

Algoritmos e Estruturas de Dados I

# Árvores Rubro-Negras

Prof. Tiago Eugenio de Melo

[tmelo@uea.edu.br](mailto:tmelo@uea.edu.br)

[www.tiagodemelo.info](http://www.tiagodemelo.info)

# Observações

- As palavras com a fonte `Courier` indicam uma palavra-reservada da linguagem de programação.
- Animação online:
  - <http://gregfjohnson.com/cgi-bin/redblackbuilder>
  - <https://www.inf.ufsc.br/~aldo.vw/estruturas/simulador/RB.html>

# Árvores Rubro-Negras

# Introdução

# Introdução

- Criada em 1970 por Rudolf Bayer com o nome de B-Árvores binárias simétricas.

# Introdução

- Criada em 1970 por Rudolf Bayer com o nome de B-Árvores binárias simétricas.
- O seu atual nome foi estabelecido em 1978 por Leo J. Guibas e Robert Sedgwick.

# Introdução

- Criada em 1970 por Rudolf Bayer com o nome de B-Árvores binárias simétricas.
- O seu atual nome foi estabelecido em 1978 por Leo J. Guibas e Robert Sedgwick.
- Do inglês Red-Black Trees.

# Árvore Rubro-Negra



# Árvore Rubro-Negra

- A árvore rubro-negra tem esse nome devido a coloração de seus nós.

# Árvore Rubro-Negra

- A árvore rubro-negra tem esse nome devido a coloração de seus nós.
- Uma árvore rubro-negra (ARN) é uma árvore binária de busca com um campo adicional que armazena a coloração do nó (rubro ou negro).

# Árvore Rubro-Negra

- A árvore rubro-negra tem esse nome devido a coloração de seus nós.
- Uma árvore rubro-negra (ARN) é uma árvore binária de busca com um campo adicional que armazena a coloração do nó (rubro ou negro).
- O fato de um nó ser rubro ou negro é usado como fator de balanceamento da ARN.

# Árvore Rubro-Negra

# Árvore Rubro-Negra

- Apesar das árvores AVL e 2-3 apresentarem propriedades interessantes, elas também possuem algumas desvantagens.

# Árvore Rubro-Negra

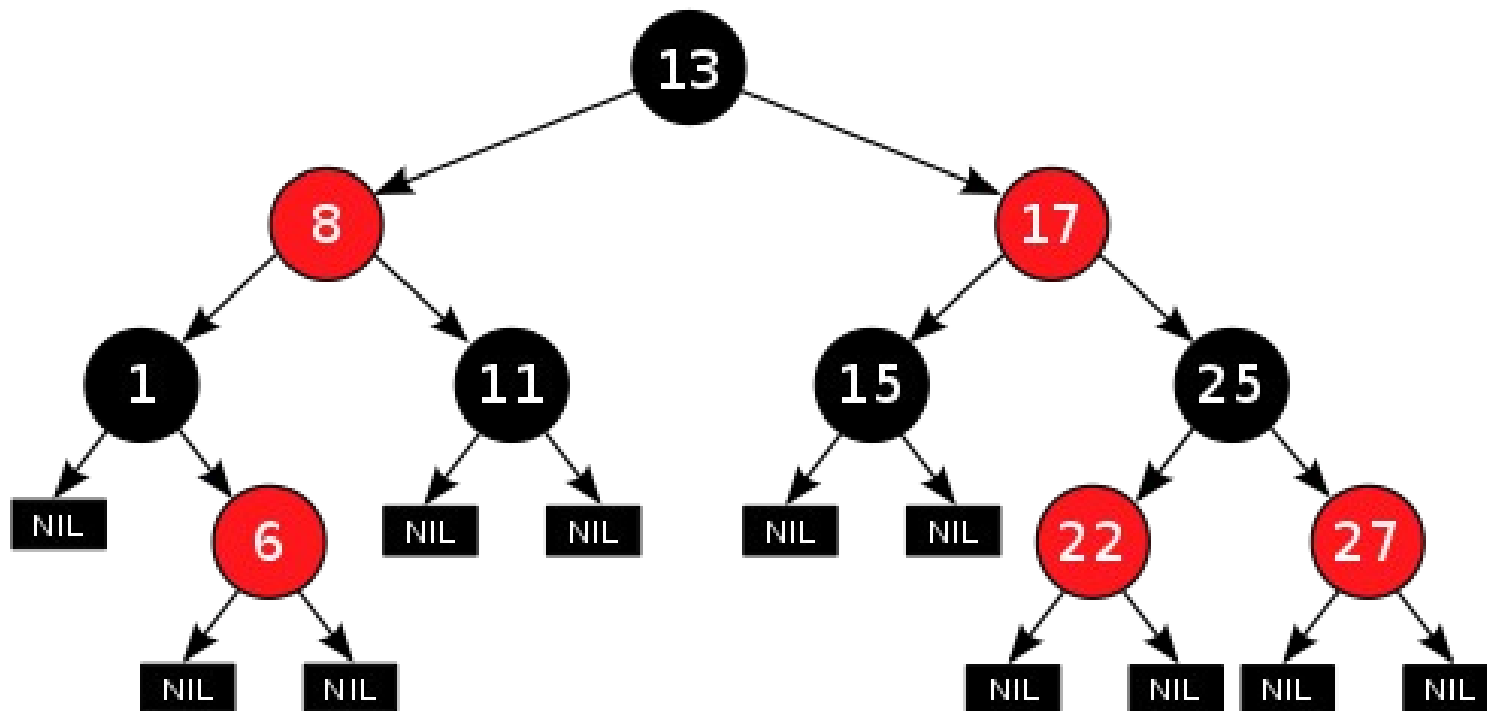
- Apesar das árvores AVL e 2-3 apresentarem propriedades interessantes, elas também possuem algumas desvantagens.
- As árvores AVL requerem muitas operações de reestrutura (rotações) após a remoção de um item.

# Árvore Rubro-Negra

- Apesar das árvores AVL e 2-3 apresentarem propriedades interessantes, elas também possuem algumas desvantagens.
- As árvores AVL requerem muitas operações de reestrutura (rotações) após a remoção de um item.
- As árvores 2-3 requerem muitas operações de divisão e fusão depois da inserção ou remoção de elementos.

# Árvore Rubro-Negra

- Exemplo:





# Propriedades

# Propriedades

- Todo nó é colorido com preto ou vermelho.

# Propriedades

- Todo nó é colorido com preto ou vermelho.
- O nó raiz é preto.

# Propriedades

- Todo nó é colorido com preto ou vermelho.
- O nó raiz é preto.
- Toda folha é preta.

# Propriedades

- Todo nó é colorido com preto ou vermelho.
- O nó raiz é preto.
- Toda folha é preta.
- Se um nó é rubro (vermelho), então ambos os seus filhos são pretos.

# Propriedades

- Todo nó é colorido com preto ou vermelho.
- O nó raiz é preto.
- Toda folha é preta.
- Se um nó é rubro (vermelho), então ambos os seus filhos são pretos.
- Qualquer caminho da raiz até uma subárvore vazia tem um número igual de nós negros.

# Conceitos

- A altura de uma árvore rubro-negra é o número de nós negros que se encontram no caminho da raiz até uma folha.

# Inserção/Remoção



# Inserção/Remoção

- As operações de inserir e remover são complicadas nas árvores rubro-negras porque elas podem ferir alguma propriedade deste tipo de árvore.

# Inserção/Remoção

- As operações de inserir e remover são complicadas nas árvore rubro-negras porque elas podem ferir alguma propriedade deste tipo de árvore.
- Porém, é possível implementar essas operações de modo bastante parecido com as operações das Árvores Binárias de Busca (ABB), bastando “apenas” modificar as cores dos nós para que as propriedades das ARN sejam mantidas.

# Inserção

# Inserção

- Ao contrário da AVL, temos agora vários critérios para ajustar simultaneamente.

# Inserção

- Ao contrário da AVL, temos agora vários critérios para ajustar simultaneamente.
- Ao inserir um novo nó em uma posição vazia da árvore, este nó é pintado de vermelho.

# Inserção

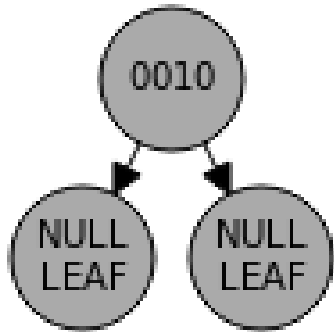
- Ao contrário da AVL, temos agora vários critérios para ajustar simultaneamente.
- Ao inserir um novo nó em uma posição vazia da árvore, este nó é pintado de vermelho.
- A razão para isto é preservar a altura da árvore, uma vez que um nó rubro não contribui para a altura negra da árvore.

# Inserção

- Exemplo:

# Inserção

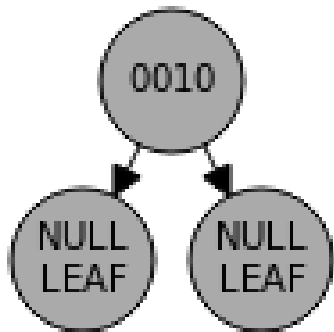
- Exemplo:





# Inserção

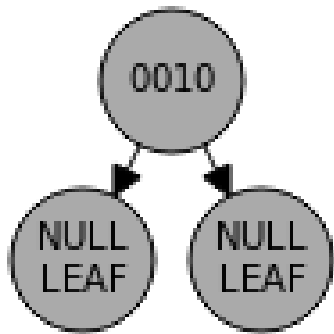
- Exemplo:



inserir o **20**

# Inserção

- Exemplo:

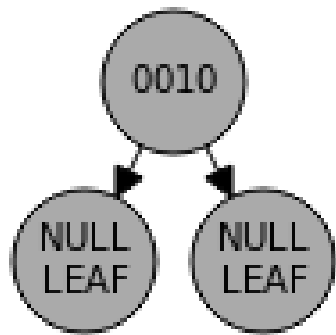


inserir o **20**

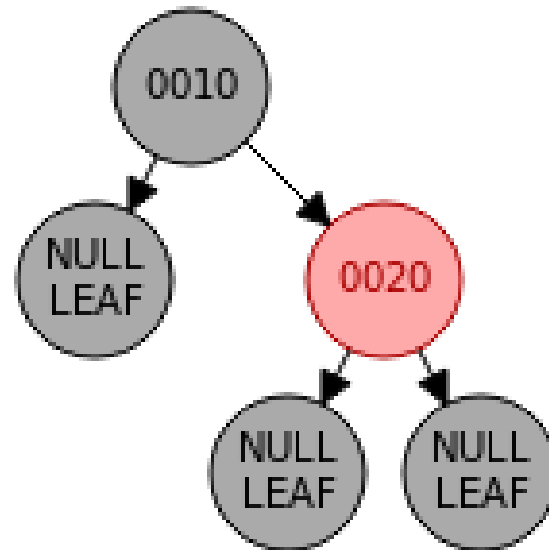


# Inserção

- Exemplo:



inserir o **20**



# Inserção

# Inserção

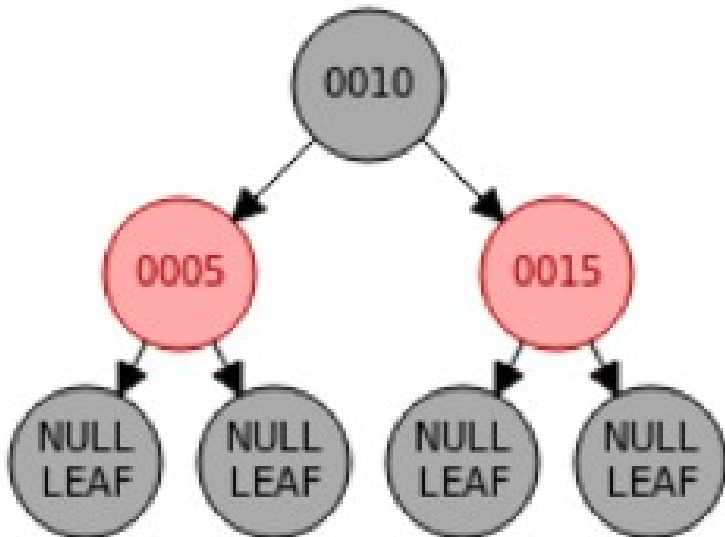
- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:

# Inserção

- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:
  - Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro.

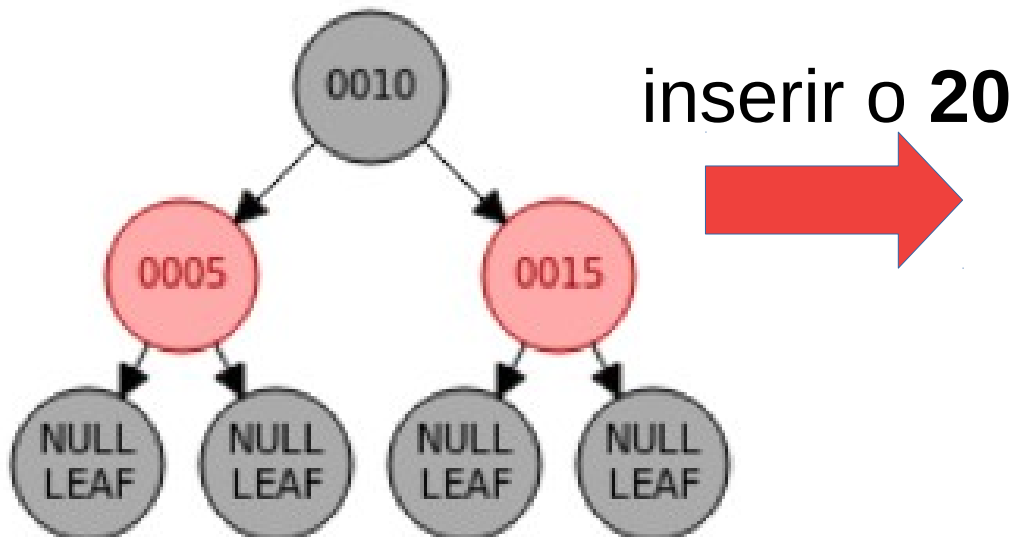
# Inserção

- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:
  - Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro.



# Inserção

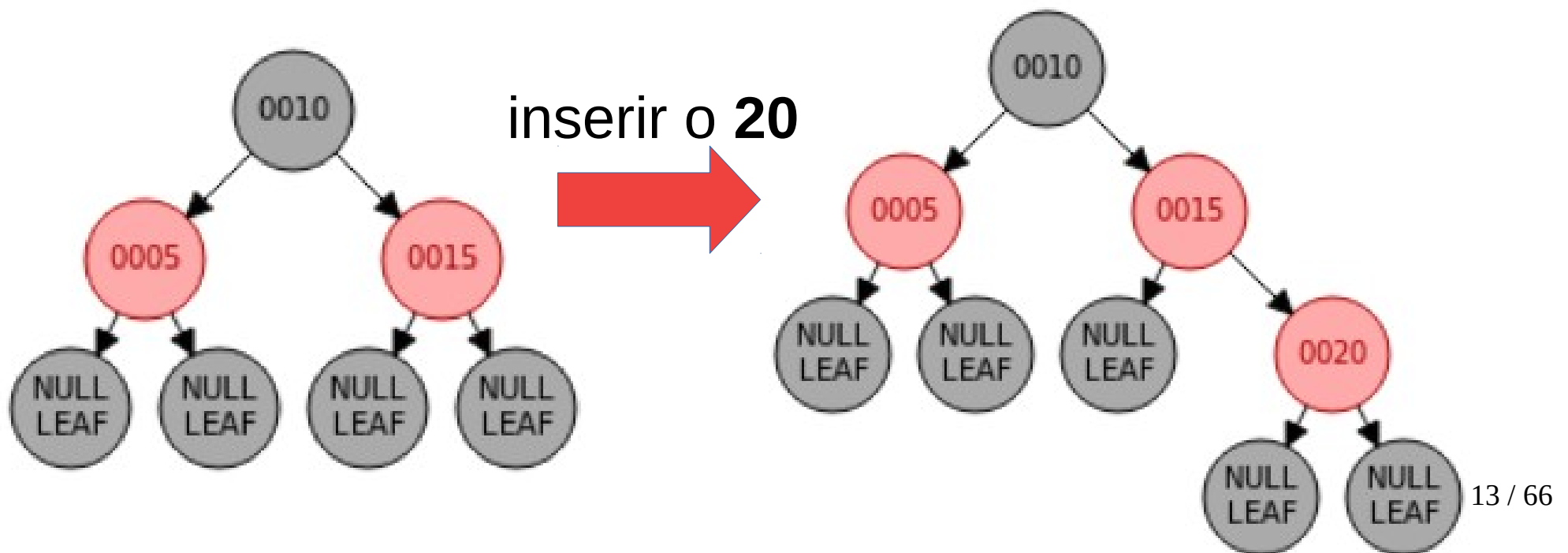
- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:
  - Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro.





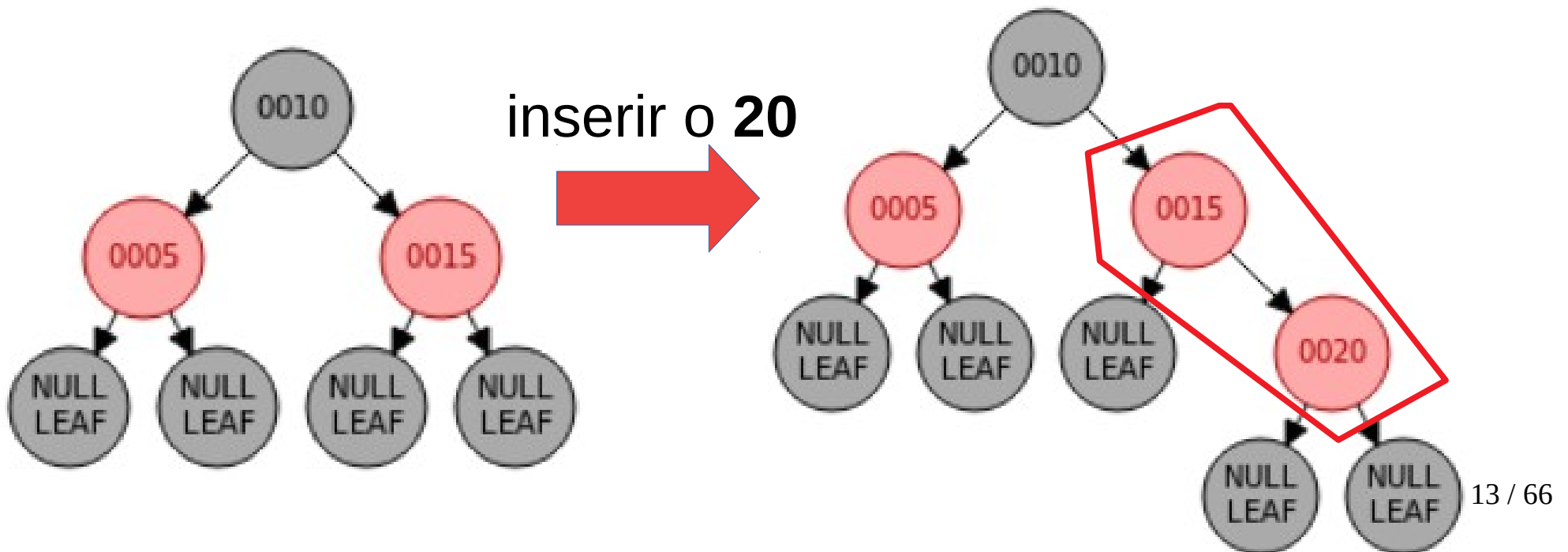
# Inserção

- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:
  - Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro.



# Inserção

- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:
  - Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro.



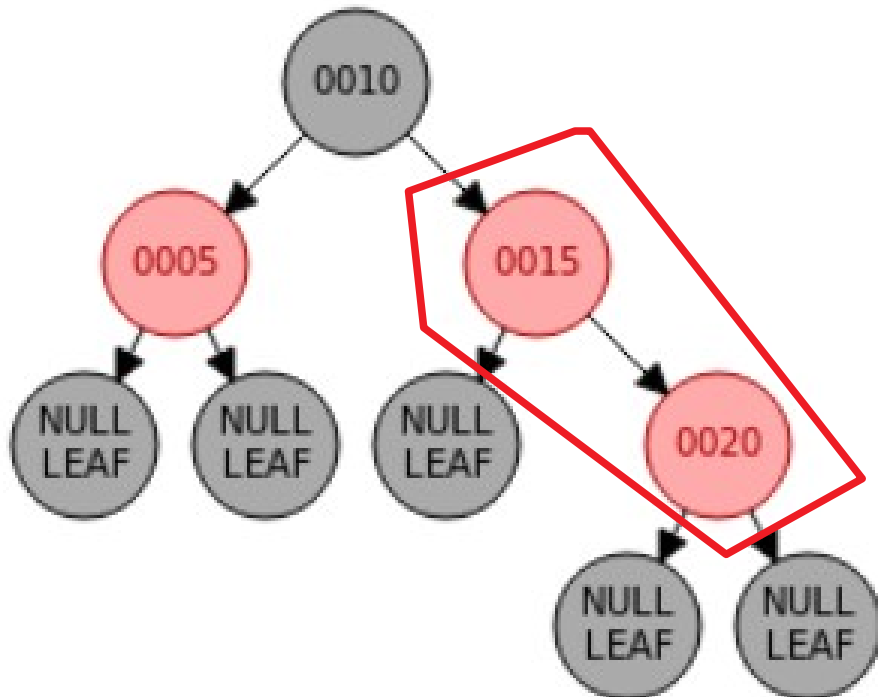
# Inserção

# Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)

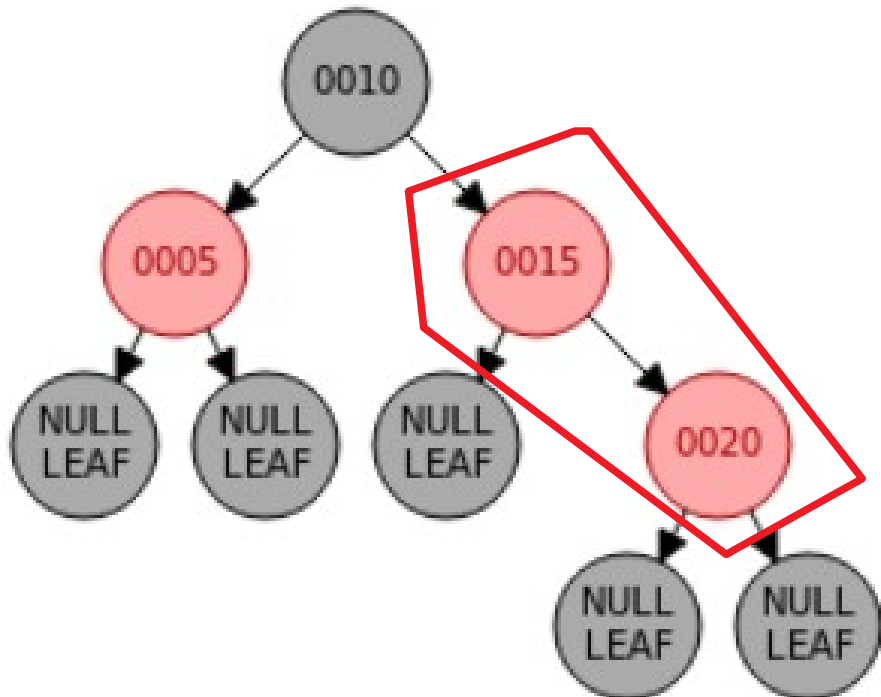
# Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)



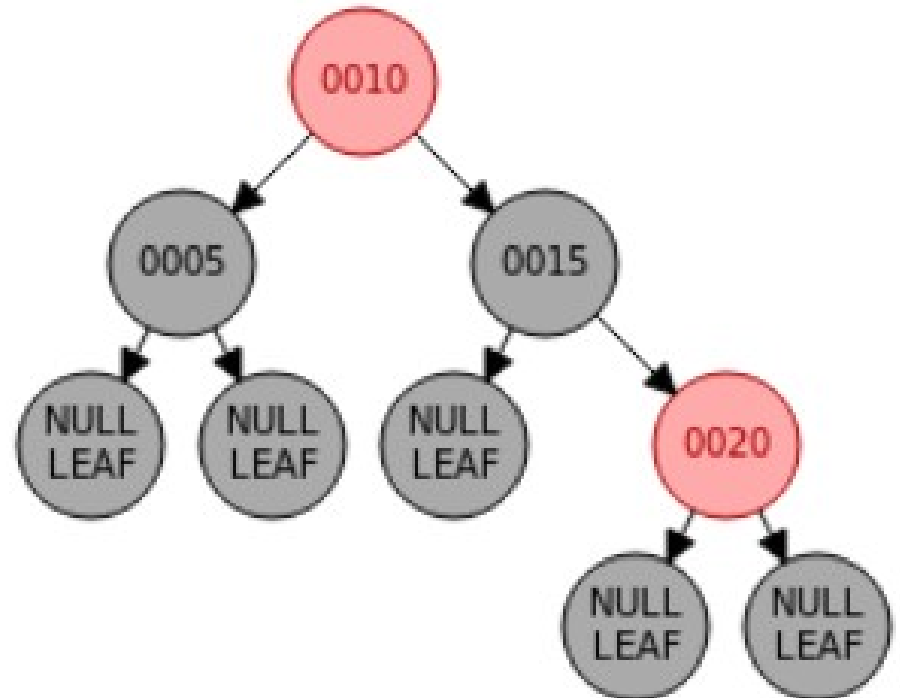
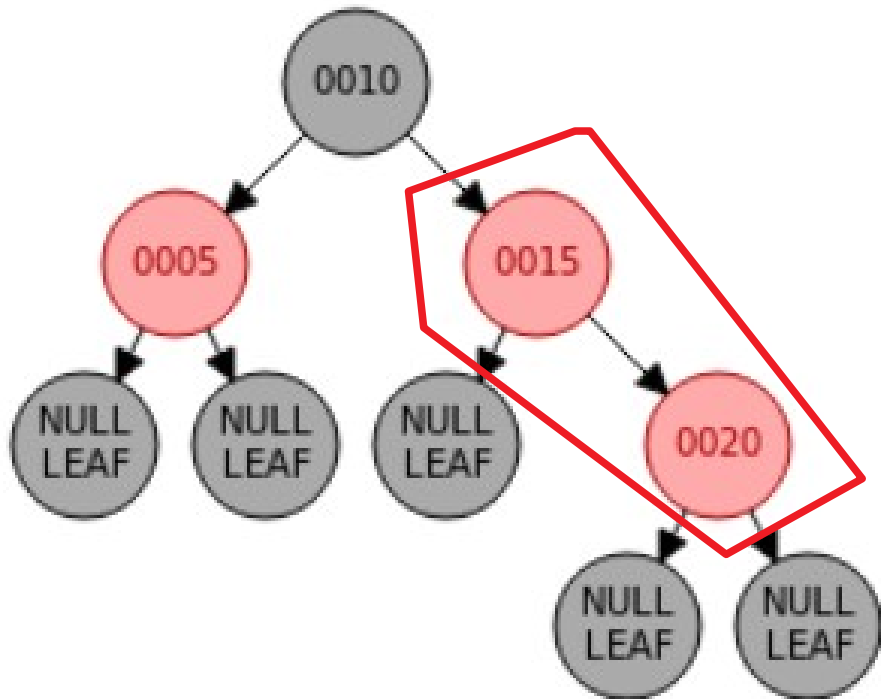
# Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)  
mudar as cores do pai, tio e avô



# Inserção

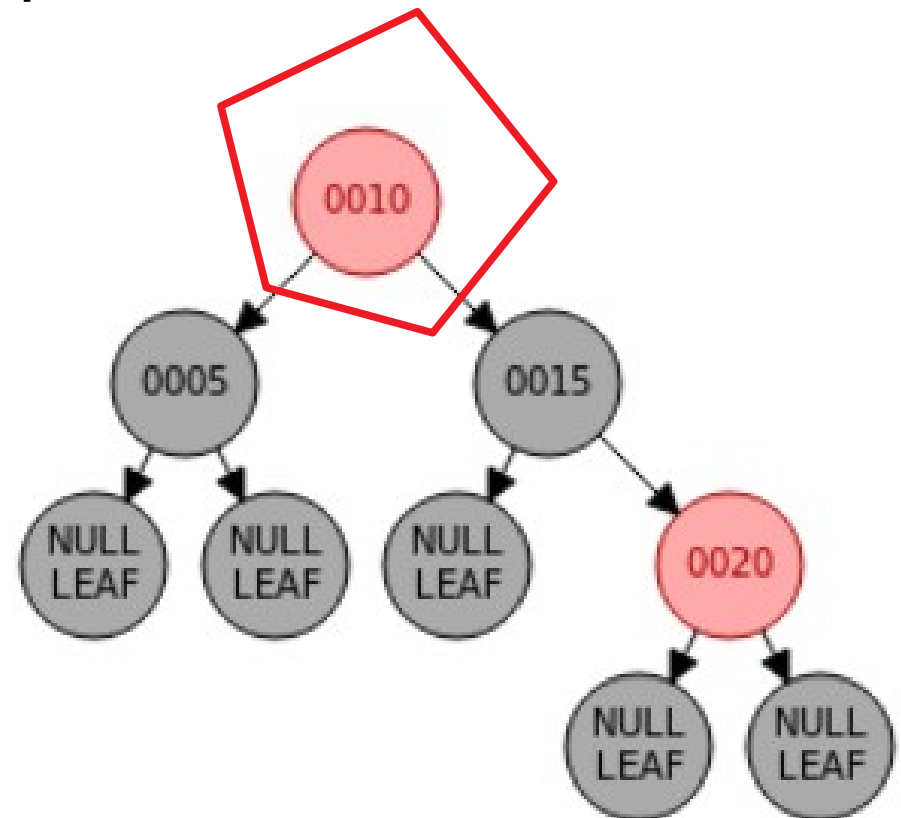
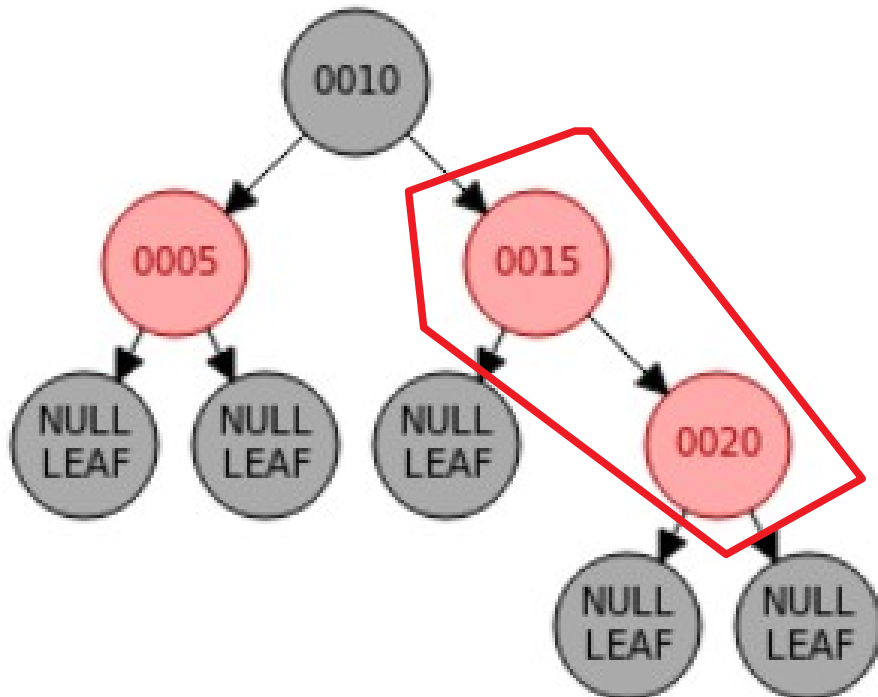
- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)  
mudar as cores do pai, tio e avô



# Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)

mudar as cores do pai, tio e avô





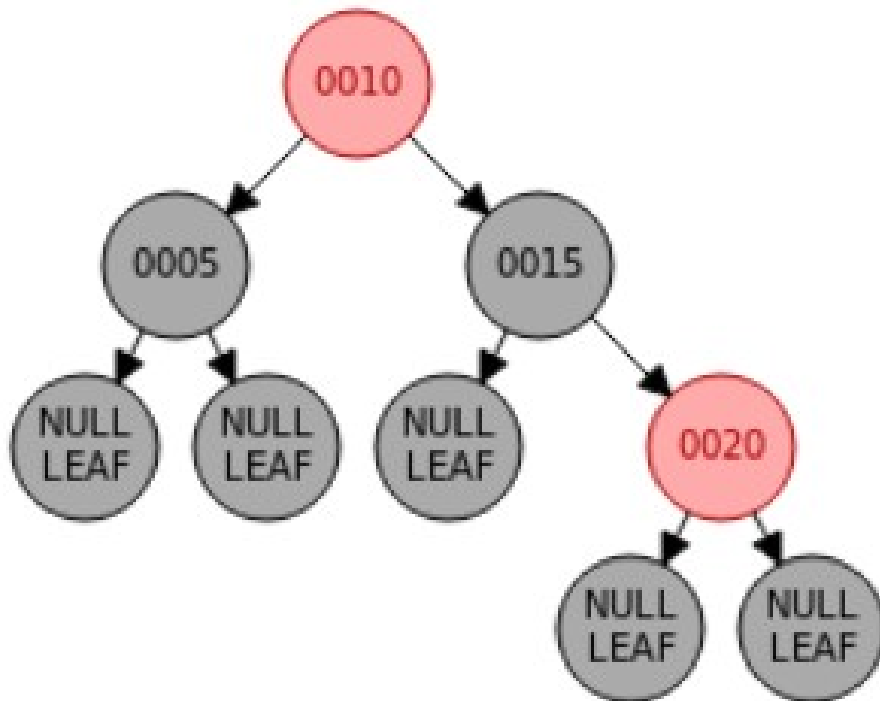
# Inserção

# Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)

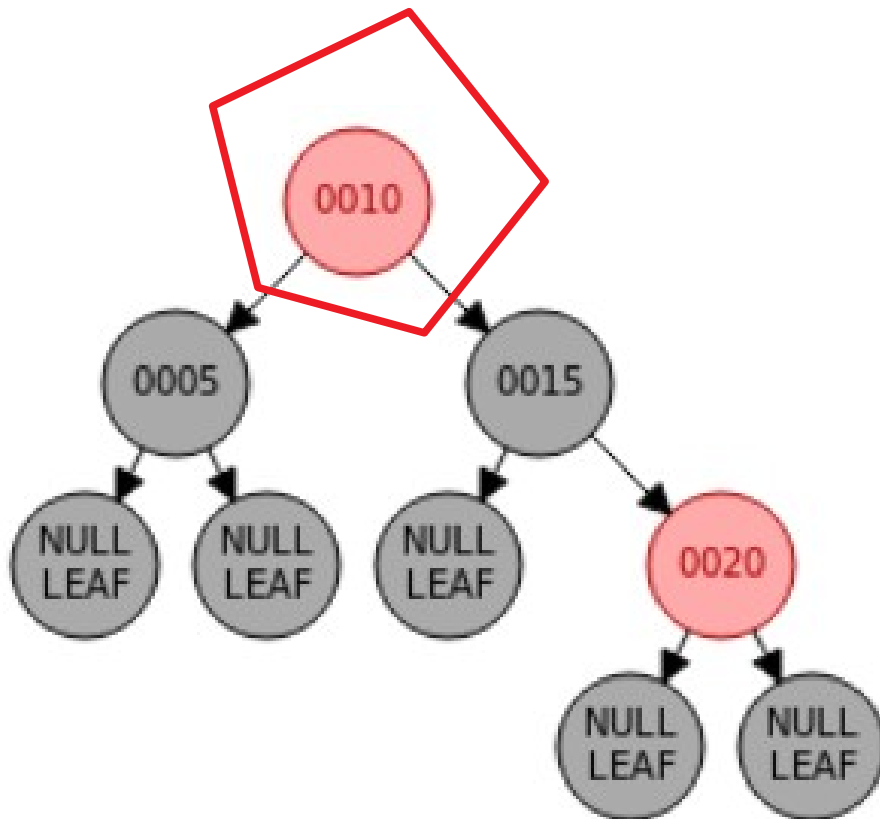
# Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)



# Inserção

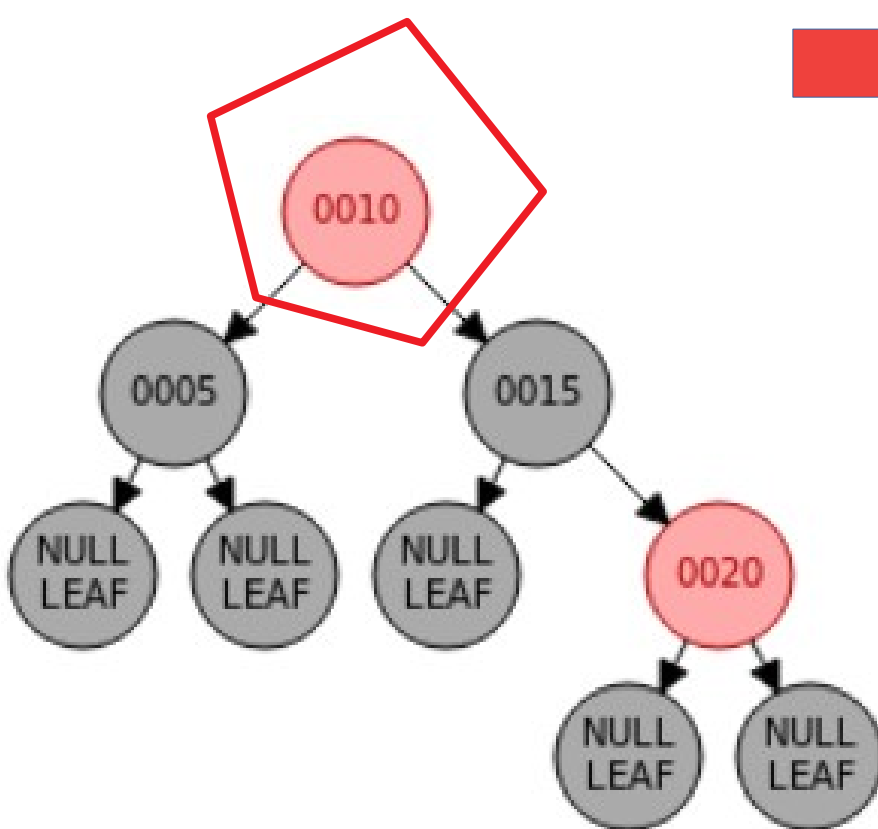
- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)



# Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)

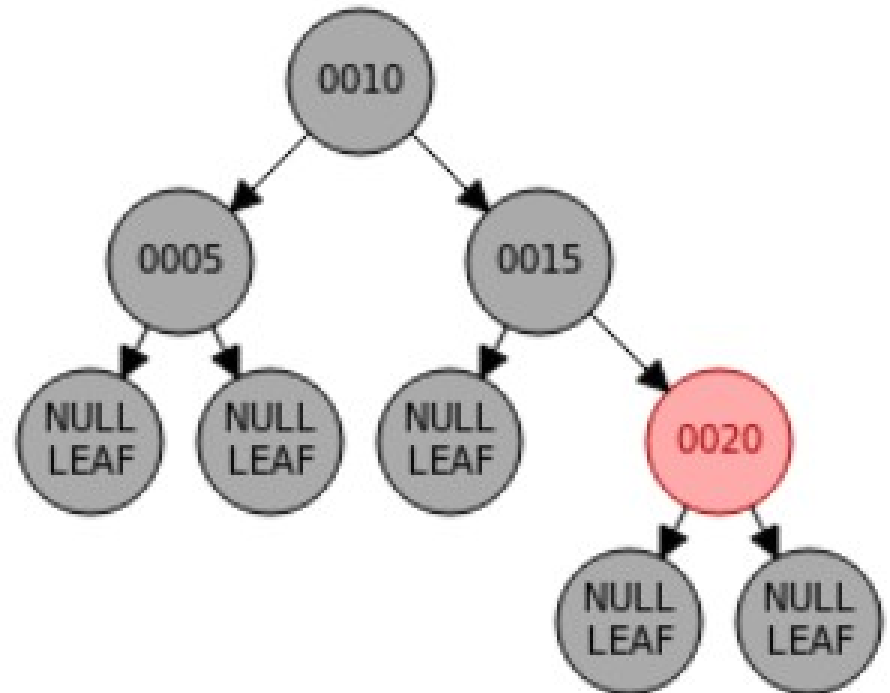
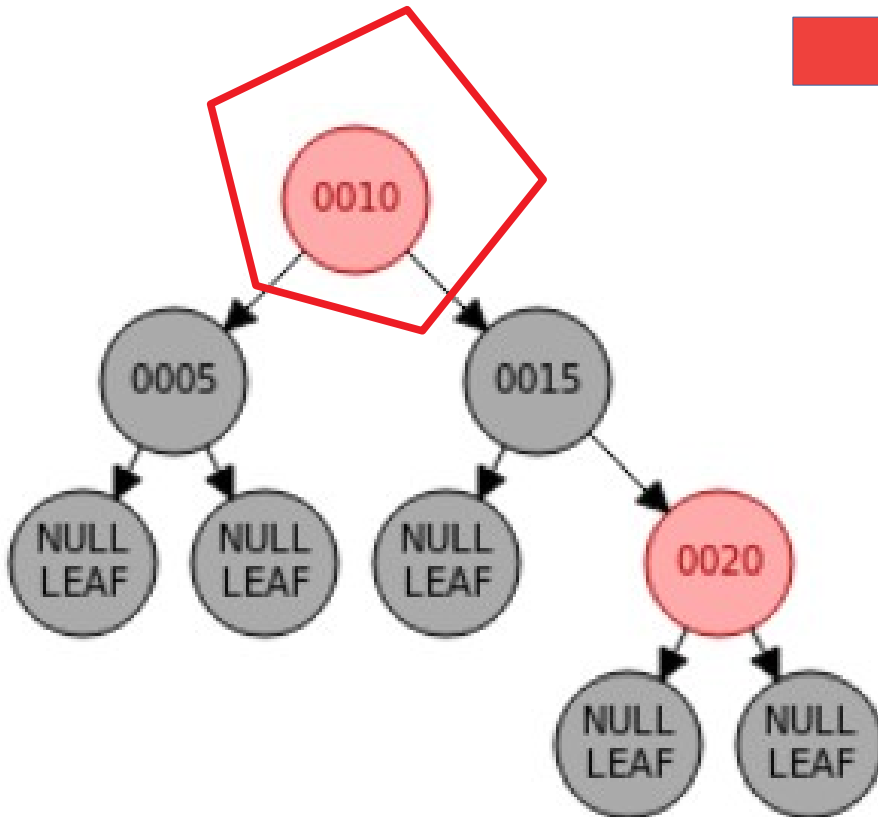
mudar a cor da raiz



# Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)

mudar a cor da raiz



# Inserção

# Inserção

- Caso 2: o elemento inserido é vermelho, seu pai é vermelho e seu irmão é negro.

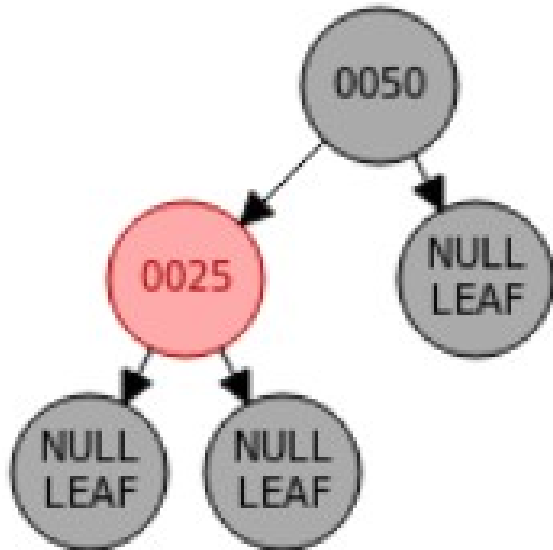


# Inserção

- Caso 2: o elemento inserido é vermelho, seu pai é vermelho e seu irmão é negro.
- Existem 4 subcasos (rotações).

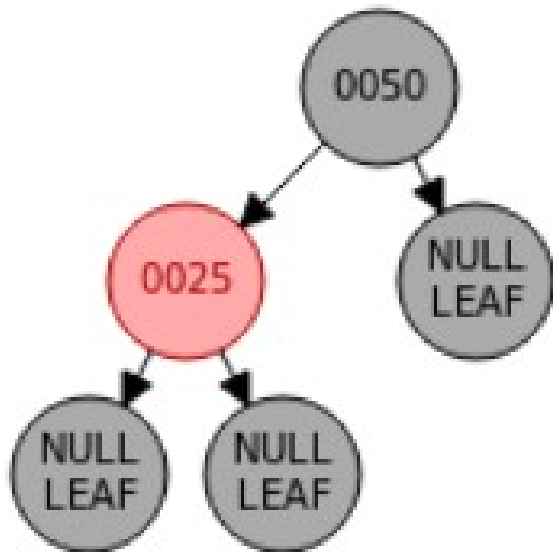
# Inserção

- Caso 2: o elemento inserido é vermelho, seu pai é vermelho e seu irmão é negro.
- Existem 4 subcasos (rotações).

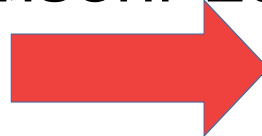


# Inserção

- Caso 2: o elemento inserido é vermelho, seu pai é vermelho e seu irmão é negro.
- Existem 4 subcasos (rotações).

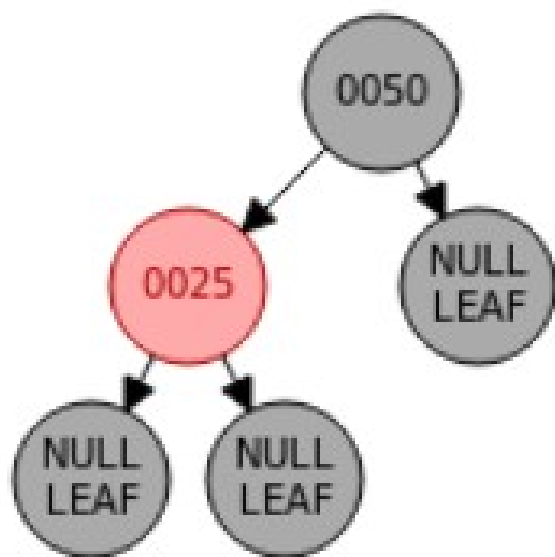


inserir **10**

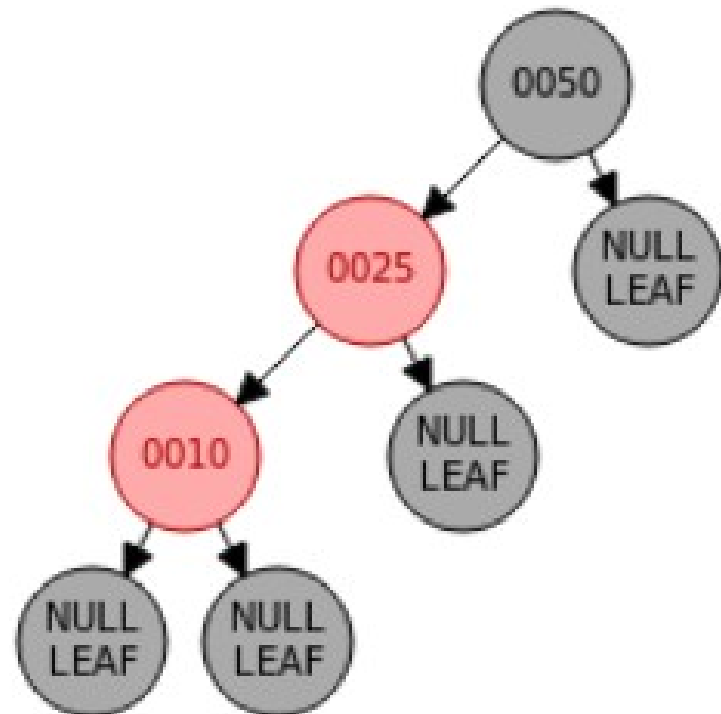


# Inserção

- Caso 2: o elemento inserido é vermelho, seu pai é vermelho e seu irmão é negro.
- Existem 4 subcasos (rotações).



inserir **10**



# Inserção

# Inserção

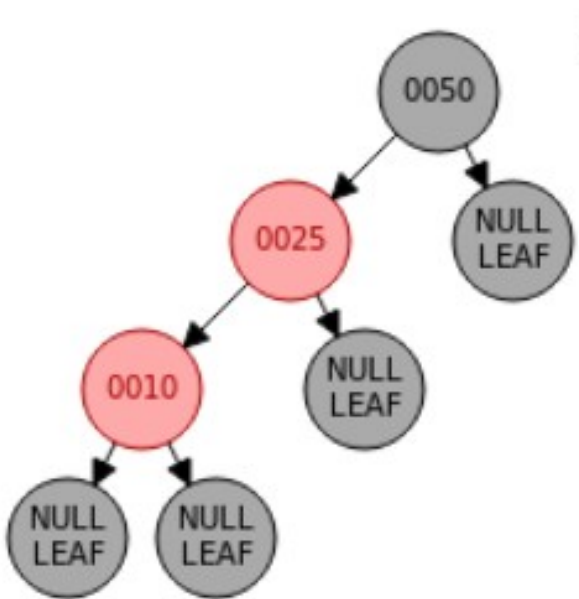
- Caso 2 (rotação 1)

# Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
  - Rotação direita simples.

# Inserção

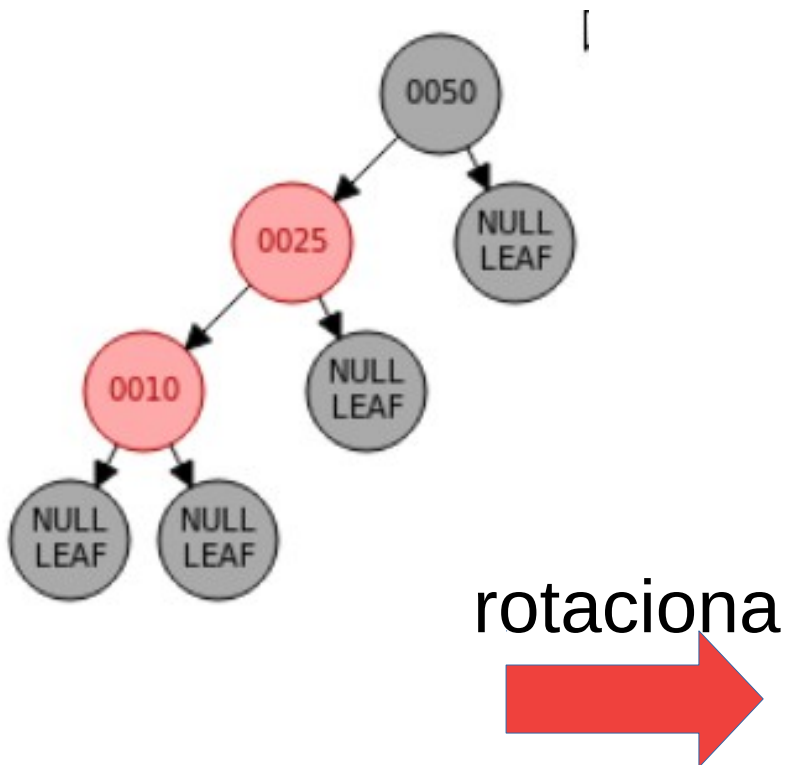
- Caso 2 (rotação 1)
  - Rotação direita simples.





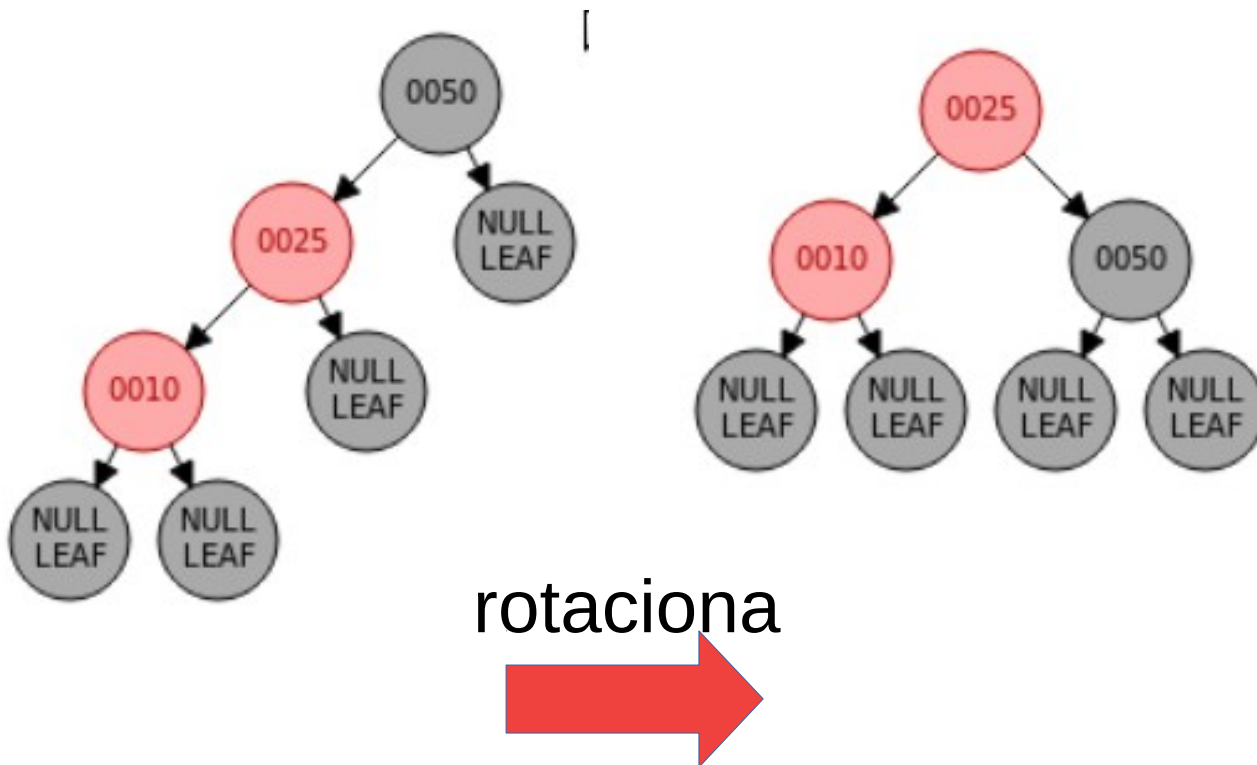
# Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
  - Rotação direita simples.



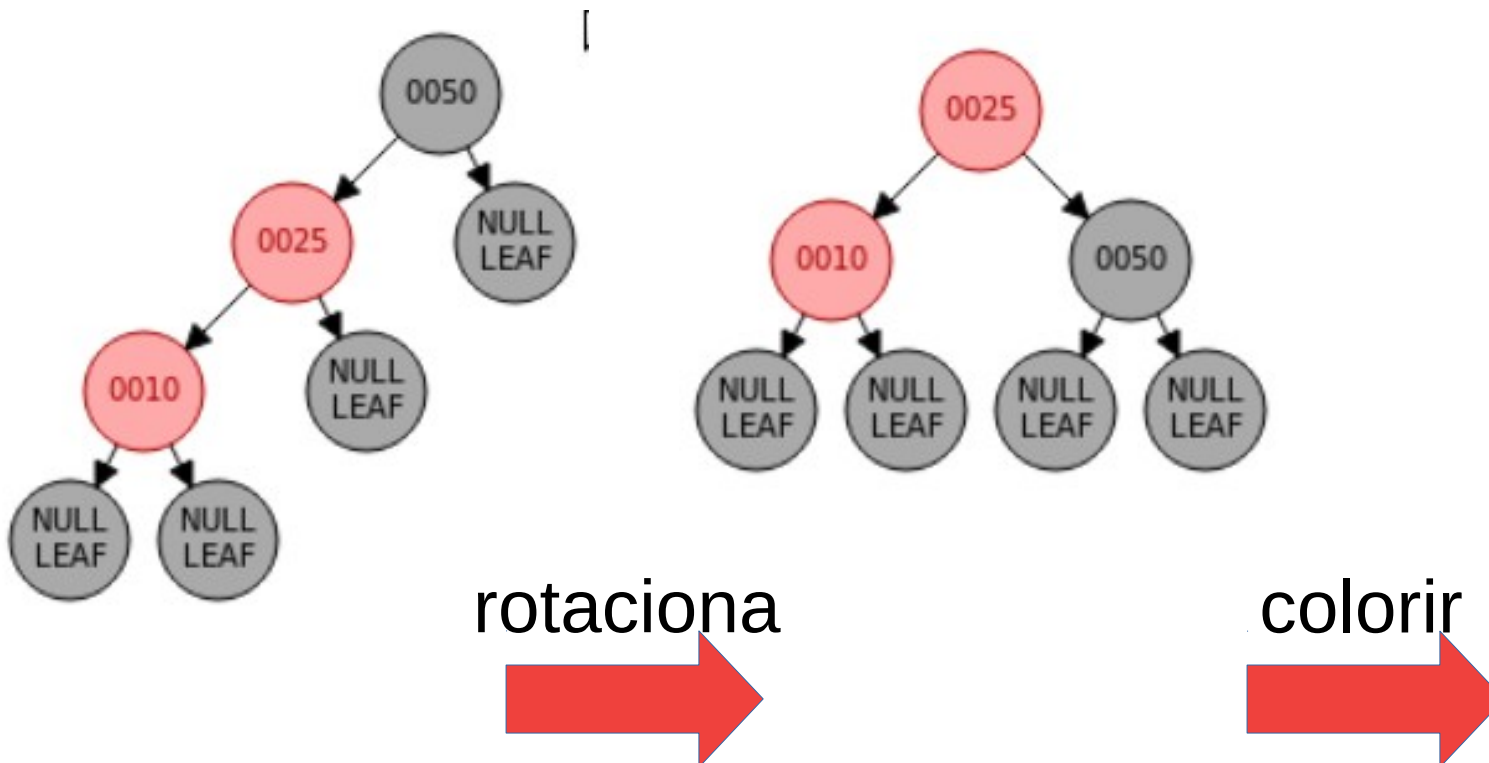
# Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
  - Rotação direita simples.



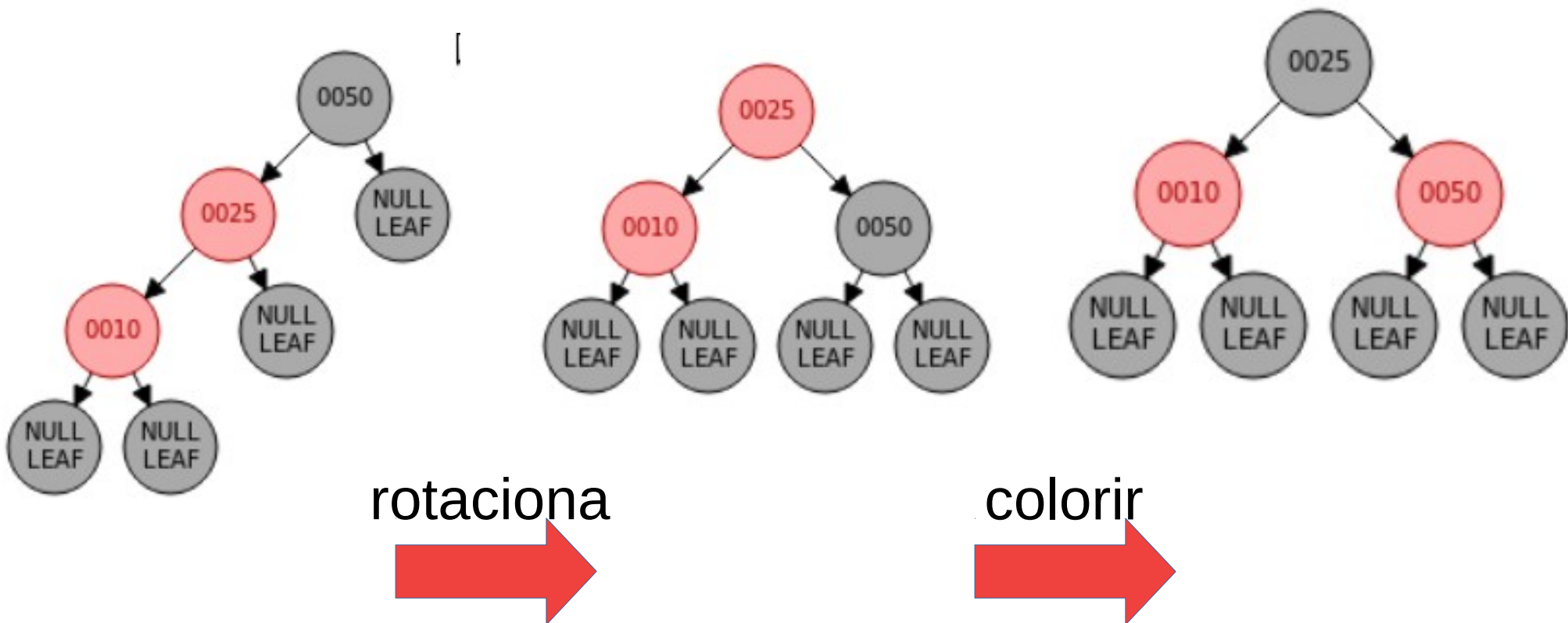
# Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
  - Rotação direita simples.



# Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
  - Rotação direita simples.



# Inserção

# Inserção

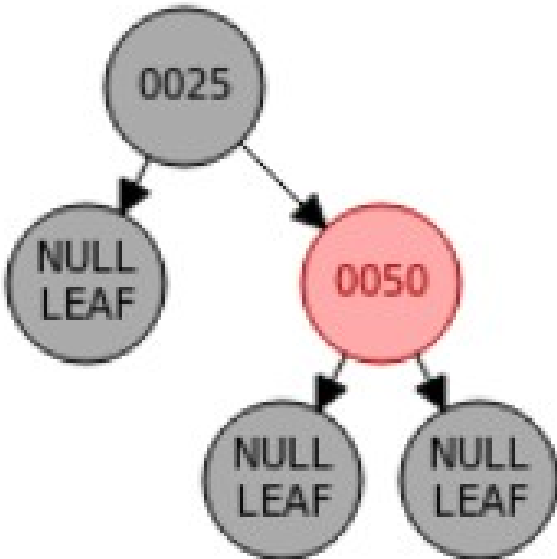
- Caso 2 (rotação 2)

# Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
  - Rotação esquerda simples.

# Inserção

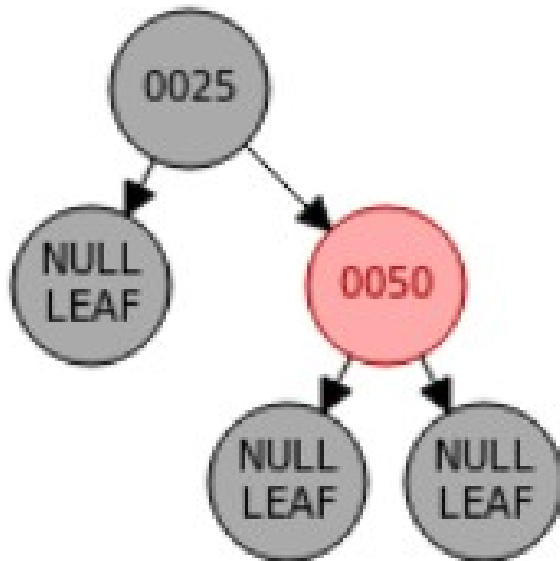
- Caso 2 (rotação 2)
  - Rotação esquerda simples.





# Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
  - Rotação esquerda simples.

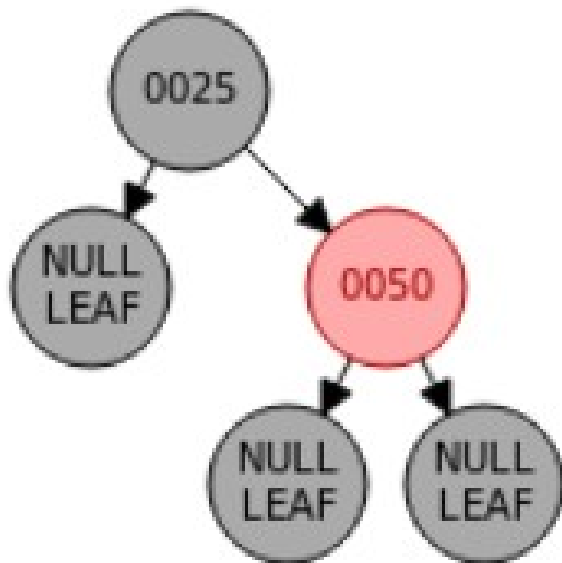


inserir **70**

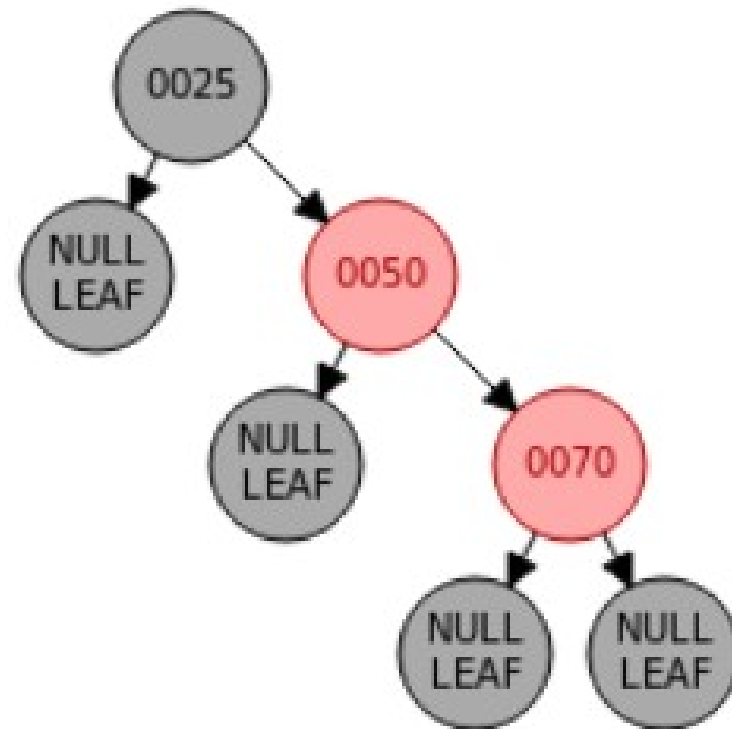


# Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
  - Rotação esquerda simples.



inserir 70  
→



# Inserção

# Inserção

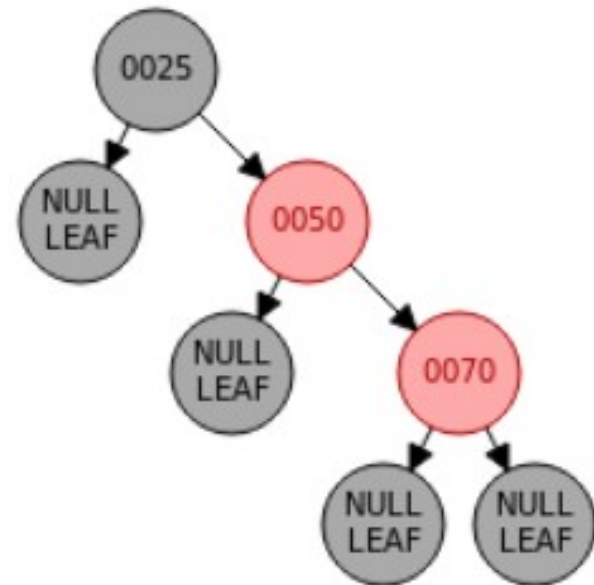
- Caso 2 (rotação 2)

# Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
  - Rotação esquerda simples.

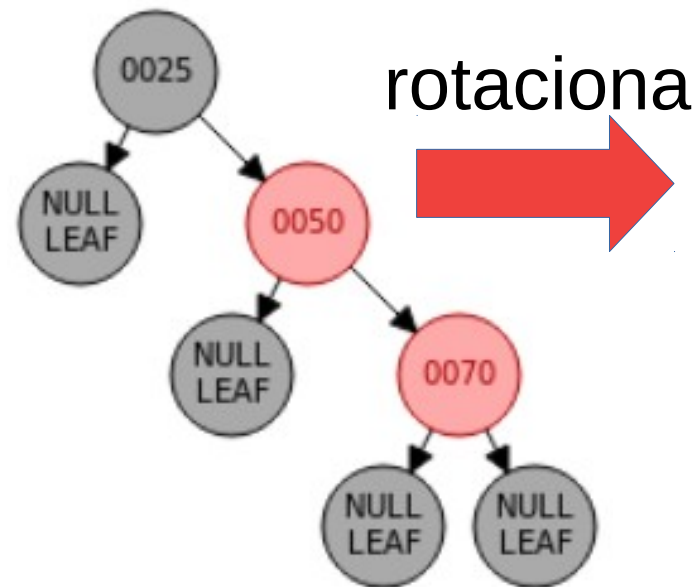
# Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
  - Rotação esquerda simples.



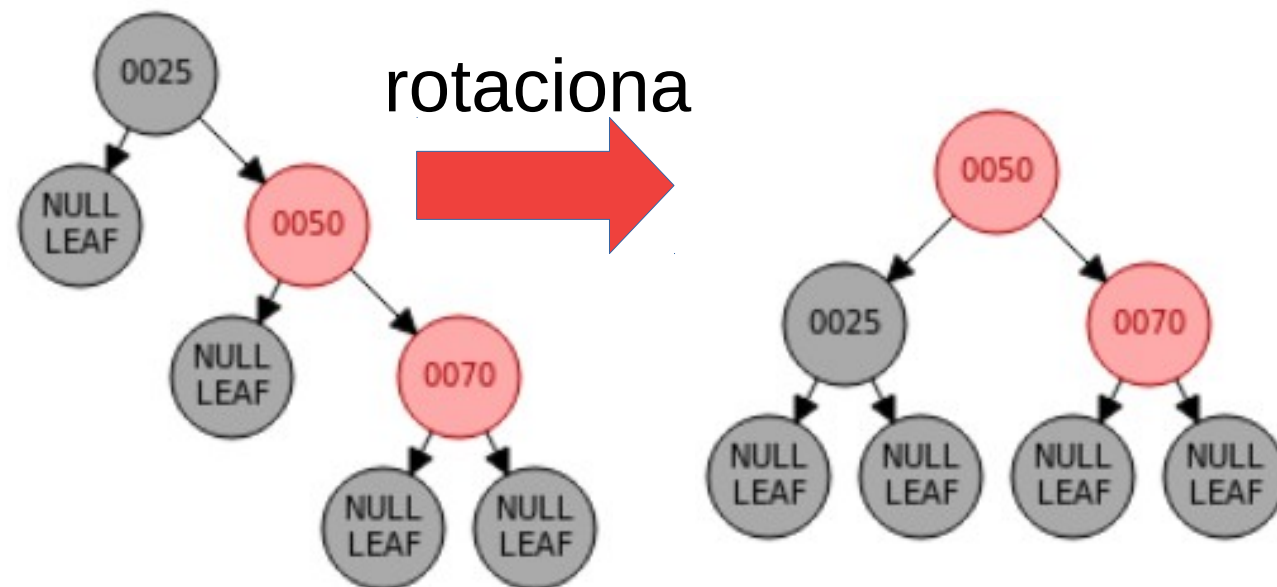
# Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
  - Rotação esquerda simples.



# Inserção

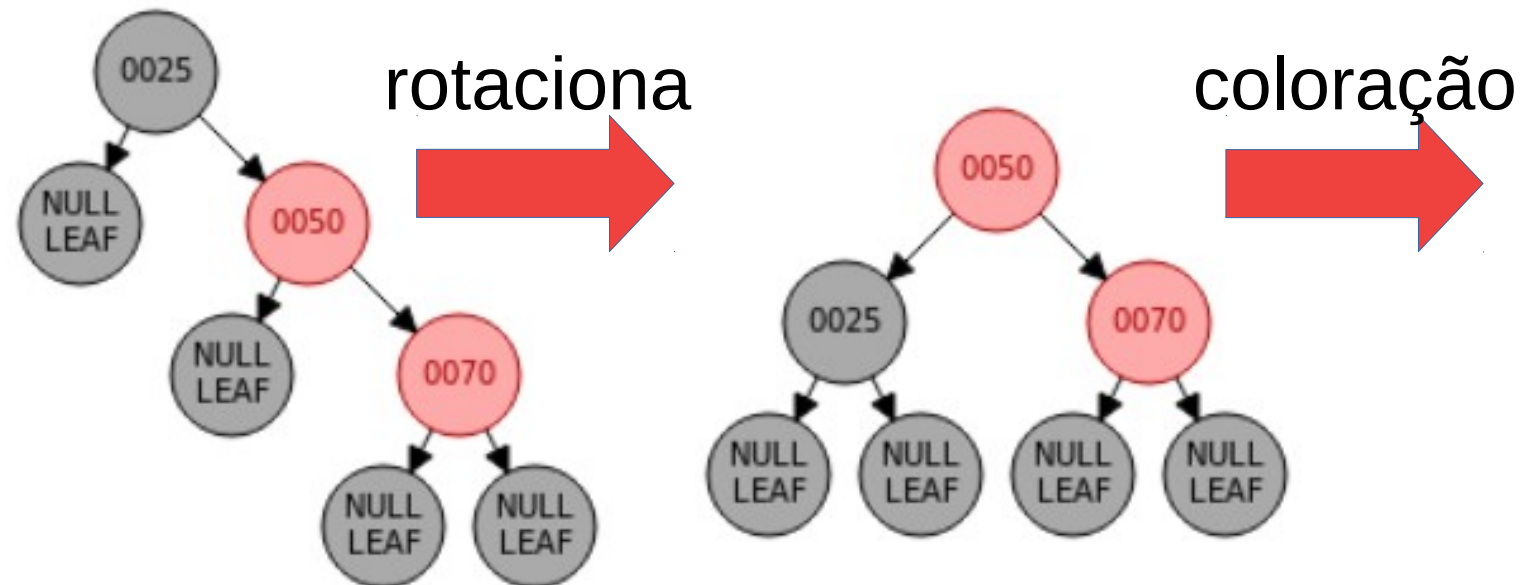
- Caso 2 (rotação 2)
  - Rotação esquerda simples.





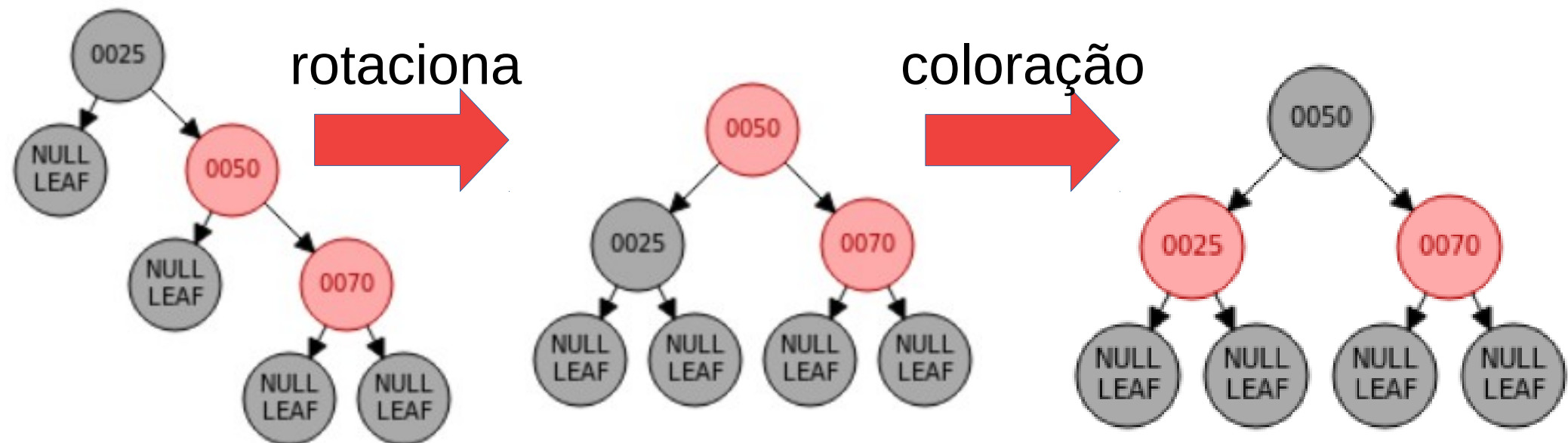
# Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
  - Rotação esquerda simples.



# Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
  - Rotação esquerda simples.



# Inserção

# Inserção

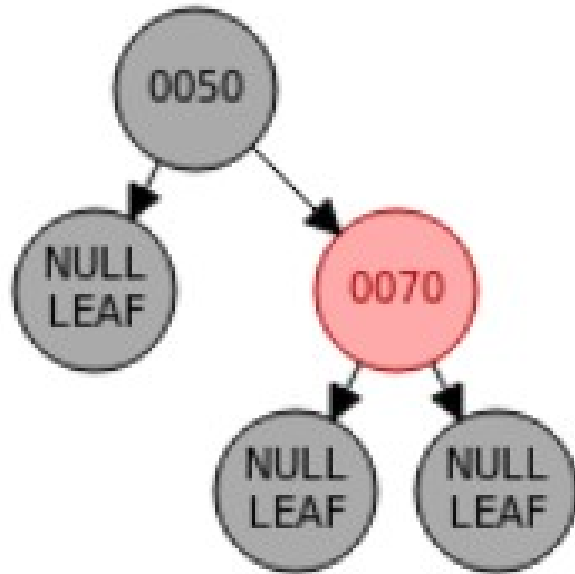
- Caso 2 (rotação 3)

# Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
  - Rotação esquerda dupla

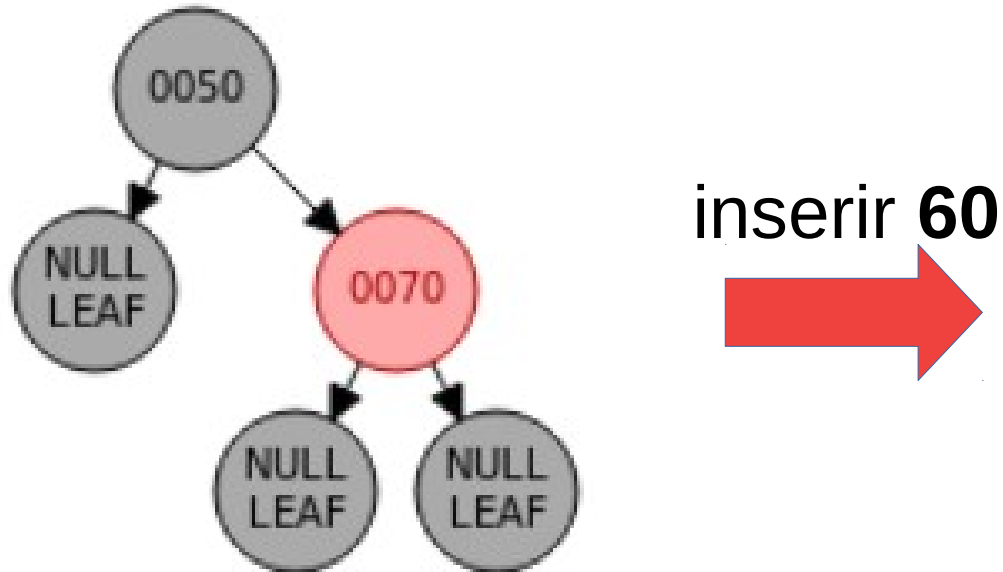
# Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
  - Rotação esquerda dupla



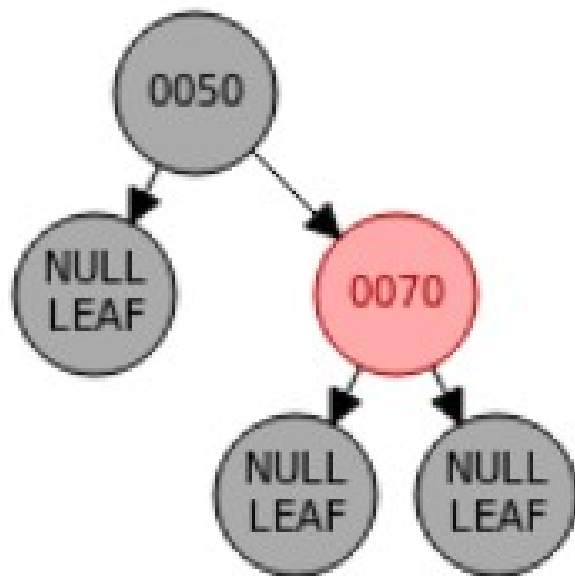
# Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
  - Rotação esquerda dupla

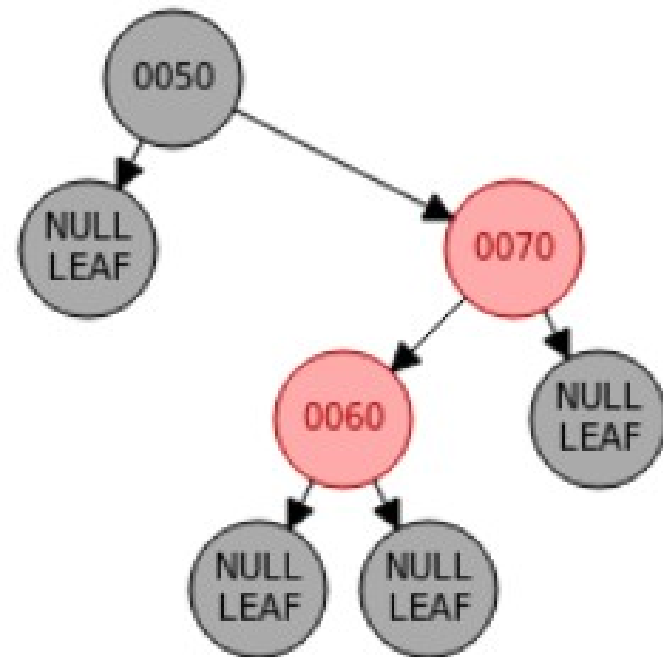


# Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
  - Rotação esquerda dupla



inserir 60





# Inserção

# Inserção

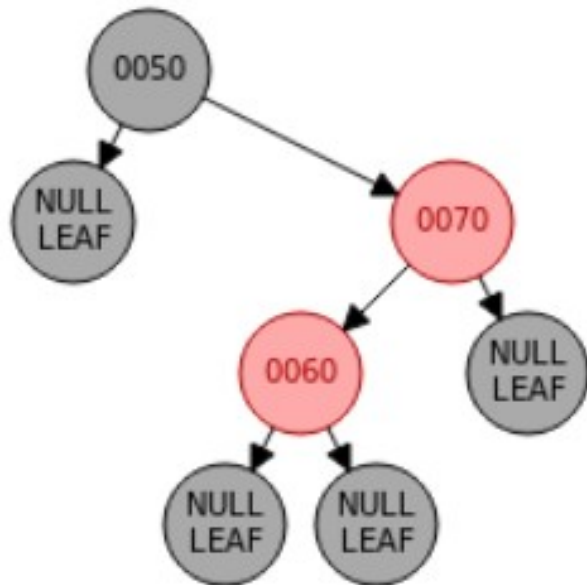
- Caso 2 (rotação 3)

# Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
  - Rotação esquerda dupla

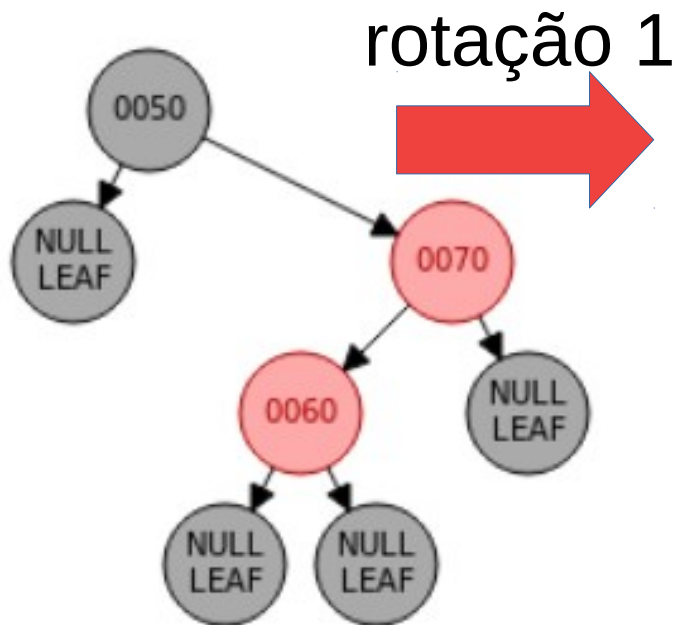
# Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
  - Rotação esquerda dupla



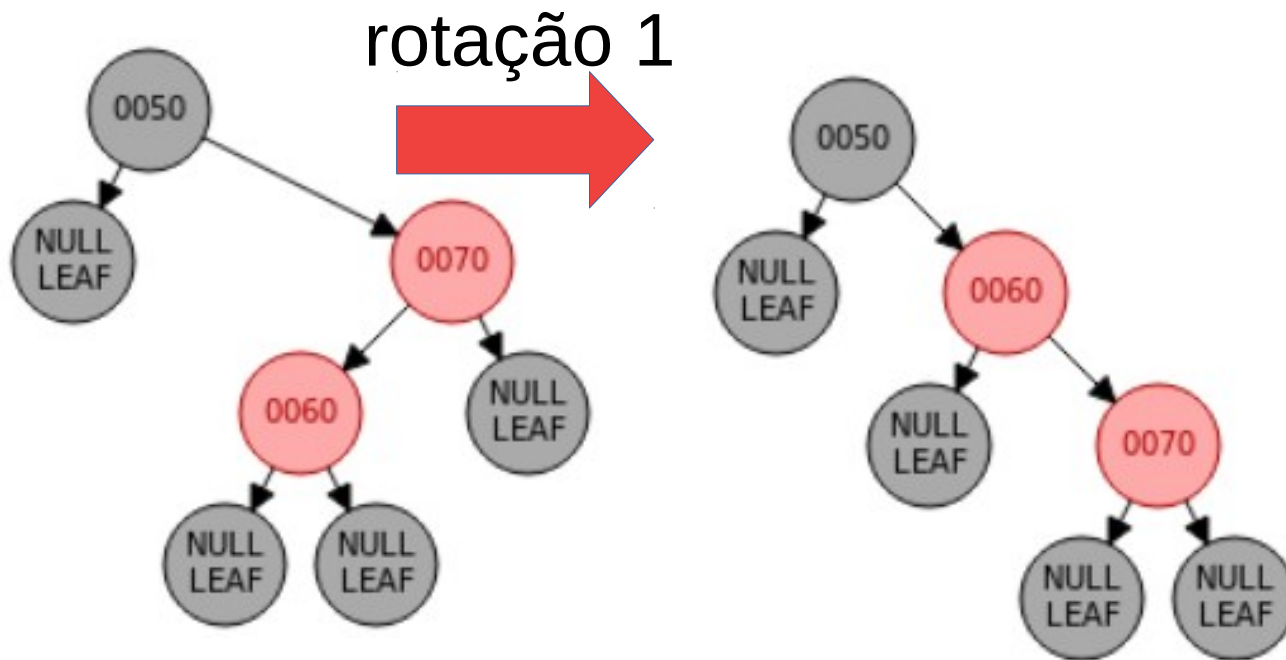
# Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
  - Rotação esquerda dupla



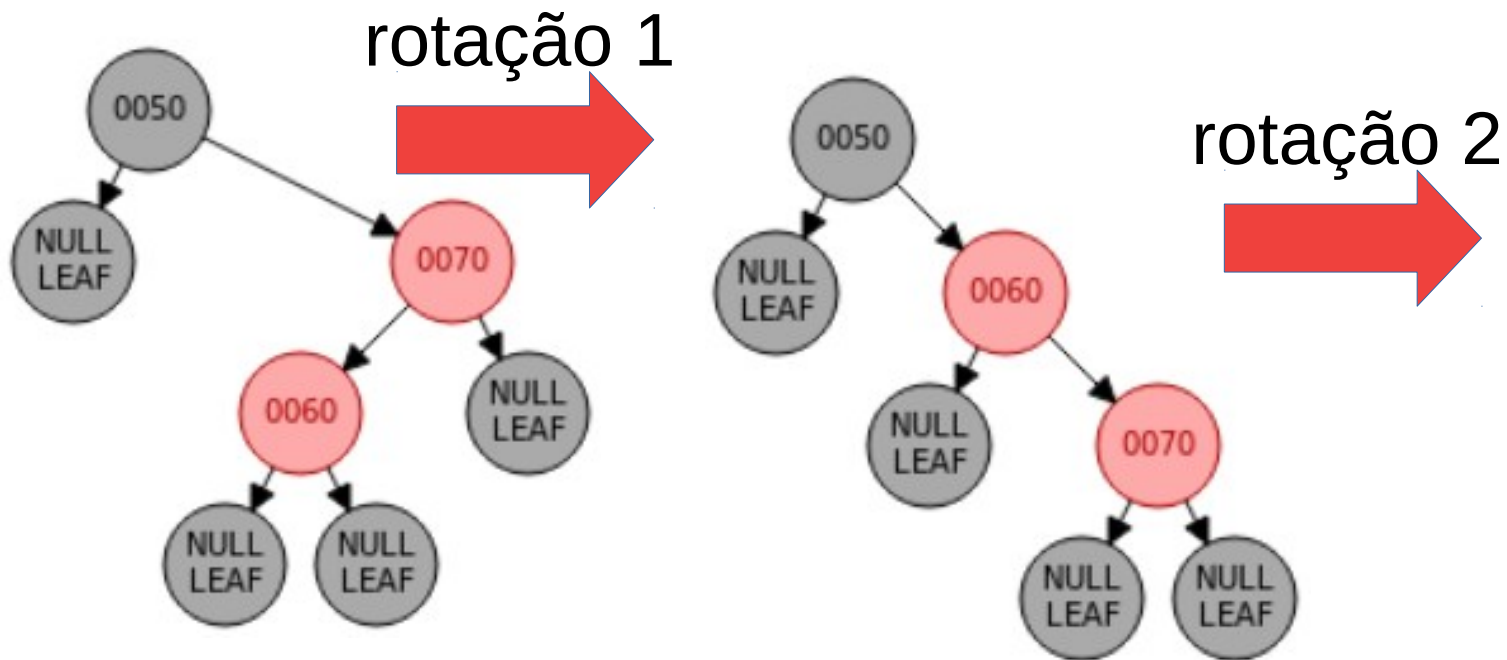
# Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
  - Rotação esquerda dupla



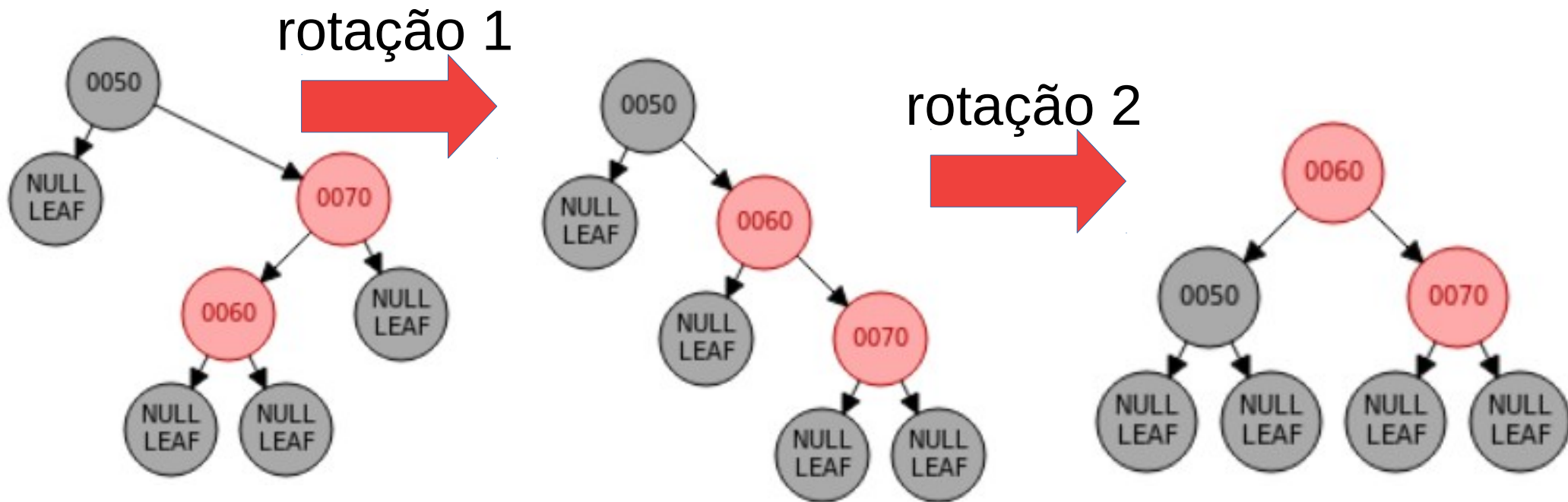
# Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
  - Rotação esquerda dupla



# Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
  - Rotação esquerda dupla





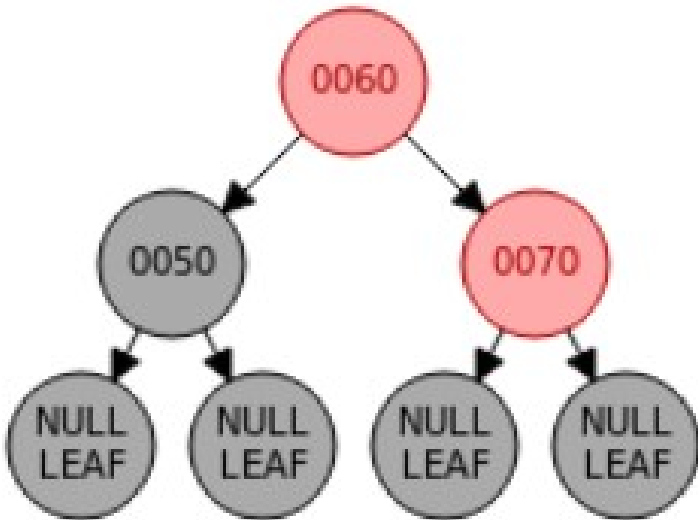
# Inserção

# Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
  - Rotação esquerda dupla

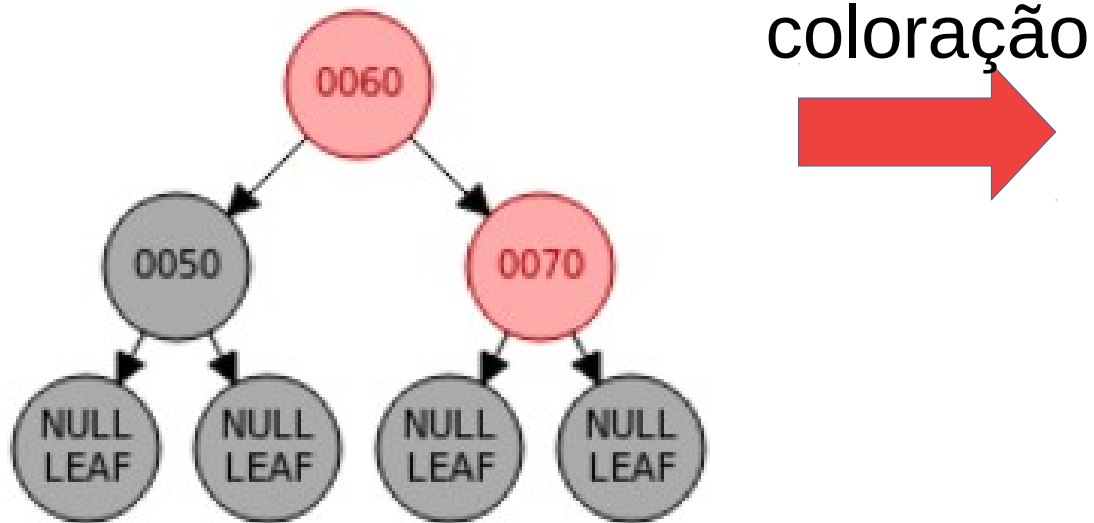
# Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
  - Rotação esquerda dupla



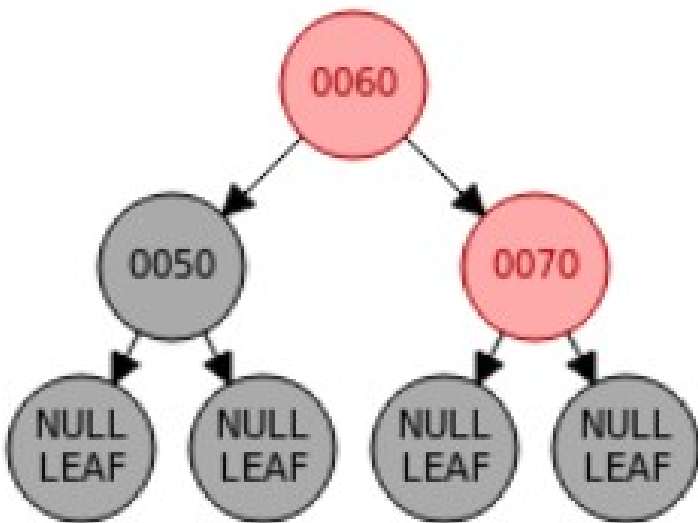
# Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
  - Rotação esquerda dupla

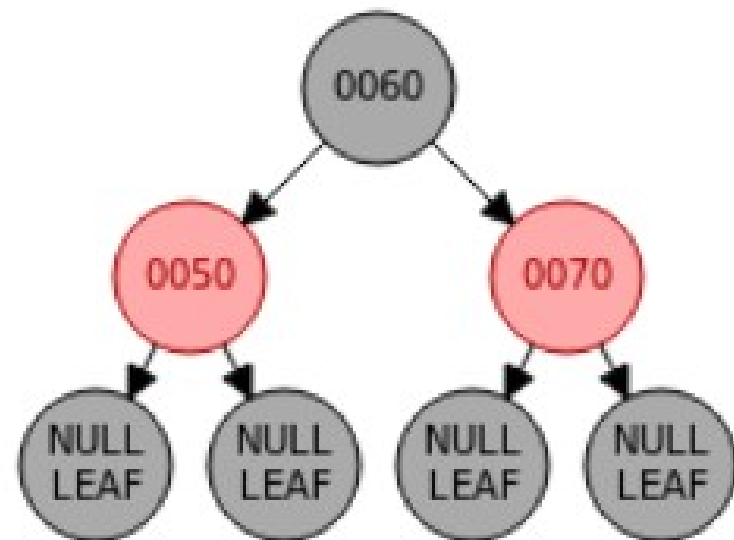


# Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
  - Rotação esquerda dupla



coloração  
→



# Inserção

# Inserção

- Caso 2 (rotação 4)

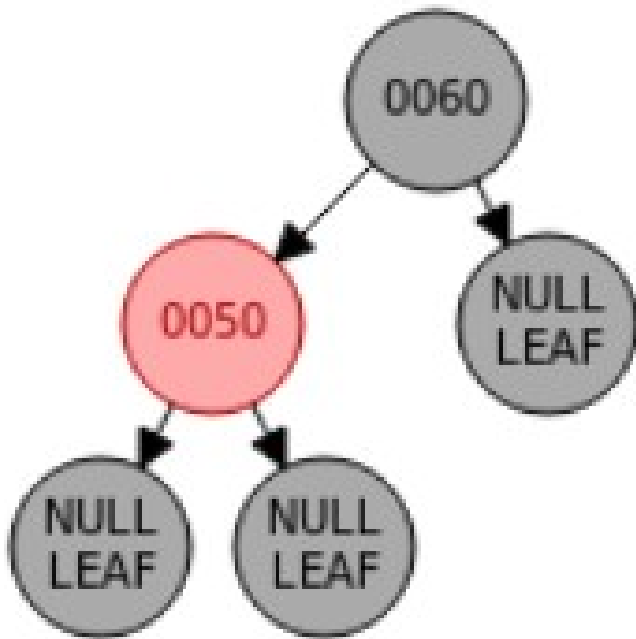
# Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
  - Rotação direita dupla



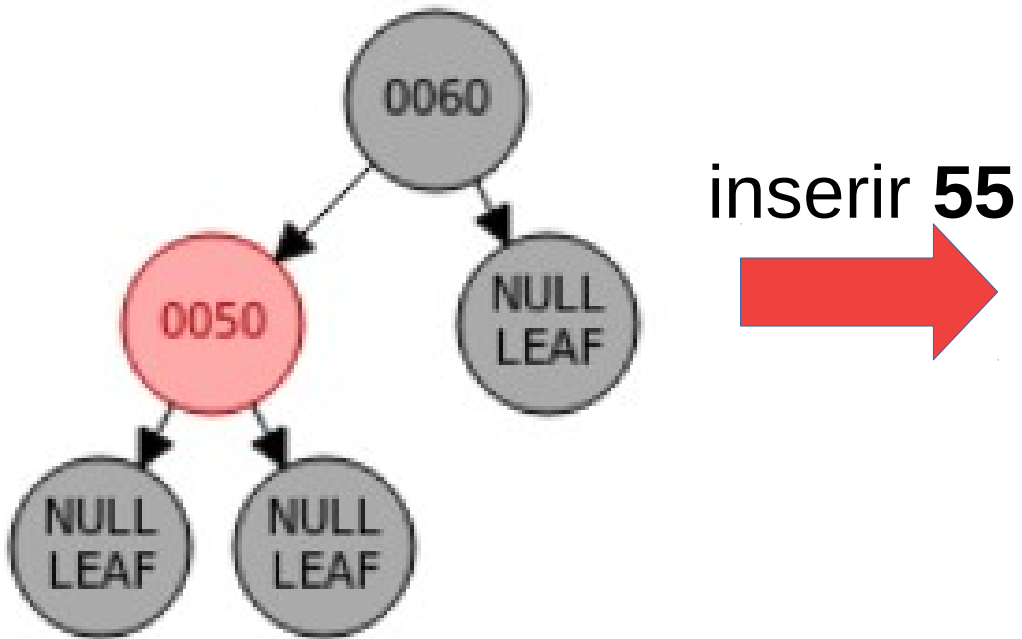
# Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
  - Rotação direita dupla



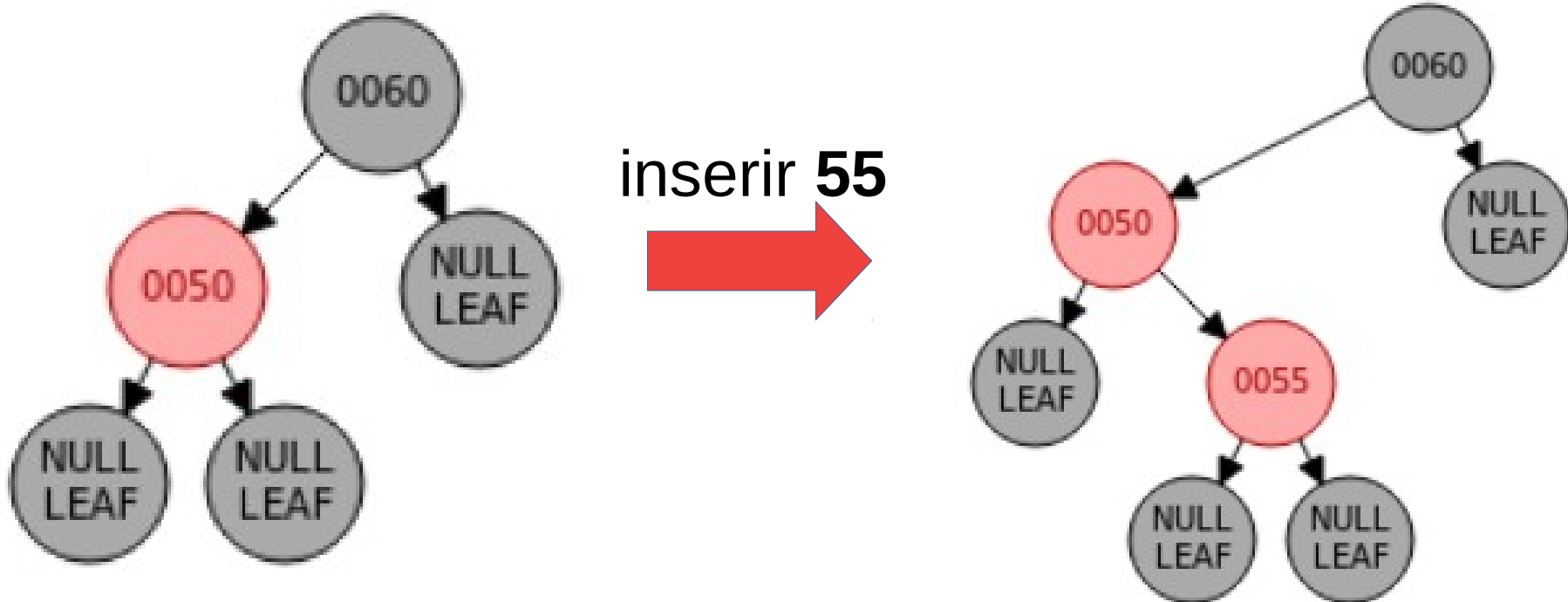
# Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
  - Rotação direita dupla



# Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
  - Rotação direita dupla



# Inserção

# Inserção

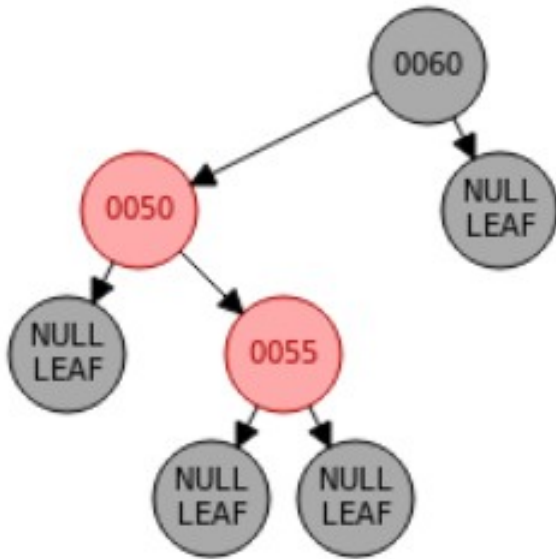
- Caso 2 (rotação 4)

# Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
  - Rotação direita dupla

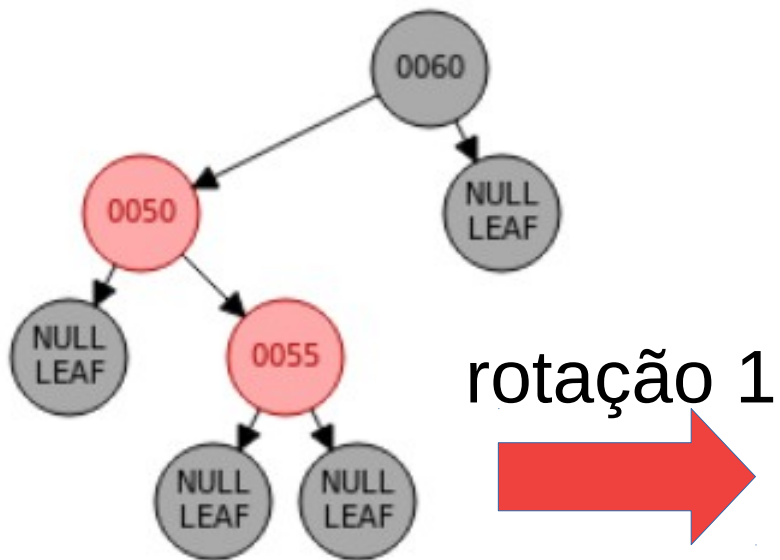
# Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
  - Rotação direita dupla



# Inserção

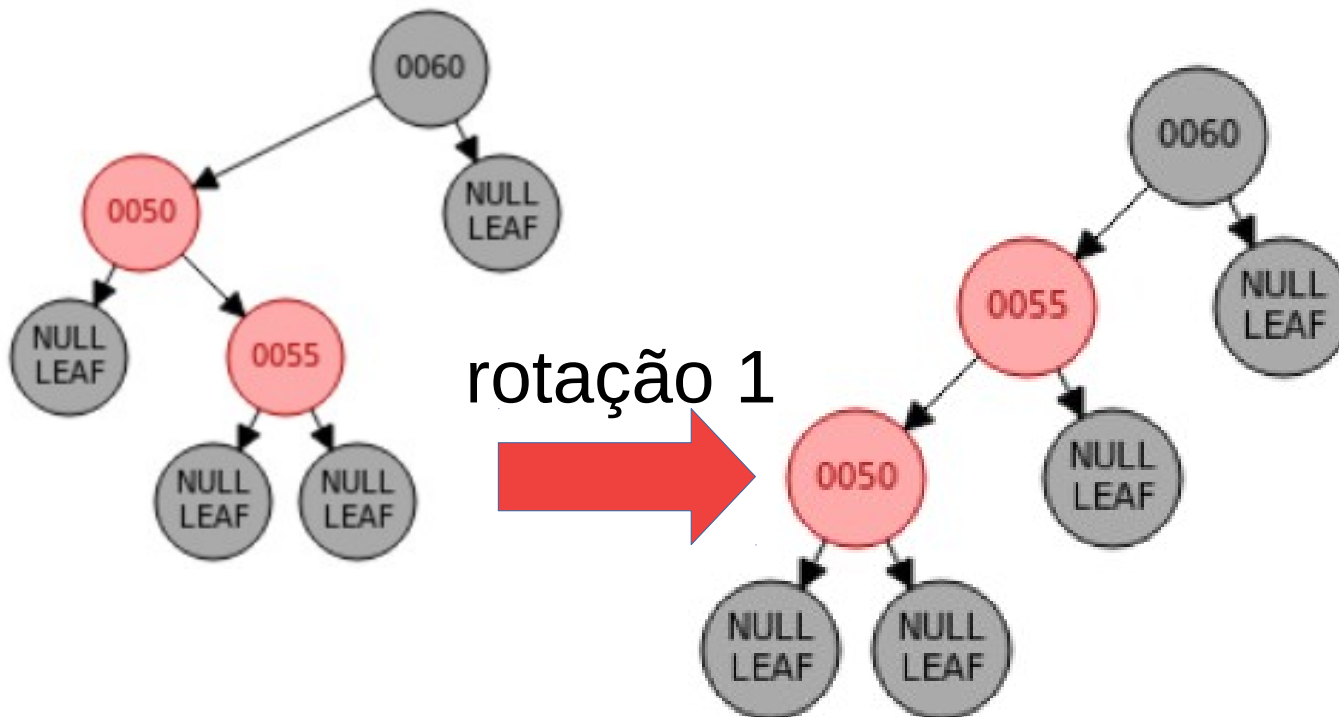
- Caso 2 (rotação 4)
  - Rotação direita dupla





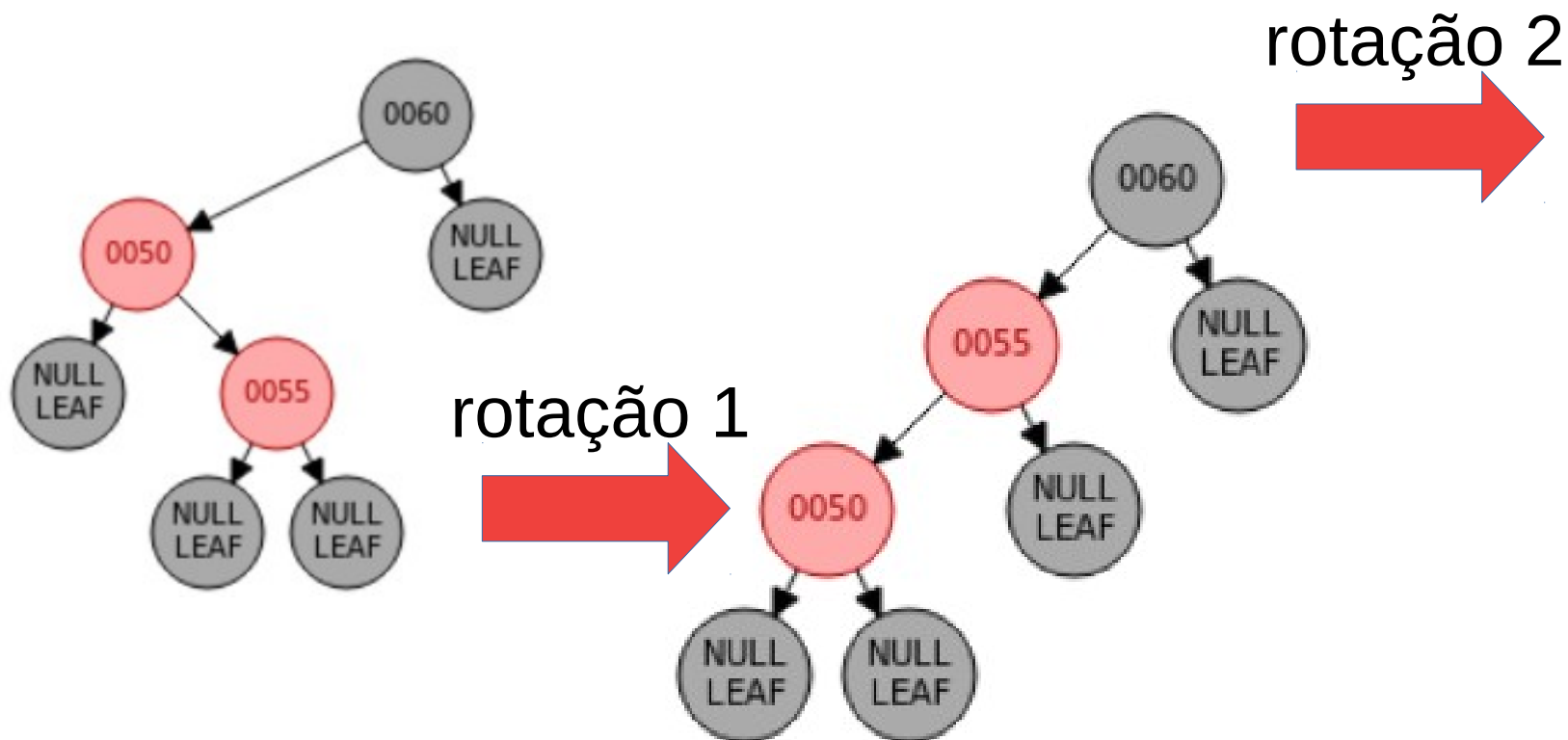
# Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
  - Rotação direita dupla



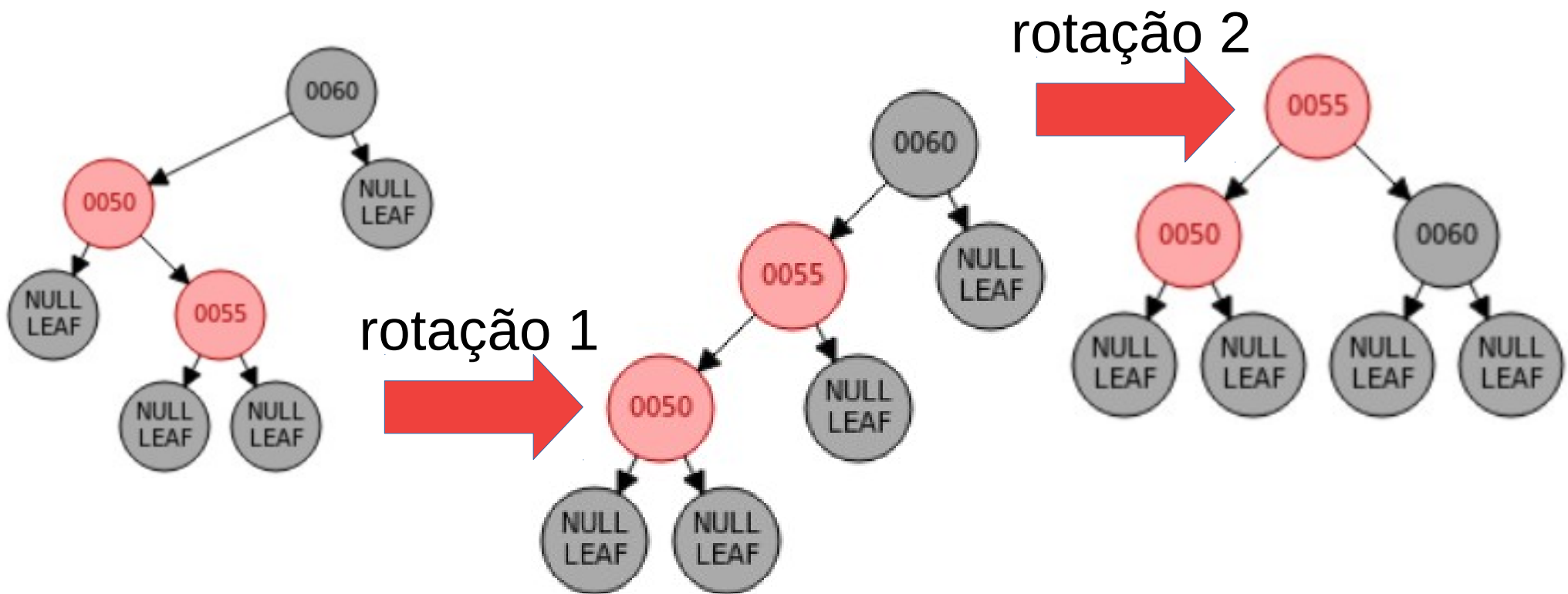
# Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
  - Rotação direita dupla



# Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
  - Rotação direita dupla



# Inserção

# Inserção

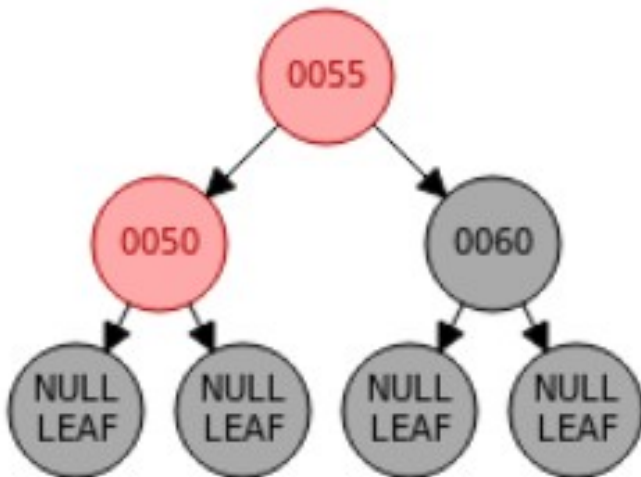
- Caso 2 (rotação 4)

# Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
  - Rotação direita dupla

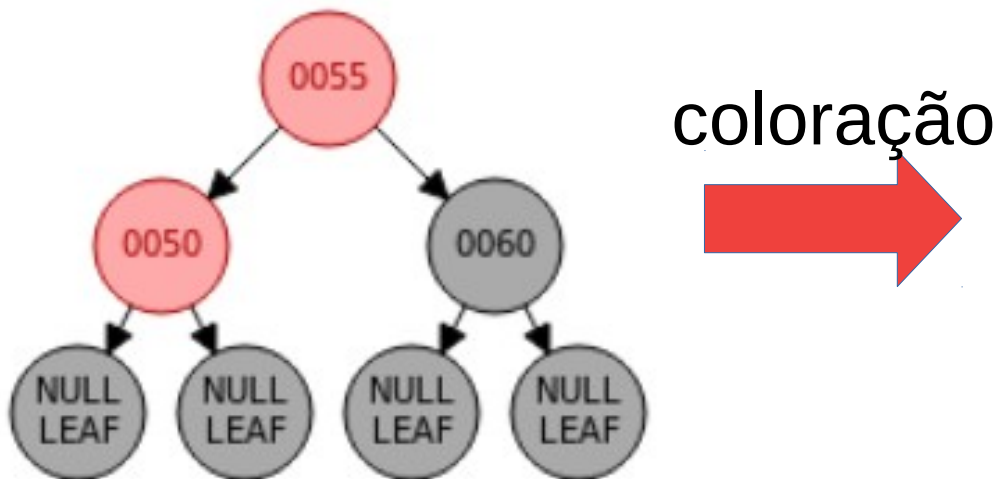
# Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
  - Rotação direita dupla



# Inserção

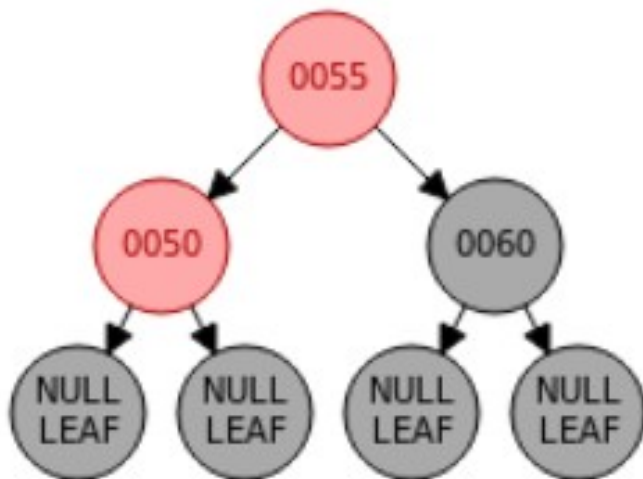
- Caso 2 (rotação 4)
  - Rotação direita dupla




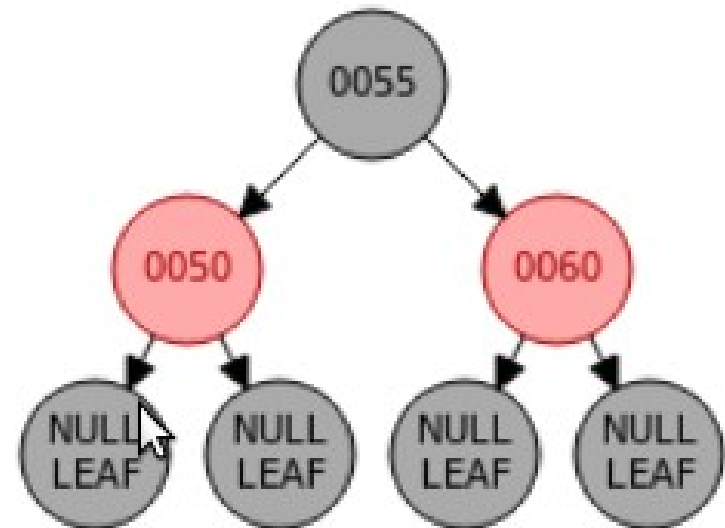


# Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
  - Rotação direita dupla



coloração  




# Remoção

# Remoção

- É um pouco mais complexa do que a inserção.

# Remoção

- É um pouco mais complexa do que a inserção.
- Passos:

# Remoção

- É um pouco mais complexa do que a inserção.
- Passos:
  - Encontre o nó  $V$  que será removido.

# Remoção

- É um pouco mais complexa do que a inserção.
- Passos:
  - Encontre o nó  $V$  que será removido.
  - Remova o nó  $V$  da mesma maneira que uma ABB.

# Remoção

- É um pouco mais complexa do que a inserção.
- Passos:
  - Encontre o nó  $V$  que será removido.
  - Remova o nó  $V$  da mesma maneira que uma ABB.
  - Ajuste os critérios da ARN.

# Remoção



# Remoção

- Remoção nó vermelho

# Remoção

- Remoção nó vermelho
  - A altura preta não muda.

# Remoção

- Remoção nó vermelho
  - A altura preta não muda.
  - O nó vermelho não pode ser raiz e, portanto, a raiz continuará preta.

# Remoção

- Remoção nó vermelho
  - A altura preta não muda.
  - O nó vermelho não pode ser raiz e, portanto, a raiz continuará preta.
- Remoção nó preto

# Remoção

- Remoção nó vermelho
  - A altura preta não muda.
  - O nó vermelho não pode ser raiz e, portanto, a raiz continuará preta.
- Remoção nó preto
  - Pode causar problema nas propriedades.

# Remoção Nó Vermelho

# Remoção Nó Vermelho

- Situação 1

# Remoção Nó Vermelho

- Situação 1
  - O nó removido é rubro e é folha.

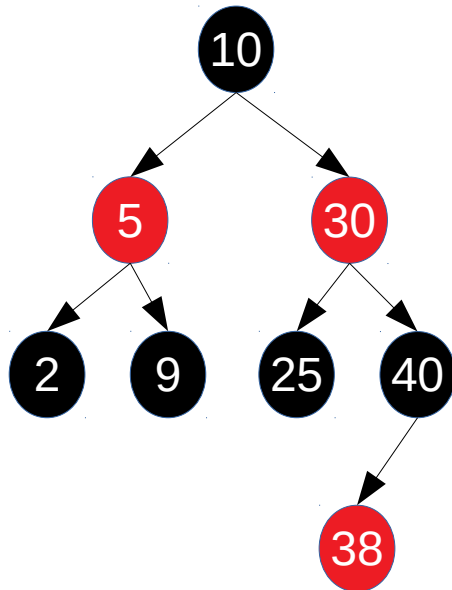


# Remoção Nó Vermelho

- Situação 1
  - O nó removido é rubro e é folha.
    - O nó deve ser removido e nada mais precisa ser feito.

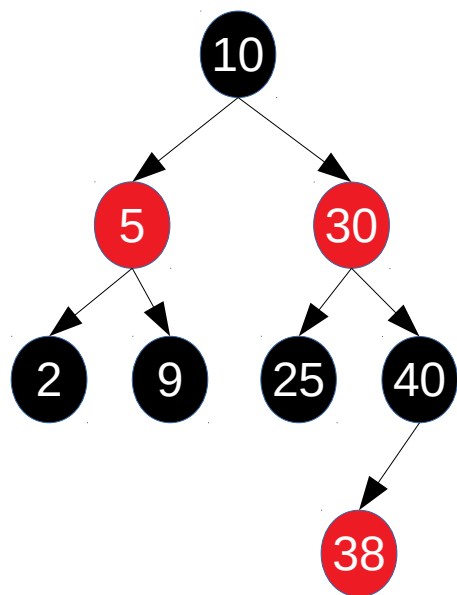
# Remoção Nó Vermelho

- Situação 1
  - O nó removido é rubro e é folha.
    - O nó deve ser removido e nada mais precisa ser feito.



# Remoção Nó Vermelho

- Situação 1
  - O nó removido é rubro e é folha.
    - O nó deve ser removido e nada mais precisa ser feito.

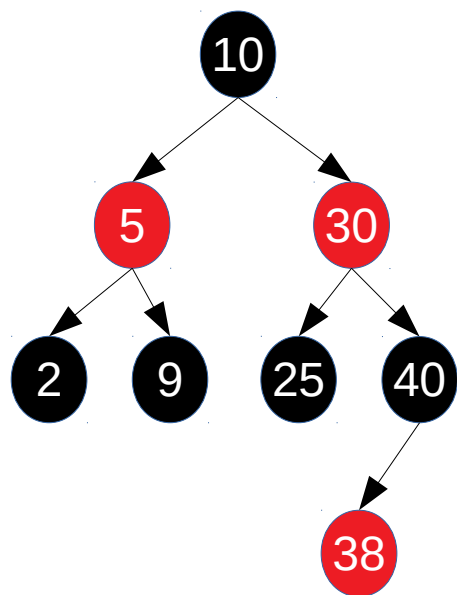


os nós folhas nil  
podem ser ocultados



# Remoção Nó Vermelho

- Situação 1
  - O nó removido é rubro e é folha.
    - O nó deve ser removido e nada mais precisa ser feito.
  - Por exemplo, remover o nó 38:

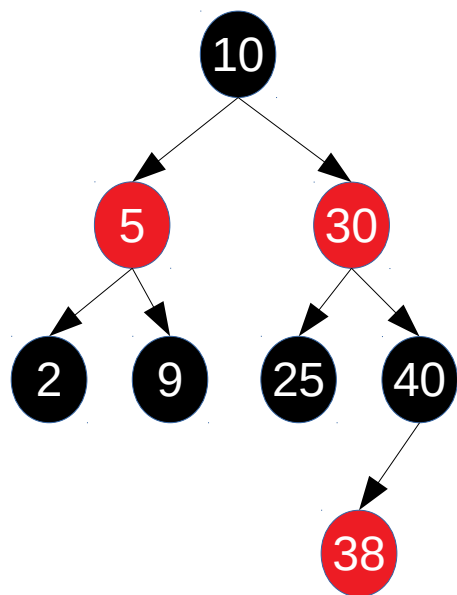


os nós folhas nil  
podem ser ocultados

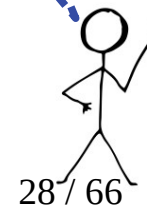


# Remoção Nó Vermelho

- Situação 1
  - O nó removido é rubro e é folha.
    - O nó deve ser removido e nada mais precisa ser feito.
  - Por exemplo, remover o nó 38:

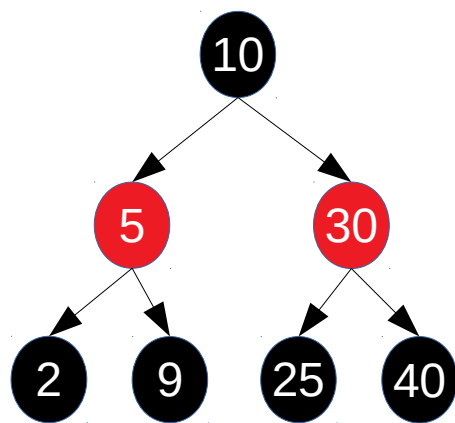
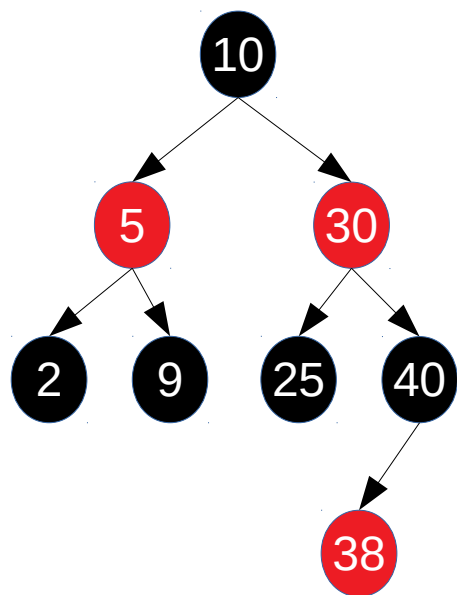


os nós folhas nil  
podem ser ocultados



# Remoção Nó Vermelho

- Situação 1
  - O nó removido é rubro e é folha.
    - O nó deve ser removido e nada mais precisa ser feito.
  - Por exemplo, remover o nó 38:



os nós folhas nil  
podem ser ocultados

# Remoção Nó Vermelho

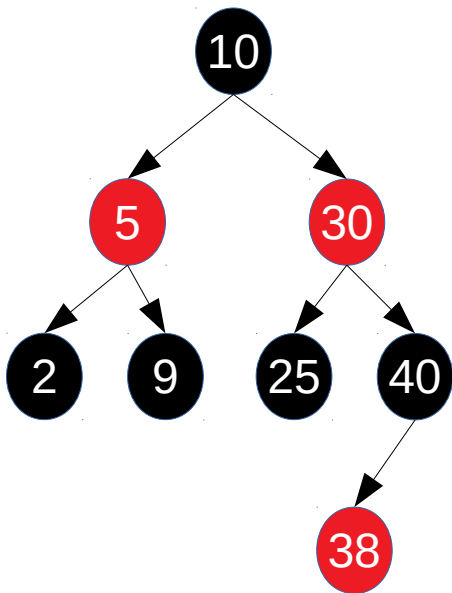
# Remoção Nó Vermelho

- Situação 2



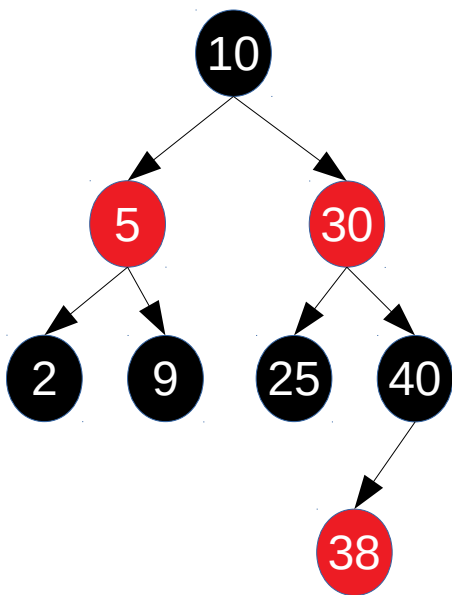
# Remoção Nó Vermelho

- Situação 2



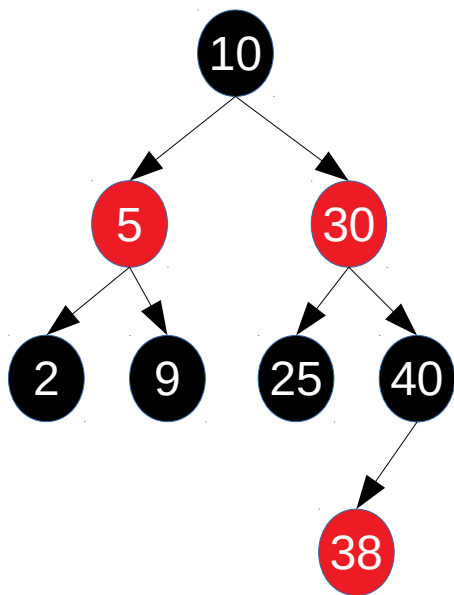
# Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
  - Por exemplo, remover o nó **30**:



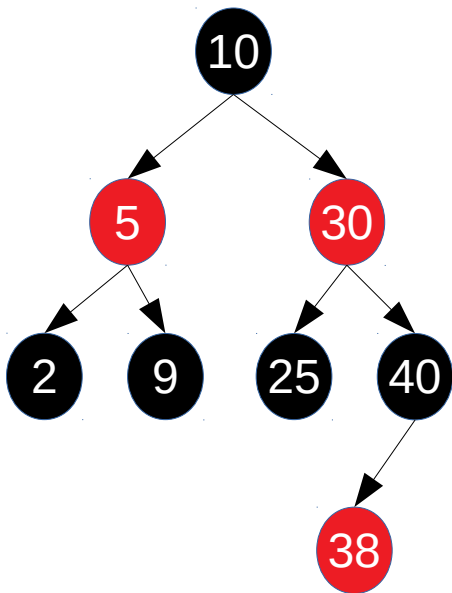
# Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
  - Por exemplo, remover o nó **30**:
  - Localizar o elemento.



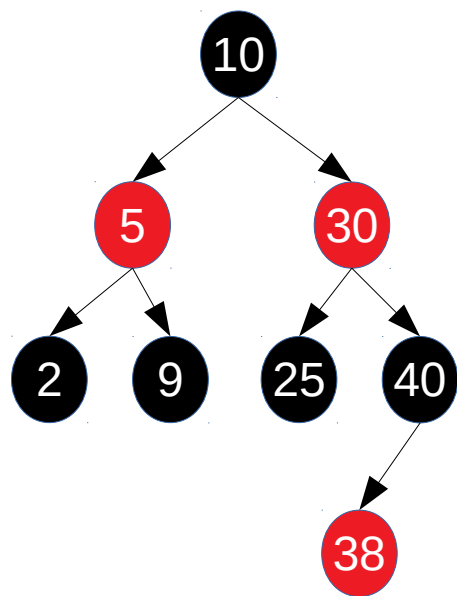
# Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
  - Por exemplo, remover o nó **30**:
  - Localizar o elemento.
  - Achar o sucessor lógico.



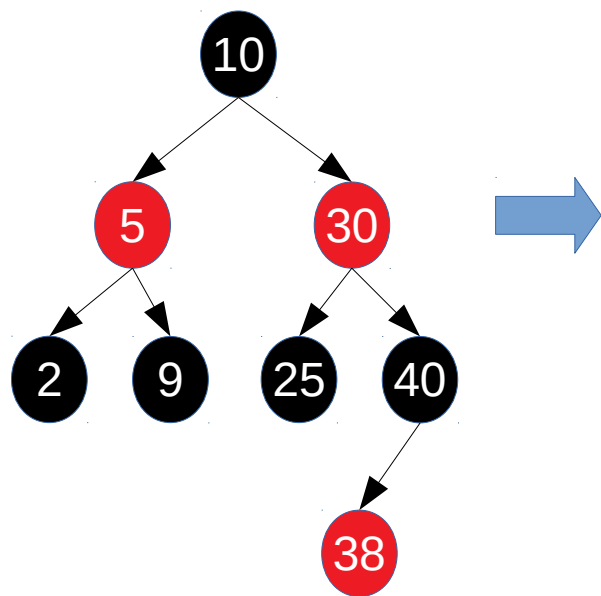
# Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
  - Por exemplo, remover o nó **30**:
  - Localizar o elemento.
  - Achar o sucessor lógico.
  - Copiar 30 pelo sucessor (38).



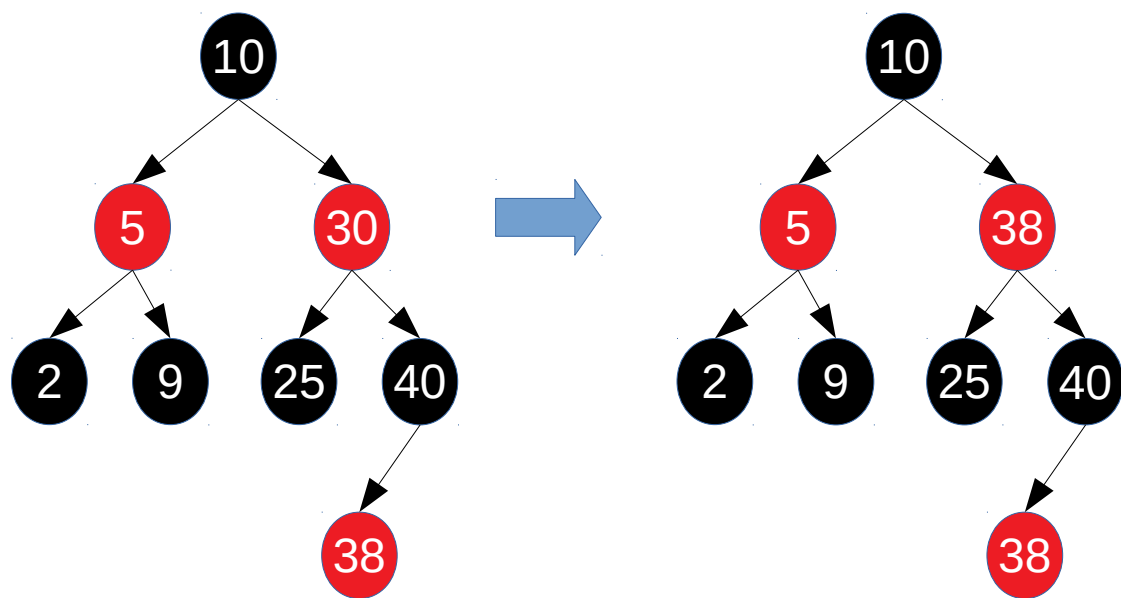
# Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
  - Por exemplo, remover o nó **30**:
  - Localizar o elemento.
  - Achar o sucessor lógico.
  - Copiar 30 pelo sucessor (38).



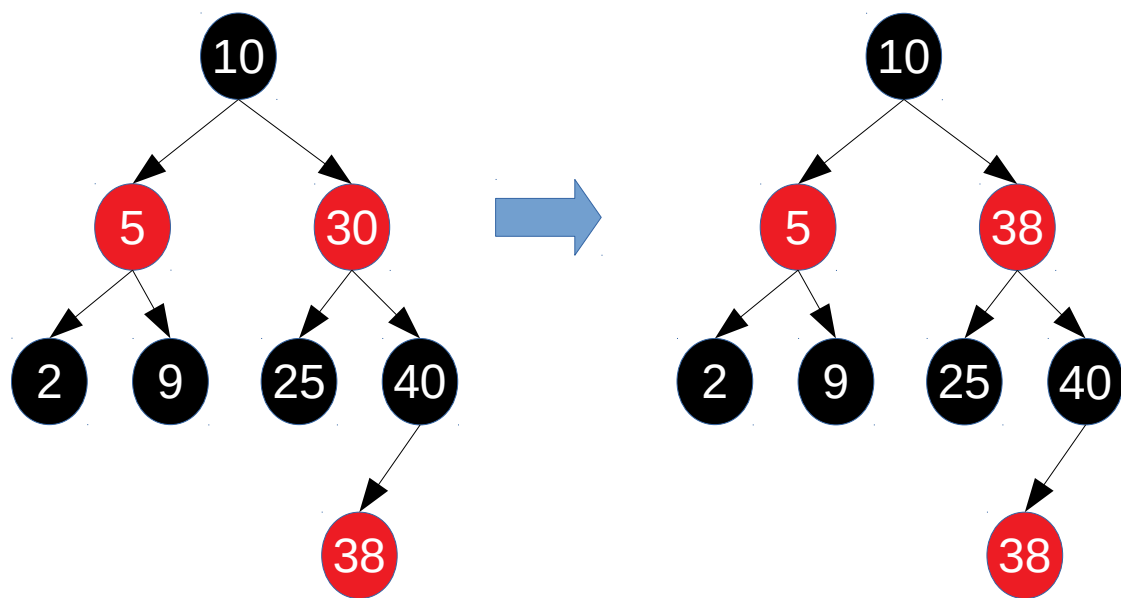
# Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
  - Por exemplo, remover o nó **30**:
  - Localizar o elemento.
  - Achar o sucessor lógico.
  - Copiar 30 pelo sucessor (38).



# Remoção Nó Vermelho

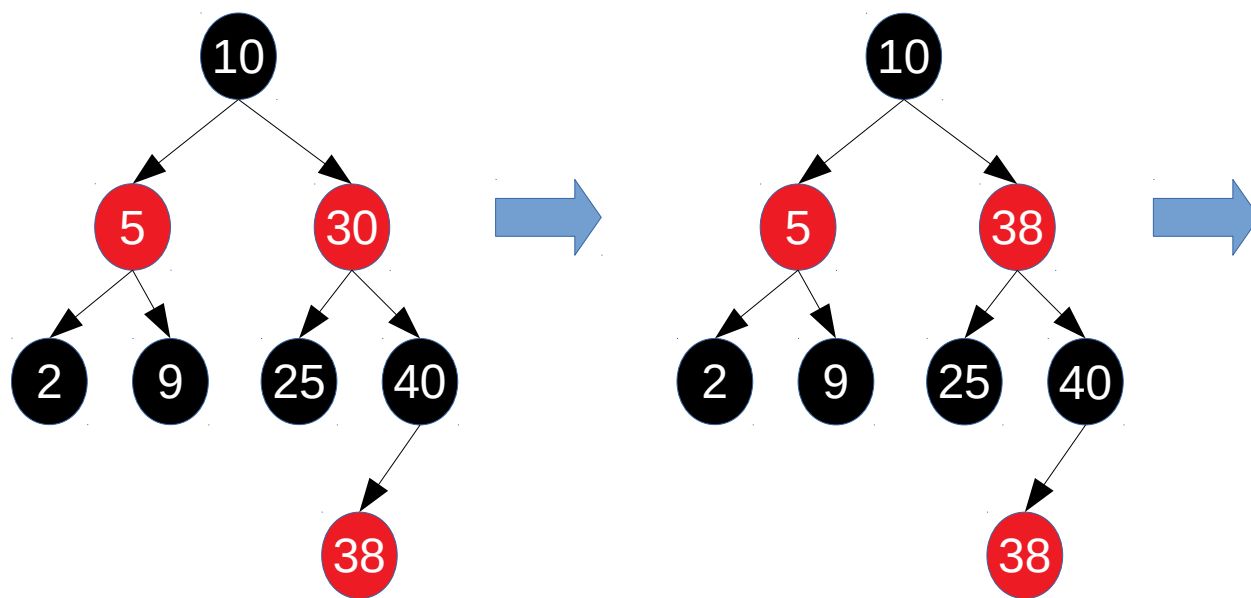
- Situação 2
  - Por exemplo, remover o nó **30**:
  - Localizar o elemento.
  - Achar o sucessor lógico.
  - Copiar 30 pelo sucessor (38).
  - Remover sucessor (38).





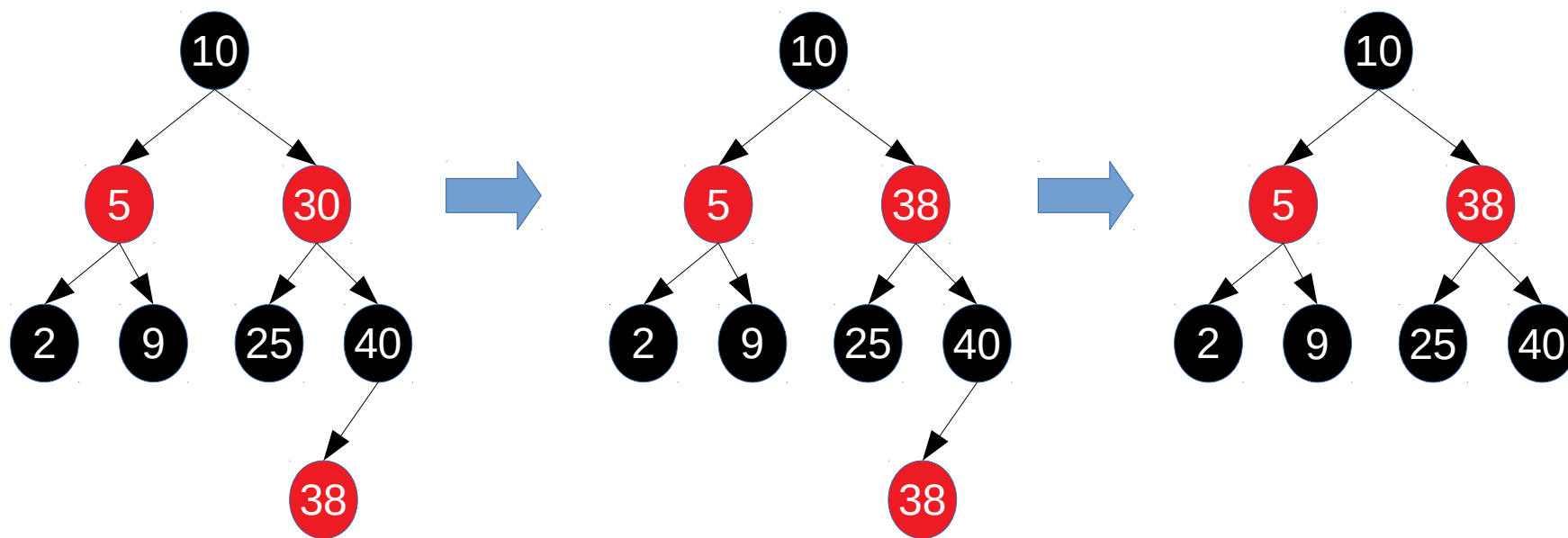
# Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
  - Por exemplo, remover o nó **30**:
  - Localizar o elemento.
  - Achar o sucessor lógico.
  - Copiar 30 pelo sucessor (38).
  - Remover sucessor (38).



# Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
  - Por exemplo, remover o nó **30**:
  - Localizar o elemento.
  - Achar o sucessor lógico.
  - Copiar 30 pelo sucessor (38).
  - Remover sucessor (38).



# Remoção Nó Preto

# Remoção Nó Preto

- Situação 3

# Remoção Nó Preto

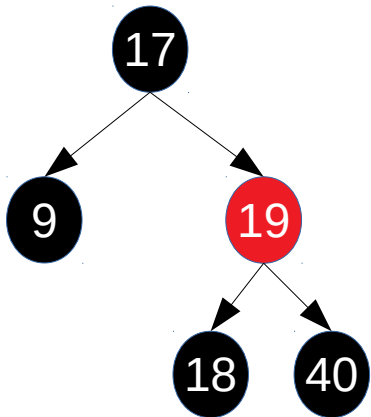
- Situação 3
  - Remover nó preto com irmão vermelho.

# Remoção Nó Preto

- Situação 3
  - Remover nó preto com irmão vermelho.
- Exemplo

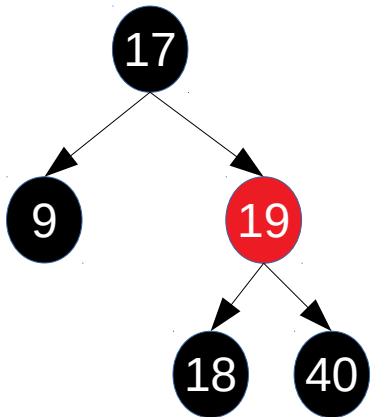
# Remoção Nó Preto

- Situação 3
  - Remover nó preto com irmão vermelho.
- Exemplo



# Remoção Nó Preto

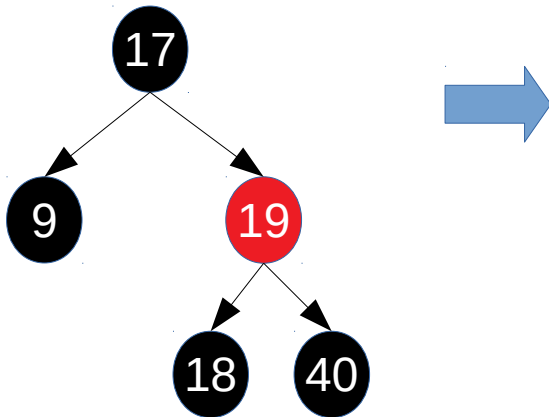
- Situação 3
  - Remover nó preto com irmão vermelho.
- Exemplo
  - Remover o **9**.





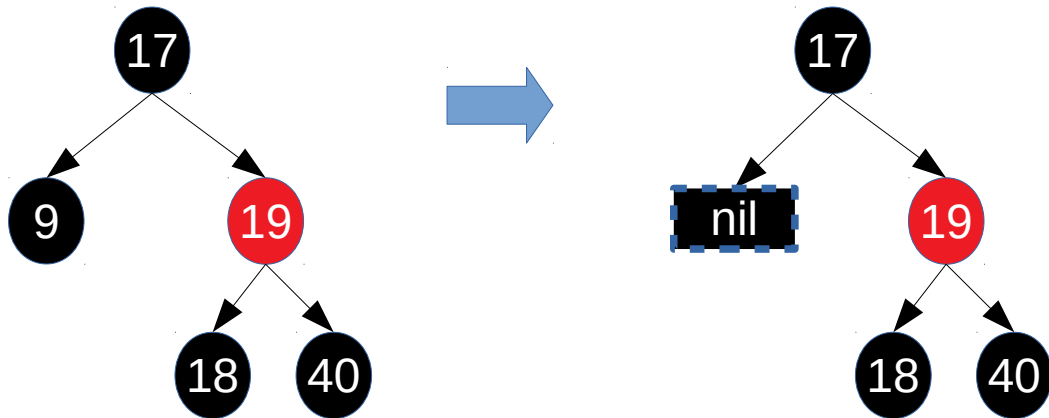
# Remoção Nó Preto

- Situação 3
  - Remover nó preto com irmão vermelho.
- Exemplo
  - Remover o **9**.



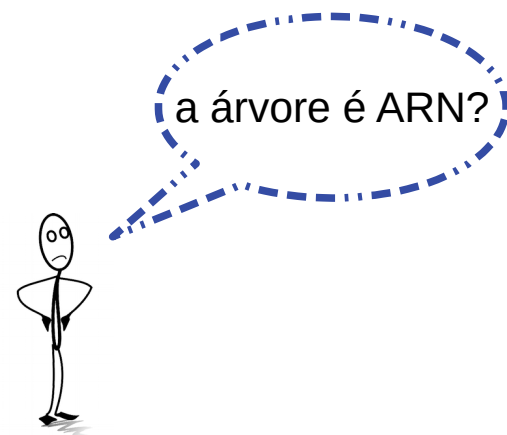
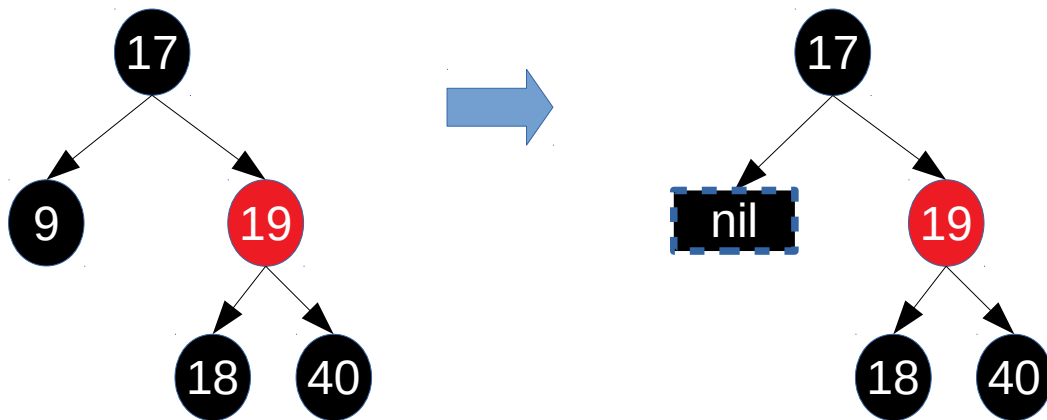
# Remoção Nó Preto

- Situação 3
  - Remover nó preto com irmão vermelho.
- Exemplo
  - Remover o 9.



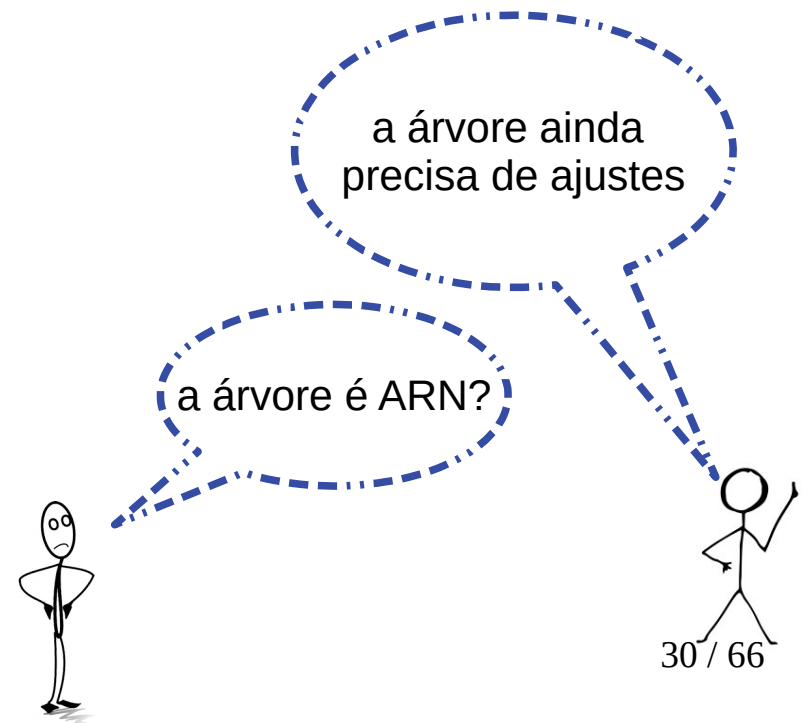
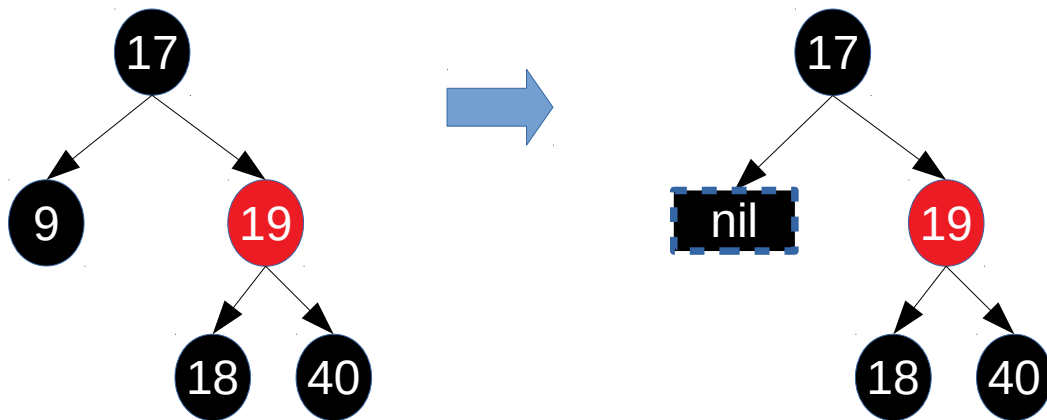
# Remoção Nó Preto

- Situação 3
  - Remover nó preto com irmão vermelho.
- Exemplo
  - Remover o 9.



# Remoção Nó Preto

- Situação 3
  - Remover nó preto com irmão vermelho.
- Exemplo
  - Remover o 9.



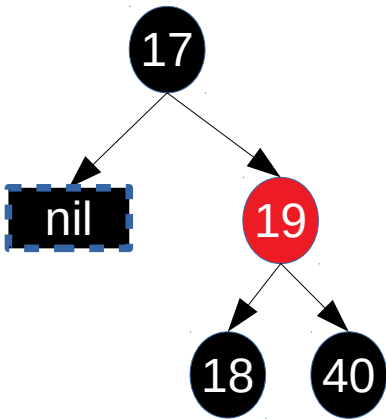
# Remoção Nó Preto

# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)

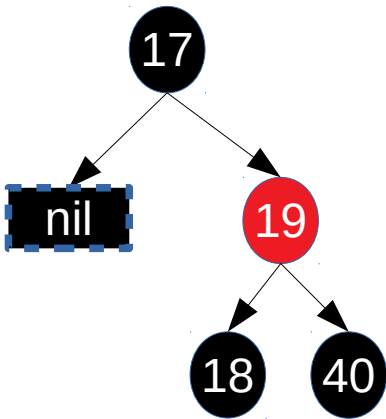
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)



# Remoção Nó Preto

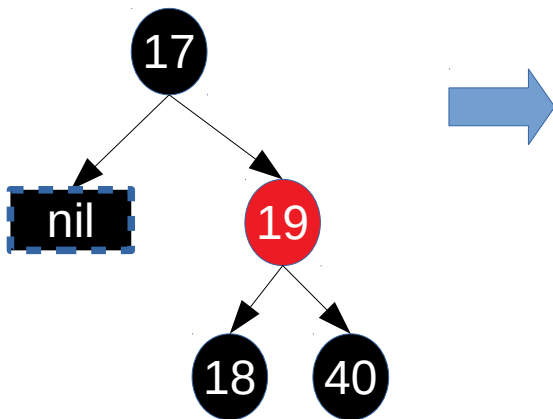
- Exemplo: remover **9** (continuação)
  - Mudamos as cores do pai e irmão.





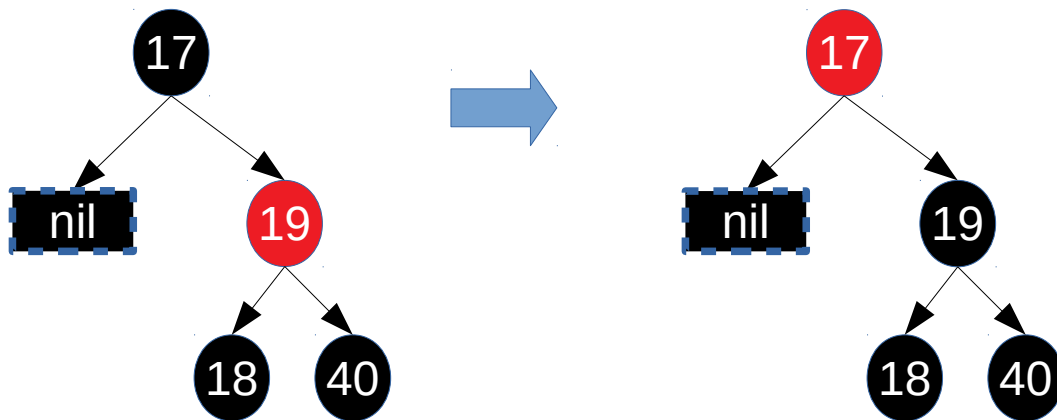
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
  - Mudamos as cores do pai e irmão.



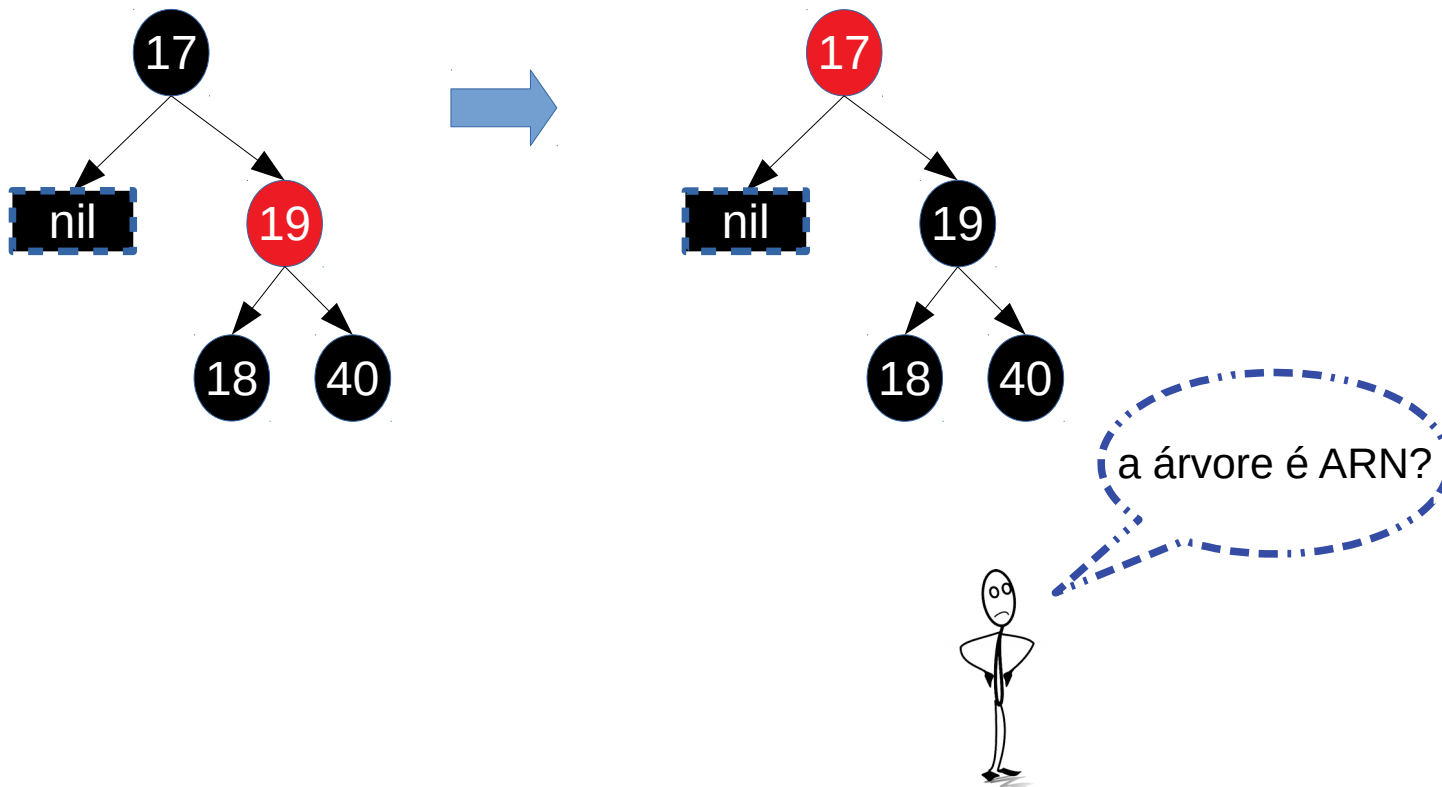
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
  - Mudamos as cores do pai e irmão.



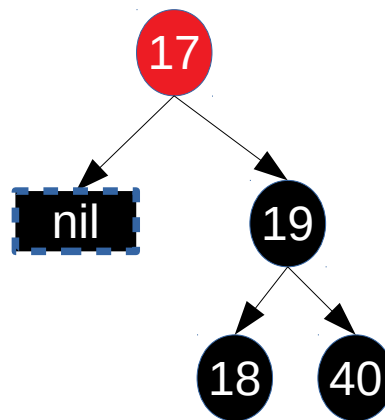
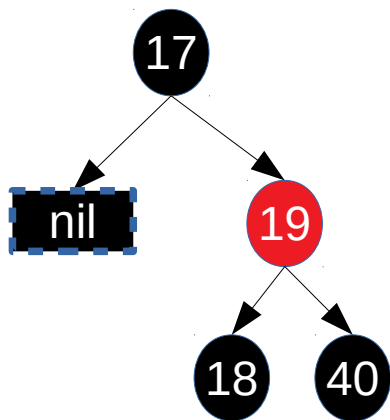
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
  - Mudamos as cores do pai e irmão.



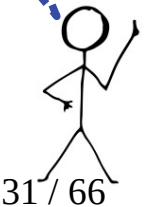
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
  - Mudamos as cores do pai e irmão.



a árvore ainda precisa de ajustes

a árvore é ARN?



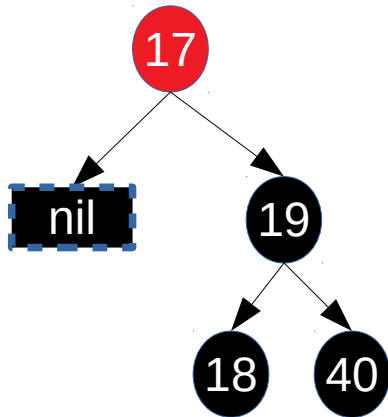
# Remoção Nó Preto

# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)

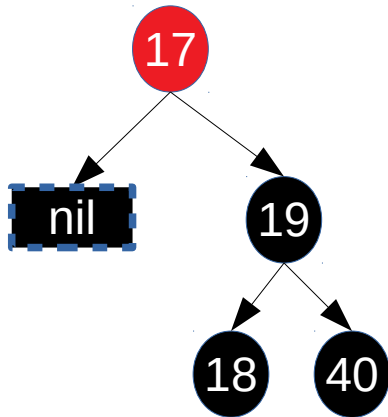
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)



# Remoção Nó Preto

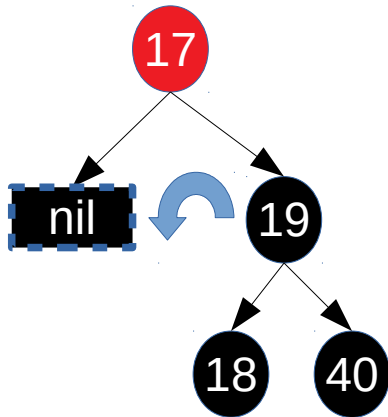
- Exemplo: remover **9** (continuação)
  - Rotacionamos em direção ao nó removido.





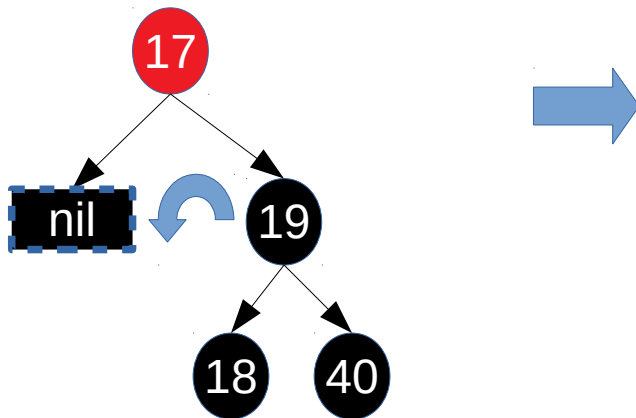
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
  - Rotacionamos em direção ao nó removido.



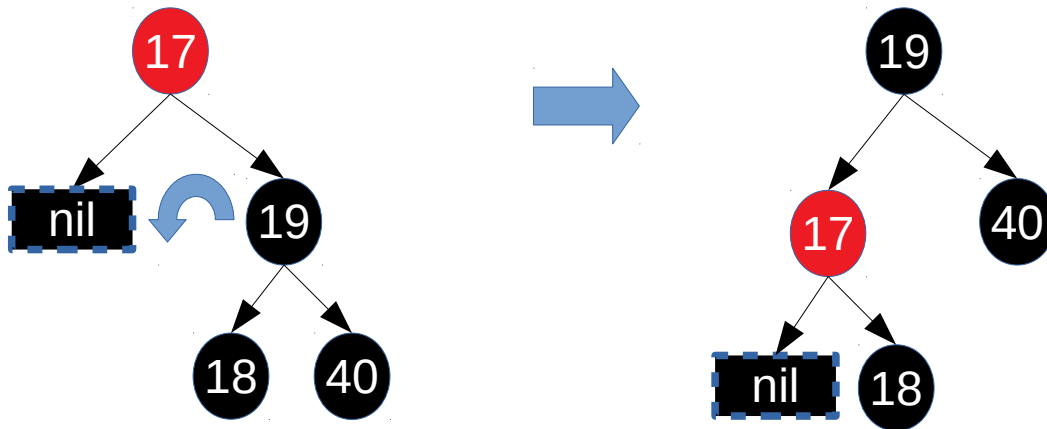
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
  - Rotacionamos em direção ao nó removido.



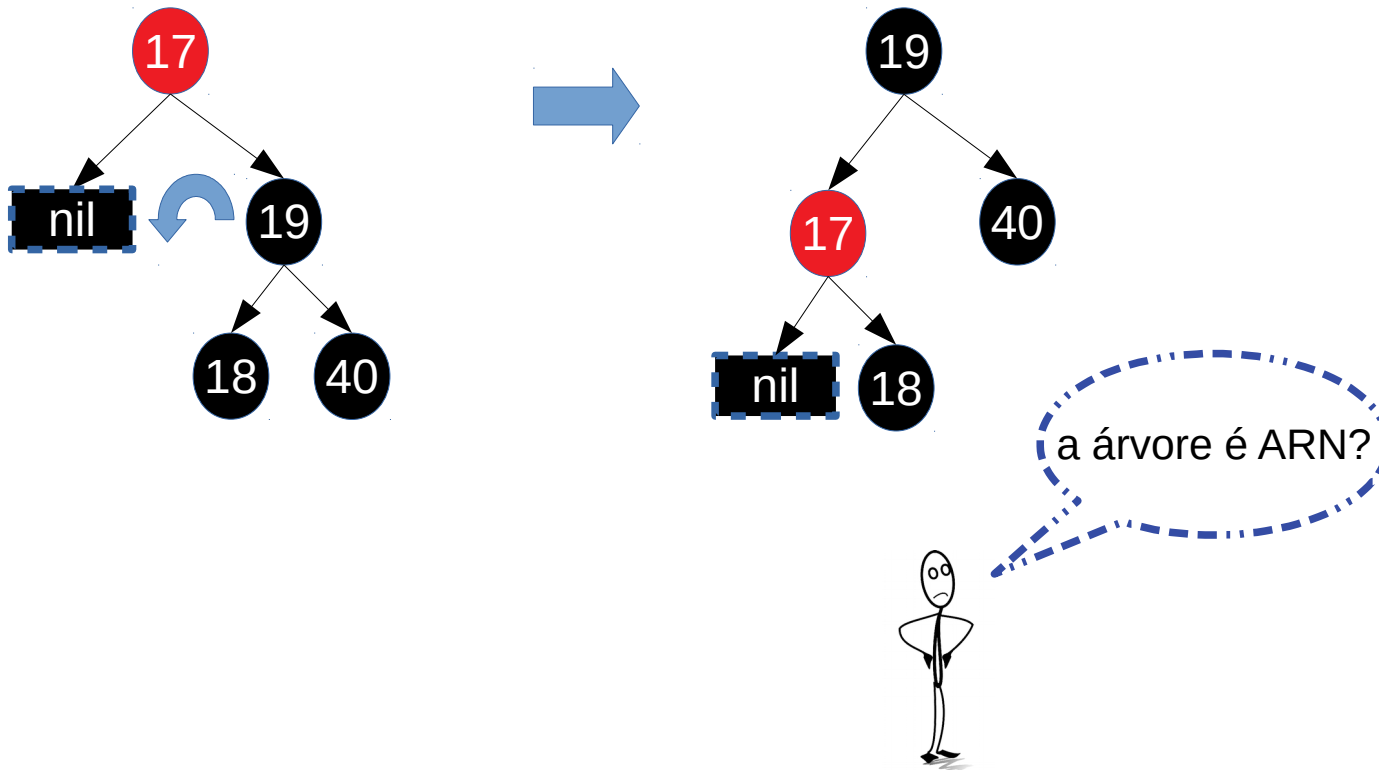
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
  - Rotacionamos em direção ao nó removido.



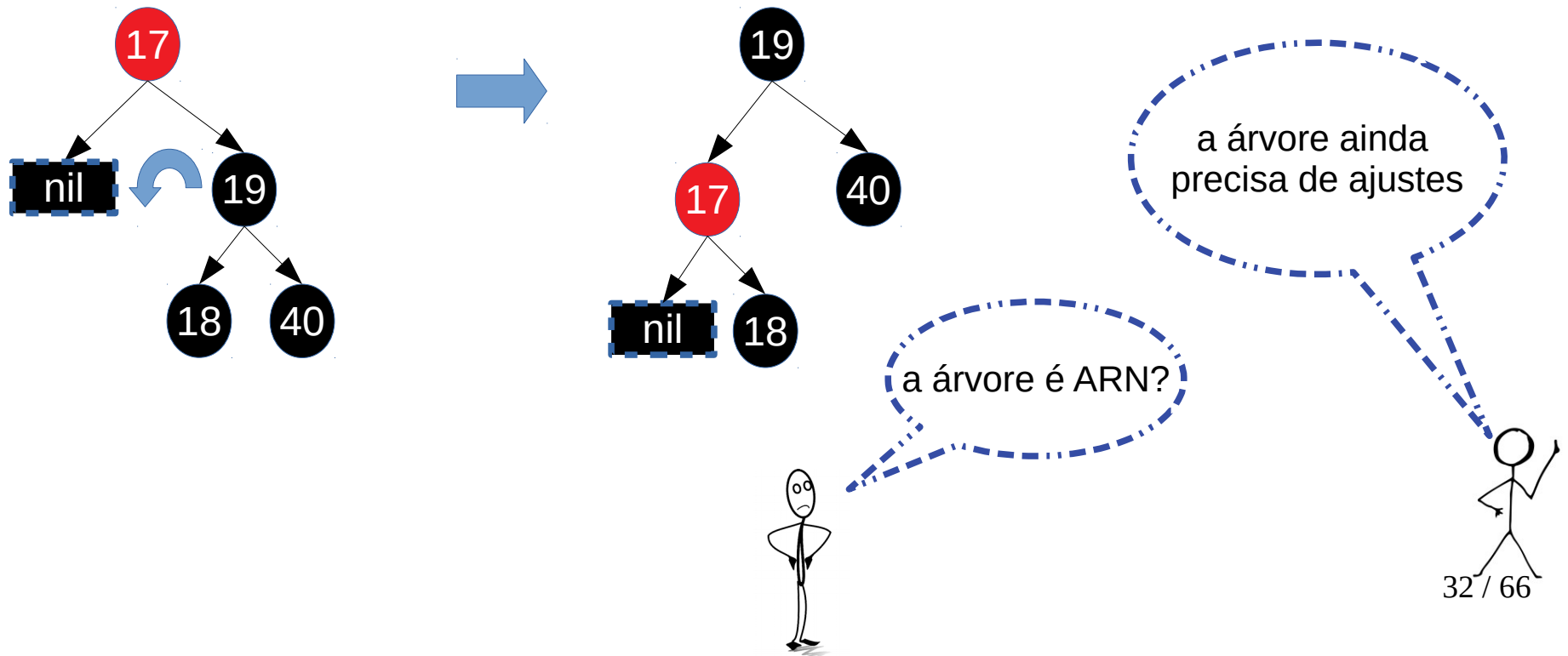
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
  - Rotacionamos em direção ao nó removido.



# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
  - Rotacionamos em direção ao nó removido.



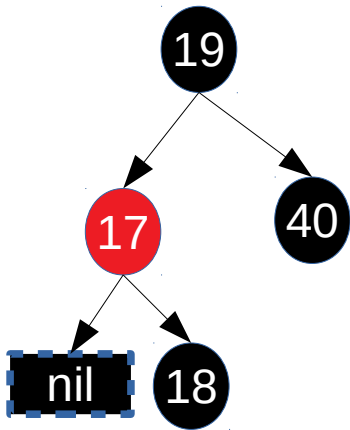
# Remoção Nó Preto

# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)

# Remoção Nó Preto

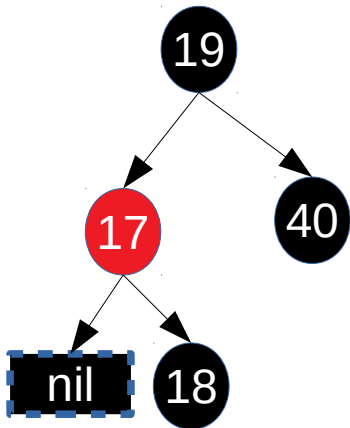
- Exemplo: remover **9** (continuação)





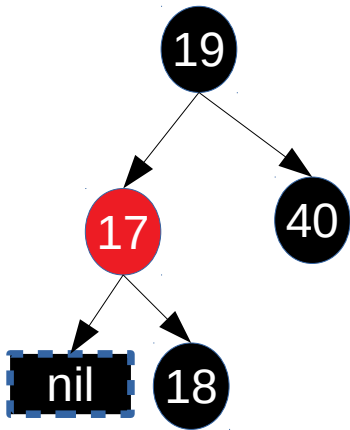
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
  - Trocamos as cores do pai (17) e do irmão (18)



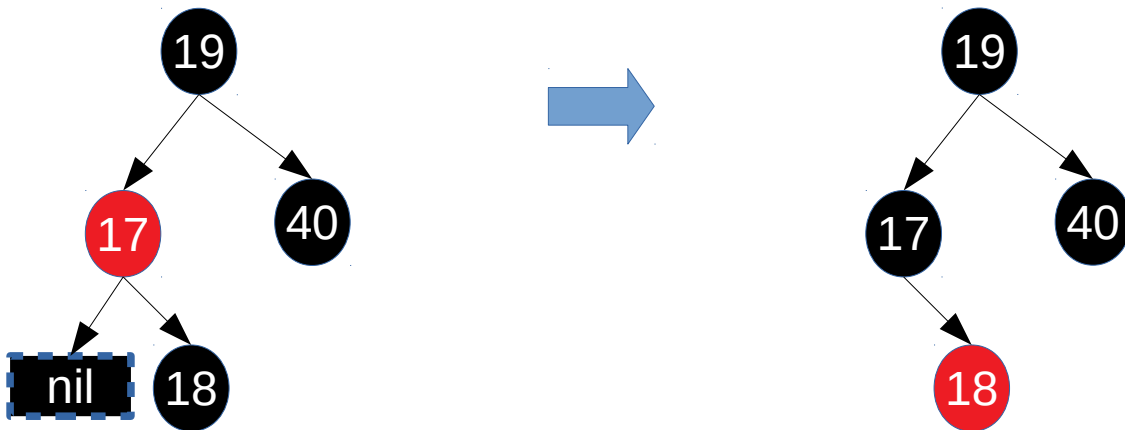
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
  - Trocamos as cores do pai (17) e do irmão (18)



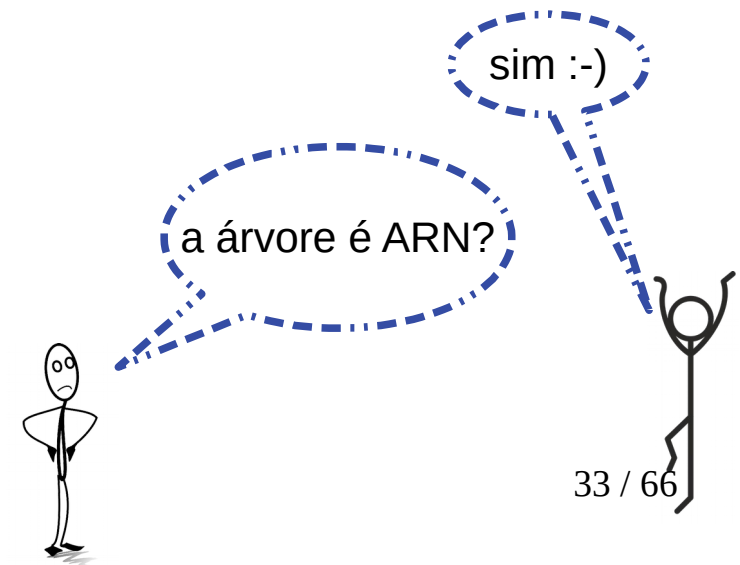
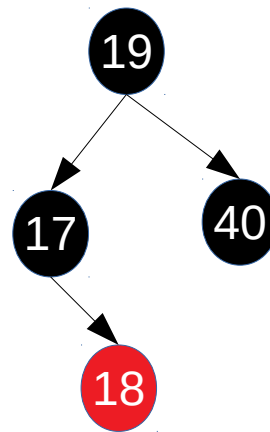
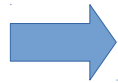
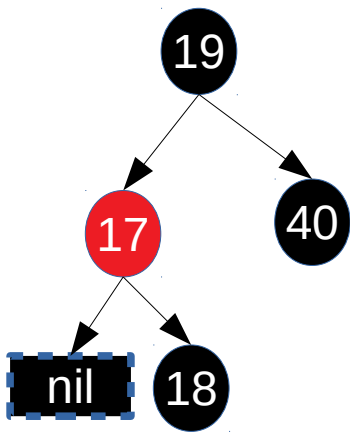
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
  - Trocamos as cores do pai (17) e do irmão (18)



# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
  - Trocamos as cores do pai (17) e do irmão (18)



# Remoção Nó Preto

# Remoção Nó Preto

- Situação 4

# Remoção Nó Preto

- Situação 4
  - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.

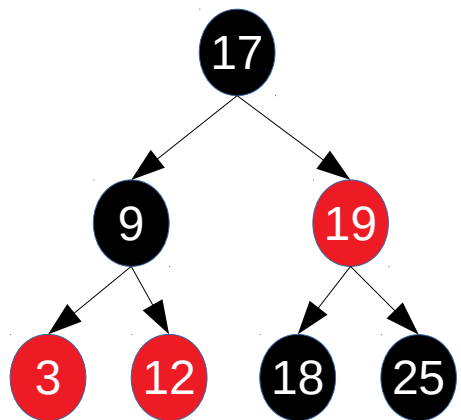
# Remoção Nó Preto

- Situação 4
  - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo



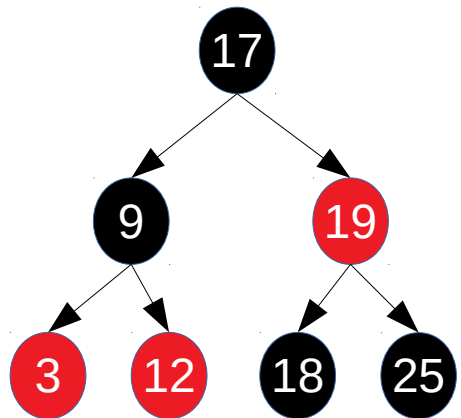
# Remoção Nó Preto

- Situação 4
  - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo



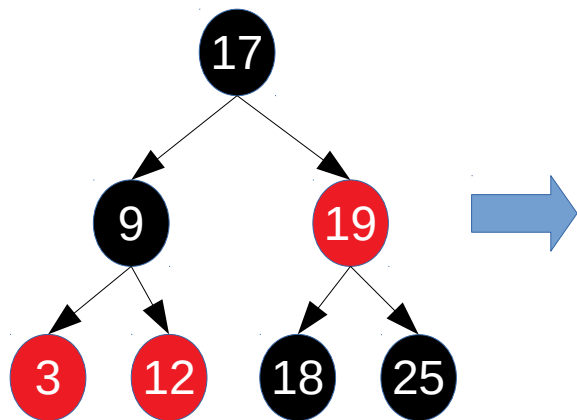
# Remoção Nó Preto

- Situação 4
  - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo
  - Remover o **25**.



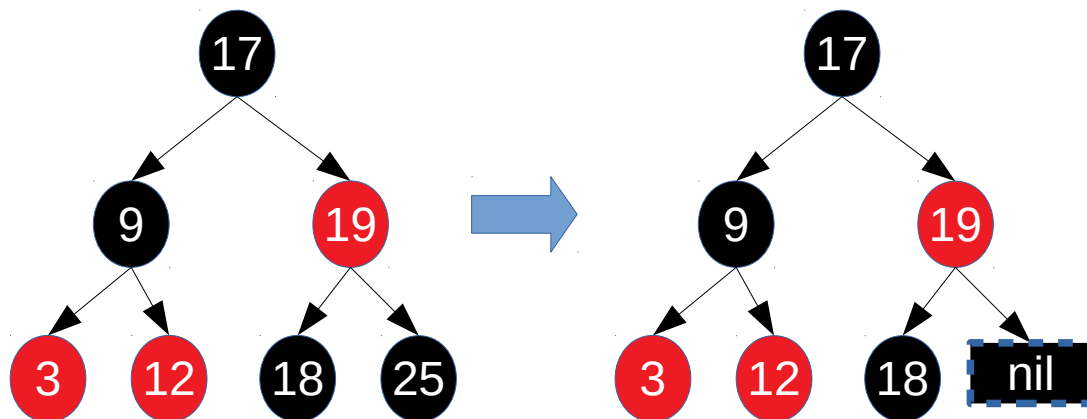
# Remoção Nó Preto

- Situação 4
  - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo
  - Remover o **25**.



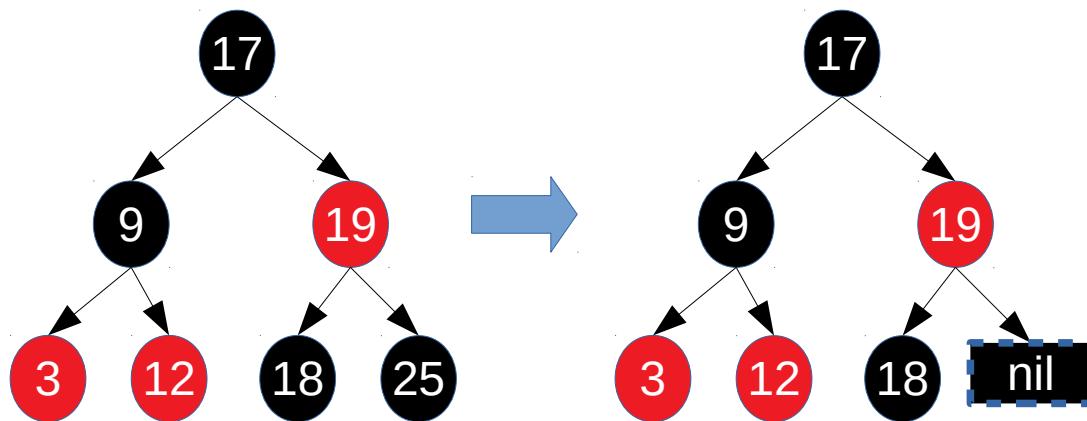
# Remoção Nó Preto

- Situação 4
  - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo
  - Remover o **25**.



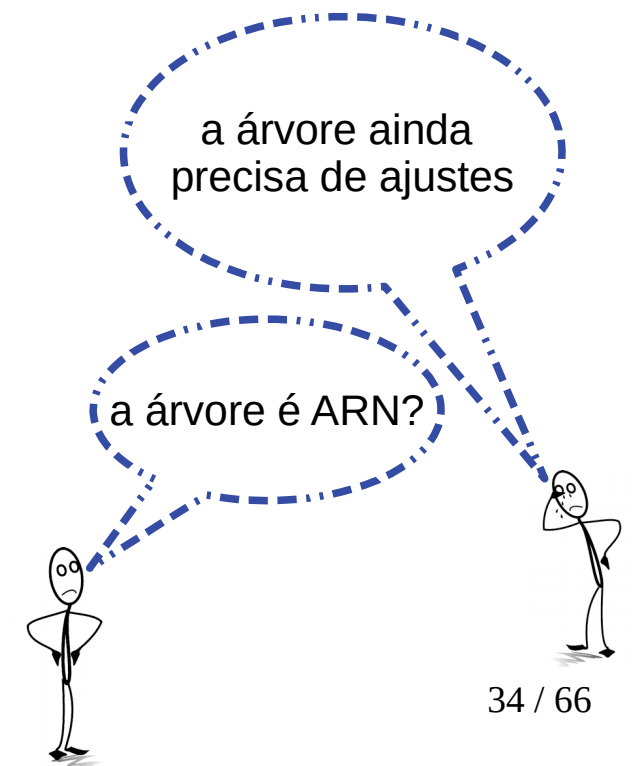
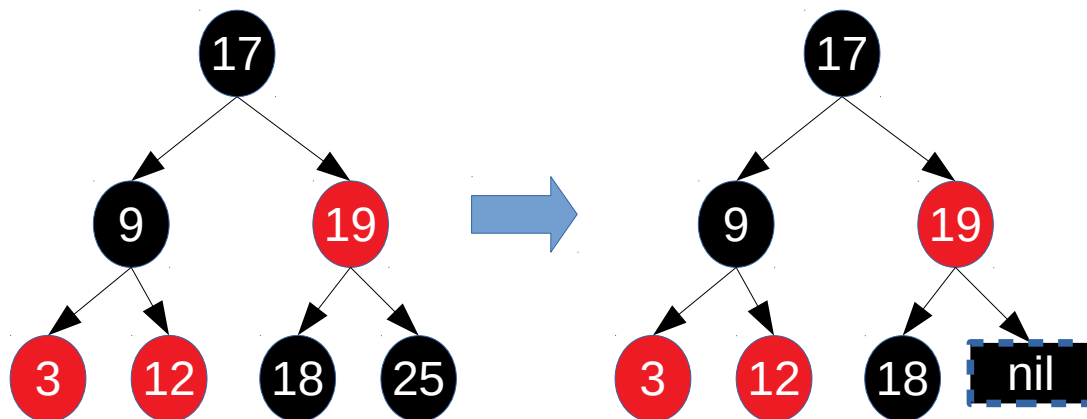
# Remoção Nó Preto

- Situação 4
  - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo
  - Remover o **25**.



# Remoção Nó Preto

- Situação 4
  - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo
  - Remover o **25**.



# Remoção Nó Preto

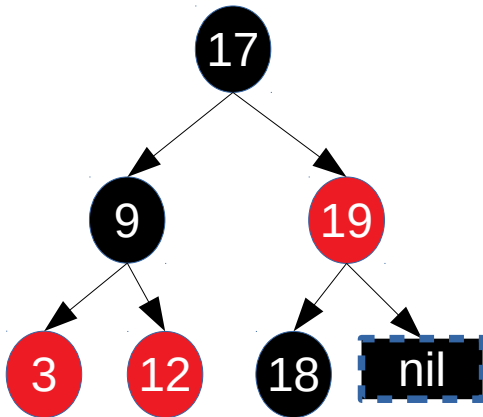
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **25** (continuação)



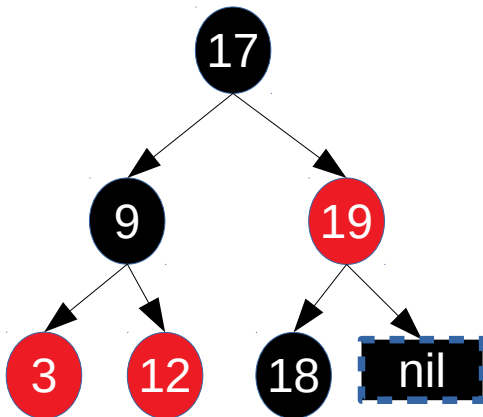
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **25** (continuação)



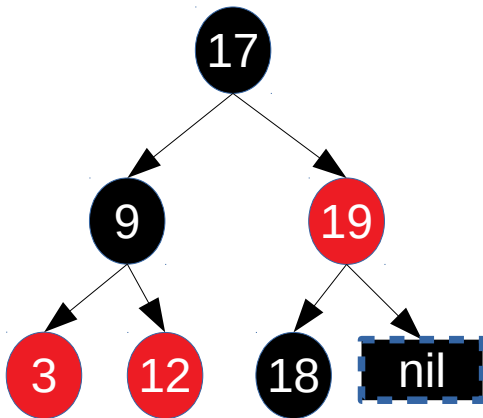
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **25** (continuação)
  - Recolorimos o pai (19) e o irmão (18).



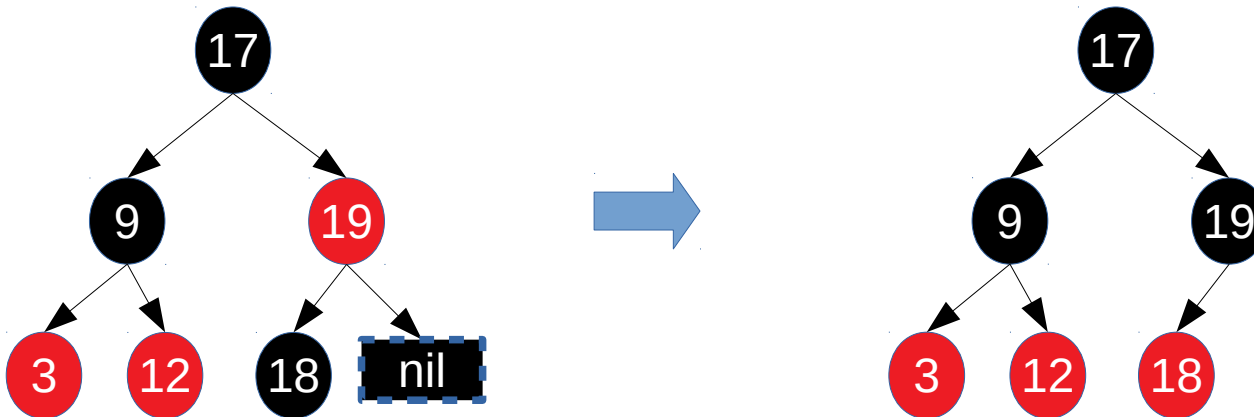
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **25** (continuação)
  - Recolorimos o pai (19) e o irmão (18).



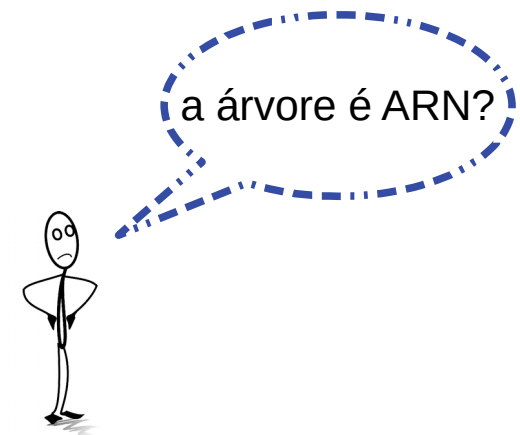
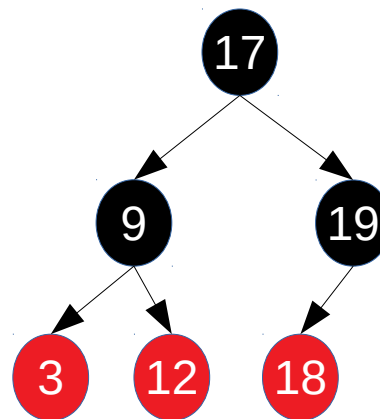
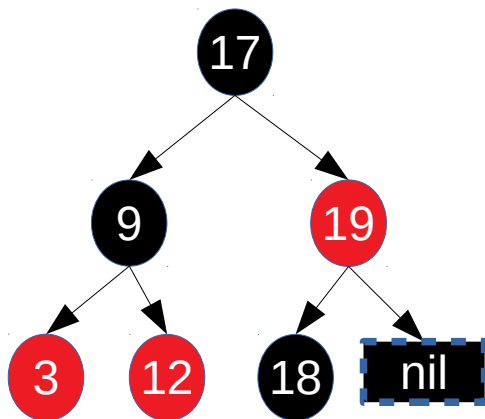
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **25** (continuação)
  - Recolorimos o pai (19) e o irmão (18).



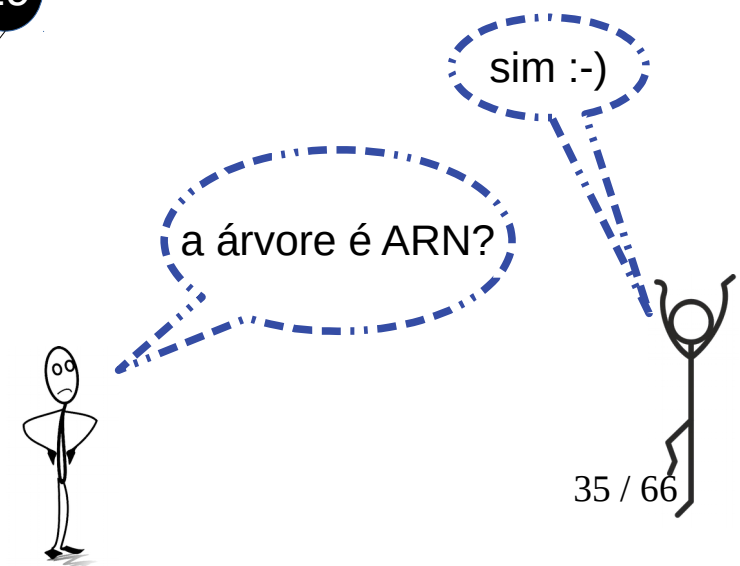
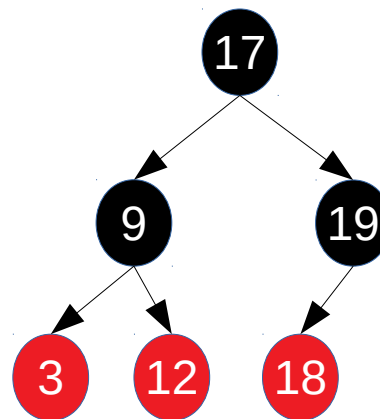
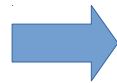
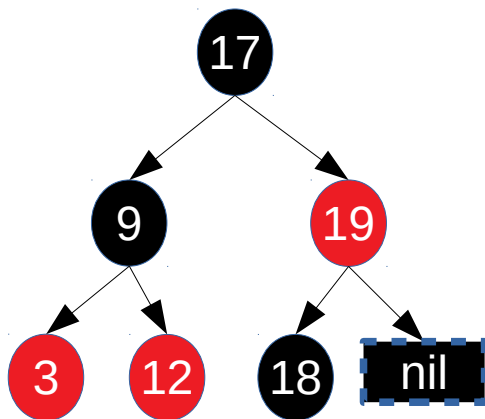
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **25** (continuação)
  - Recolorimos o pai (19) e o irmão (18).



# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **25** (continuação)
  - Recolorimos o pai (19) e o irmão (18).



# Remoção Nó Preto

# Remoção Nó Preto

- Situação 5



# Remoção Nó Preto

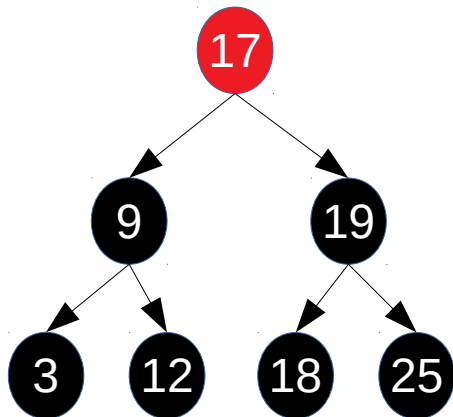
- Situação 5
  - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.

# Remoção Nó Preto

- Situação 5
  - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:

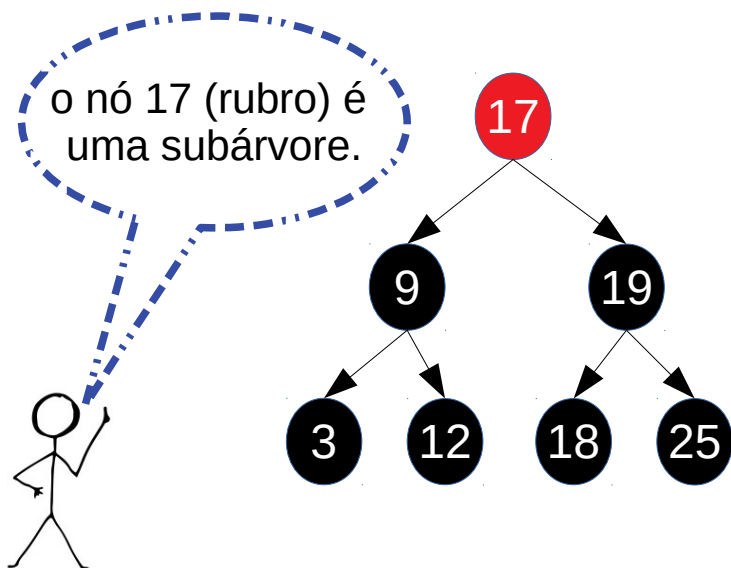
# Remoção Nó Preto

- Situação 5
  - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:



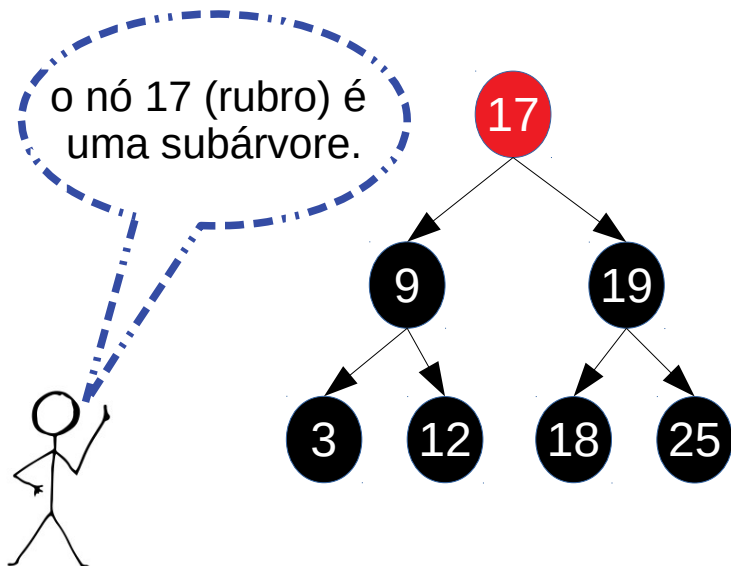
# Remoção Nó Preto

- Situação 5
  - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:



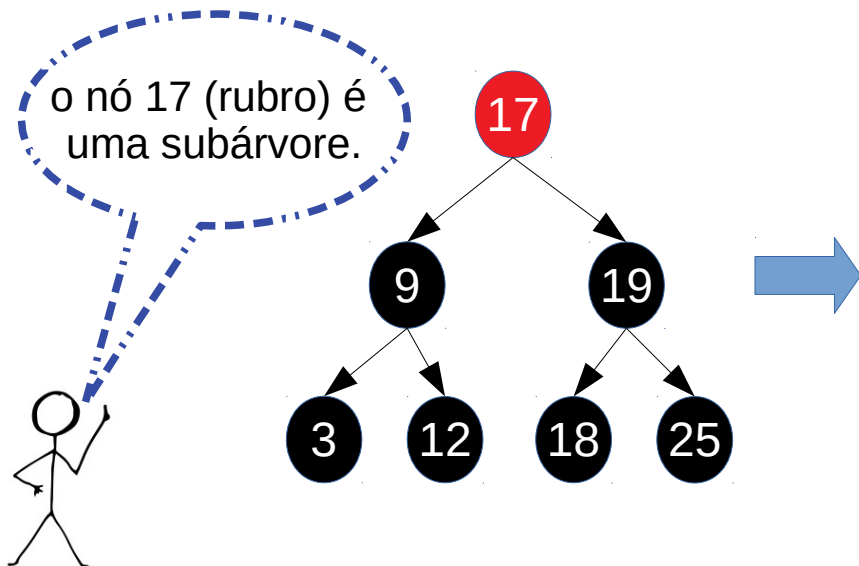
# Remoção Nó Preto

- Situação 5
  - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:
  - Remover o nó **18**.



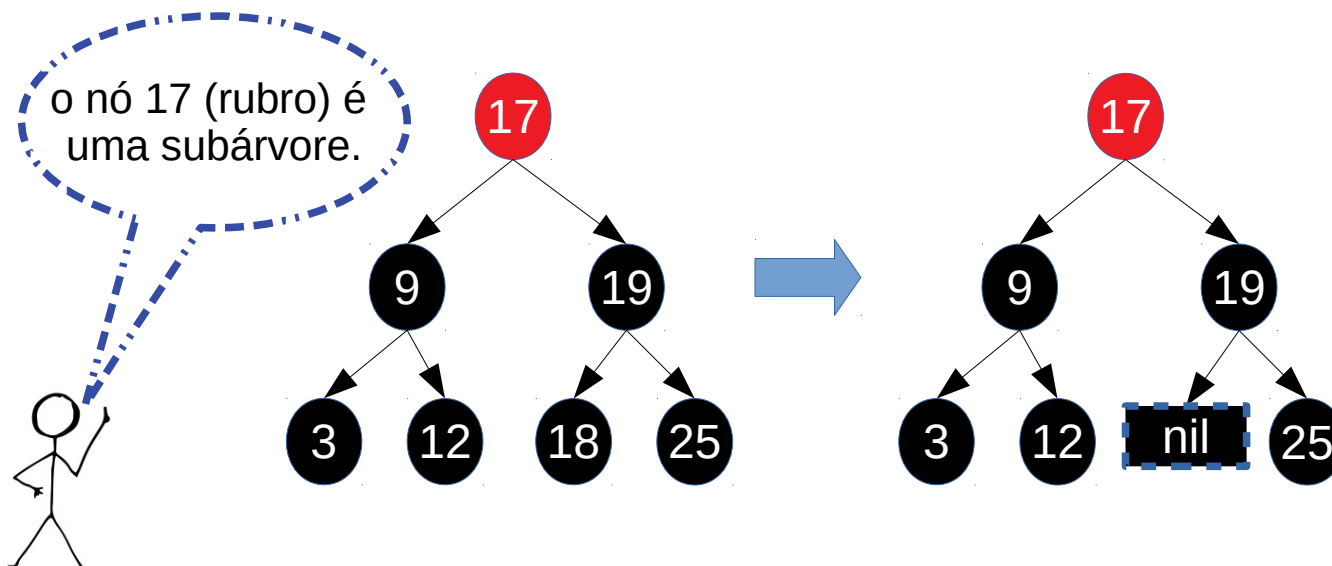
# Remoção Nó Preto

- Situação 5
  - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:
  - Remover o nó **18**.



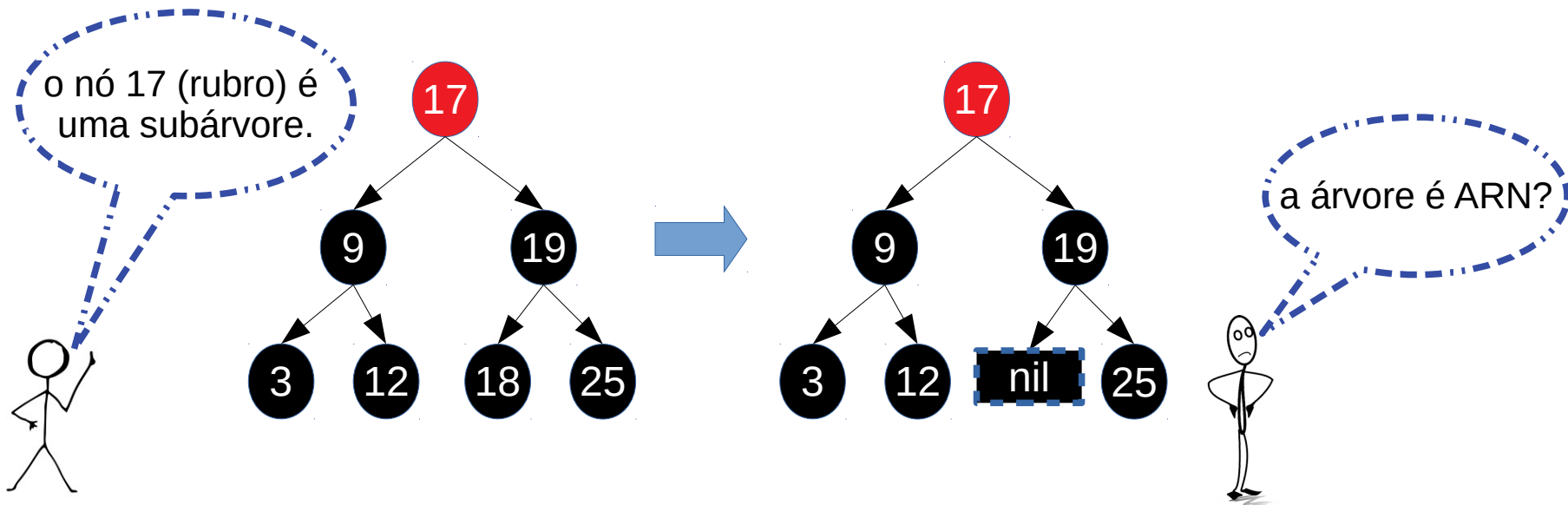
# Remoção Nó Preto

- Situação 5
  - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:
  - Remover o nó **18**.



# Remoção Nó Preto

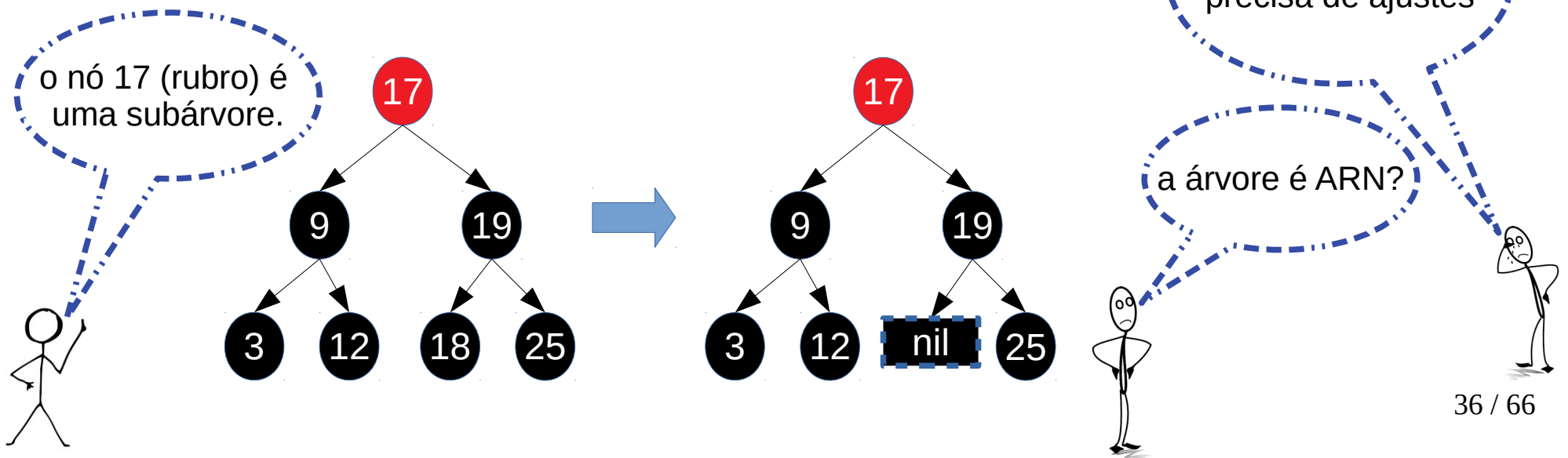
- Situação 5
  - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:
  - Remover o nó **18**.





# Remoção Nó Preto

- Situação 5
  - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:
  - Remover o nó **18**.



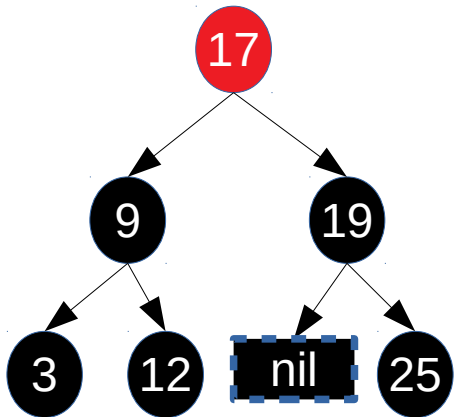
# Remoção Nó Preto

# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).

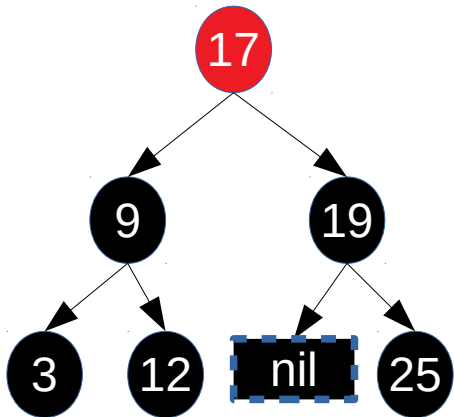
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).



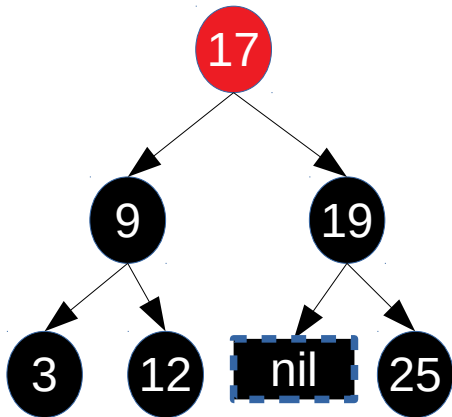
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Colorimos o irmão (25) de vermelho, o tio de vermelho (9) e o avô (17) de preto.



# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Colorimos o irmão (25) de vermelho, o tio de vermelho (9) e o avô (17) de preto.



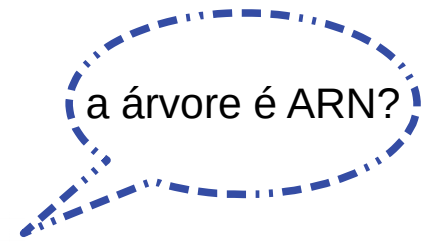
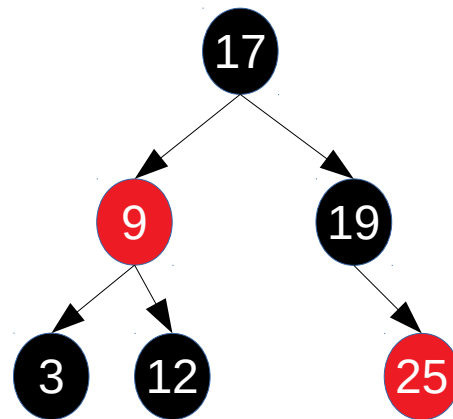
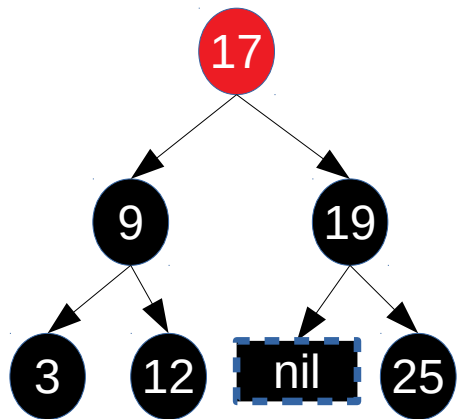
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Colorimos o irmão (25) de vermelho, o tio de vermelho (9) e o avô (17) de preto.



# Remoção Nó Preto

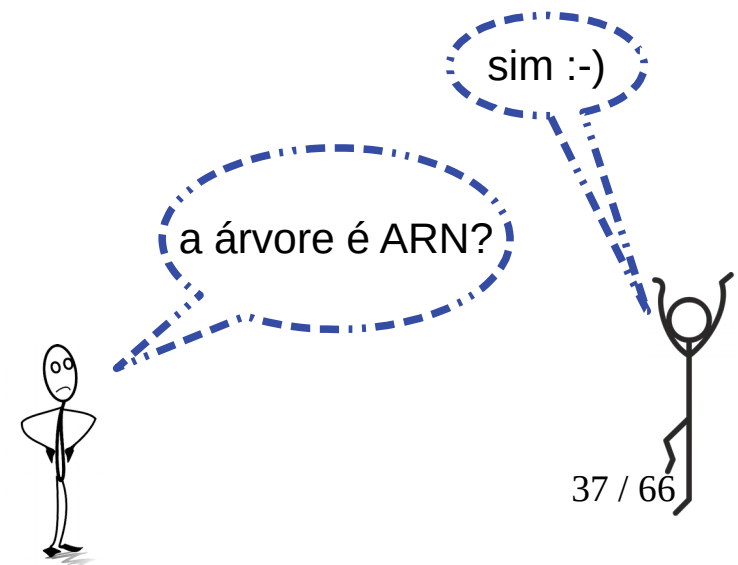
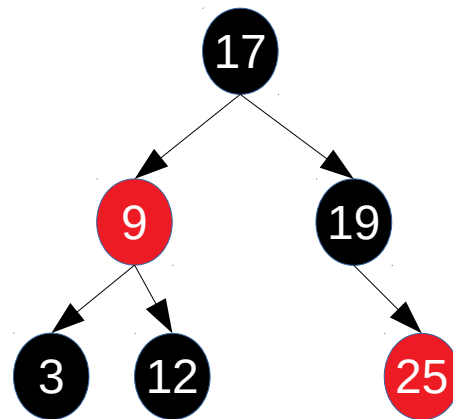
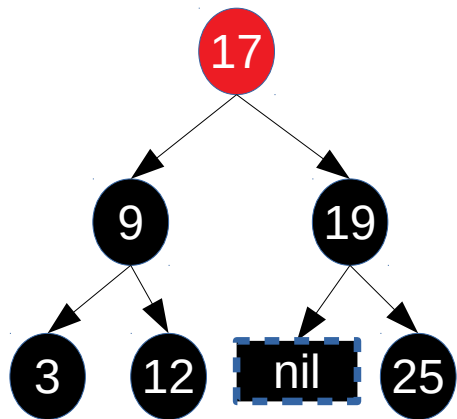
- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Colorimos o irmão (25) de vermelho, o tio de vermelho (9) e o avô (17) de preto.





# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Colorimos o irmão (25) de vermelho, o tio de vermelho (9) e o avô (17) de preto.



# Remoção Nó Preto

# Remoção Nó Preto

- Situação 6

# Remoção Nó Preto

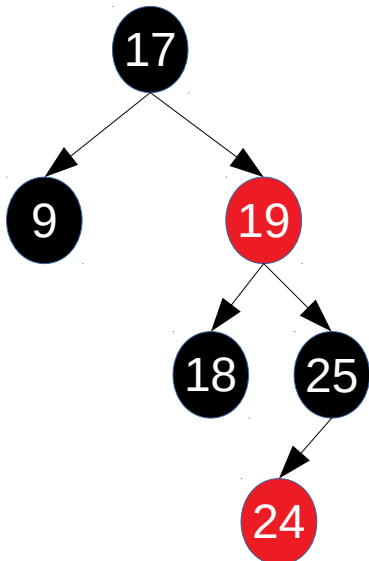
- Situação 6
  - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.

# Remoção Nó Preto

- Situação 6
  - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.
- Exemplo:

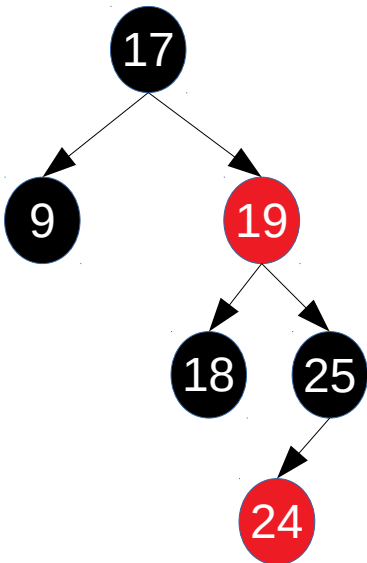
# Remoção Nó Preto

- Situação 6
  - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.
- Exemplo:



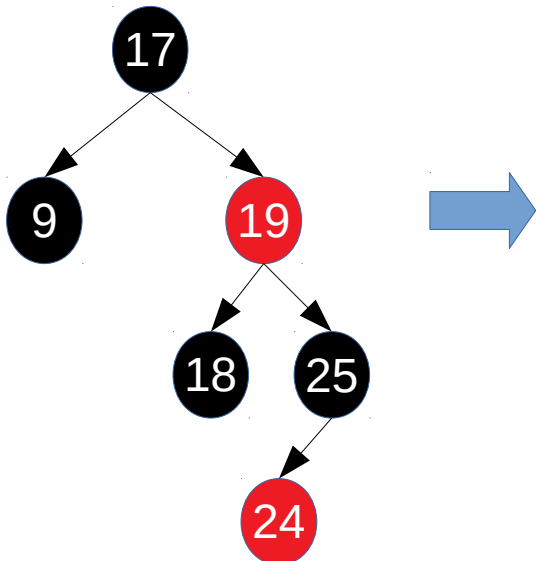
# Remoção Nó Preto

- Situação 6
  - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.
- Exemplo:
  - Remover o nó **18**.



# Remoção Nó Preto

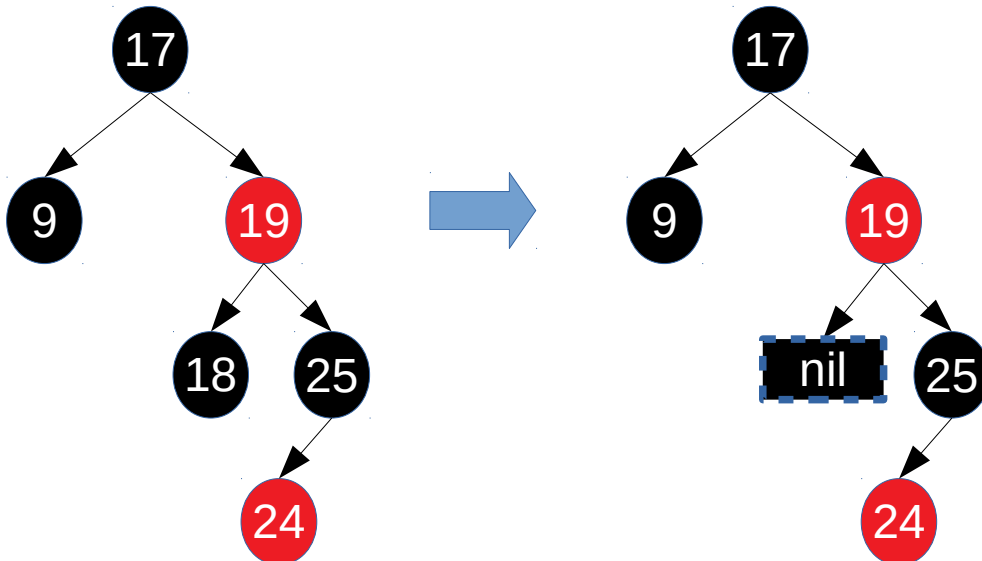
- Situação 6
  - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.
- Exemplo:
  - Remover o nó **18**.





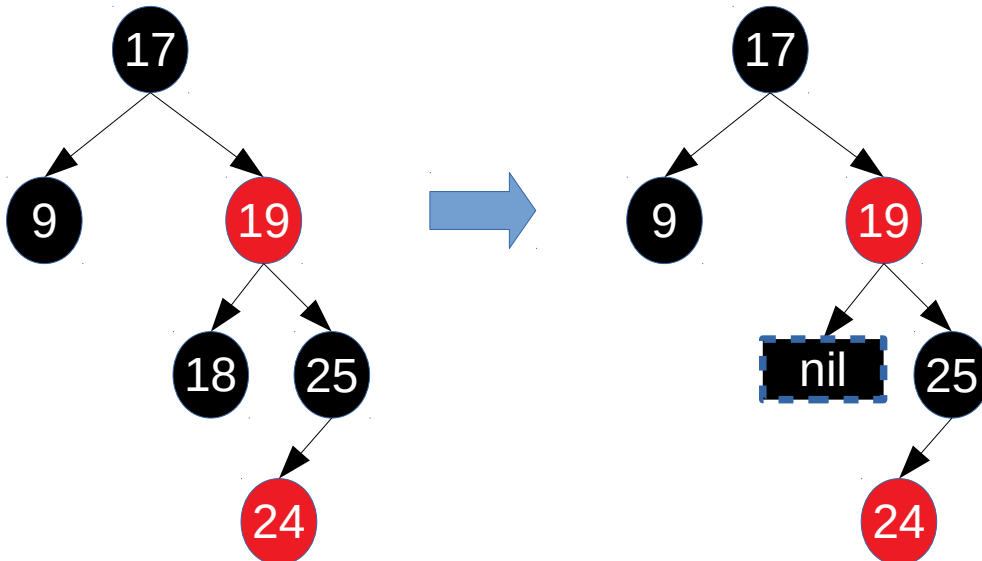
# Remoção Nó Preto

- Situação 6
  - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.
- Exemplo:
  - Remover o nó **18**.



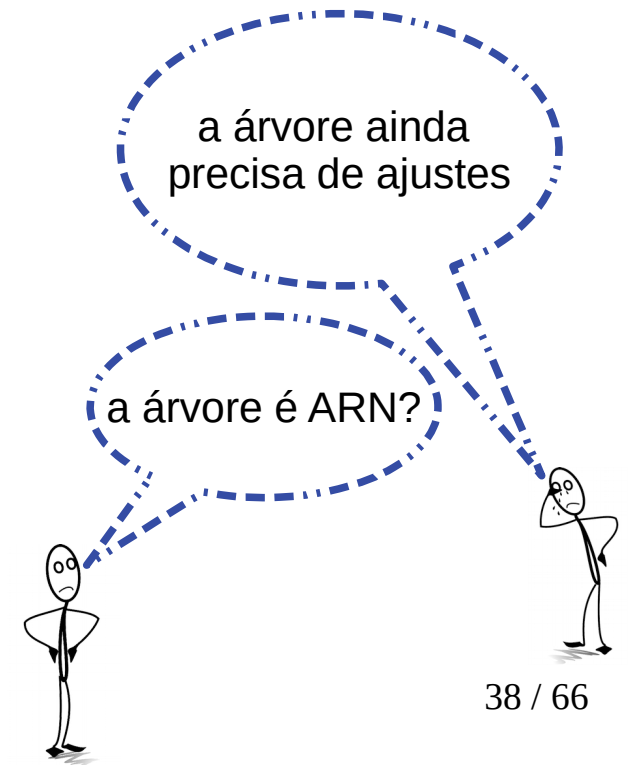
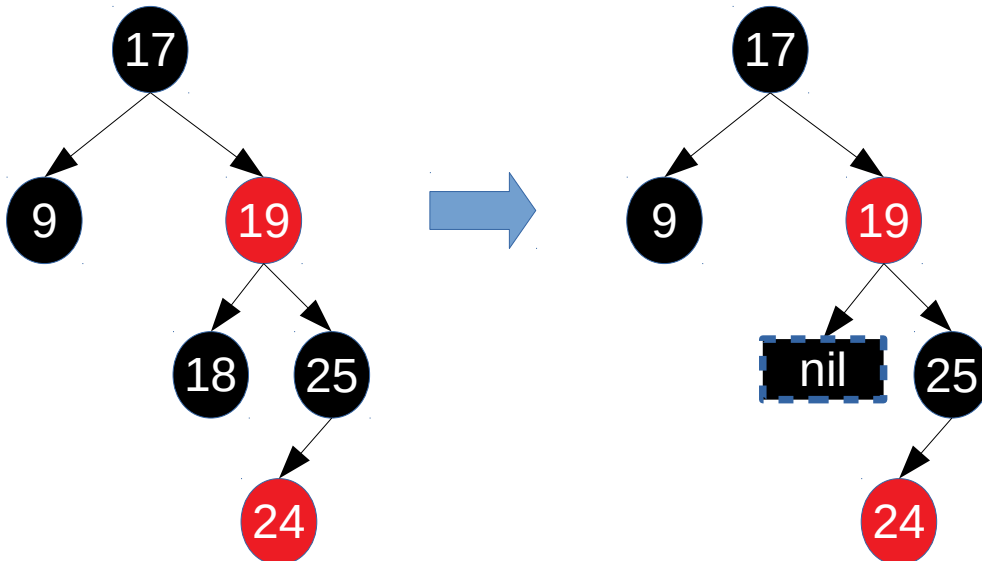
# Remoção Nó Preto

- Situação 6
  - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.
- Exemplo:
  - Remover o nó **18**.



# Remoção Nó Preto

- Situação 6
  - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.
- Exemplo:
  - Remover o nó **18**.



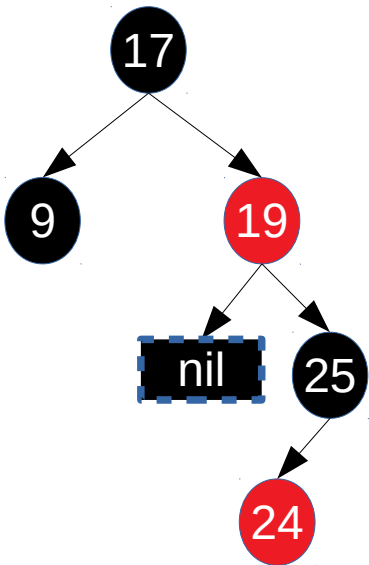
# Remoção Nó Preto

# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).

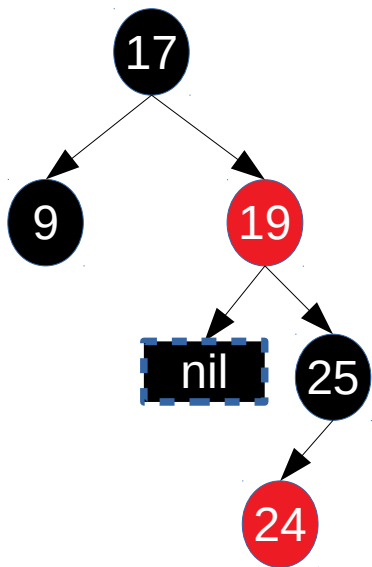
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).



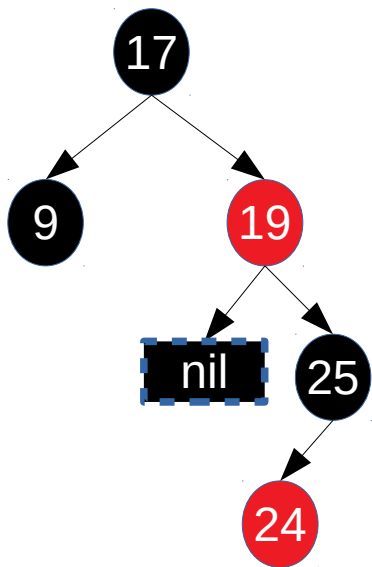
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Colorimos o irmão (25) de vermelho e o sobrinho (24) de preto.



# Remoção Nó Preto

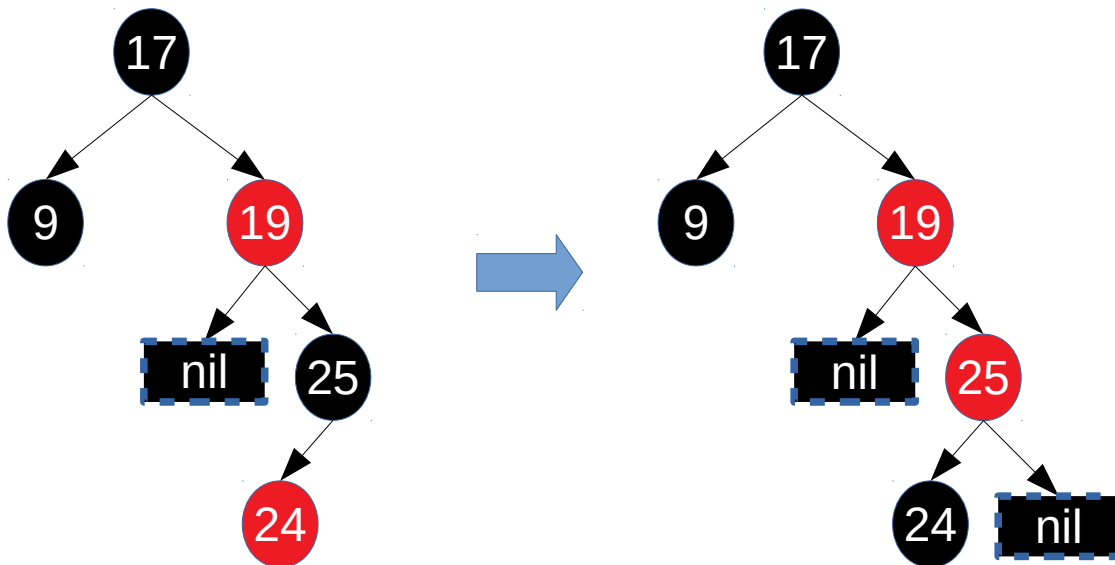
- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Colorimos o irmão (25) de vermelho e o sobrinho (24) de preto.





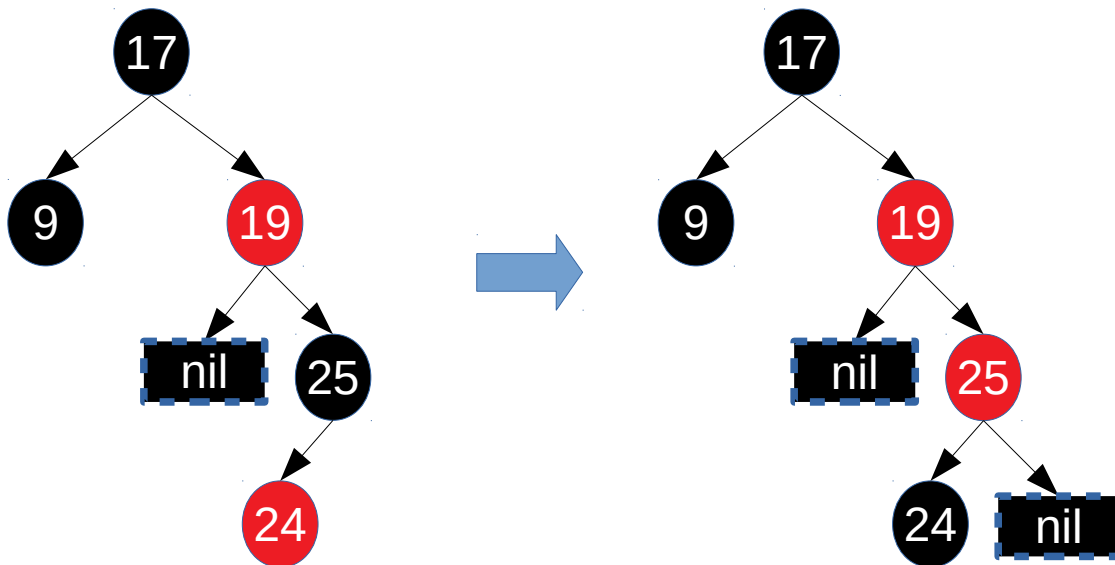
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Colorimos o irmão (25) de vermelho e o sobrinho (24) de preto.



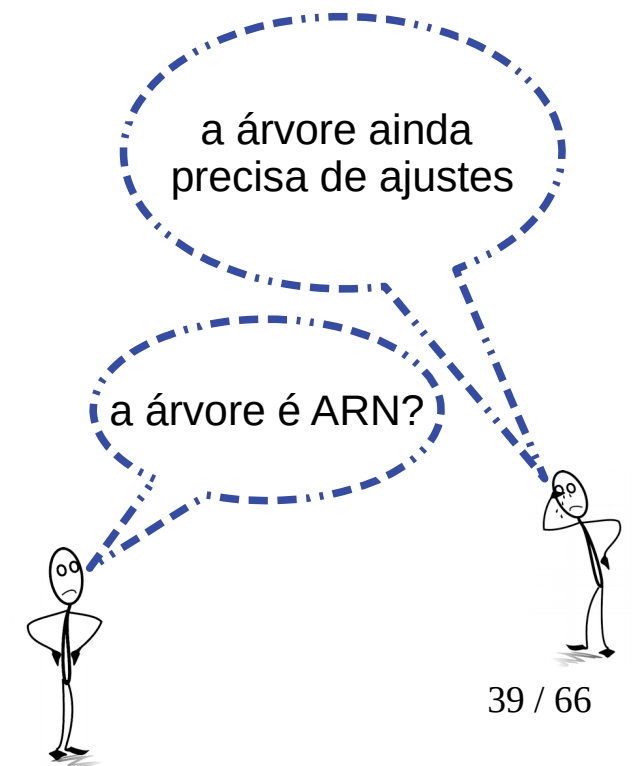
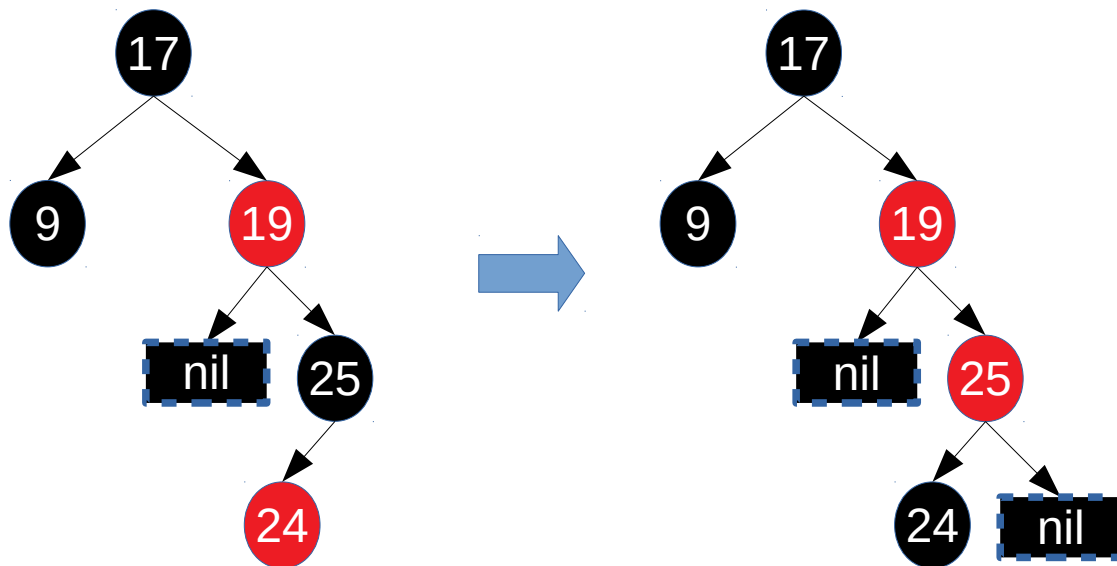
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Colorimos o irmão (25) de vermelho e o sobrinho (24) de preto.



# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Colorimos o irmão (25) de vermelho e o sobrinho (24) de preto.



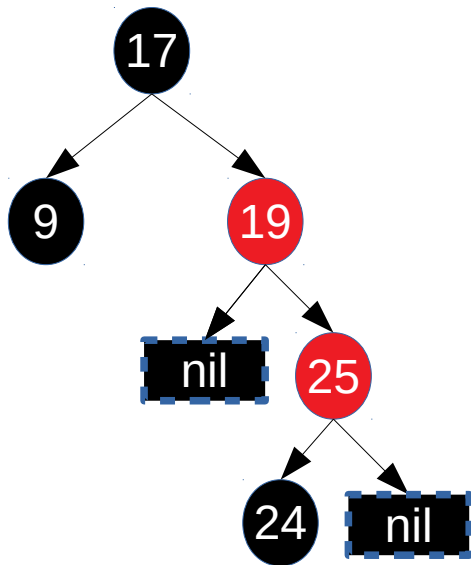
# Remoção Nó Preto

# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).

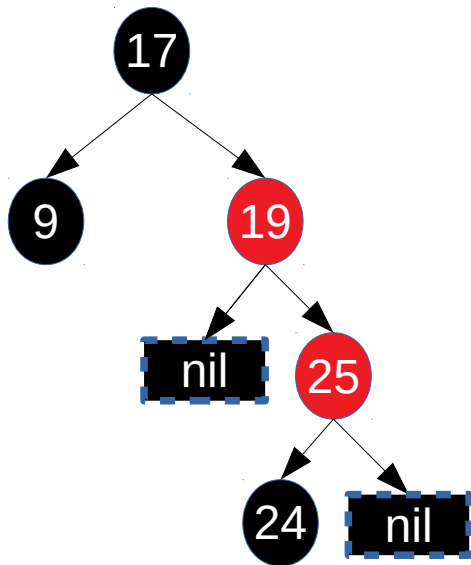
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).



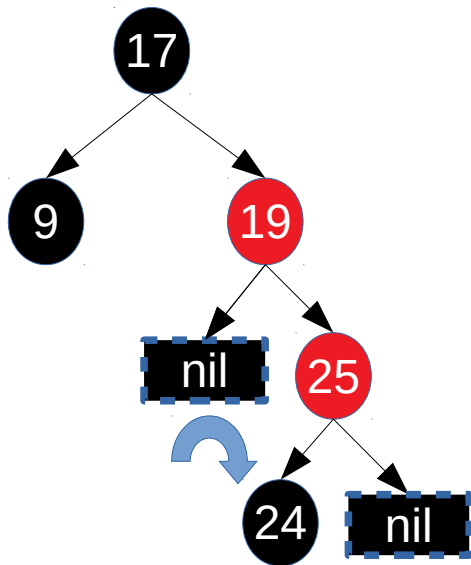
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Rotacionamento em torno do irmão (25).



# Remoção Nó Preto

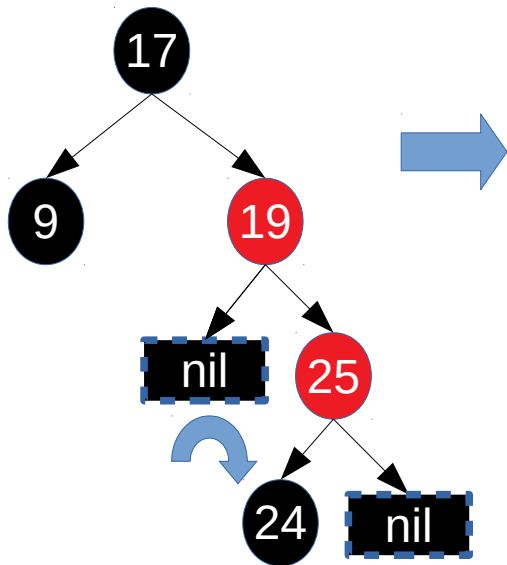
- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Rotacionamento em torno do irmão (25).





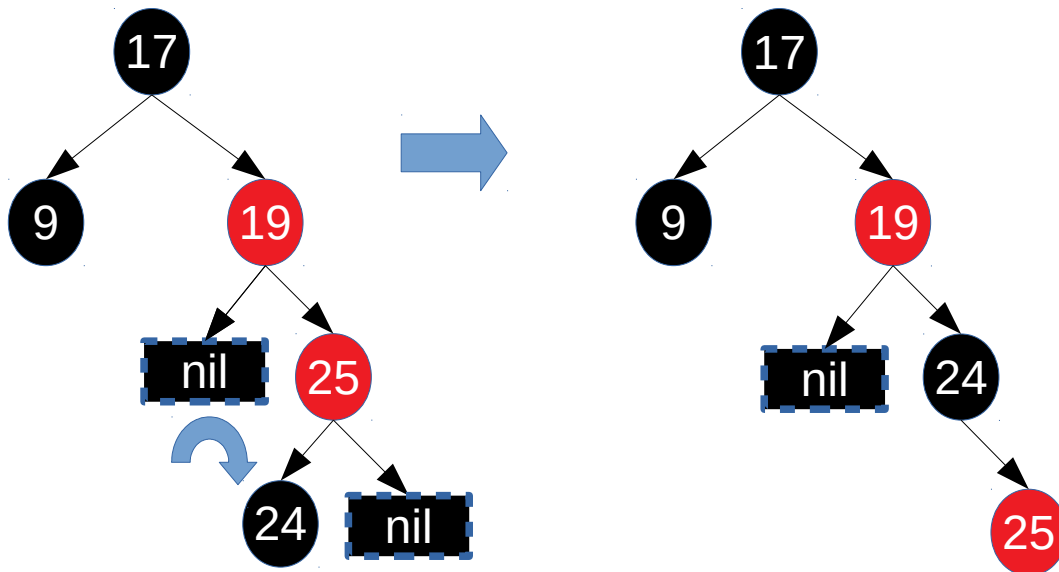
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Rotacionamento em torno do irmão (25).



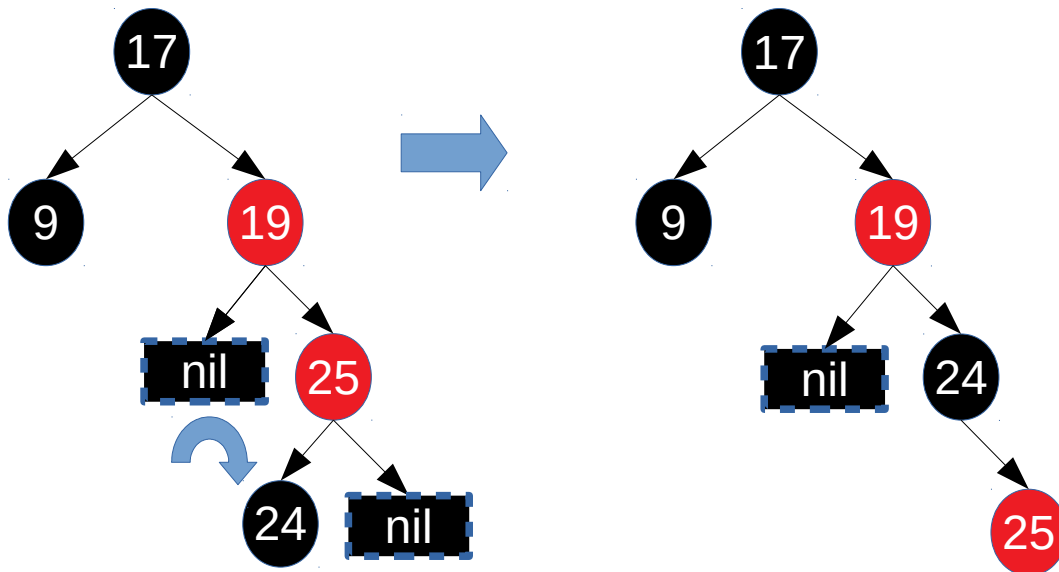
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Rotacionamento em torno do irmão (25).



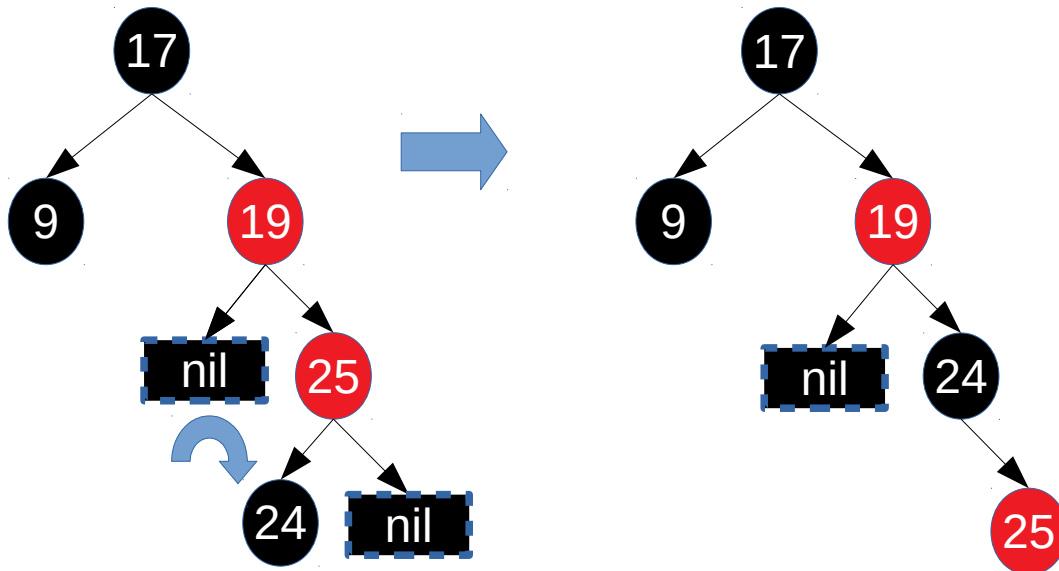
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Rotacionamento em torno do irmão (25).



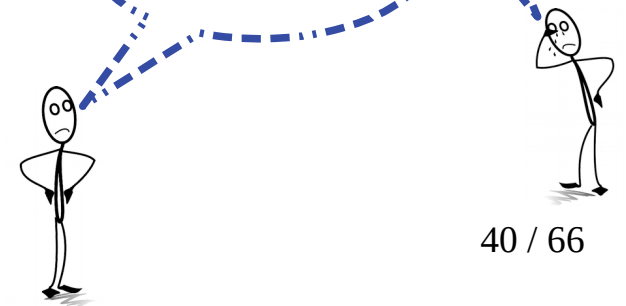
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Rotacionamento em torno do irmão (25).



a árvore ainda precisa de ajustes

a árvore é ARN?



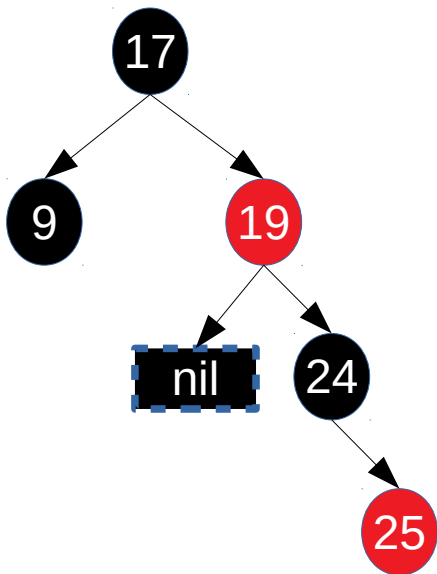
# Remoção Nó Preto

# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).

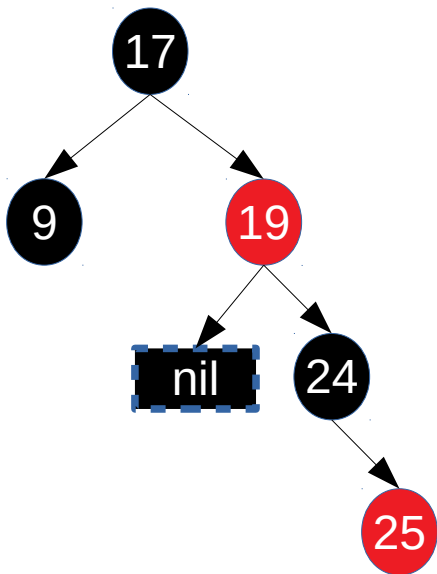
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).



# Remoção Nó Preto

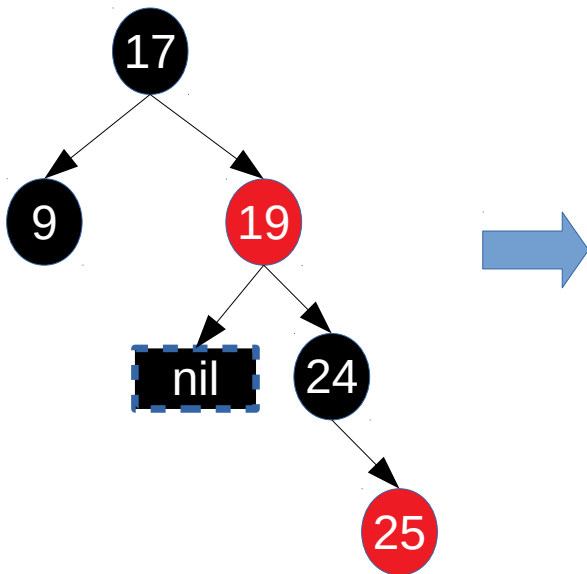
- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Coloração pai (19), irmão (24) e sobrinho (25).





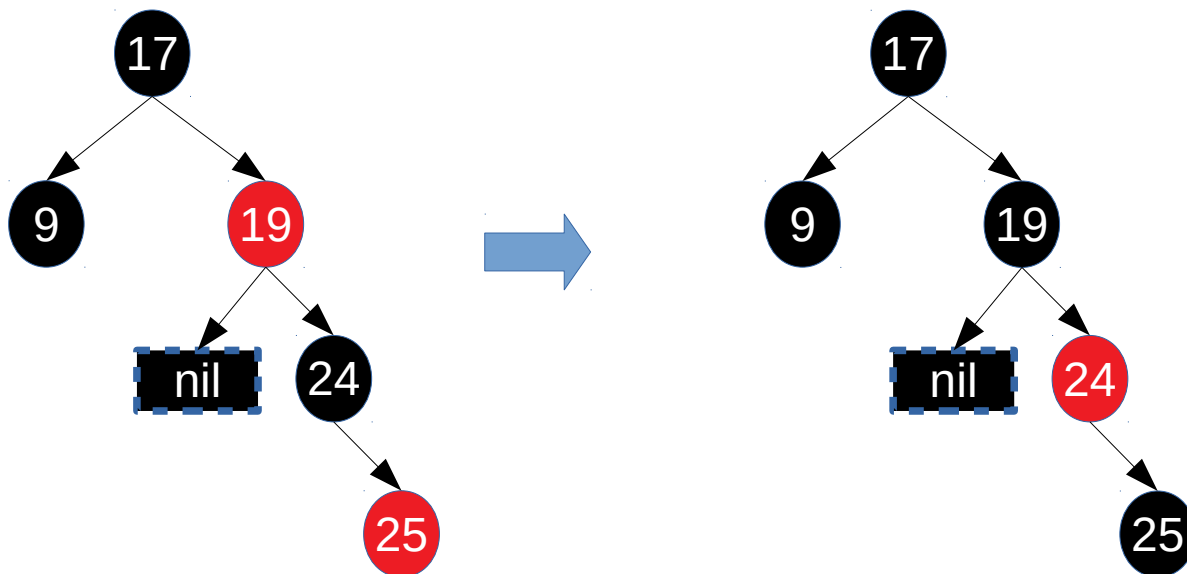
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Coloração pai (19), irmão (24) e sobrinho (25).



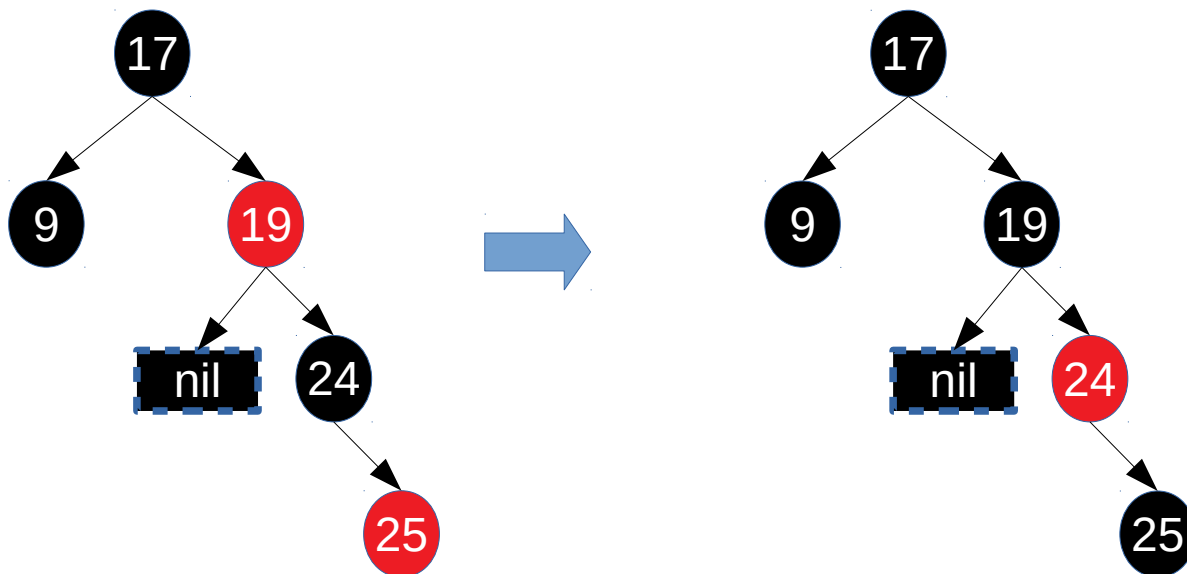
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Coloração pai (19), irmão (24) e sobrinho (25).



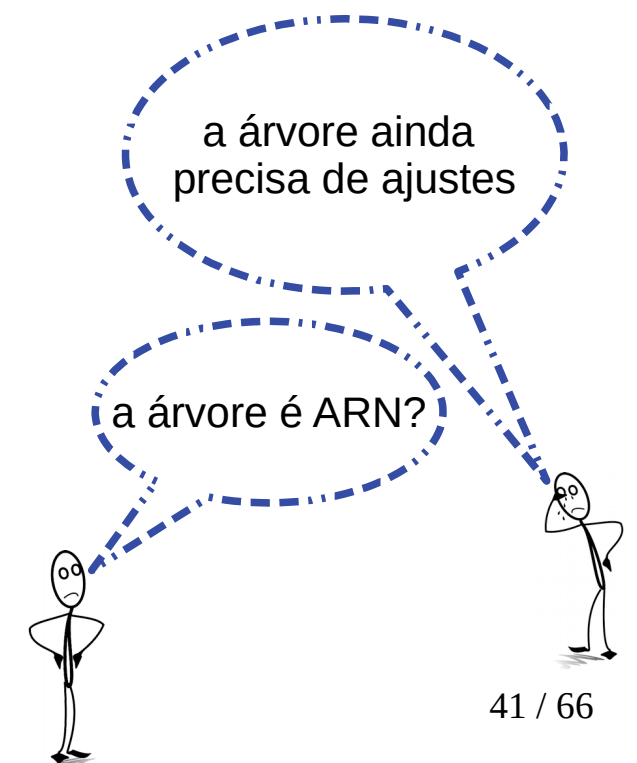
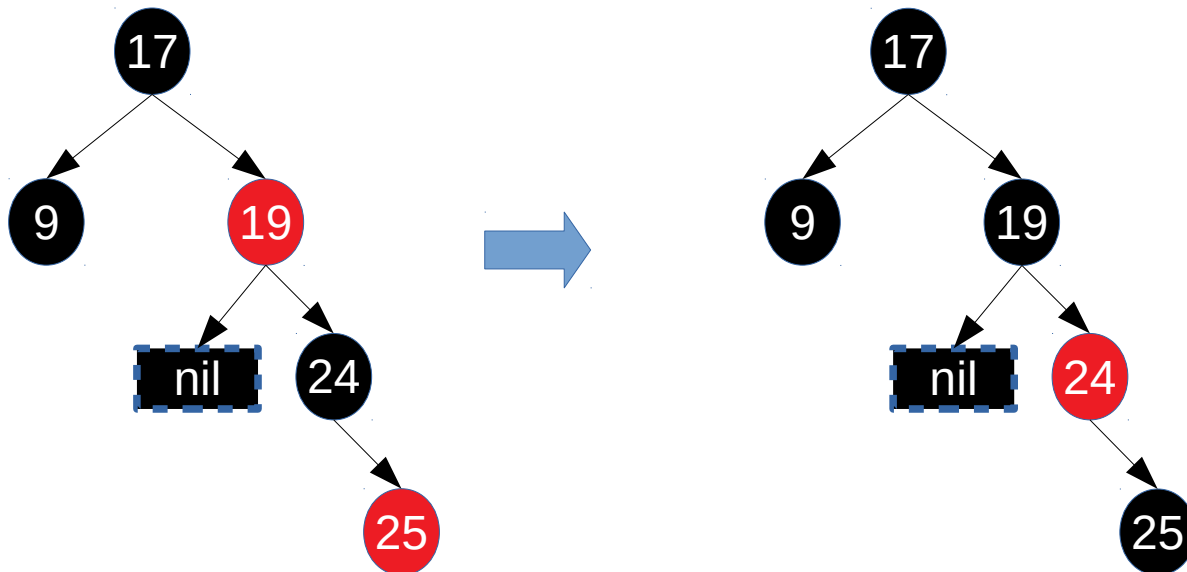
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Coloração pai (19), irmão (24) e sobrinho (25).



# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Coloração pai (19), irmão (24) e sobrinho (25).



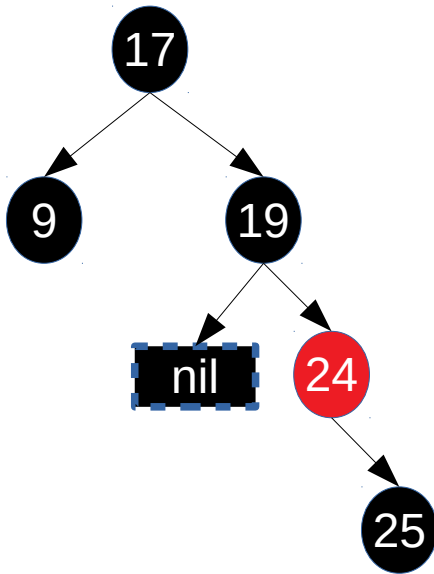
# Remoção Nó Preto

# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).

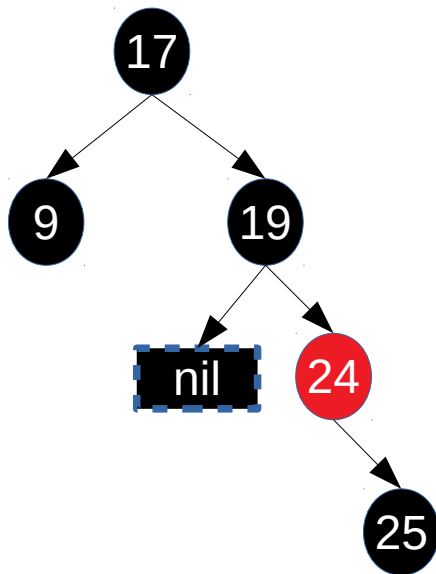
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).



# Remoção Nó Preto

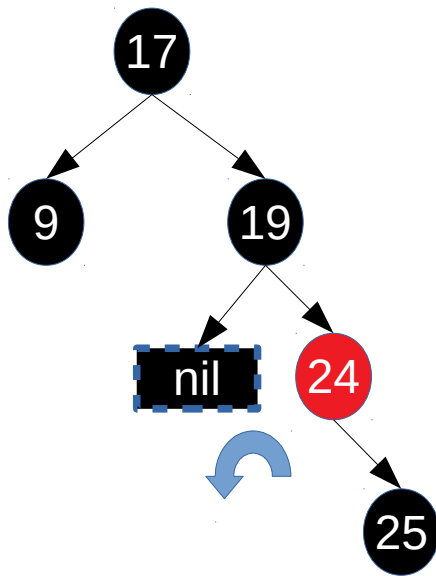
- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Rotação do irmão (24).





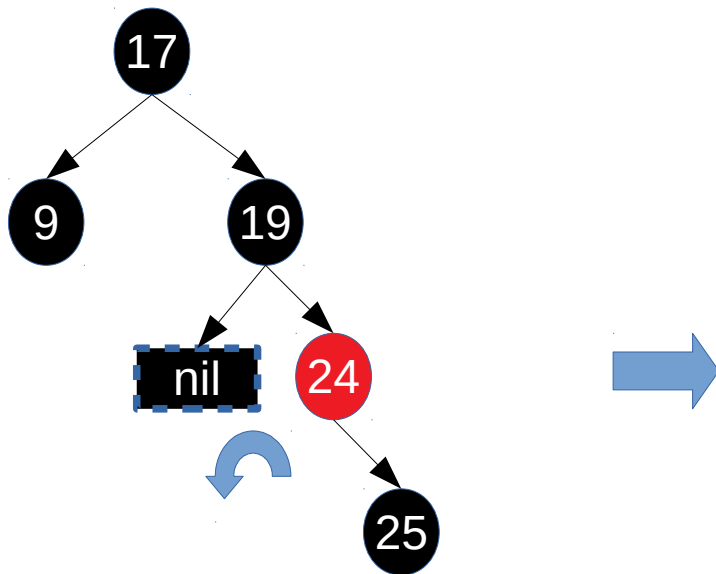
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Rotação do irmão (24).



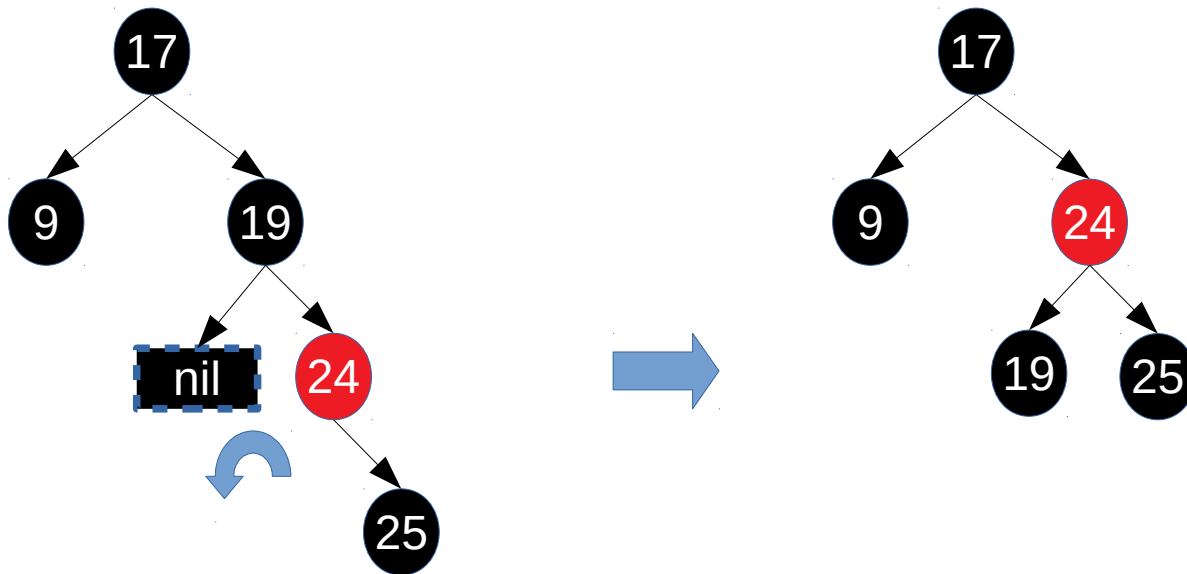
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Rotação do irmão (24).



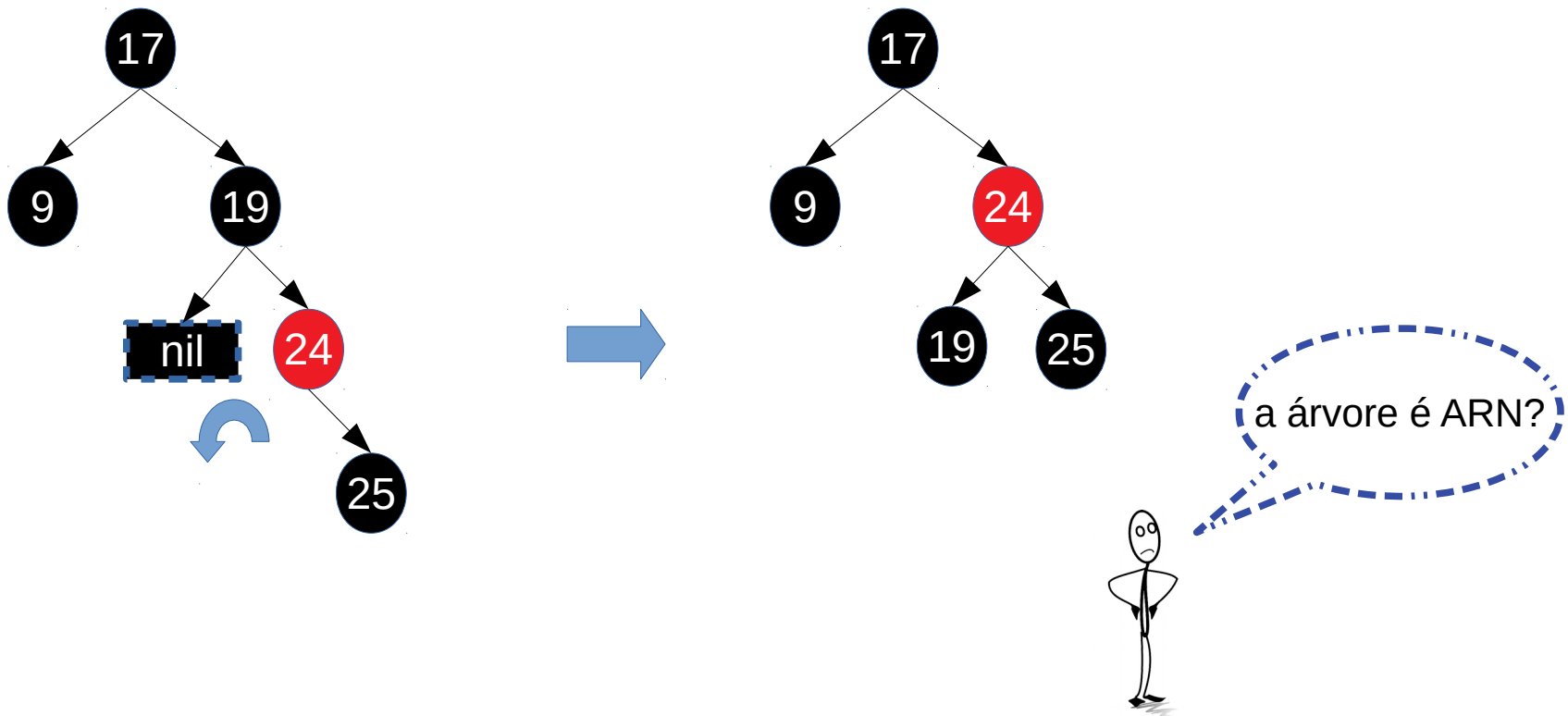
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Rotação do irmão (24).



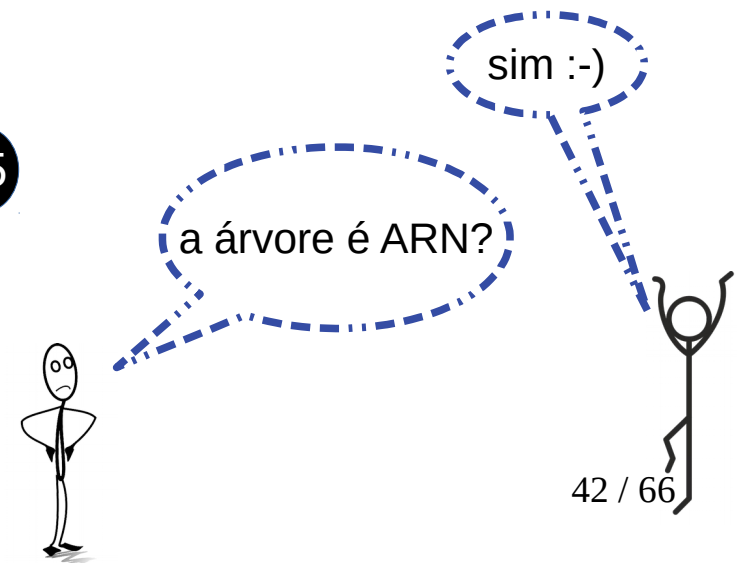
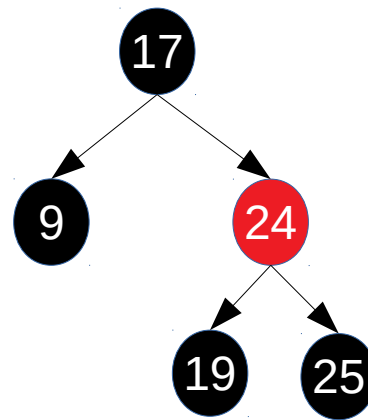
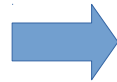
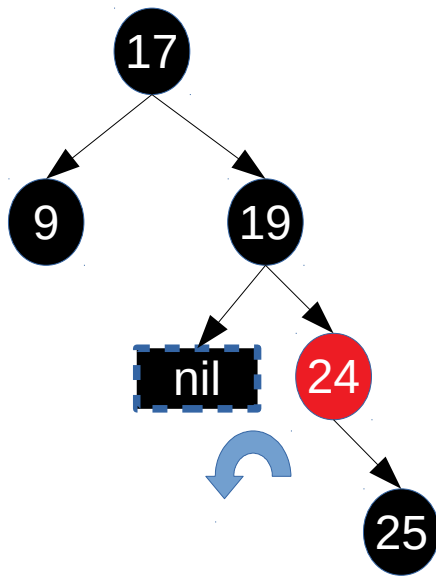
# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Rotação do irmão (24).



# Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
  - Rotação do irmão (24).

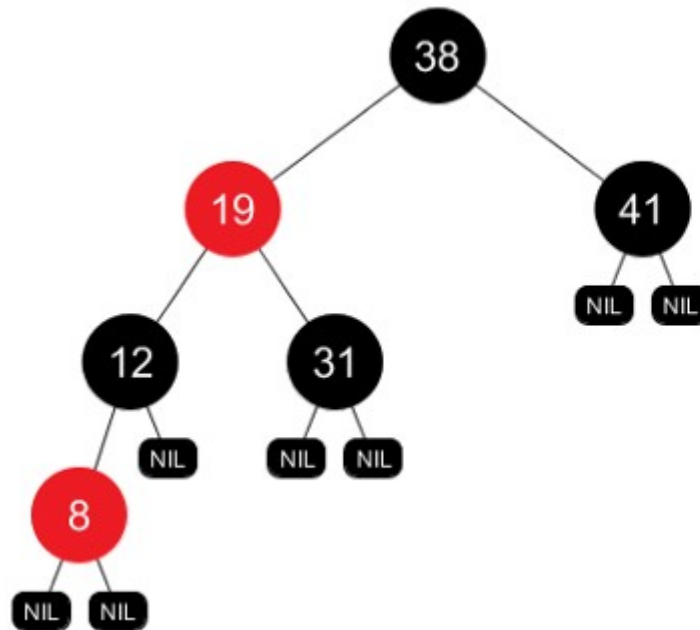


# Exercícios

- Mostre as árvores rubro-negras resultantes da inserção das seguintes chaves: 41, 38, 31, 12, 18 e 8 em uma árvore inicialmente vazia. Em seguida, mostre as árvores rubro-negras que resultam da eliminação sucessiva das chaves 8, 12, 18, 31, 38 e 41.
- Qual é a altura mínima de uma árvore rubro-negra que contém  $N$  nós?

# Exercícios

- Considere a árvore rubro-negra abaixo e faça o que se pede:
  - Como ficaria a árvore após a remoção do elemento 8?
  - Como ficaria a árvore após a remoção do elemento 12?



# Exercícios

- Faça uma comparação em termos de ordem de complexidade entre as árvores AVL e ARN. Se possível apresente exemplos para cada afirmação.
- É possível afirmar que as árvores AVL tendem a ser mais balanceadas que as árvores rubro-negras? Justique a sua resposta.



# Exercícios

- Quando um novo elemento é inserido em uma ARN, este elemento é colocado conforme o procedimento de uma ABB. Qual é a cor inicial desse elemento, caso ele não seja a raiz? Justifique a sua resposta.