

Algoritmos e Estruturas de Dados II

# Backtracking

Prof. Tiago Eugenio de Melo

[tmelo@uea.edu.br](mailto:tmelo@uea.edu.br)

[www.tiagodemelo.info](http://www.tiagodemelo.info)

# Observações

- As palavras com a fonte `Courier` indicam as palavras-reservadas da linguagem de programação.

# Referências

- **Fundamentals of Python From First Programs Through Data Structures.** Kenneth A. Lambert. CENGAGE Learning, 2010.
- **Algorithms in a Nutshell.** George T. Heineman, Gary Pollice, Stanley Selkow. O'Reilly Media, 2009.
- **Projetos de Algoritmos – com implementações em Pascal e C.** Nivio Ziviani. 2ª edição. Thomson, 2005.

# Força Bruta

# Força Bruta

# Força Bruta

- Também conhecido como busca exaustiva.

# Força Bruta

- Também conhecido como busca exaustiva.
- É um tipo de estratégia para resolução de problemas que consiste em enumerar todos os possíveis candidatos de uma solução e verificar se cada um satisfaz o problema.

# Força Bruta

- Também conhecido como busca exaustiva.
- É um tipo de estratégia para resolução de problemas que consiste em enumerar todos os possíveis candidatos de uma solução e verificar se cada um satisfaz o problema.
- A implementação é simples e sempre encontrará uma solução.



# Força Bruta

- Também conhecido como busca exaustiva.
- É um tipo de estratégia para resolução de problemas que consiste em enumerar todos os possíveis candidatos de uma solução e verificar se cada um satisfaz o problema.
- A implementação é simples e sempre encontrará uma solução.
- Porém, o custo computacional é proporcional ao número de candidatos a solução que, em problemas reais, tende a crescer exponencialmente.

# Força Bruta

- Estratégia comumente usada em problemas cujo tamanho é limitado ou quando não se conhece um algoritmo mais eficiente.

# Força Bruta

# Força Bruta

- Problema Clique<sup>1</sup>

# Força Bruta

- Problema Clique<sup>1</sup>

- Considere um conjunto  $P$  de  $n$  pessoas e uma matriz  $M$  de tamanho  $n \times n$ , tal que

- $M[i, j] = M[j, i] = 1$ , se as pessoas  $i$  e  $j$  se conhecem e  $M[i, j] = M[j, i] = 0$ , caso contrário.

# Força Bruta

- Problema Clique<sup>1</sup>

- Considere um conjunto  $P$  de  $n$  pessoas e uma matriz  $M$  de tamanho  $n \times n$ , tal que  $M[i, j] = M[j, i] = 1$ , se as pessoas  $i$  e  $j$  se conhecem e  $M[i, j] = M[j, i] = 0$ , caso contrário.
- Problema: existe um subconjunto  $C$  (Clique), de  $r$  pessoas escolhidas de  $P$ , tal que qualquer par de pessoas de  $C$  se conhecem?

# Força Bruta

- Problema Clique<sup>1</sup>

- Considere um conjunto  $P$  de  $n$  pessoas e uma matriz  $M$  de tamanho  $n \times n$ , tal que  $M[i, j] = M[j, i] = 1$ , se as pessoas  $i$  e  $j$  se conhecem e  $M[i, j] = M[j, i] = 0$ , caso contrário.
- Problema: existe um subconjunto  $C$  (Clique), de  $r$  pessoas escolhidas de  $P$ , tal que qualquer par de pessoas de  $C$  se conhecem?
- Solução por FB: verificar, para todas as combinações simples (sem repetições)  $C$  de  $r$  pessoas escolhidas entre as  $n$  pessoas do conjunto  $P$ , se todos os pares de pessoas de  $C$  se conhecem.

# Força Bruta



# Força Bruta

- Considere um conjunto  $\mathbb{P}$  de 8 pessoas representado pela matriz abaixo (8 x 8):

# Força Bruta

- Considere um conjunto  $P$  de 8 pessoas representado pela matriz abaixo (8 x 8):

x	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	1	1	1	1	1	0
2	0	1	0	0	1	0	0	1
3	1	0	1	1	0	1	1	1
4	1	0	1	1	1	1	1	1
5	1	1	0	1	1	0	0	0
6	1	0	1	1	0	1	1	1
7	1	0	1	1	0	1	1	0
8	0	1	1	1	0	1	0	1

# Força Bruta

- Considere um conjunto  $P$  de 8 pessoas representado pela matriz abaixo (8 x 8):

x	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	1	1	1	1	1	0
2	0	1	0	0	1	0	0	1
3	1	0	1	1	0	1	1	1
4	1	0	1	1	1	1	1	1
5	1	1	0	1	1	0	0	0
6	1	0	1	1	0	1	1	1
7	1	0	1	1	0	1	1	0
8	0	1	1	1	0	1	0	1

- Existem um conjunto  $C$  de 5 pessoas escolhidas de  $P$  tal que qualquer par de pessoas de  $C$  se conhecem?

# Força Bruta

# Força Bruta

- Existem 56 combinações simples de 5 elementos escolhidos dentre um conjunto de 8 elementos:

# Força Bruta

- Existem 56 combinações simples de 5 elementos escolhidos dentre um conjunto de 8 elementos:

1 2 3 4 5	1 2 4 6 8	1 3 5 7 8	2 3 5 6 8
1 2 3 4 6	1 2 4 7 8	1 3 6 7 8	2 3 5 7 8
1 2 3 4 7	1 2 5 6 7	1 4 5 6 7	2 3 6 7 8
1 2 3 4 8	1 2 5 6 8	1 4 5 6 8	2 4 5 6 7
1 2 3 5 6	1 2 5 7 8	1 4 5 7 8	2 4 5 6 8
1 2 3 5 7	1 2 6 7 8	1 4 6 7 8	2 4 5 7 8
1 2 3 5 8	1 3 4 5 6	1 5 6 7 8	2 4 6 7 8
1 2 3 6 7	1 3 4 5 7	2 3 4 5 6	2 5 6 7 8
1 2 3 6 8	1 3 4 5 8	2 3 4 5 7	3 4 5 6 7
1 2 3 7 8	<b>1 3 4 6 7</b>	2 3 4 5 8	3 4 5 6 8
1 2 4 5 6	1 3 4 6 8	2 3 4 6 7	3 4 5 7 8
1 2 4 5 7	1 3 4 7 8	2 3 4 6 8	3 4 6 7 8
1 2 4 5 8	1 3 5 6 7	2 3 4 7 8	3 5 6 7 8
1 2 4 6 7	1 3 5 6 8	2 3 5 6 7	4 5 6 7 8

# Força Bruta

- Existem 56 combinações simples de 5 elementos escolhidos dentre um conjunto de 8 elementos:

1 2 3 4 5	1 2 4 6 8	1 3 5 7 8	2 3 5 6 8
1 2 3 4 6	1 2 4 7 8	1 3 6 7 8	2 3 5 7 8
1 2 3 4 7	1 2 5 6 7	1 4 5 6 7	2 3 6 7 8
1 2 3 4 8	1 2 5 6 8	1 4 5 6 8	2 4 5 6 7
1 2 3 5 6	1 2 5 7 8	1 4 5 7 8	2 4 5 6 8
1 2 3 5 7	1 2 6 7 8	1 4 6 7 8	2 4 5 7 8
1 2 3 5 8	1 3 4 5 6	1 5 6 7 8	2 4 6 7 8
1 2 3 6 7	1 3 4 5 7	2 3 4 5 6	2 5 6 7 8
1 2 3 6 8	1 3 4 5 8	2 3 4 5 7	3 4 5 6 7
1 2 3 7 8	<b>1 3 4 6 7</b>	2 3 4 5 8	3 4 5 6 8
1 2 4 5 6	1 3 4 6 8	2 3 4 6 7	3 4 5 7 8
1 2 4 5 7	1 3 4 7 8	2 3 4 6 8	3 4 6 7 8
1 2 4 5 8	1 3 5 6 7	2 3 4 7 8	3 5 6 7 8
1 2 4 6 7	1 3 5 6 8	2 3 5 6 7	4 5 6 7 8

# Força Bruta



# Força Bruta

- Note que todos os pares de pessoas do subconjunto  $C = \{1, 3, 4, 6, 7\}$  se conhecem:

# Força Bruta

- Note que todos os pares de pessoas do subconjunto  $C = \{1, 3, 4, 6, 7\}$  se conhecem:

x	1	3	4	6	7
1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1

# Força Bruta

- Note que todos os pares de pessoas do subconjunto  $C = \{1, 3, 4, 6, 7\}$  se conhecem:

x	1	3	4	6	7
1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1

- Como enumerar todas as combinações simples de  $r$  elementos de um conjunto de tamanho  $n$ ?

# Força Bruta

- Note que todos os pares de pessoas do subconjunto  $C = \{1, 3, 4, 6, 7\}$  se conhecem:

x	1	3	4	6	7
1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1

- Como enumerar todas as combinações simples de  $r$  elementos de um conjunto de tamanho  $n$ ?



# Backtracking

# Introdução

# Introdução

- É um refinamento da estratégia dos algoritmos de força bruta.

# Introdução

- É um refinamento da estratégia dos algoritmos de força bruta.
- Parte das possíveis soluções que podem ser eliminadas sem que sejam explicitamente executadas.



# Introdução

- É um refinamento da estratégia dos algoritmos de força bruta.
- Parte das possíveis soluções que podem ser eliminadas sem que sejam explicitamente executadas.
- Problemas cujas soluções podem ser definidas através de uma sequência de decisões.

# Introdução

- É um refinamento da estratégia dos algoritmos de força bruta.
- Parte das possíveis soluções que podem ser eliminadas sem que sejam explicitamente executadas.
- Problemas cujas soluções podem ser definidas através de uma sequência de decisões.
- Os problemas podem ser modelados por uma árvore de decisão que representa todas as possíveis sequências de decisão.

# Introdução

# Introdução

- Se houver mais de uma decisão disponível para cada uma das  $n$  decisões, a busca exaustiva (força bruta) será exponencial.

# Introdução

- Se houver mais de uma decisão disponível para cada uma das  $n$  decisões, a busca exaustiva (força bruta) será exponencial.
- A eficiência da estratégia depende da possibilidade de limitar a busca.

# Introdução

- Se houver mais de uma decisão disponível para cada uma das  $n$  decisões, a busca exaustiva (força bruta) será exponencial.
- A eficiência da estratégia depende da possibilidade de limitar a busca.
- Necessário definir um espaço de solução para o problema:

# Introdução

- Se houver mais de uma decisão disponível para cada uma das  $n$  decisões, a busca exaustiva (força bruta) será exponencial.
- A eficiência da estratégia depende da possibilidade de limitar a busca.
- Necessário definir um espaço de solução para o problema:
  - Que inclua a solução ótima.

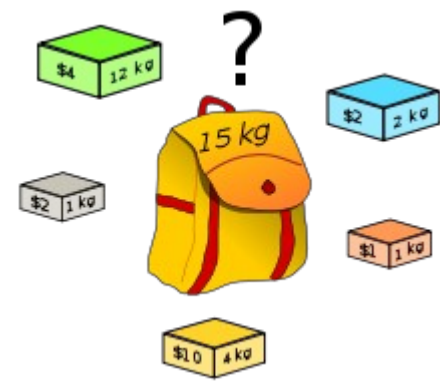
# Introdução

- Se houver mais de uma decisão disponível para cada uma das  $n$  decisões, a busca exaustiva (força bruta) será exponencial.
- A eficiência da estratégia depende da possibilidade de limitar a busca.
- Necessário definir um espaço de solução para o problema:
  - Que inclua a solução ótima.
  - Que possa ser pesquisada de forma organizada.

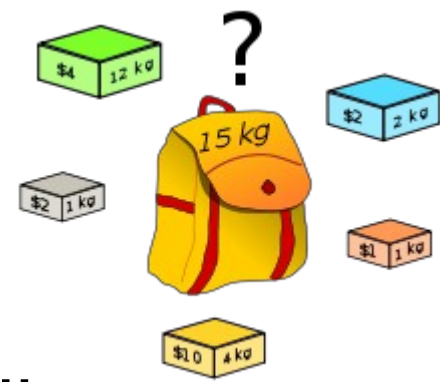


# Exemplos

# Problema da Mochila

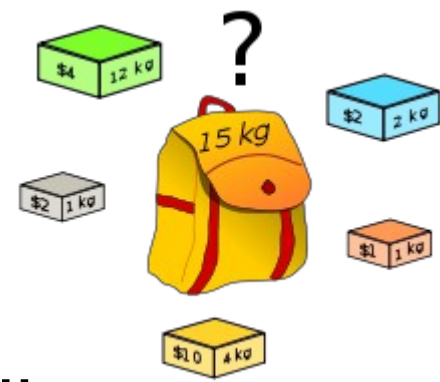


# Problema da Mochila

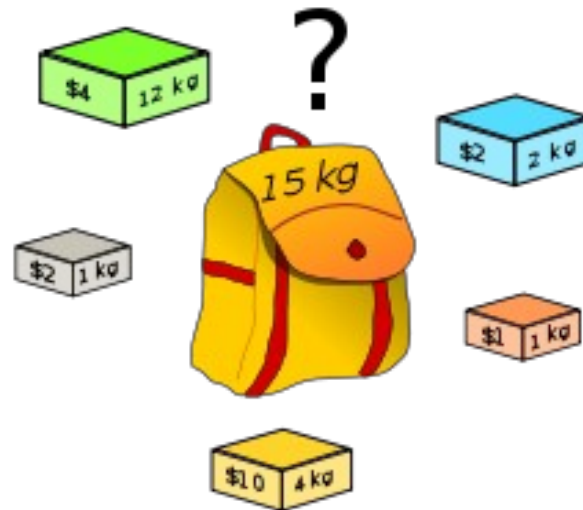


- Deve-se preencher uma mochila com diversos itens com pesos e/ou valores diferentes.

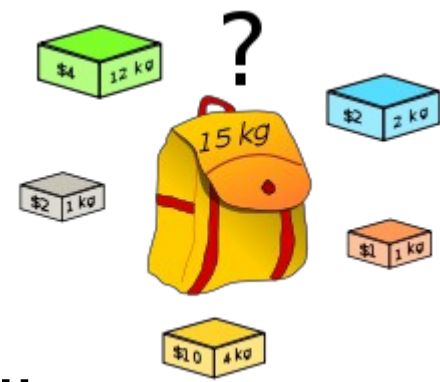
# Problema da Mochila



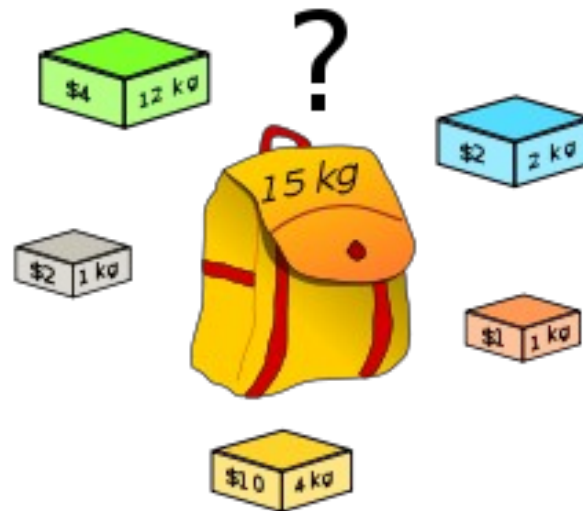
- Deve-se preencher uma mochila com diversos itens com pesos e/ou valores diferentes.



# Problema da Mochila

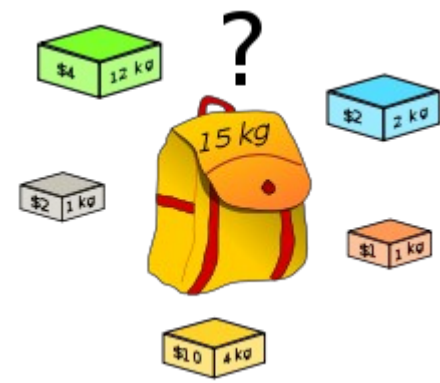


- Deve-se preencher uma mochila com diversos itens com pesos e/ou valores diferentes.



- O objetivo é preencher a mochila com o maior valor possível, não ultrapassando o peso máximo suportado pela mochila.

# Problema da Mochila



# Problema da Mochila



- Entrada

# Problema da Mochila



- Entrada
  - **N** itens com pesos  $p_i$  e valores  $v_i$ , onde a capacidade da mochila é **K**.

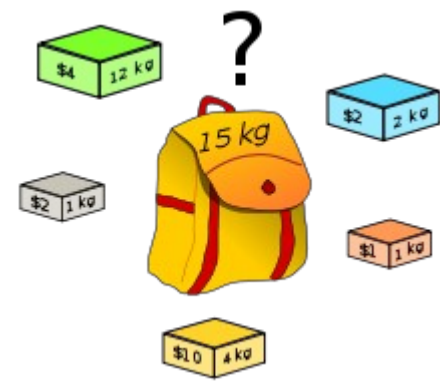


# Problema da Mochila



- Entrada
  - $N$  itens com pesos  $p_i$  e valores  $v_i$ , onde a capacidade da mochila é  $K$ .
- O objetivo é obter um conjunto  $S$  de itens, tais que:

# Problema da Mochila



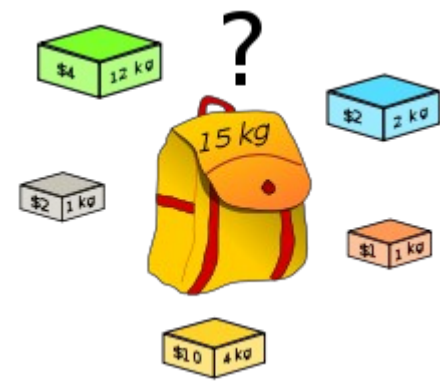
- Entrada
  - $N$  itens com pesos  $p_i$  e valores  $v_i$ , onde a capacidade da mochila é  $K$ .
- O objetivo é obter um conjunto  $S$  de itens, tais que:
  - A soma dos pesos dos itens  $S \leq K$  e a soma dos valores dos itens em  $S$  seja a maior possível.

# Problema da Mochila

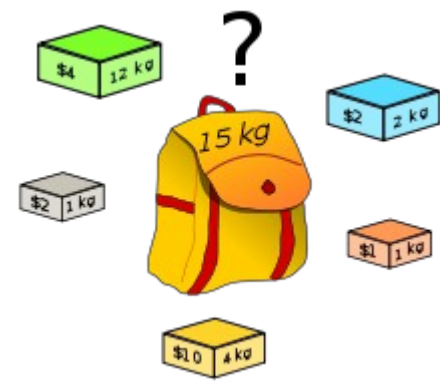


# Problema da Mochila

- Qual item escolher primeiro?

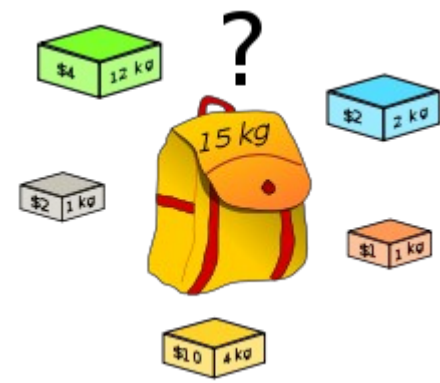


# Problema da Mochila



- Qual item escolher primeiro?
  - Maior valor?

# Problema da Mochila



- Qual item escolher primeiro?
  - Maior valor?
  - Menor peso?

# Problema da Mochila



# Problema da Mochila



- Solução por força bruta

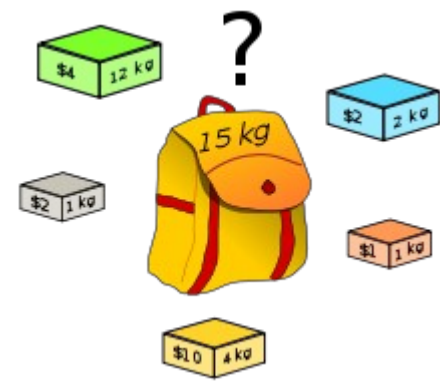


# Problema da Mochila



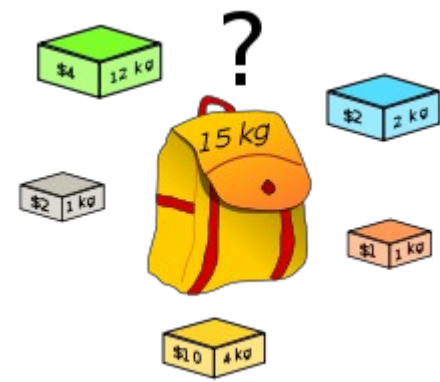
- Solução por força bruta
  - Gerar todas as possíveis combinações.

# Problema da Mochila



- Solução por força bruta
  - Gerar todas as possíveis combinações.
    - Com  $n$  itens, existem  $2^n$  soluções.

# Problema da Mochila



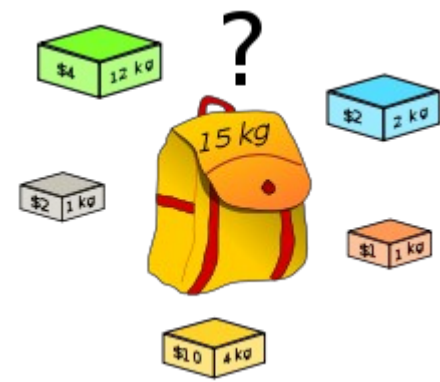
- Solução por força bruta
  - Gerar todas as possíveis combinações.
    - Com  $n$  itens, existem  $2^n$  soluções.
    - Checar se cada solução satisfaz limite de peso.

# Problema da Mochila



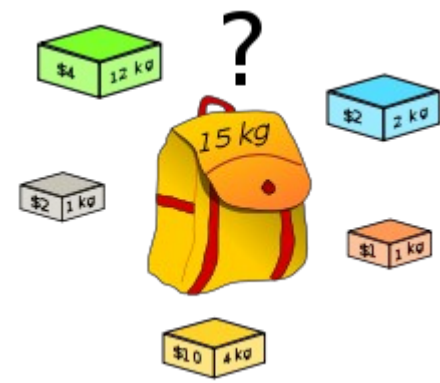
- Solução por força bruta
  - Gerar todas as possíveis combinações.
    - Com  $n$  itens, existem  $2^n$  soluções.
    - Checar se cada solução satisfaz limite de peso.
    - Salvar a condição que melhor representa a solução.

# Problema da Mochila



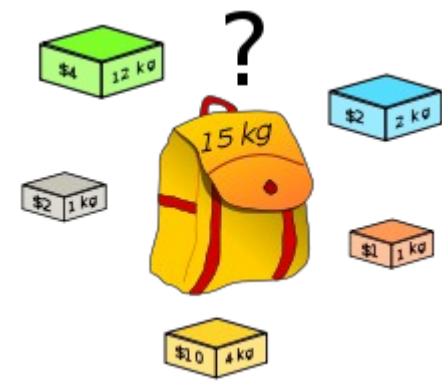
- Solução por força bruta
  - Gerar todas as possíveis combinações.
    - Com  $n$  itens, existem  $2^n$  soluções.
    - Checar se cada solução satisfaz limite de peso.
    - Salvar a condição que melhor representa a solução.
  - Pode ser representada como uma árvore.

# Problema da Mochila



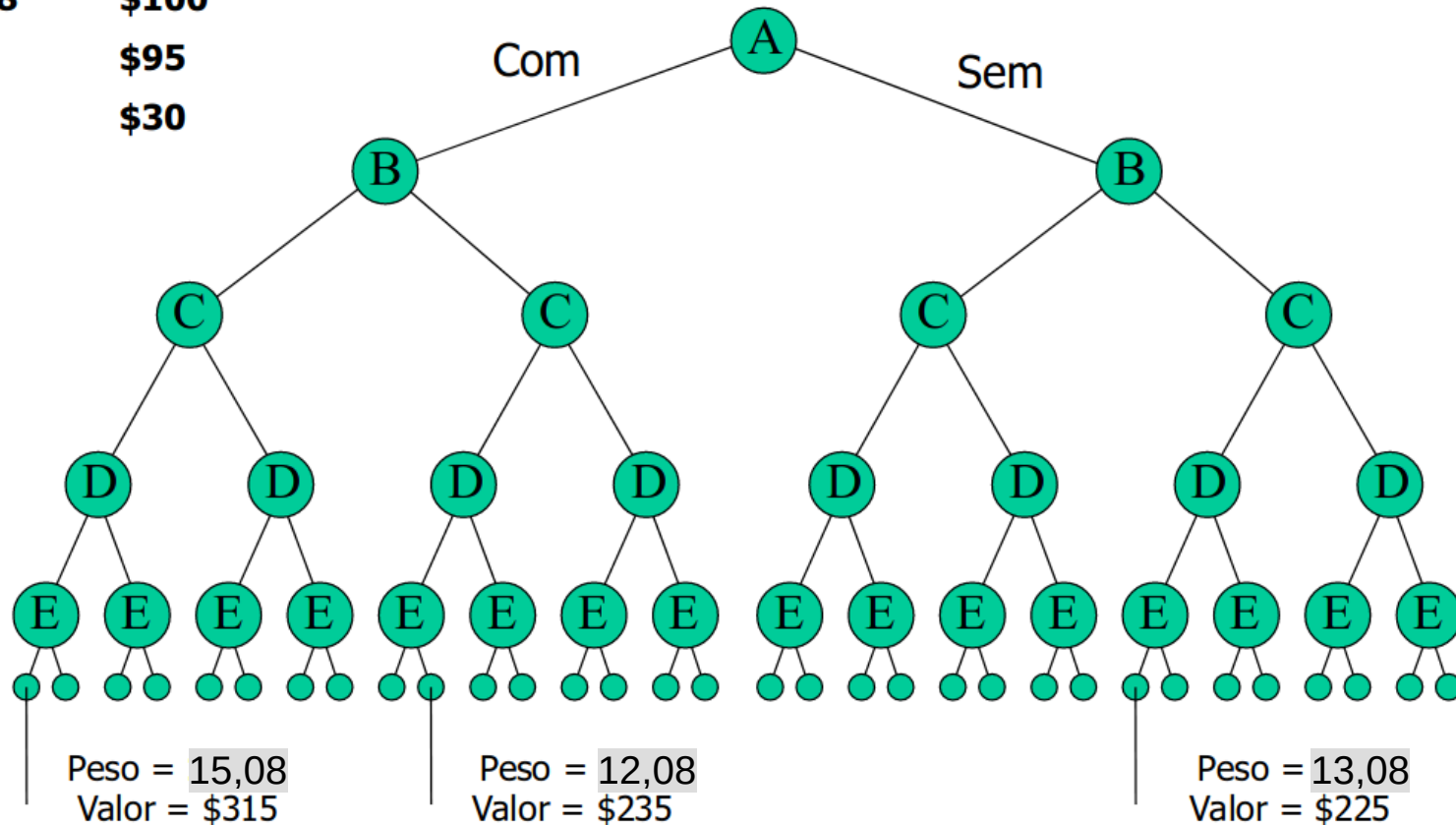
- Exemplo de mochila de 10 kg

# Problema da Mochila



- Exemplo de mochila de 10 kg

A	2	\$40
B	3,1	\$50
C	1,98	\$100
D	5	\$95
E	3	\$30

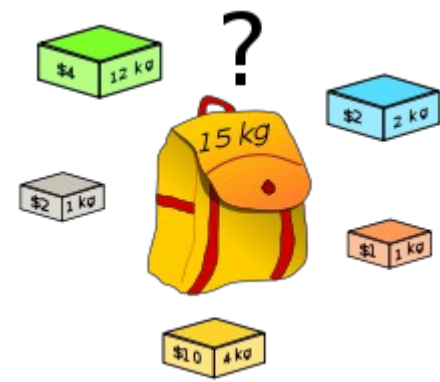


# Problema da Mochila



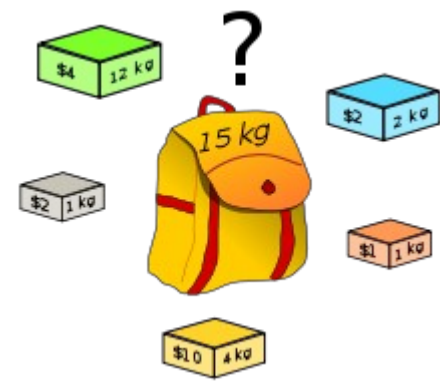


# Problema da Mochila



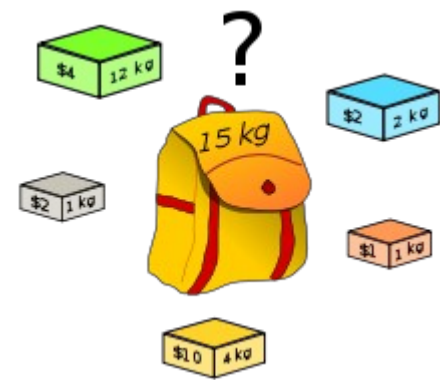
- Se alcançarmos um ponto em que a solução não é mais viável, não precisamos continuar explorando a solução.

# Problema da Mochila



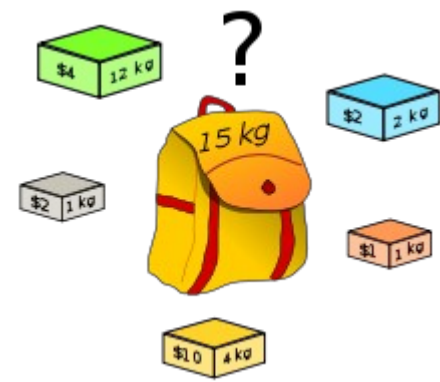
- Se alcançarmos um ponto em que a solução não é mais viável, não precisamos continuar explorando a solução.
  - Podemos voltar (*backtrack*) a partir deste ponto.

# Problema da Mochila



- Se alcançarmos um ponto em que a solução não é mais viável, não precisamos continuar explorando a solução.
  - Podemos voltar (*backtrack*) a partir deste ponto.
- Essa estratégia se torna bastante útil:

# Problema da Mochila



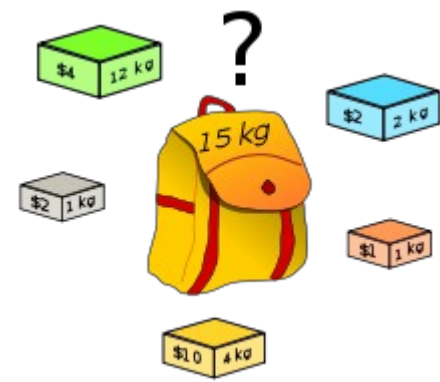
- Se alcançarmos um ponto em que a solução não é mais viável, não precisamos continuar explorando a solução.
  - Podemos voltar (*backtrack*) a partir deste ponto.
- Essa estratégia se torna bastante útil:
  - Na medida em que o número de itens cresce.

# Problema da Mochila



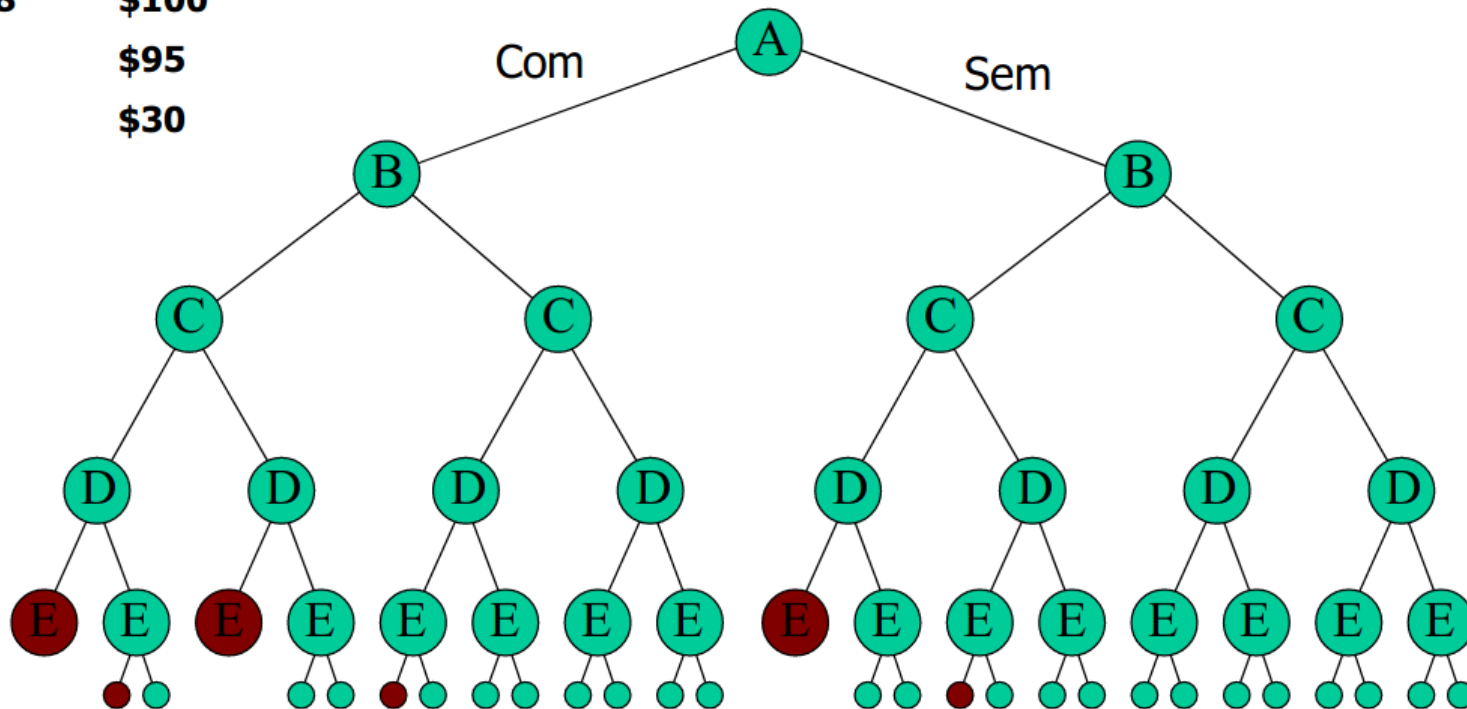
- Se alcançarmos um ponto em que a solução não é mais viável, não precisamos continuar explorando a solução.
  - Podemos voltar (*backtrack*) a partir deste ponto.
- Essa estratégia se torna bastante útil:
  - Na medida em que o número de itens cresce.
  - Na medida em que a capacidade da mochila diminui.

# Problema da Mochila



- Backtracking < 10 kg

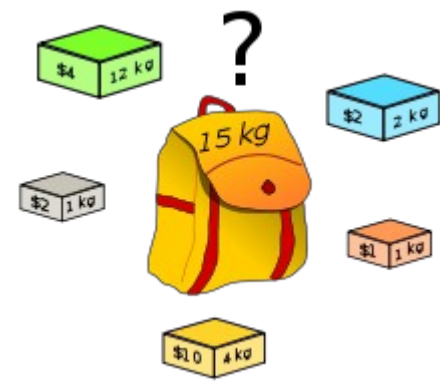
A	2	\$40
B	3,1	\$50
C	1,98	\$100
D	5	\$95
E	3	\$30



# Problema da Mochila



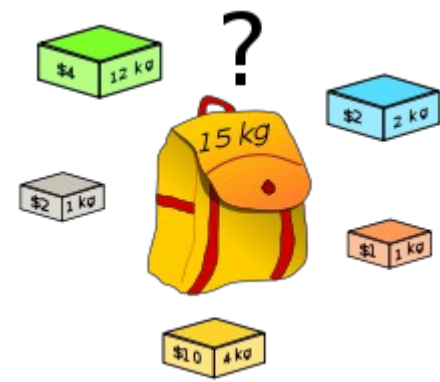
# Problema da Mochila



- Pode-se voltar também quando se sabe que a melhor solução da subárvore é pior do que a melhor solução já encontrada.

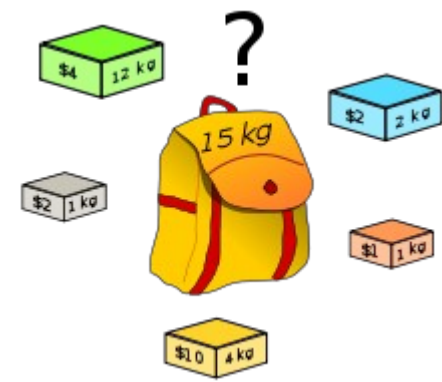


# Problema da Mochila



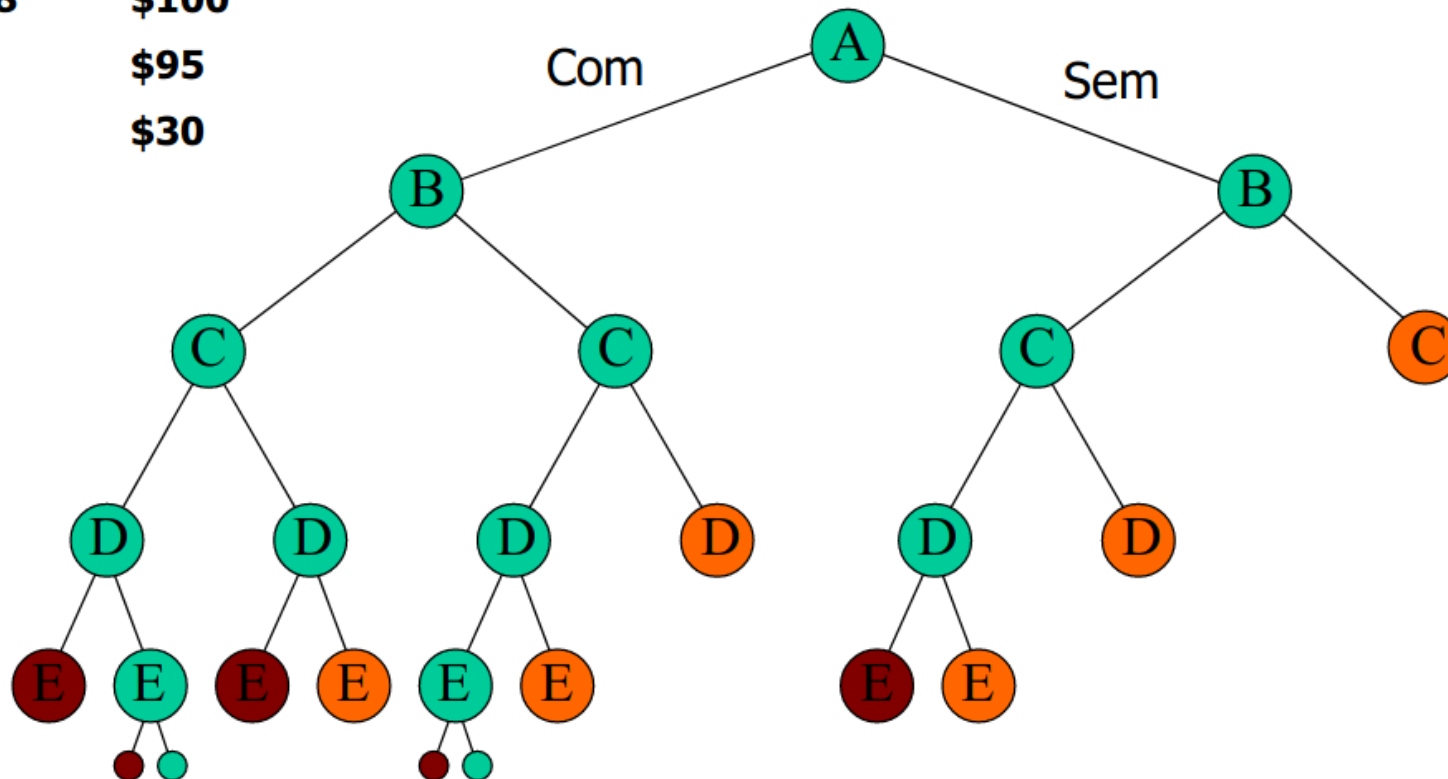
- Pode-se voltar também quando se sabe que a melhor solução da subárvore é pior do que a melhor solução já encontrada.
  - É uma estratégia usada por muitos algoritmos.

# Problema da Mochila



- Backtracking com cortes por qualidade

A	2	\$40
B	3,1	\$50
C	1,98	\$100
D	5	\$95
E	3	\$30



# Problema da Mochila



- Solução genérica

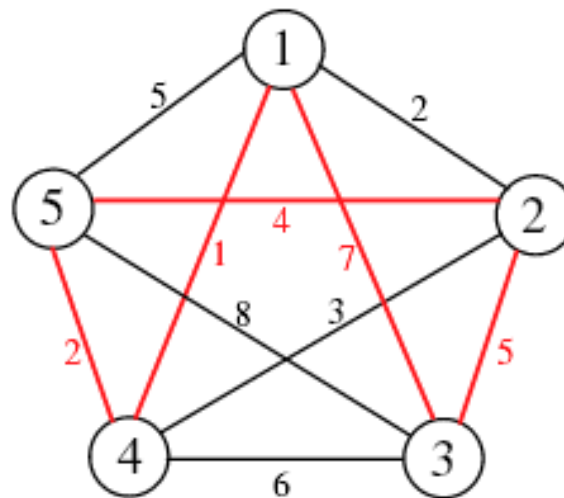
```
def backtrack(v): # v é o nó sendo pesquisado
    if (promissor(v)):
        if (existe_solucacao(v)):
            armazena_solucacao(v)
        else:
            for filho in v:
                backtrack(filho)
    }
```

# Problema do Caixeiro Viajante

- O problema consiste em minimizar o custo de um caixeiro viajante que deseja percorrer  $n$  cidades, visitando cada cidade apenas uma vez, e retornar para casa.

# Problema do Caixeiro Viajante

- O problema consiste em minimizar o custo de um caixeiro viajante que deseja percorrer  $n$  cidades, visitando cada cidade apenas uma vez, e retornar para casa.



# Problema do Caixeiro Viajante

# Problema do Caixeiro Viajante

- Força bruta

# Problema do Caixeiro Viajante

- Força bruta
  - Se calcularmos um bilhão de soluções por segundo com um grafo com 30 cidades, demoraria **8 quadrilhões de anos** para achar a melhor solução.



# Problema do Caixeiro Viajante

- Força bruta
  - Se calcularmos um bilhão de soluções por segundo com um grafo com 30 cidades, demoraria **8 quadrilhões de anos** para achar a melhor solução.
- Esse problema é  **$O(n!)$** .

# Sudoku

# Sudoku

- Regras:

# Sudoku

- Regras:
  - Matriz de 9 x 9.

# Sudoku

- Regras:
  - Matriz de 9 x 9.
  - Cada célula pode ter um valor 1 a 9.

# Sudoku

- Regras:
  - Matriz de 9 x 9.
  - Cada célula pode ter um valor 1 a 9.
  - Cada linha e coluna possuem sempre números distintos.

# Sudoku

- Regras:
  - Matriz de 9 x 9.
  - Cada célula pode ter um valor 1 a 9.
  - Cada linha e coluna possuem sempre números distintos.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

# Sudoku

5	3	1	2	7	6	8	9	4
6	2	4	1	9	5	2		
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9