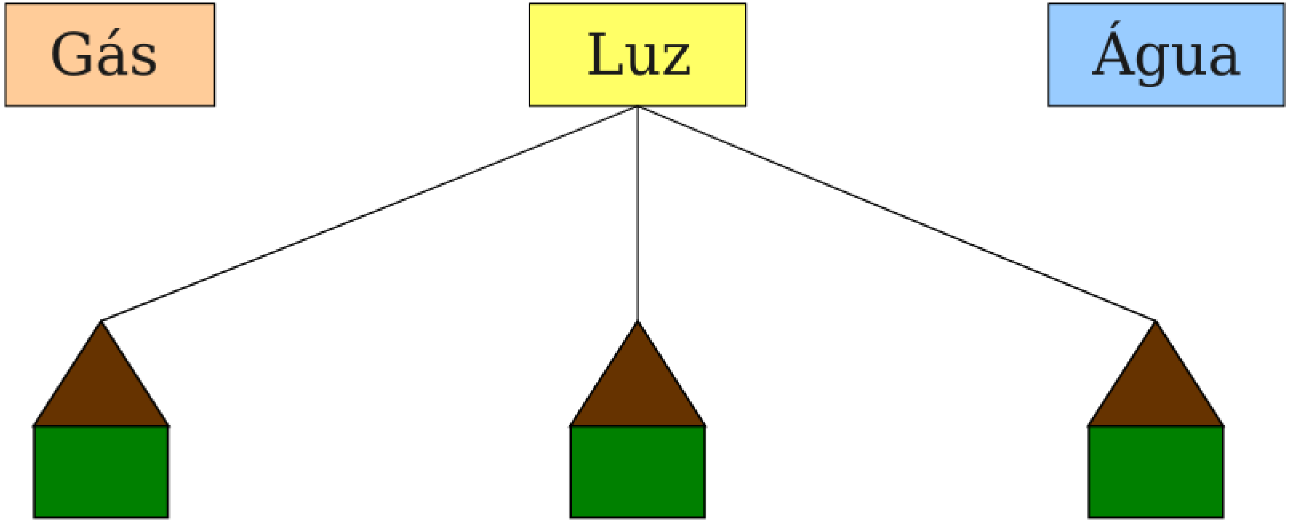
Oferta de Serviços

Oferta de Serviços

- Desafio:

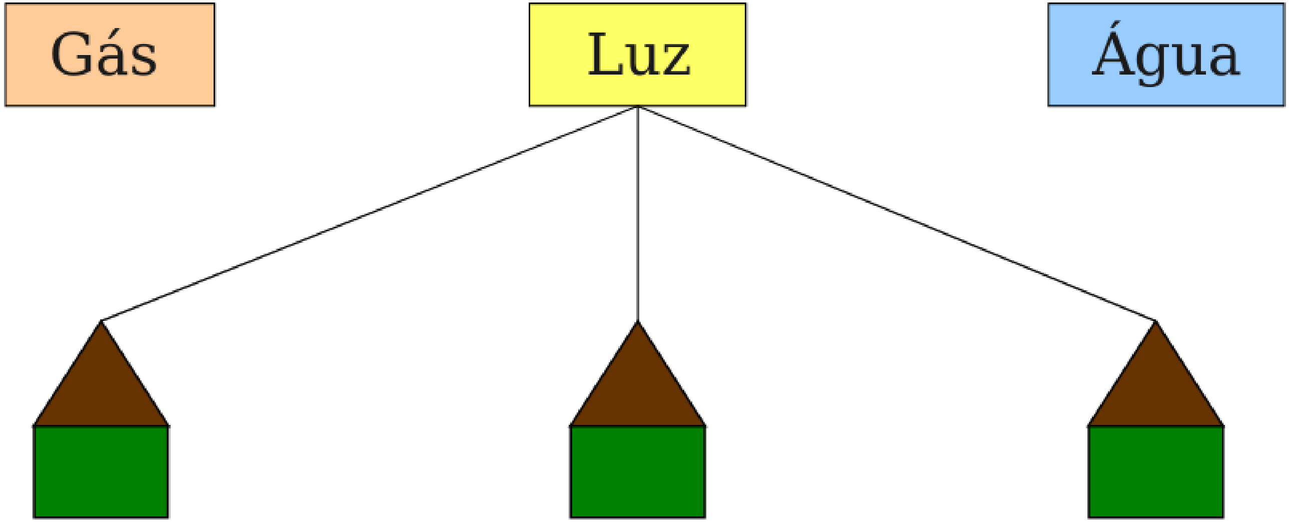
Oferta de Serviços

- Desafio:



Oferta de Serviços

- Desafio:
  - Podemos oferecer os demais serviços para todas as residências sem que as linhas se cruzem?



Grafo Planar

Grafo Planar

- Conceito:

Grafo Planar

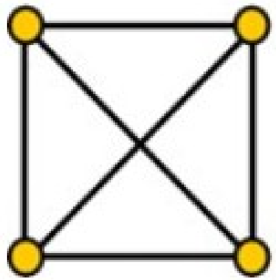
- Conceito:
  - Um grafo G é planar se existir uma representação gráfica de G no plano sem cruzamento de arestas.

Grafo Planar

- Conceito:
  - Um grafo G é planar se existir uma representação gráfica de G no plano sem cruzamento de arestas.
  - O grafo K_4 é planar?

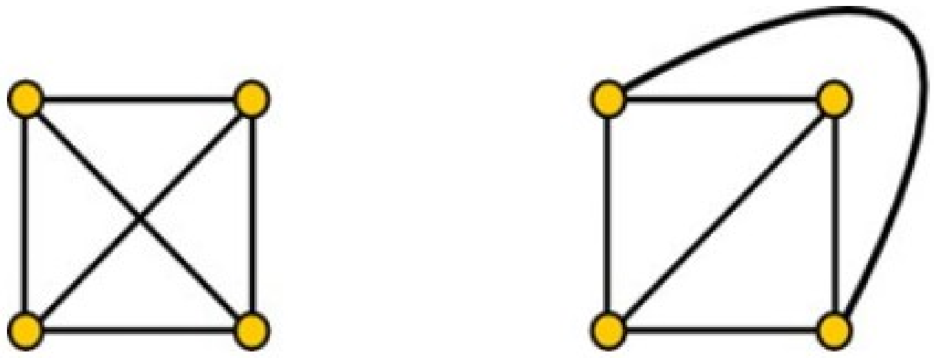
Grafo Planar

- Conceito:
  - Um grafo G é planar se existir uma representação gráfica de G no plano sem cruzamento de arestas.
  - O grafo K_4 é planar?



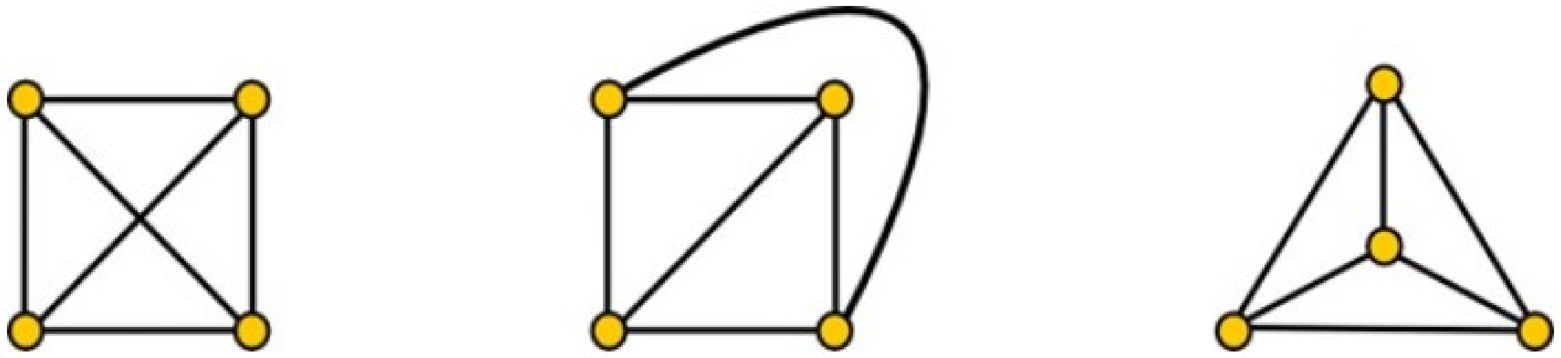
Grafo Planar

- Conceito:
  - Um grafo G é planar se existir uma representação gráfica de G no plano sem cruzamento de arestas.
  - O grafo K_4 é planar?



Grafo Planar

- Conceito:
  - Um grafo G é planar se existir uma representação gráfica de G no plano sem cruzamento de arestas.
  - O grafo K_4 é planar?



Grafos Planares - Aplicações

Grafos Planares - Aplicações

- Vértices: portas lógicas;

Grafos Planares - Aplicações

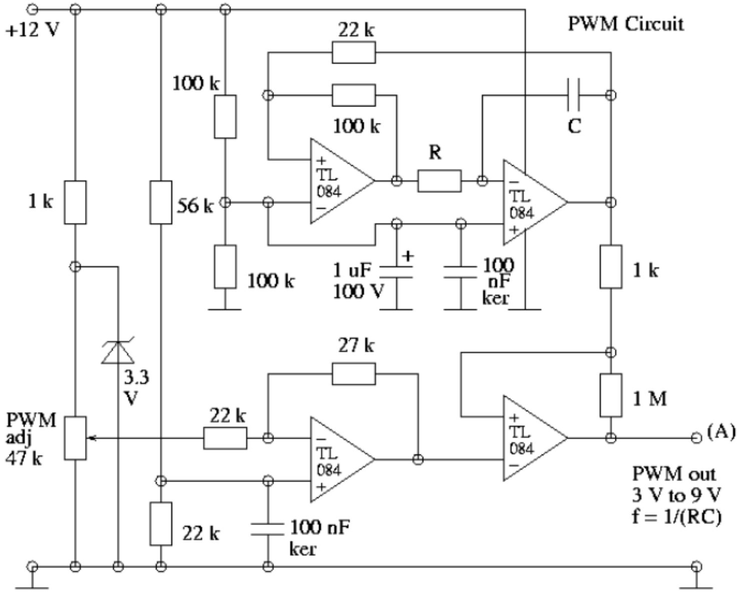
- Vértices: portas lógicas;
- Arestas: fios entre as portas lógicas;

Grafos Planares - Aplicações

- Vértices: portas lógicas;
- Arestas: fios entre as portas lógicas;
- Objetivo: encontrar um *layout* do circuito sem cruzamento de fios.

Grafos Planares - Aplicações

- Vértices: portas lógicas;
- Arestas: fios entre as portas lógicas;
- Objetivo: encontrar um *layout* do circuito sem cruzamento de fios.



Grafo Planar

Grafo Planar

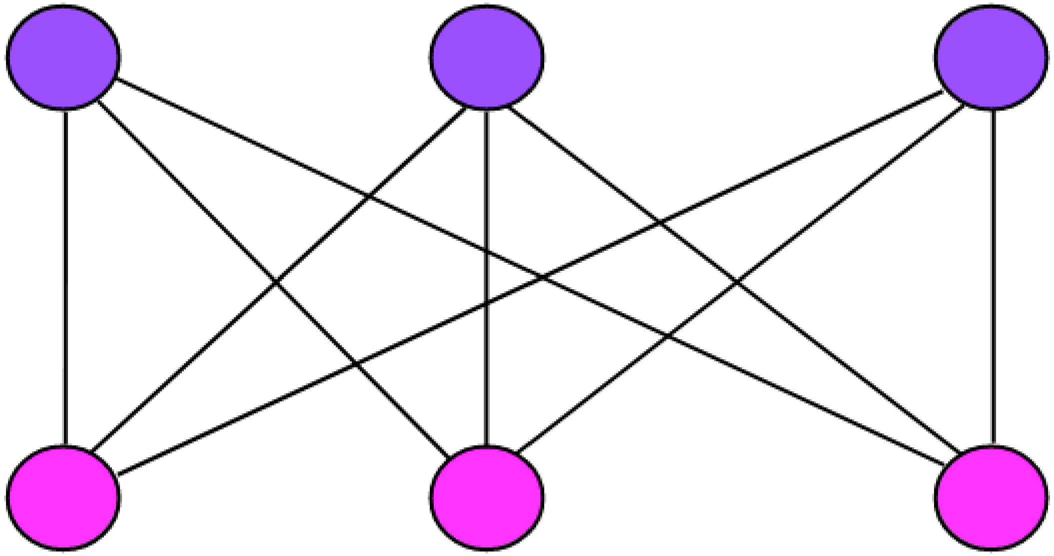
- O desafio pode ser reformulado para:

Grafo Planar

- O desafio pode ser reformulado para:
  - O grafo $K_{3,3}$ é planar?

Grafo Planar

- O desafio pode ser reformulado para:
  - O grafo $K_{3,3}$ é planar?



Grafo Planar

Grafo Planar

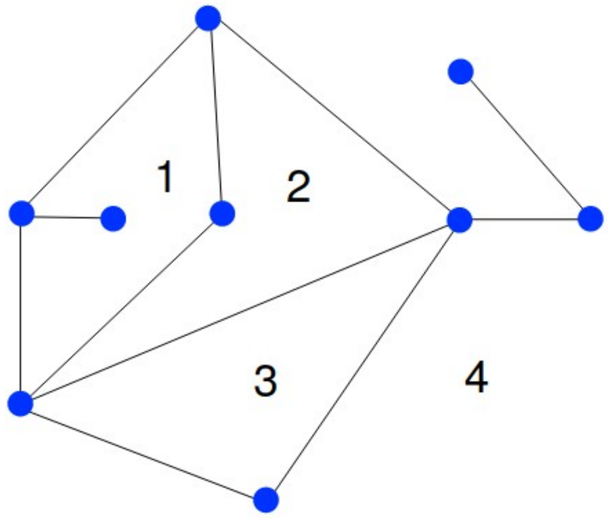
- Um grafo simples, conexo e planar, quando imerso no plano divide o mesmo em um número de **regiões**, incluindo as regiões totalmente fechadas e uma região infinita exterior.

Grafo Planar

- Um grafo simples, conexo e planar, quando imerso no plano divide o mesmo em um número de **regiões**, incluindo as regiões totalmente fechadas e uma região infinita exterior.
- Essas regiões são também chamadas de **faces**.

Grafo Planar

- Um grafo simples, conexo e planar, quando imerso no plano divide o mesmo em um número de **regiões**, incluindo as regiões totalmente fechadas e uma região infinita exterior.
- Essas regiões são também chamadas de **faces**.



Grafo com 4 faces.

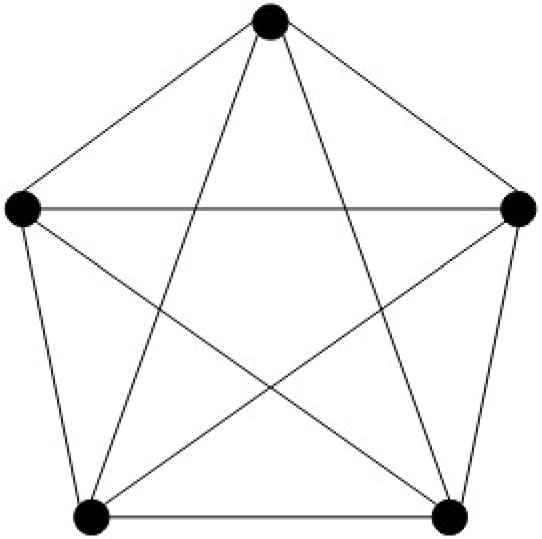
Grafos de Kuratowski

Grafos de Kuratowski

- K_5 – grafo não planar com menor número de vértices.

Grafos de Kuratowski

- K_5 – grafo não planar com menor número de vértices.



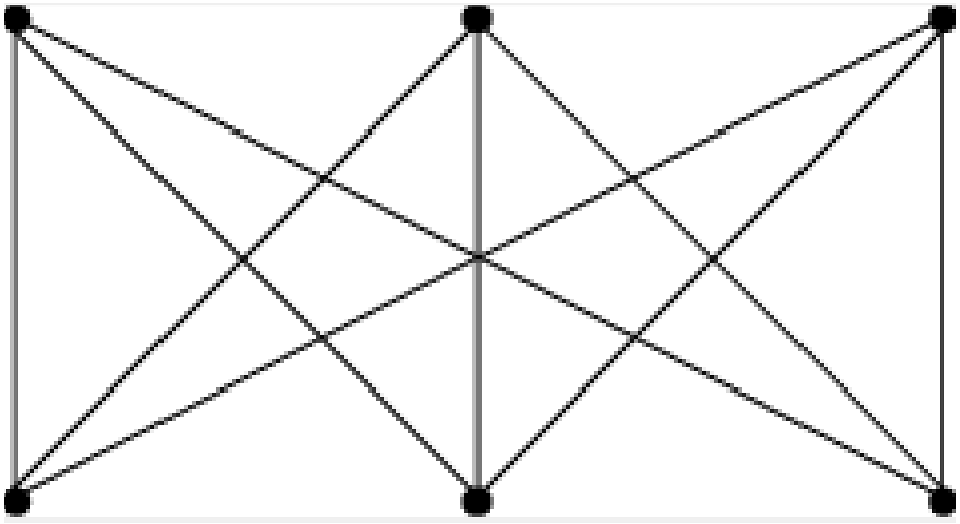
Grafos de Kuratowski

Grafos de Kuratowski

- $K_{3,3}$ – grafo não planar com menor número de arestas.

Grafos de Kuratowski

- $K_{3,3}$ – grafo não planar com menor número de arestas.



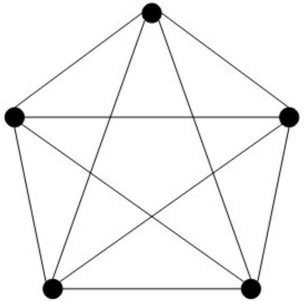
Grafos de Kuratowski

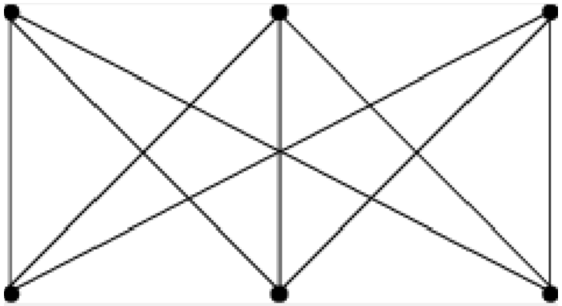
Grafos de Kuratowski

- O que K_5 e $K_{3,3}$ têm em comum?

Grafos de Kuratowski

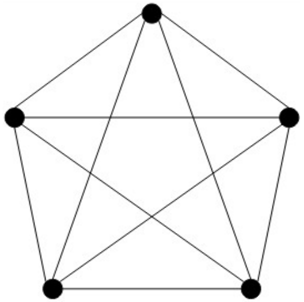
- O que K_5 e $K_{3,3}$ têm em comum?

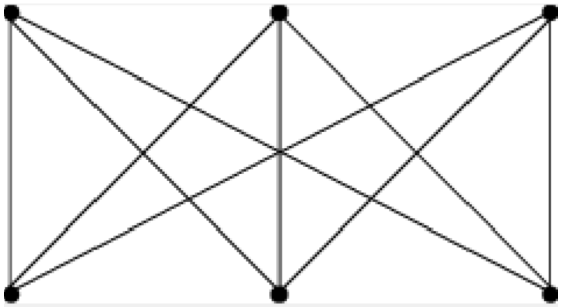




Grafos de Kuratowski

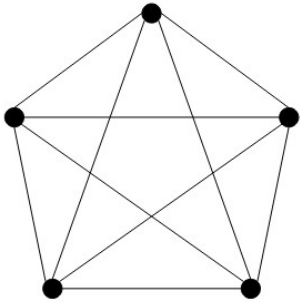
- O que K_5 e $K_{3,3}$ têm em comum?
  - Ambos são regulares;

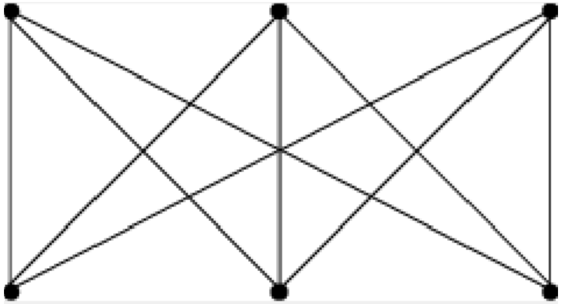




Grafos de Kuratowski

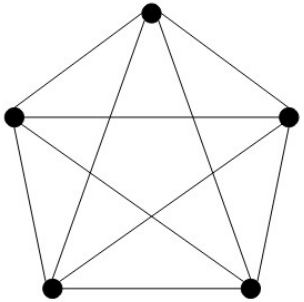
- O que K_5 e $K_{3,3}$ têm em comum?
  - Ambos são regulares;
  - Ambos são não planares;

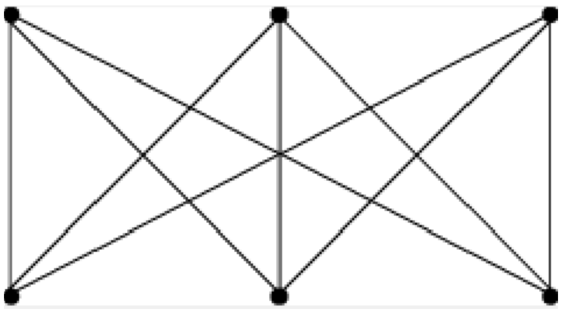




Grafos de Kuratowski

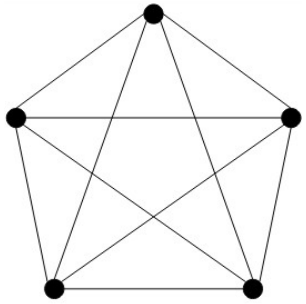
- O que K_5 e $K_{3,3}$ têm em comum?
  - Ambos são regulares;
  - Ambos são não planares;
  - A remoção de uma aresta ou um vértice torna o grafo planar;

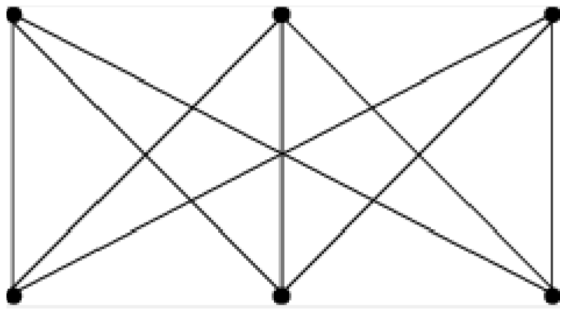




Grafos de Kuratowski

- O que K_5 e $K_{3,3}$ têm em comum?
  - Ambos são regulares;
  - Ambos são não planares;
  - A remoção de uma aresta ou um vértice torna o grafo planar;
  - K_5 é o grafo não-planar com o menor número de vértices e o $K_{3,3}$ com o menor número de arestas.





Região ou Face

- Conceito:
  - Seja G um grafo planar, uma face é uma região fechada de G limitada por algumas arestas de G.

Região ou Face

Região ou Face

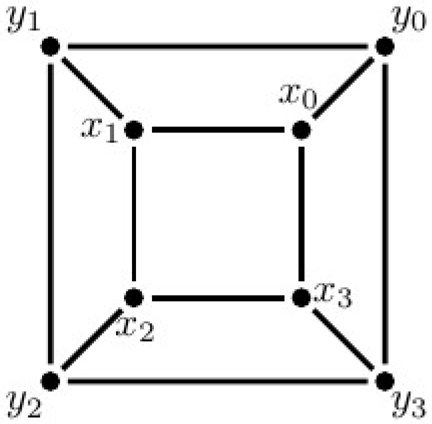
- Exemplo

Região ou Face

- Exemplo
  - No grafo abaixo temos 6 faces.

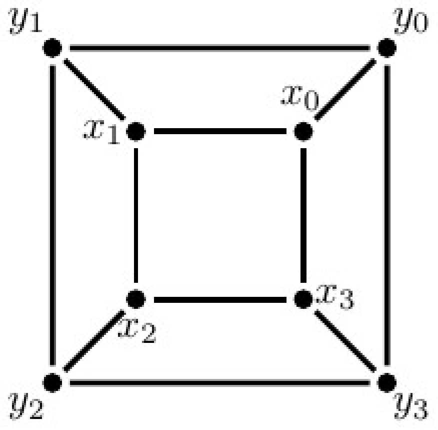
Região ou Face

- Exemplo
  - No grafo abaixo temos 6 faces.



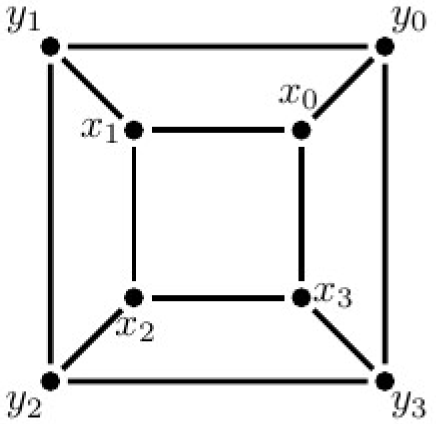
Região ou Face

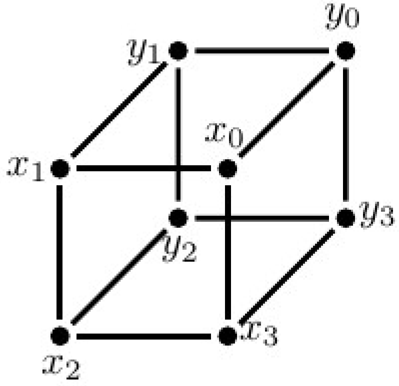
- Exemplo
  - No grafo abaixo temos 6 faces.
  - A última face é o exterior do grafo que também é chamada de face infinita.



Região ou Face

- Exemplo
  - No grafo abaixo temos 6 faces.
  - A última face é o exterior do grafo que também é chamada de face infinita.





Planaridade

Planaridade

- Teorema (Fórmula de Euler):

Planaridade

- Teorema (Fórmula de Euler):
  - Seja G um grafo conexo e planar com

Planaridade

- Teorema (Fórmula de Euler):
  - Seja G um grafo conexo e planar com
    - n vértices;

Planaridade

- Teorema (Fórmula de Euler):
  - Seja G um grafo conexo e planar com
    - n vértices;
    - m arestas;

Planaridade

- Teorema (Fórmula de Euler):
  - Seja G um grafo conexo e planar com
    - n vértices;
    - m arestas;
    - f faces.

Planaridade

- Teorema (Fórmula de Euler):
  - Seja G um grafo conexo e planar com
    - n vértices;
    - m arestas;
    - f faces.
  - Temos que:

Planaridade

- Teorema (Fórmula de Euler):
  - Seja G um grafo conexo e planar com
    - n vértices;
    - m arestas;
    - f faces.
  - Temos que:

    $$\mathbf{n - m + f = 2}$$

Planaridade

- Teorema (Fórmula de Euler):
  - Seja G um grafo conexo e planar com
    - n vértices;
    - m arestas;
    - f faces.
  - Temos que:

    $$\mathbf{n - m + f = 2}$$
  - Corolário: apesar das inúmeras maneiras de se desenhar um grafo no plano, o número de faces irá permanecer o mesmo.

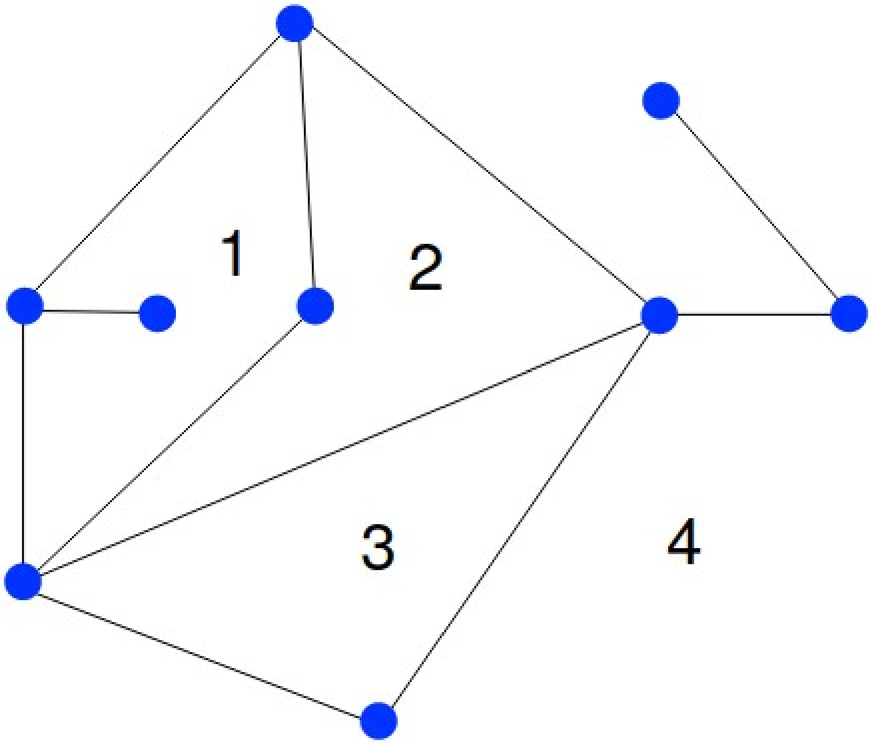
Fórmula de Euler

Fórmula de Euler

- $n - m + f = 2$

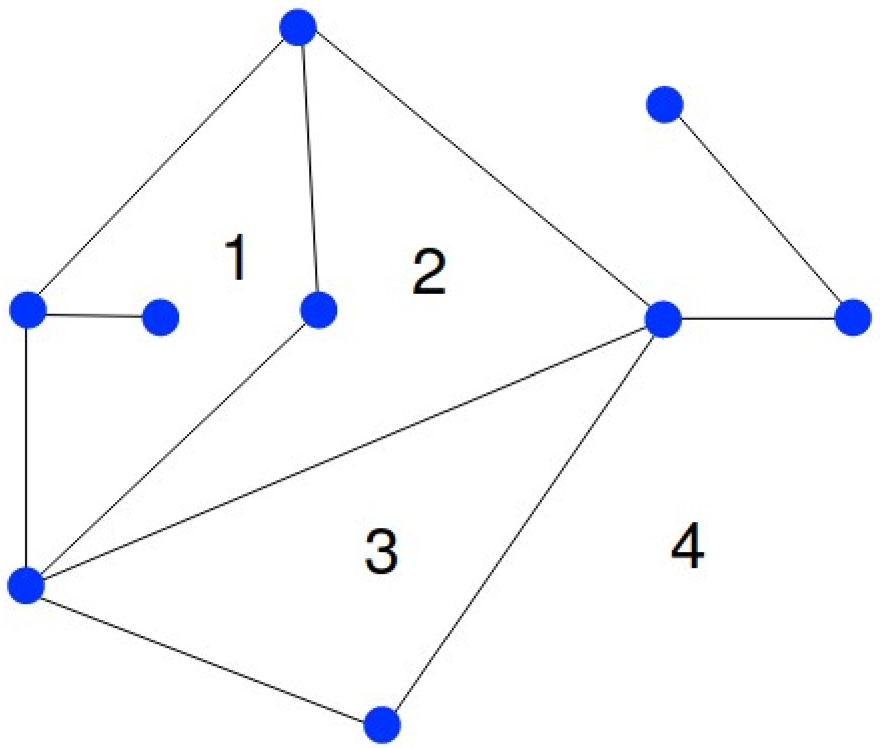
Fórmula de Euler

- $n - m + f = 2$



Fórmula de Euler

- n – m + f = 2



$$n - m + f = 9 - 11 + 4 = 2$$

Fórmula de Euler

Fórmula de Euler

- Prova da Fórmula de Euler

Fórmula de Euler

- Prova da Fórmula de Euler
- A prova é por indução em m, o número de arestas.

Fórmula de Euler

- Prova da Fórmula de Euler
- A prova é por indução em m, o número de arestas.
- Base: Quando m = 0, o grafo consiste em um único vértice.

Fórmula de Euler

- Prova da Fórmula de Euler
- A prova é por indução em m, o número de arestas.
- Base: Quando m = 0, o grafo consiste em um único vértice.
- A única face é a externa.

Fórmula de Euler

- Prova da Fórmula de Euler
- A prova é por indução em m, o número de arestas.
- Base: Quando $m = 0$, o grafo consiste em um único vértice.
- A única face é a externa.
- Neste caso, $n = 1$, $m = 0$ e $f = 1$.

Fórmula de Euler

- Prova da Fórmula de Euler
- A prova é por indução em m, o número de arestas.
- Base: Quando $m = 0$, o grafo consiste em um único vértice.
- A única face é a externa.
- Neste caso, $n = 1$, $m = 0$ e $f = 1$.
- $n - m + f = 1 - 0 + 1 = 2$. Então, a Fórmula de Euler é válida neste caso.

Fórmula de Euler

Fórmula de Euler

- Hipótese de indução: Assuma que a Fórmula de Euler é verdade para a representação planar de qualquer grafo conexo, planar e simples com k arestas.

Fórmula de Euler

- Hipótese de indução: Assuma que a Fórmula de Euler é verdade para a representação planar de qualquer grafo conexo, planar e simples com k arestas.
- Passo: Considere um grafo G planar e conexo com k + 1 arestas.

Fórmula de Euler

- Hipótese de indução: Assuma que a Fórmula de Euler é verdade para a representação planar de qualquer grafo conexo, planar e simples com k arestas.
- Passo: Considere um grafo G planar e conexo com k + 1 arestas.
- Há dois casos:

Fórmula de Euler

- Hipótese de indução: Assuma que a Fórmula de Euler é verdade para a representação planar de qualquer grafo conexo, planar e simples com k arestas.
- Passo: Considere um grafo G planar e conexo com k + 1 arestas.
- Há dois casos:
- Caso 1: O grafo tem um vértice de grau 1.

Fórmula de Euler

- Hipótese de indução: Assuma que a Fórmula de Euler é verdade para a representação planar de qualquer grafo conexo, planar e simples com k arestas.
- Passo: Considere um grafo G planar e conexo com k + 1 arestas.
- Há dois casos:
- Caso 1: O grafo tem um vértice de grau 1.
- Excluímos temporariamente este vértice e a aresta que o conecta; o novo grafo H é conexo, planar e simples com k arestas.

Fórmula de Euler

- Hipótese de indução: Assuma que a Fórmula de Euler é verdade para a representação planar de qualquer grafo conexo, planar e simples com k arestas.
- Passo: Considere um grafo G planar e conexo com k + 1 arestas.
- Há dois casos:
- Caso 1: O grafo tem um vértice de grau 1.
- Excluímos temporariamente este vértice e a aresta que o conecta; o novo grafo H é conexo, planar e simples com k arestas.
- Suponha que H tem n vértices e f faces.

Fórmula de Euler

- Hipótese de indução: Assuma que a Fórmula de Euler é verdade para a representação planar de qualquer grafo conexo, planar e simples com k arestas.
- Passo: Considere um grafo G planar e conexo com $k + 1$ arestas.
- Há dois casos:
- Caso 1: O grafo tem um vértice de grau 1.
- Excluímos temporariamente este vértice e a aresta que o conecta; o novo grafo H é conexo, planar e simples com k arestas.
- Suponha que H tem n vértices e f faces.
- Pela hipótese de indução, $n - k + f = 2$.

Fórmula de Euler

Fórmula de Euler

- Como G tem um vértice a mais que H, o número de vértices de G é n + 1.

Fórmula de Euler

- Como G tem um vértice a mais que H, o número de vértices de G é n + 1.
- Como G tem uma aresta a mais que H, o número de arestas de G é k + 1.

Fórmula de Euler

- Como G tem um vértice a mais que H, o número de vértices de G é n + 1.
- Como G tem uma aresta a mais que H, o número de arestas de G é k + 1.
- Como o vértice removido de G tem grau 1, então o número de faces de G e H é igual. Então, G tem f faces.

Fórmula de Euler

- Como G tem um vértice a mais que H, o número de vértices de G é $n + 1$.
- Como G tem uma aresta a mais que H, o número de arestas de G é $k + 1$.
- Como o vértice removido de G tem grau 1, então o número de faces de G e H é igual. Então, G tem f faces.
- Logo, a Fórmula de Euler para G é: $(n + 1) - (k + 1) + f = n - k + f$, que pela hipótese de indução, vale 2.

Fórmula de Euler

Fórmula de Euler

- Caso 2: O grafo G não tem vértices de grau 1.

Fórmula de Euler

- Caso 2: O grafo G não tem vértices de grau 1.
- Então apagamos, temporariamente, uma aresta que separa duas faces.

Fórmula de Euler

- Caso 2: O grafo G não tem vértices de grau 1.
- Então apagamos, temporariamente, uma aresta que separa duas faces.
- (Se nenhuma aresta delimita uma face, então o grafo é uma árvore e tem um vértice de grau 1.)

Fórmula de Euler

- Caso 2: O grafo G não tem vértices de grau 1.
- Então apagamos, temporariamente, uma aresta que separa duas faces.
- (Se nenhuma aresta delimita uma face, então o grafo é uma árvore e tem um vértice de grau 1.)
- A eliminação da aresta cria um grafo G' conexo, planar e simples com k arestas, n vértices e f faces.

Fórmula de Euler

- Caso 2: O grafo G não tem vértices de grau 1.
- Então apagamos, temporariamente, uma aresta que separa duas faces.
- (Se nenhuma aresta delimita uma face, então o grafo é uma árvore e tem um vértice de grau 1.)
- A eliminação da aresta cria um grafo G' conexo, planar e simples com k arestas, n vértices e f faces.
- Pela hipótese de indução, $n - k + f = 2$.

Fórmula de Euler

Fórmula de Euler

- No grafo original, G, existe uma aresta e uma face a mais, e o mesmo número de vértices.

Fórmula de Euler

- No grafo original, G, existe uma aresta e uma face a mais, e o mesmo número de vértices.
- Fórmula de Euler em G : $n - (k + 1) + (f + 1) = n - k + f$, que pela hipótese de indução é igual a 2.

Limite das Arestas

Limite das Arestas

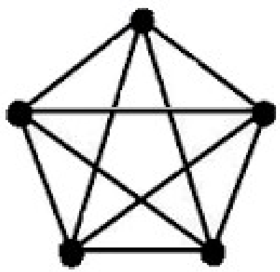
- Se G é um grafo planar simples com pelo menos três vértices, então **$m \leq 3 * n - 6$**, onde m é o número de arestas e n é o número de vértices.

Limite das Arestas

- Se G é um grafo planar simples com pelo menos três vértices, então $\mathbf{m \leq 3 * n - 6}$, onde m é o número de arestas e n é o número de vértices.
- Os grafos abaixo são planares?

Limite das Arestas

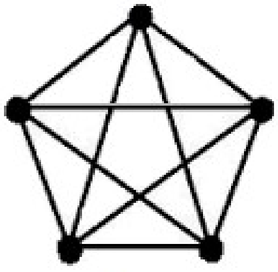
- Se G é um grafo planar simples com pelo menos três vértices, então **$m \leq 3 * n - 6$**, onde m é o número de arestas e n é o número de vértices.
- Os grafos abaixo são planares?



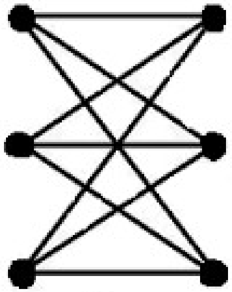
K_5

Limite das Arestas

- Se G é um grafo planar simples com pelo menos três vértices, então **$m \le 3 * n - 6$**, onde m é o número de arestas e n é o número de vértices.
- Os grafos abaixo são planares?



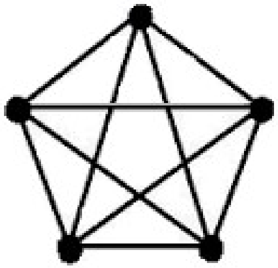
K_5



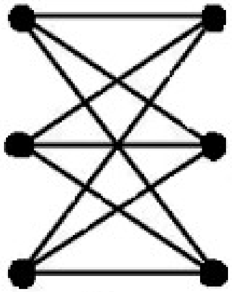
$K_{3,3}$

Limite das Arestas

- Se G é um grafo planar simples com pelo menos três vértices, então **$m \leq 3 * n - 6$**, onde m é o número de arestas e n é o número de vértices.
- Os grafos abaixo são planares?



K_5

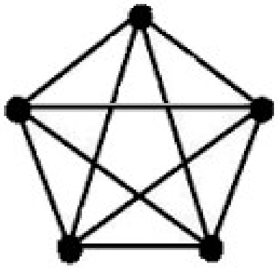


$K_{3,3}$

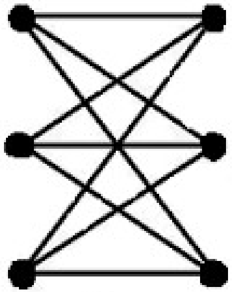
Condição necessária,

Limite das Arestas

- Se G é um grafo planar simples com pelo menos três vértices, então **$m \leq 3 * n - 6$**, onde m é o número de arestas e n é o número de vértices.
- Os grafos abaixo são planares?



K_5



$K_{3,3}$

Condição necessária,
mas **não suficiente**!

Limite das Arestas

Limite das Arestas

- Se G é um grafo planar simples e sem triângulos, então $\mathbf{m \leq 2 * n - 4}$.

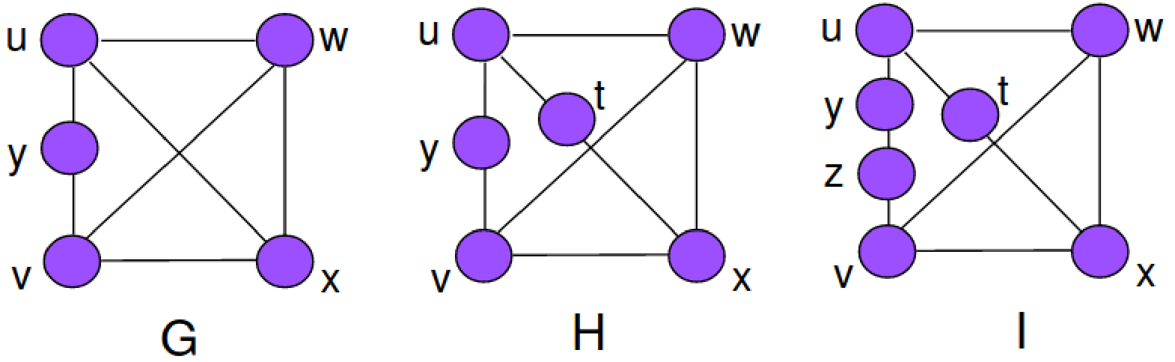
Limite das Arestas

- Se G é um grafo planar simples e sem triângulos, então $\mathbf{m \leq 2 * n - 4}$.
- Esse é o caso do $K_{3,3}$.

Teorema de Kuratowski

Grafos Planares

- Grafos Homeormorfos
  - Dois grafos são homeormorfos se, e somente se, eles puderem ser obtidos a partir do mesmo grafo pela adição de vértices (necessariamente de grau 2) às arestas.



Grafos Planares

- Teorema de Kuratowski
  - Um grafo é não-planar se, e somente se, contém um subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$.

Grafos Planares

- Para mostrar que um grafo é planar, basta desenhá-lo no plano sem intersecção de arestas.
- Por outro lado, para mostrar que um grafo não é planar, basta mostrar que o grafo possui um subgrafo homeomorfo ao K_5 ou $K_{3,3}$.