

Algoritmos e Estruturas de Dados I

Árvores

Prof. Tiago Eugenio de Melo
tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

- O conteúdo dessa aula é parcialmente proveniente do Capítulo 13 do livro “*Data Structure and Algorithms Using Python*”.
- As palavras com a fonte `Courier` indicam uma palavra-reservada da linguagem de programação.

Árvores

Introdução

Introdução

- São exemplos de estruturas que organizam os dados de maneira linear (sequencial):

Introdução

- São exemplos de estruturas que organizam os dados de maneira linear (sequencial):
 - Array.

Introdução

- São exemplos de estruturas que organizam os dados de maneira linear (sequencial):
 - Array.
 - Lista.

Introdução

- São exemplos de estruturas que organizam os dados de maneira linear (sequencial):
 - Array.
 - Lista.
 - Lista ligada.

Introdução

- São exemplos de estruturas que organizam os dados de maneira linear (sequencial):
 - Array.
 - Lista.
 - Lista ligada.
 - Pilhas.

Introdução

- São exemplos de estruturas que organizam os dados de maneira linear (sequencial):
 - Array.
 - Lista.
 - Lista ligada.
 - Pilhas.
 - Filas.

Introdução

- São exemplos de estruturas que organizam os dados de maneira linear (sequencial):
 - Array.
 - Lista.
 - Lista ligada.
 - Pilhas.
 - Filas.
- Todas têm uma noção de *anterior e posterior*.

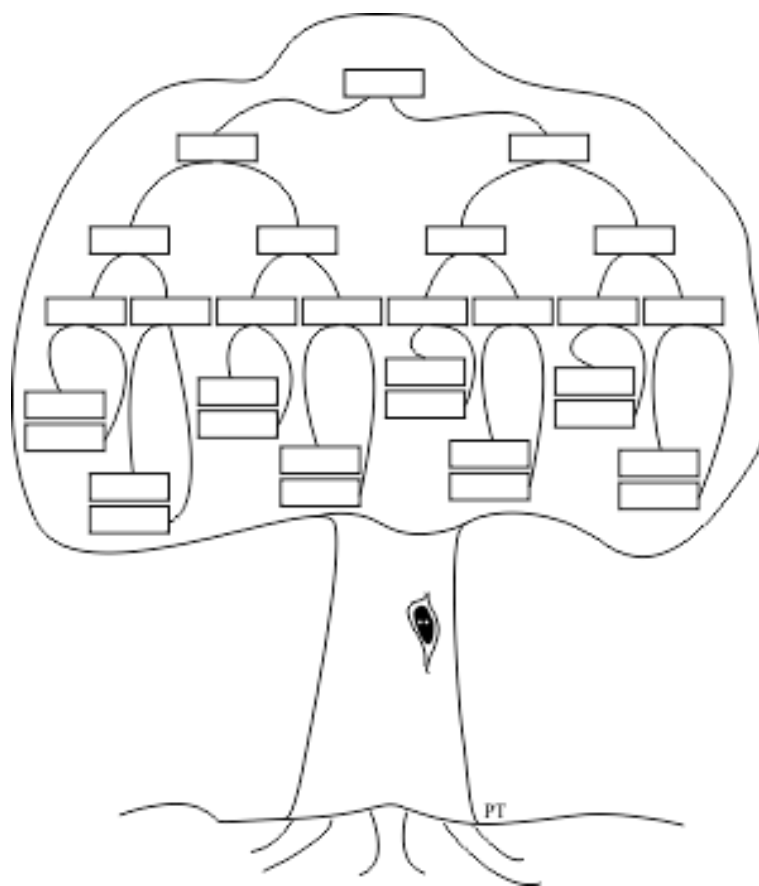
Introdução

Introdução

- A estrutura de dados do tipo árvore permite organizar os dados de maneira **hierárquica**.

Introdução

- A estrutura de dados do tipo árvore permite organizar os dados de maneira **hierárquica**.



Introdução

Introdução

- Útil para uma série de problemas:

Introdução

- Útil para uma série de problemas:
 - Mineração de dados.

Introdução

- Útil para uma série de problemas:
 - Mineração de dados.
 - Sistemas de banco de dados.

Introdução

- Útil para uma série de problemas:
 - Mineração de dados.
 - Sistemas de banco de dados.
 - Inteligência artificial.

Introdução

- Útil para uma série de problemas:
 - Mineração de dados.
 - Sistemas de banco de dados.
 - Inteligência artificial.
 - Sistemas operacionais.

Introdução

- Útil para uma série de problemas:
 - Mineração de dados.
 - Sistemas de banco de dados.
 - Inteligência artificial.
 - Sistemas operacionais.
 - ...

Introdução

Introdução

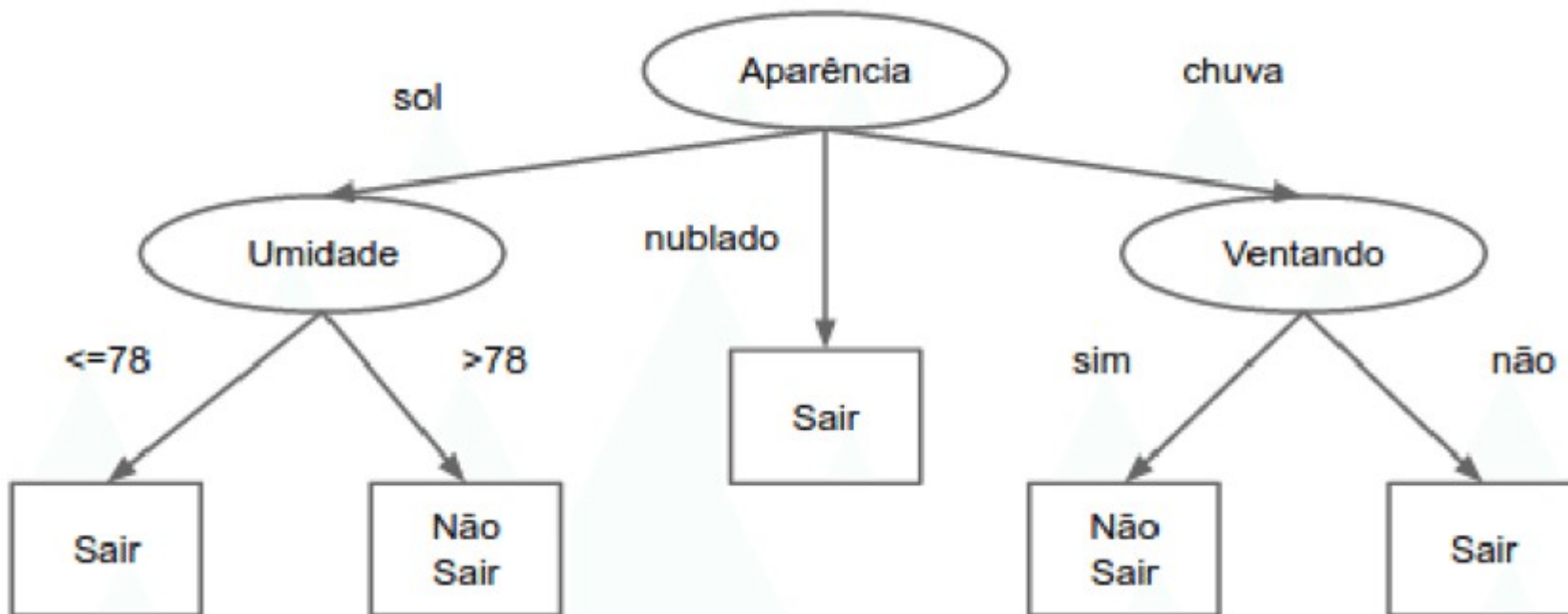
- Inteligência artificial

Introdução

- Inteligência artificial
 - Árvores de decisão

Introdução

- Inteligência artificial
 - Árvores de decisão



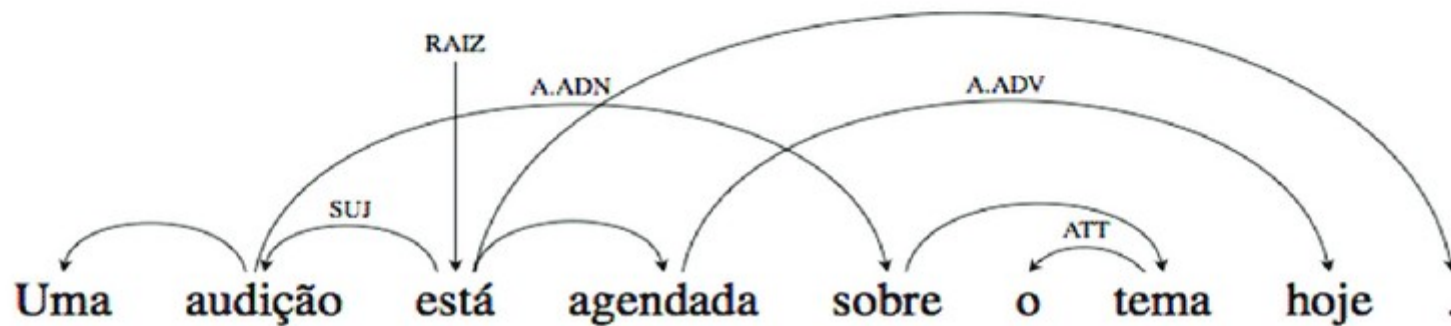
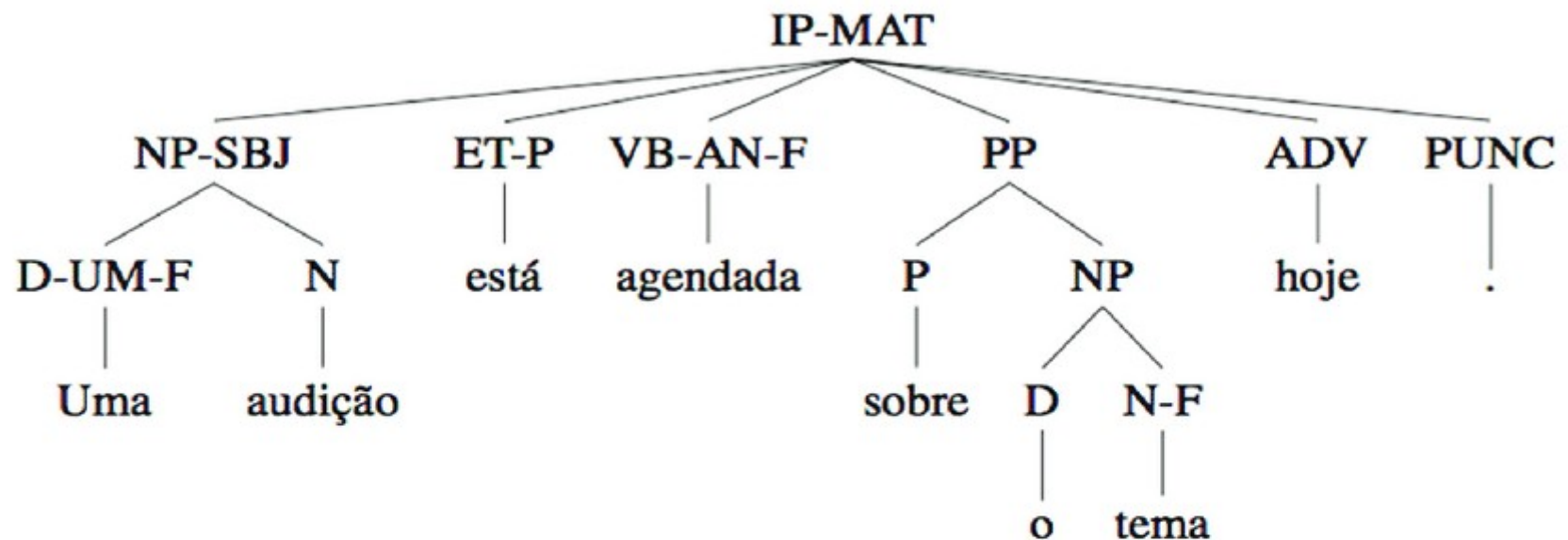
Introdução

Introdução

- Processamento de Linguagem Natural

Introdução

- Processamento de Linguagem Natural



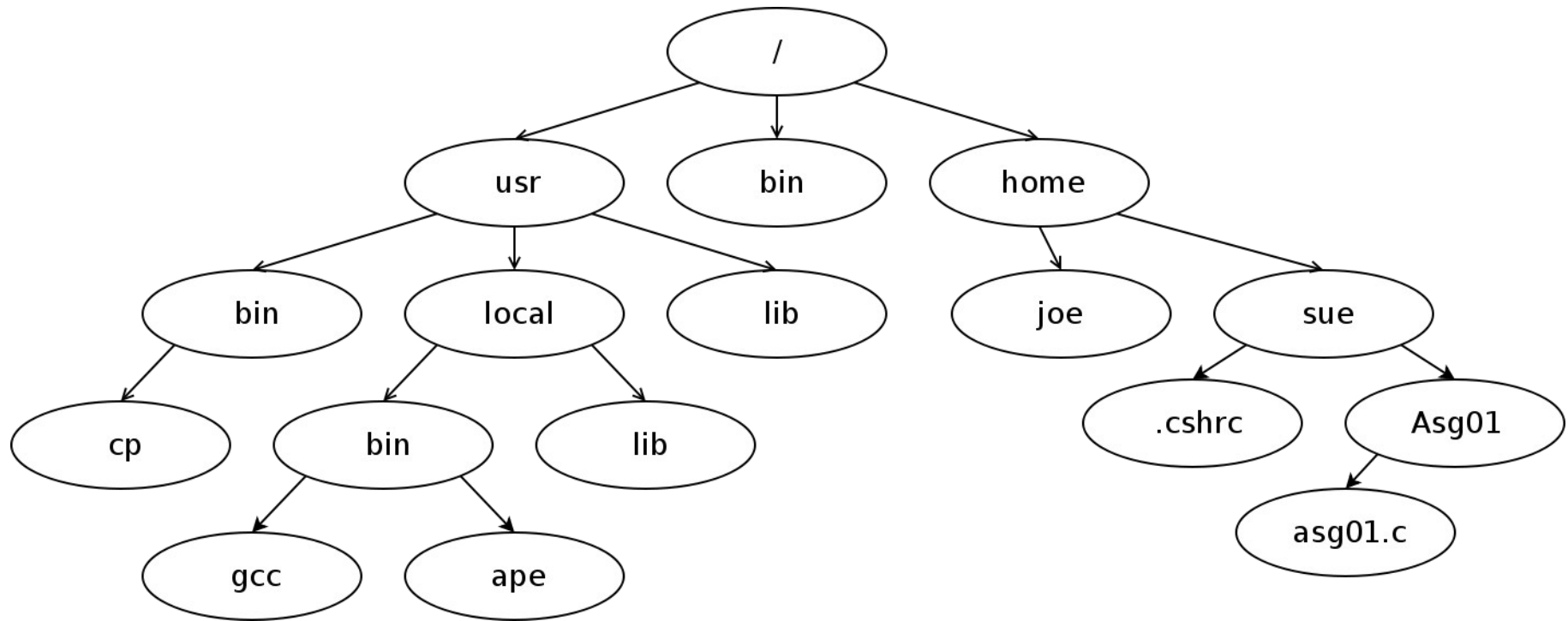
Introdução

Introdução

- A estrutura de diretórios e arquivos de um sistema de arquivos é um exemplo de árvore:

Introdução

- A estrutura de diretórios e arquivos de um sistema de arquivos é um exemplo de árvore:



Estrutura de Dados

Estrutura de Dados

- Uma árvore é formada por:

Estrutura de Dados

- Uma árvore é formada por:
 - Nós (*nodes*)

Estrutura de Dados

- Uma árvore é formada por:
 - Nós (*nodes*)
 - Armazenam os dados.

Estrutura de Dados

- Uma árvore é formada por:
 - Nós (*nodes*)
 - Armazenam os dados.
 - Vértices (*edges*)

Estrutura de Dados

- Uma árvore é formada por:
 - Nós (*nodes*)
 - Armazenam os dados.
 - Vértices (*edges*)
 - Par de nós são ligados por vértices.

Estrutura de Dados

Estrutura de Dados

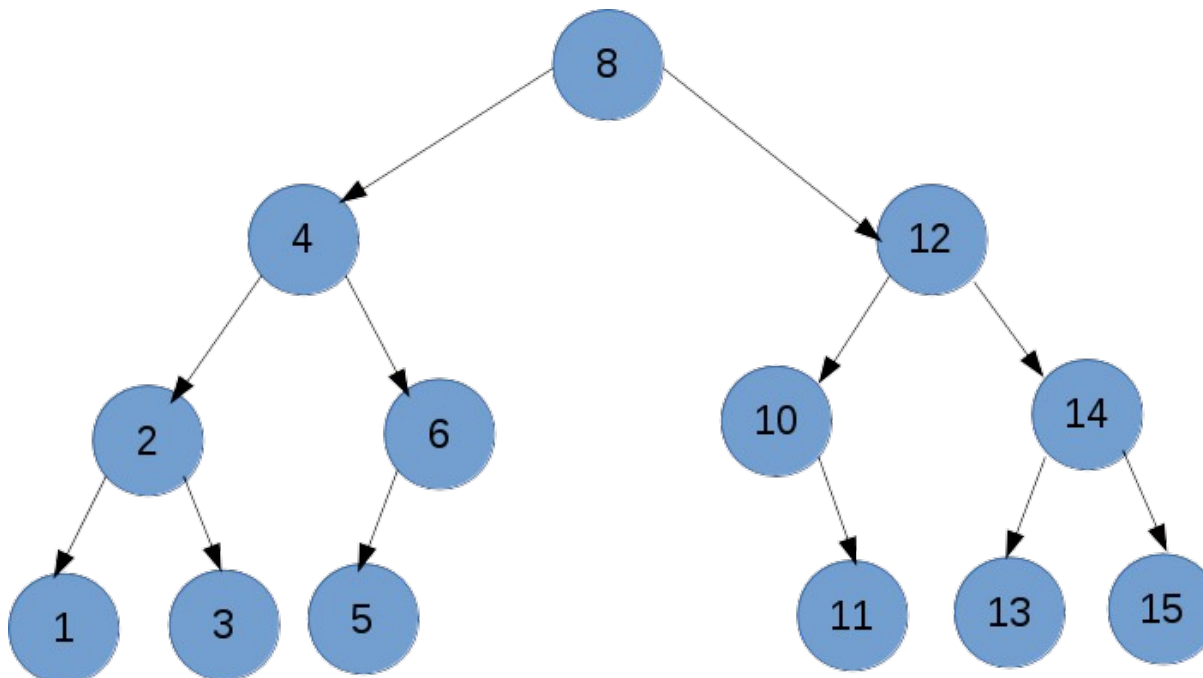
- Definição formal:

Estrutura de Dados

- Definição formal:
 - Um conjunto de nós que pode ser vazio ou ter um nó raiz que está conectado por vértices a zero ou mais subárvores para formar uma estrutura hierárquica.

Estrutura de Dados

- Definição formal:
 - Um conjunto de nós que pode ser vazio ou ter um nó raiz que está conectado por vértices a zero ou mais subárvores para formar uma estrutura hierárquica.



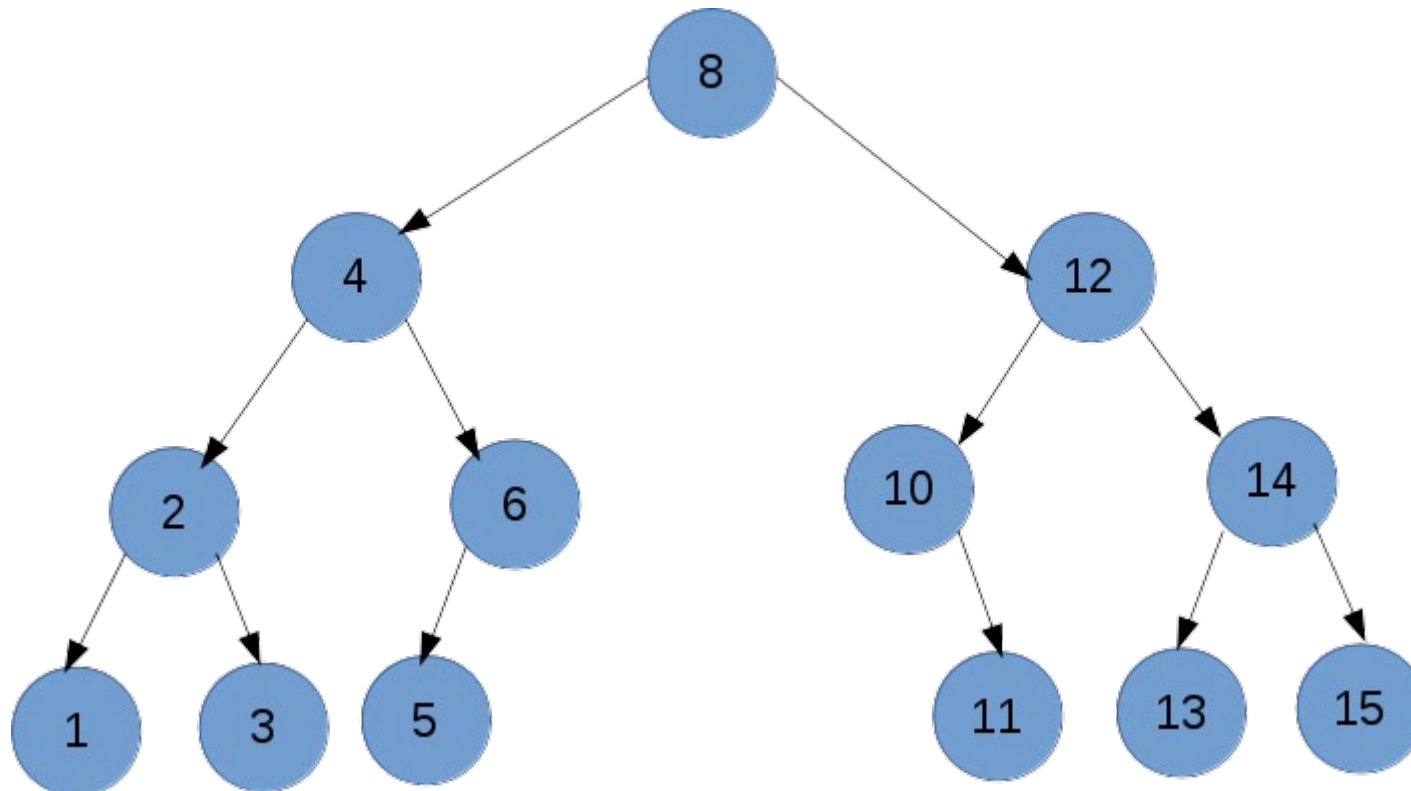
Estrutura de Dados

Estrutura de Dados

- Cada subárvore é também considerada como uma árvore.

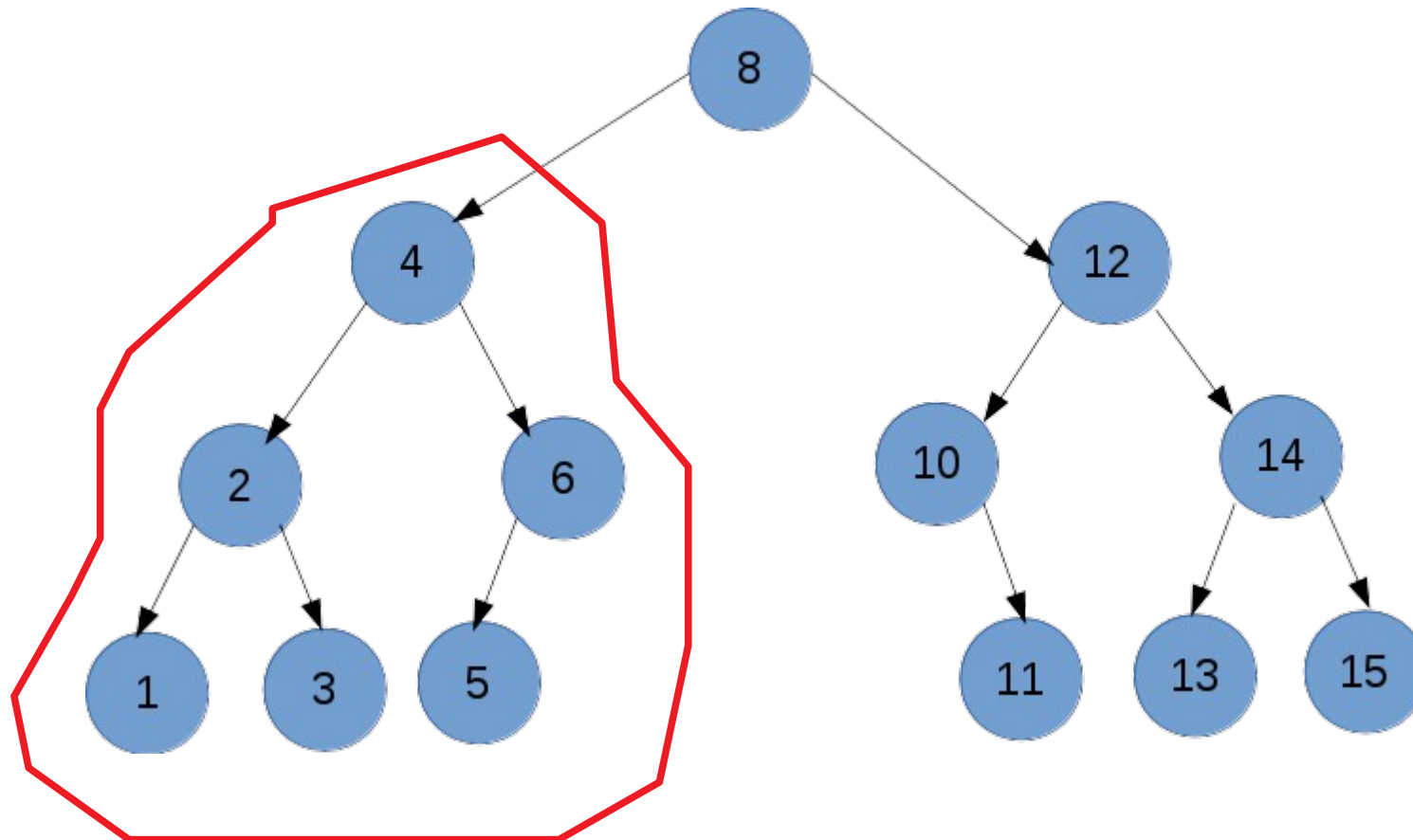
Estrutura de Dados

- Cada subárvore é também considerada como uma árvore.



Estrutura de Dados

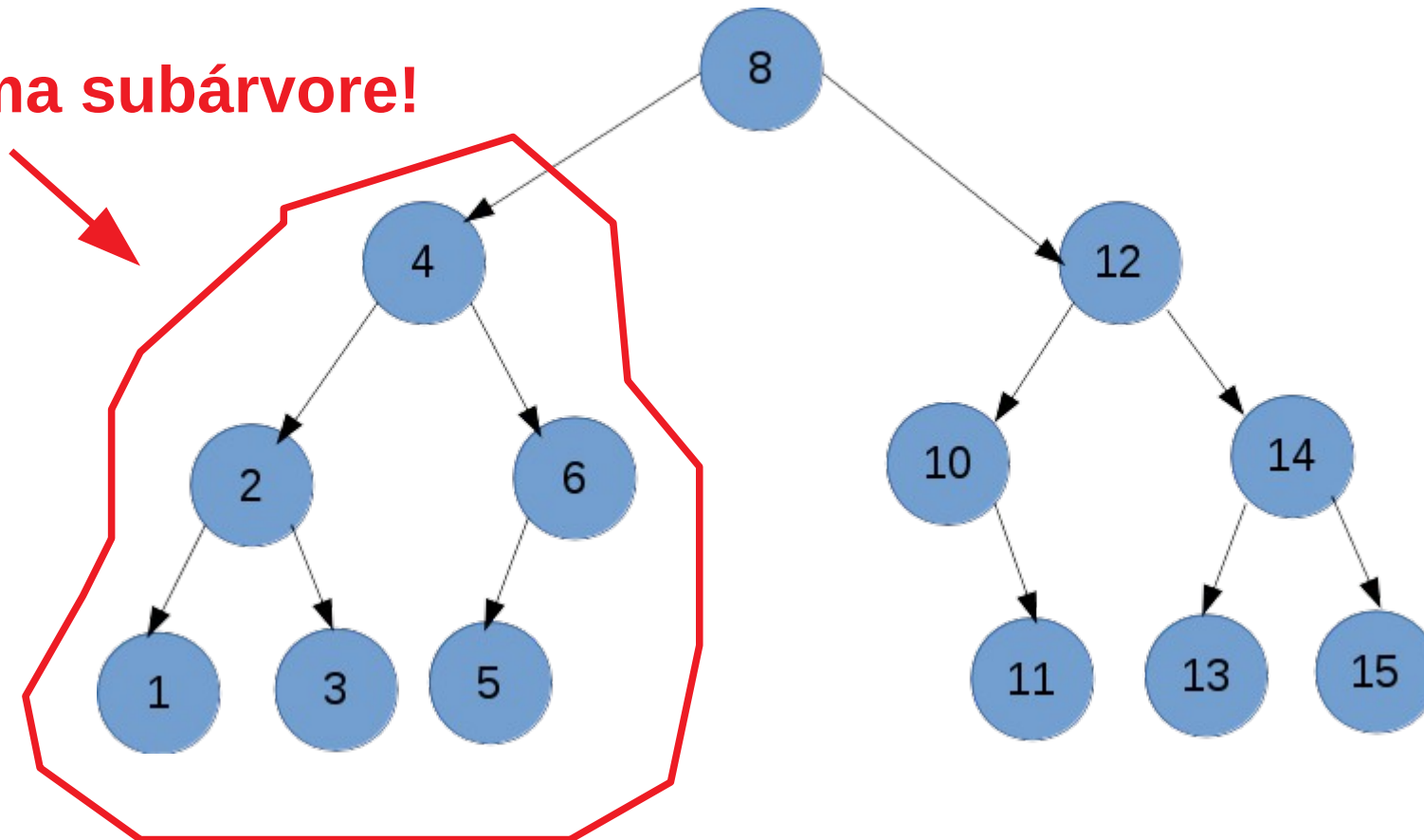
- Cada subárvore é também considerada como uma árvore.



Estrutura de Dados

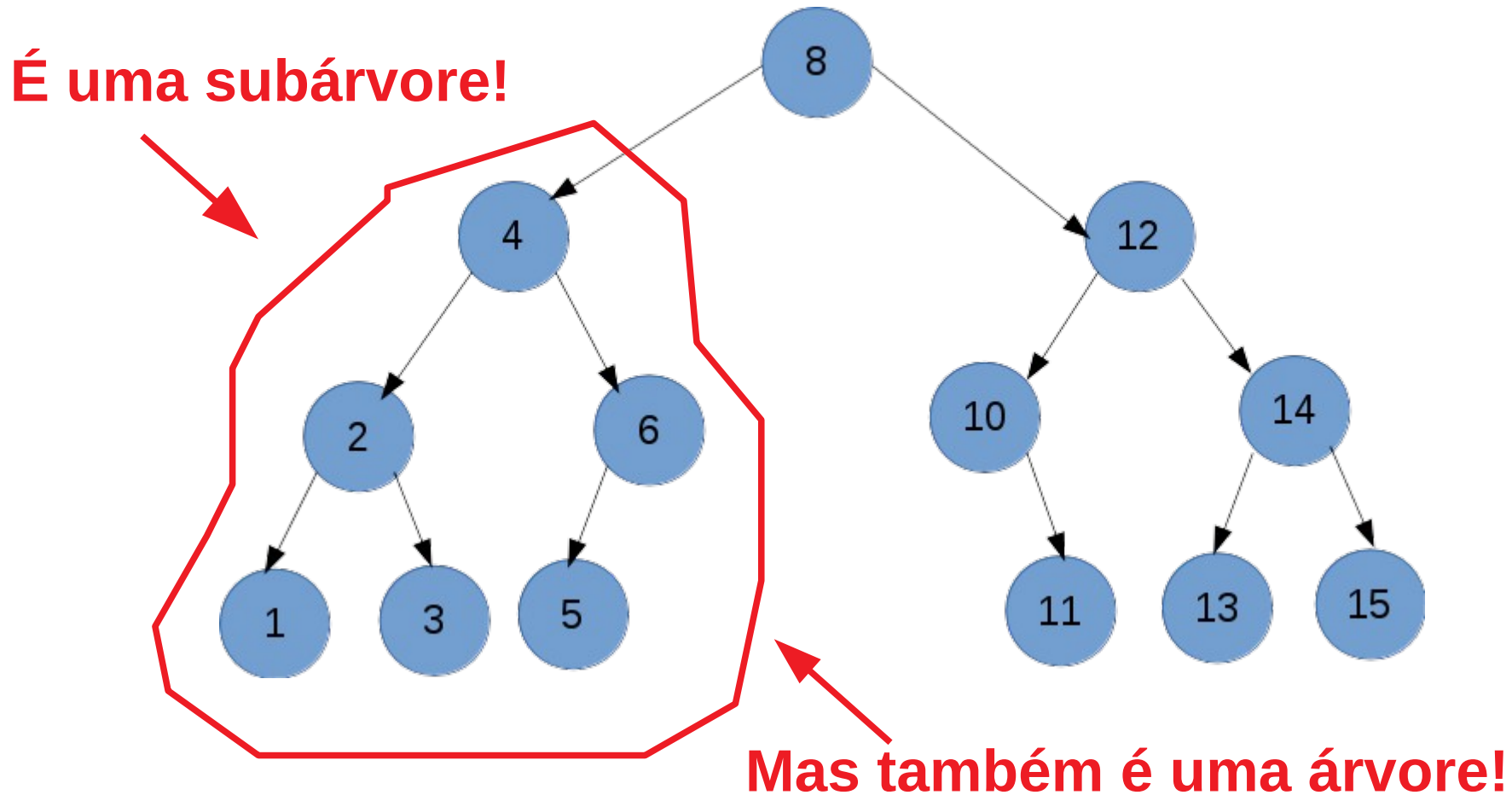
- Cada subárvore é também considerada como uma árvore.

É uma subárvore!



Estrutura de Dados

- Cada subárvore é também considerada como uma árvore.



Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)

Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)
 - O nó no nível mais alto é chamado de **nó raiz** (*root node*).

Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)
 - O nó no nível mais alto é chamado de **nó raiz** (*root node*).
 - Ele fornece o ponto de acesso para a estrutura.

Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)
 - O nó no nível mais alto é chamado de **nó raiz** (*root node*).
 - Ele fornece o ponto de acesso para a estrutura.
 - É o único nó na árvore que não tem uma aresta de entrada.

Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)
 - O nó no nível mais alto é chamado de **nó raiz** (*root node*).
 - Ele fornece o ponto de acesso para a estrutura.
 - É o único nó na árvore que não tem uma aresta de entrada.
 - Toda árvore não-vazia deve conter um nó raiz.

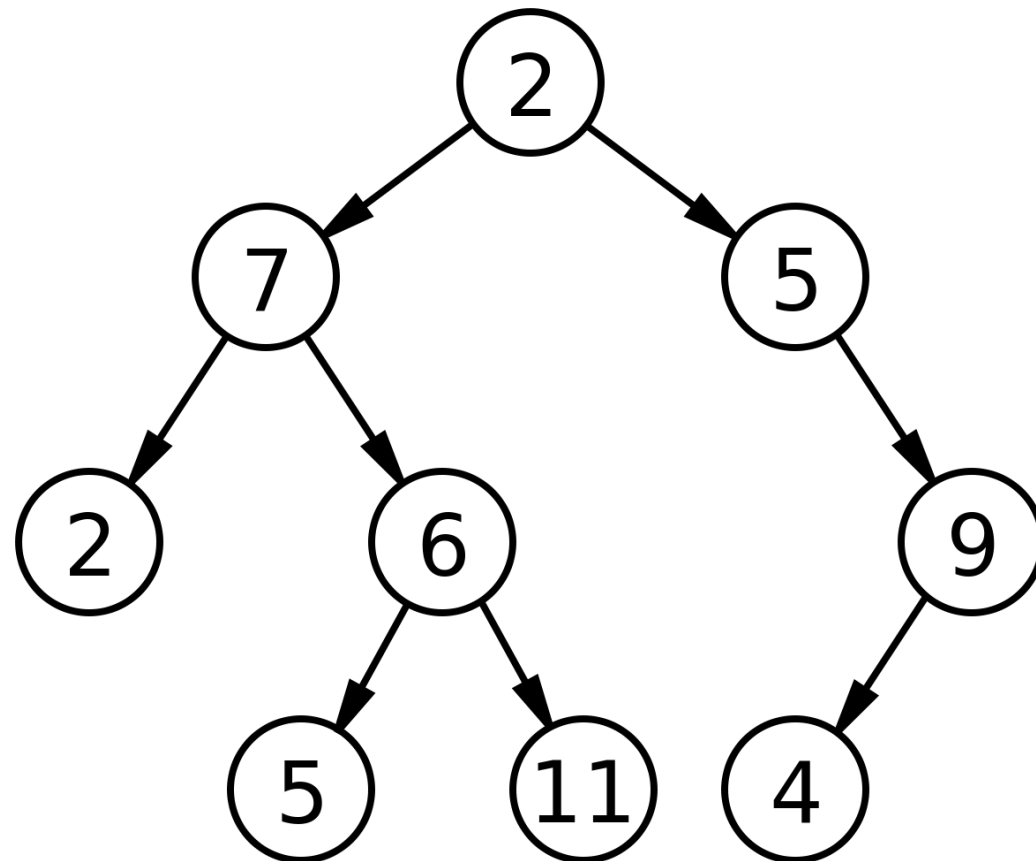
Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)

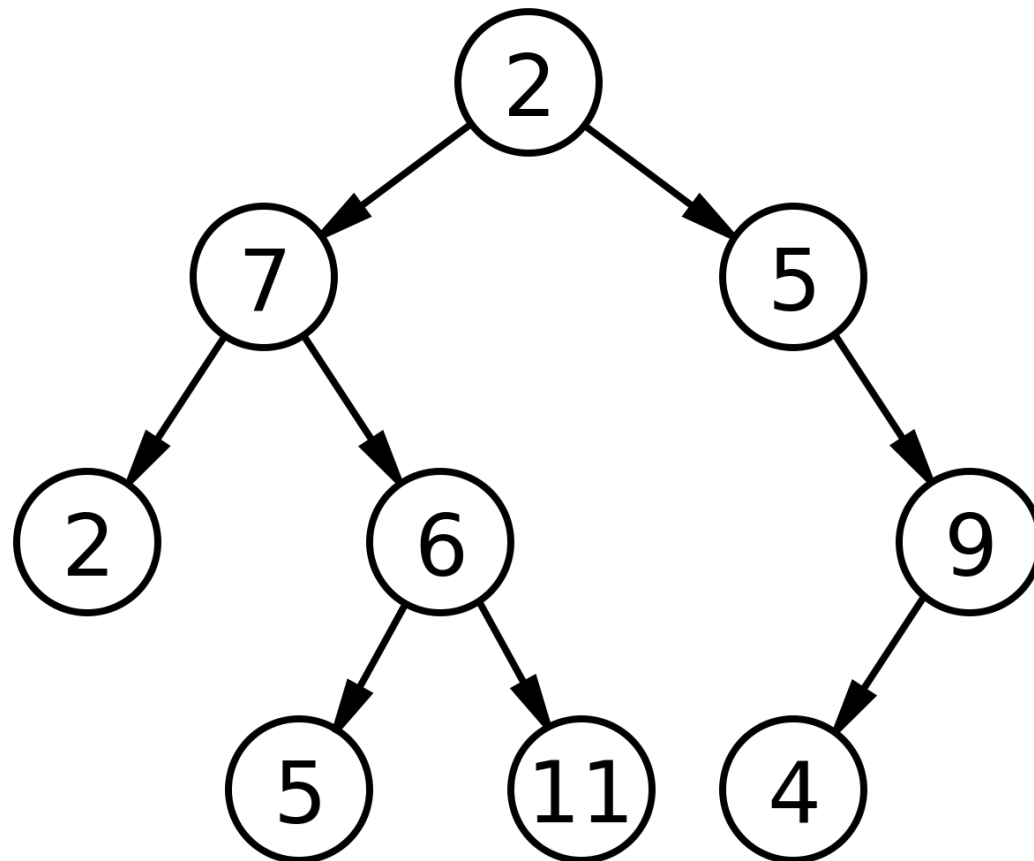
Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)



Elementos da Estrutura Árvore

- Raiz (*root*)
 - 2 é o nó raiz.



Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Caminho (*path*)

Elementos da Estrutura Árvore

- Caminho (*path*)
 - Os demais nós da árvore são acessados através dos vértices.

Elementos da Estrutura Árvore

- Caminho (*path*)
 - Os demais nós da árvore são acessados através dos vértices.
 - Os nós encontrados ao seguir os vértices a partir do nó raiz formam o caminho (*path*).

Elementos da Estrutura Árvore

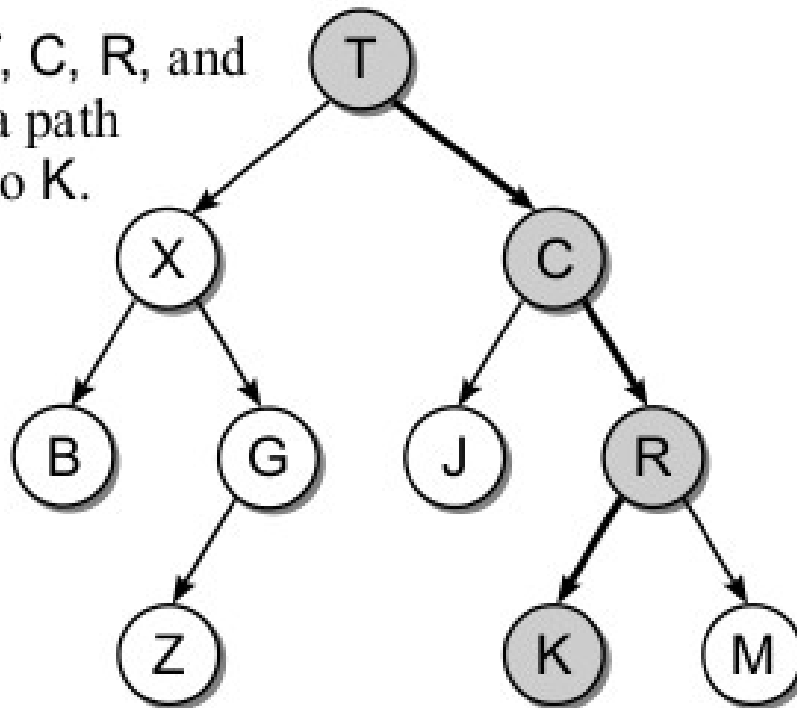
Elementos da Estrutura Árvore

- Caminho (*path*)

Elementos da Estrutura Árvore

- Caminho (*path*)

Nodes T, C, R, and K form a path from T to K.

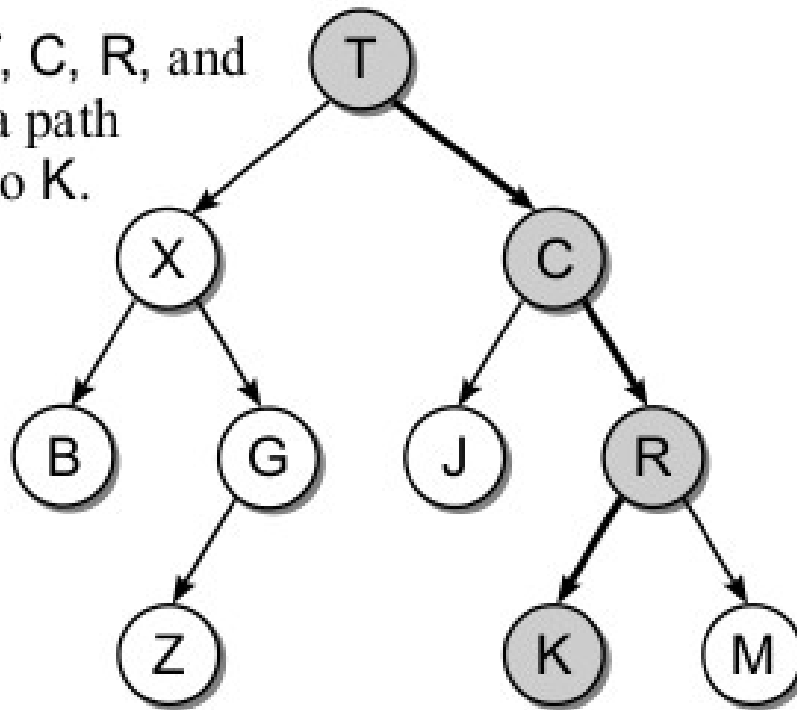


Elementos da Estrutura Árvore

- Caminho (*path*)

- Caminho do nó T até K: $T \rightarrow C \rightarrow R \rightarrow K$

Nodes T, C, R, and K form a path from T to K.



Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Pais (*parent*)

Elementos da Estrutura Árvore

- Pais (*parent*)
 - Cada nó, com exceção da raiz, tem um nó pai.

Elementos da Estrutura Árvore

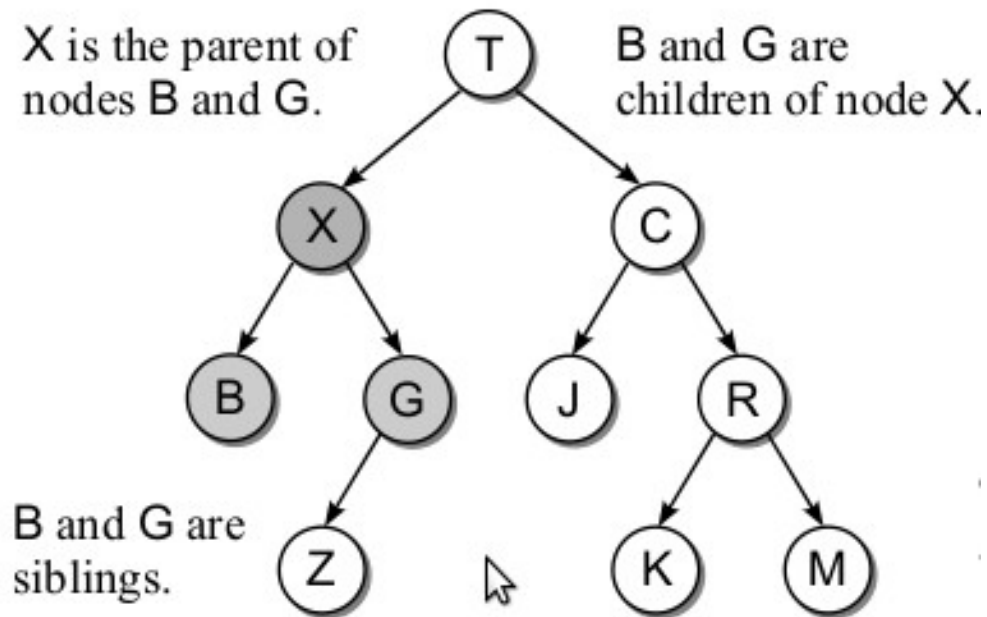
- Pais (*parent*)
 - Cada nó, com exceção da raiz, tem um nó pai.
 - Um nó pode ter apenas um nó pai.

Elementos da Estrutura Árvore

- Pais (*parent*)
 - Cada nó, com exceção da raiz, tem um nó pai.
 - Um nó pode ter apenas um nó pai.
 - Exemplo:

Elementos da Estrutura Árvore

- Pais (*parent*)
 - Cada nó, com exceção da raiz, tem um nó pai.
 - Um nó pode ter apenas um nó pai.
 - Exemplo:



Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Filho (*children*)

Elementos da Estrutura Árvore

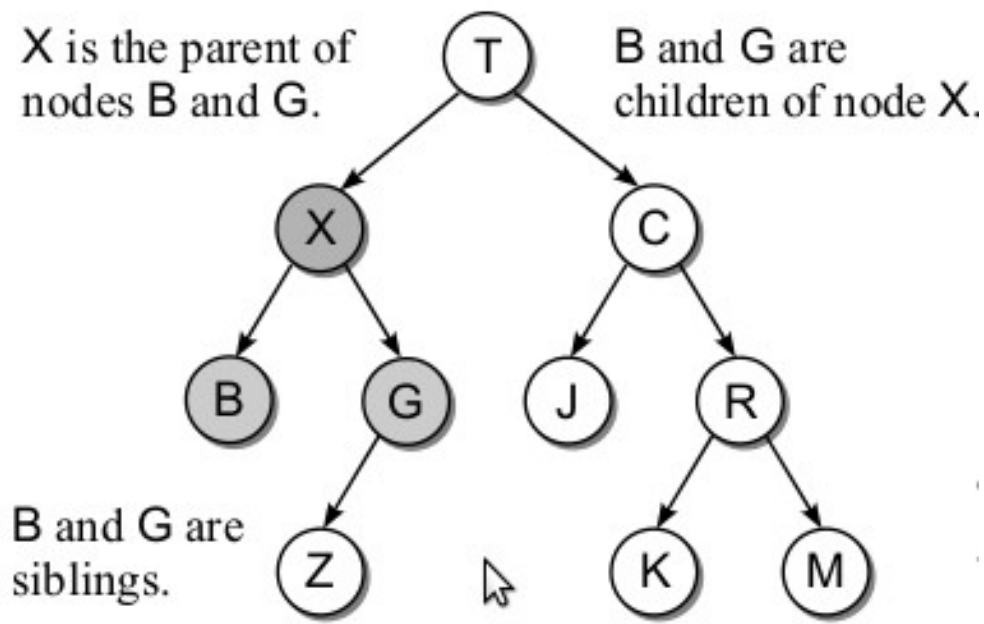
- Filho (*children*)
 - Cada nó pode ter zero, um ou mais filhos.

Elementos da Estrutura Árvore

- Filho (*children*)
 - Cada nó pode ter zero, um ou mais filhos.
 - Exemplo:

Elementos da Estrutura Árvore

- Filho (*children*)
 - Cada nó pode ter zero, um ou mais filhos.
 - Exemplo:



Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Nós

Elementos da Estrutura Árvore

- Nós
 - Nó que tem pelo menos 1 filho é chamado de **nó interior**.

Elementos da Estrutura Árvore

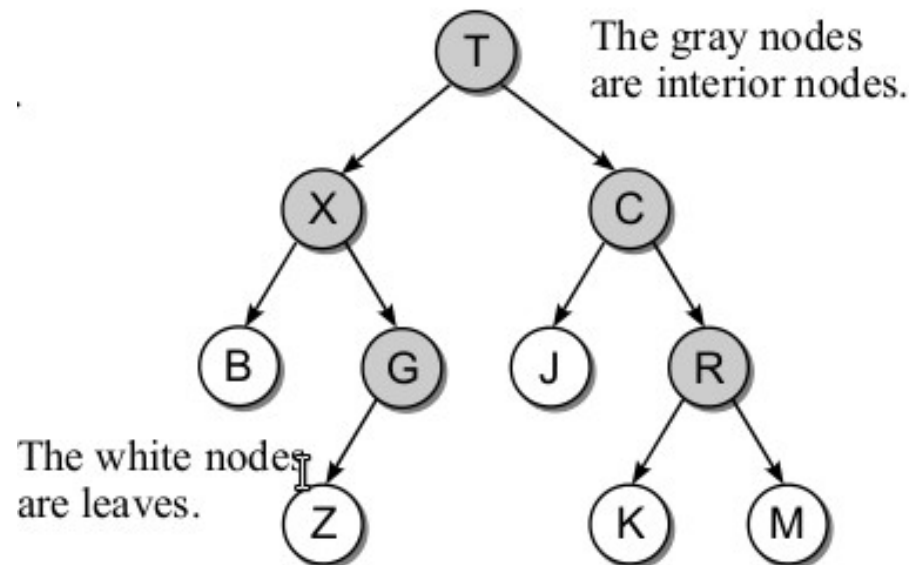
- Nós
 - Nó que tem pelo menos 1 filho é chamado de **nó interior**.
 - Nó que não tem filho é chamado de **nó folha** (*leaf*).

Elementos da Estrutura Árvore

- Nós
 - Nó que tem pelo menos 1 filho é chamado de **nó interior**.
 - Nó que não tem filho é chamado de **nó folha** (*leaf*).
 - Exemplo:

Elementos da Estrutura Árvore

- Nós
 - Nó que tem pelo menos 1 filho é chamado de **nó interior**.
 - Nó que não tem filho é chamado de **nó folha** (*leaf*).
 - Exemplo:



Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Subárvores

Elementos da Estrutura Árvore

- Subárvores
 - Por definição, uma árvore é uma estrutura recursiva.

Elementos da Estrutura Árvore

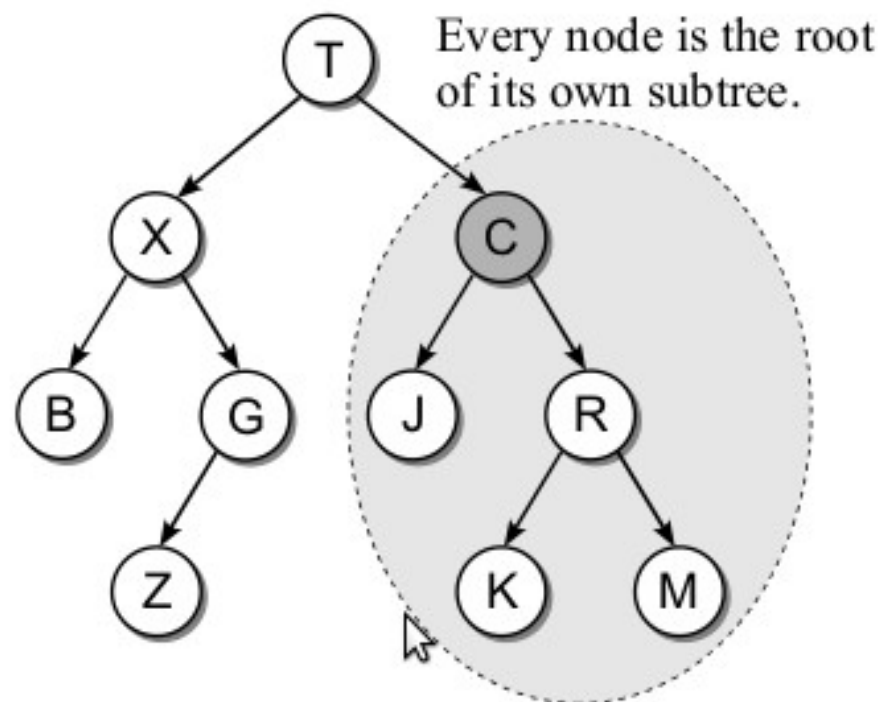
- Subárvores
 - Por definição, uma árvore é uma estrutura recursiva.
 - Todo nó pode ser raiz da sua própria subárvore.

Elementos da Estrutura Árvore

- Subárvores
 - Por definição, uma árvore é uma estrutura recursiva.
 - Todo nó pode ser raiz da sua própria subárvore.
 - Exemplo:

Elementos da Estrutura Árvore

- Subárvores
 - Por definição, uma árvore é uma estrutura recursiva.
 - Todo nó pode ser raiz da sua própria subárvore.
 - Exemplo:



Elementos da Estrutura Árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Grau

Elementos da Estrutura Árvore

- Grau
 - Representa o número de subárvores de um nó.

Elementos da Estrutura Árvore

- Grau
 - Representa o número de subárvores de um nó.
- Grau de uma árvore

Elementos da Estrutura Árvore

- Grau
 - Representa o número de subárvores de um nó.
- Grau de uma árvore
 - É definido como sendo igual ao máximo dos graus de todos os seus nós.

Árvores Binárias

Árvores Binárias

Árvores Binárias

- As árvores podem aparecer em vários formatos.

Árvores Binárias

- As árvores podem aparecer em vários formatos.
- Elas podem variar o número de filhos permitidos por nó.

Árvores Binárias

- As árvores podem aparecer em vários formatos.
- Elas podem variar o número de filhos permitidos por nó.
- Uma árvore bastante usada é a **árvore binária**, em que cada nó pode ter, no máximo, dois filhos por nó.

Árvores Binárias

- As árvores podem aparecer em vários formatos.
- Elas podem variar o número de filhos permitidos por nó.
- Uma árvore bastante usada é a **árvore binária**, em que cada nó pode ter, no máximo, dois filhos por nó.
- Os filhos podem ficar à esquerda ou à direita.

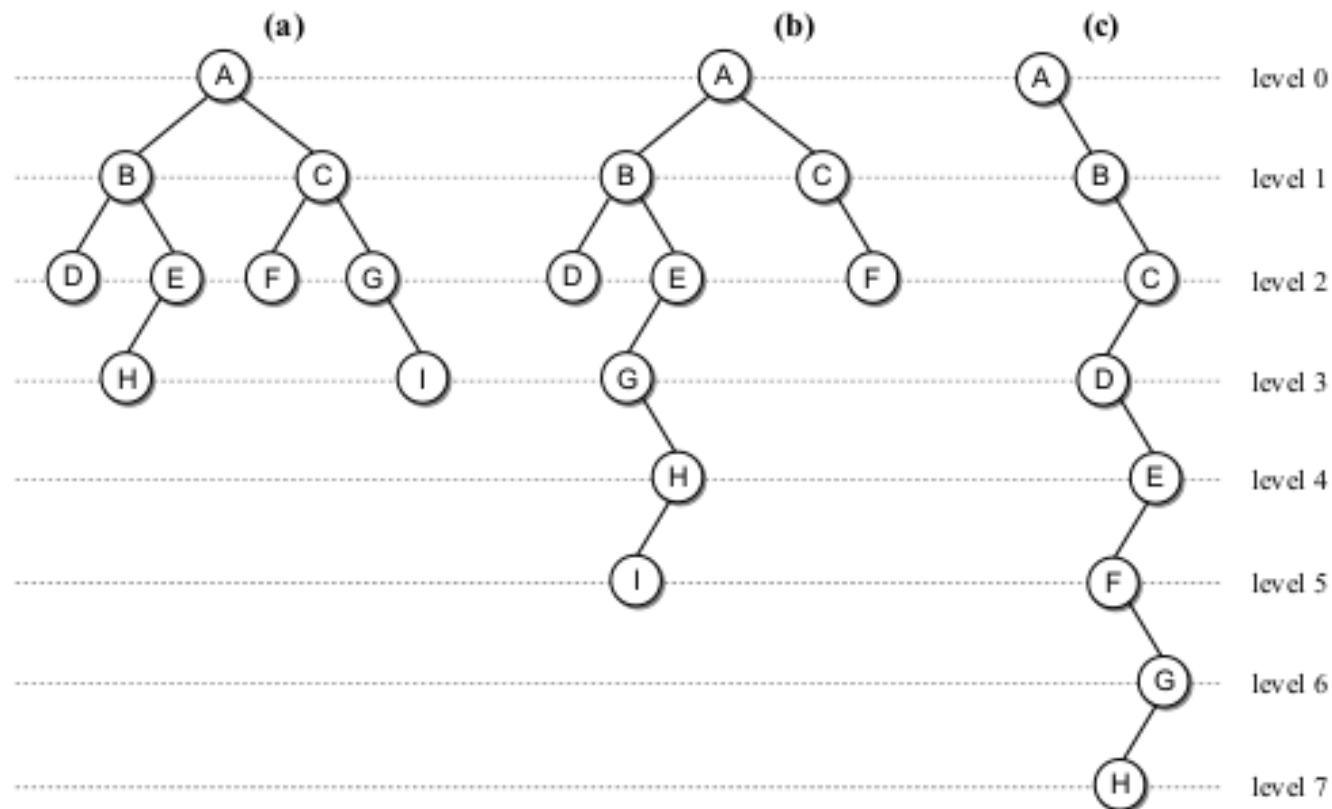
Árvores Binárias

- Propriedades
 - Árvores binárias podem aparecer em diferentes formatos e tamanhos.

Árvores Binárias

- Propriedades

- Exemplo de três formatos distintos para uma árvore binária com 9 nós:



Árvores Binárias

Árvores Binárias

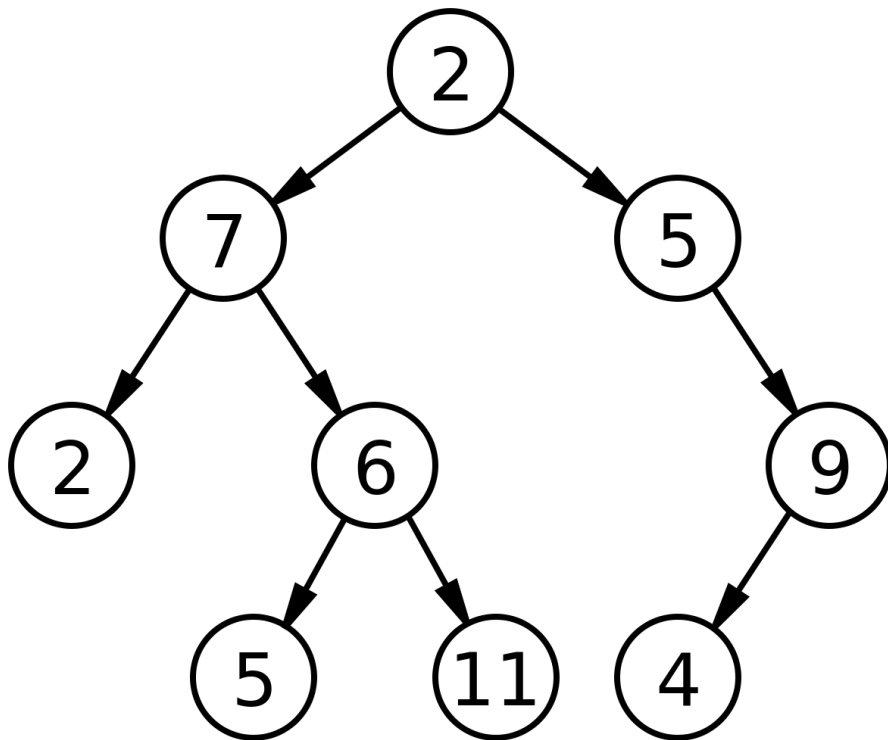
- Tamanho da árvore

Árvores Binárias

- Tamanho da árvore
 - Os nós em uma árvore binária são organizados em níveis (*levels*), onde o nó raiz está no nível 0, os seus filhos no nível 1, etc.

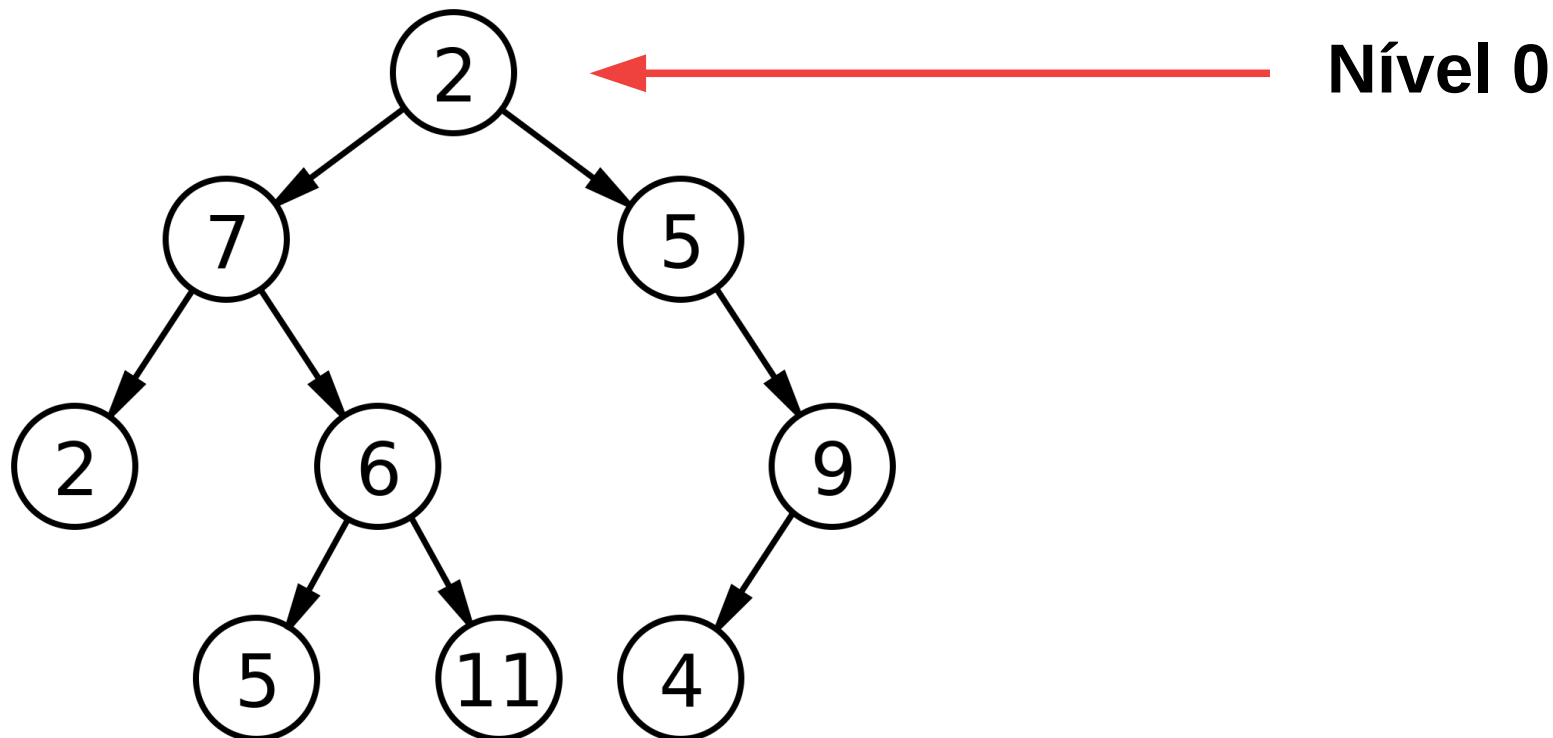
Árvores Binárias

- Tamanho da árvore
 - Os nós em uma árvore binária são organizados em níveis (*levels*), onde o nó raiz está no nível 0, os seus filhos no nível 1, etc.



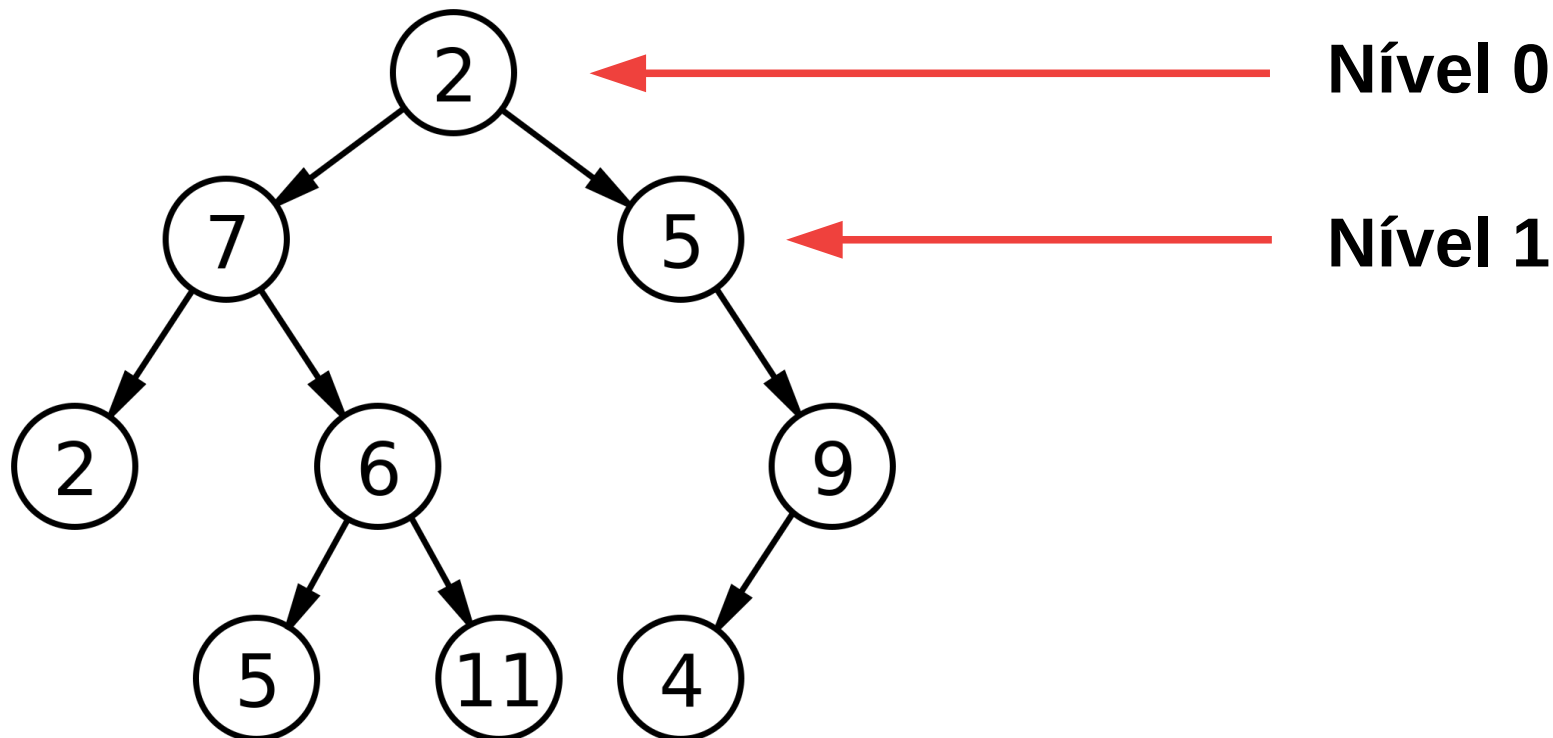
Árvores Binárias

- Tamanho da árvore
 - Os nós em uma árvore binária são organizados em níveis (*levels*), onde o nó raiz está no nível 0, os seus filhos no nível 1, etc.



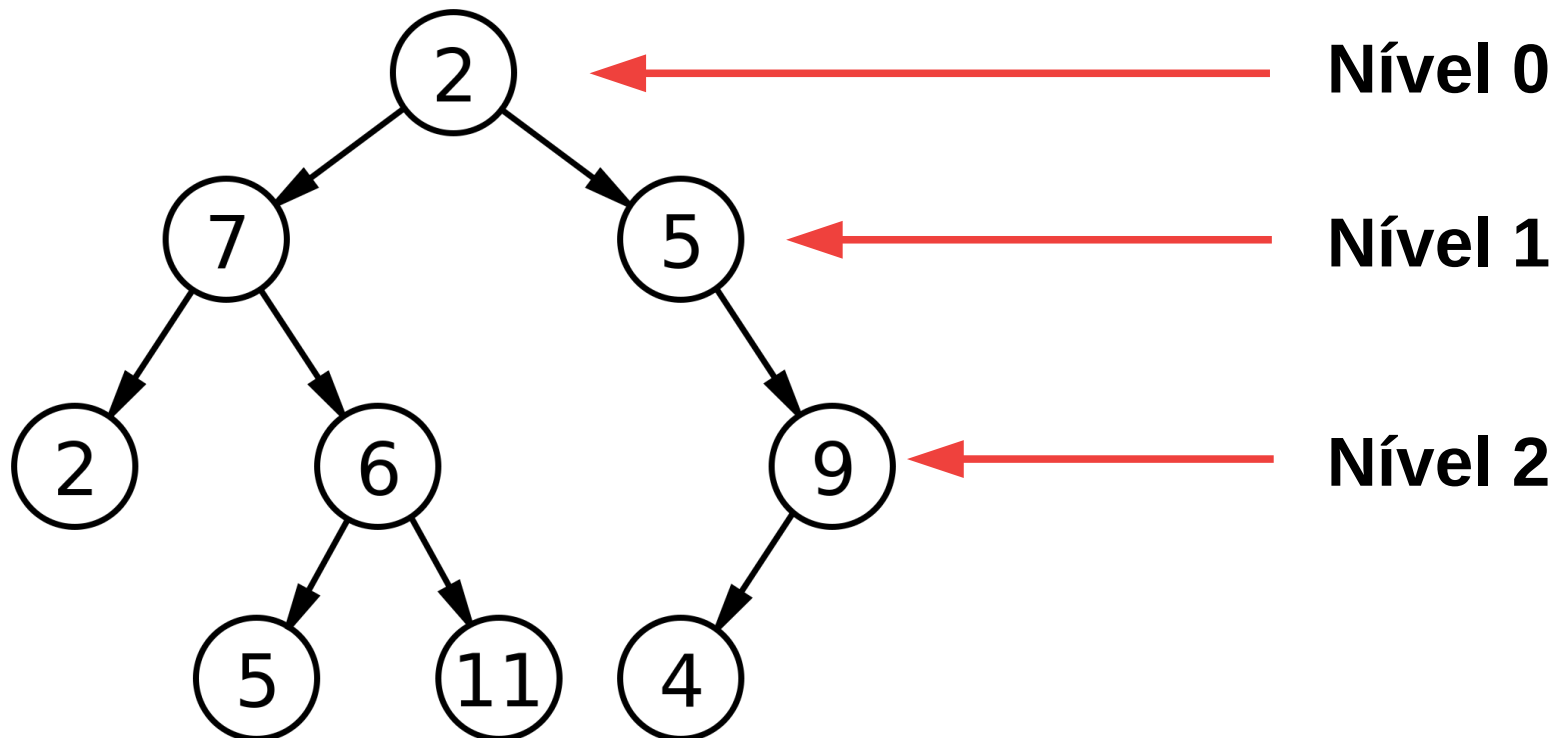
Árvores Binárias

- Tamanho da árvore
 - Os nós em uma árvore binária são organizados em níveis (*levels*), onde o nó raiz está no nível 0, os seus filhos no nível 1, etc.



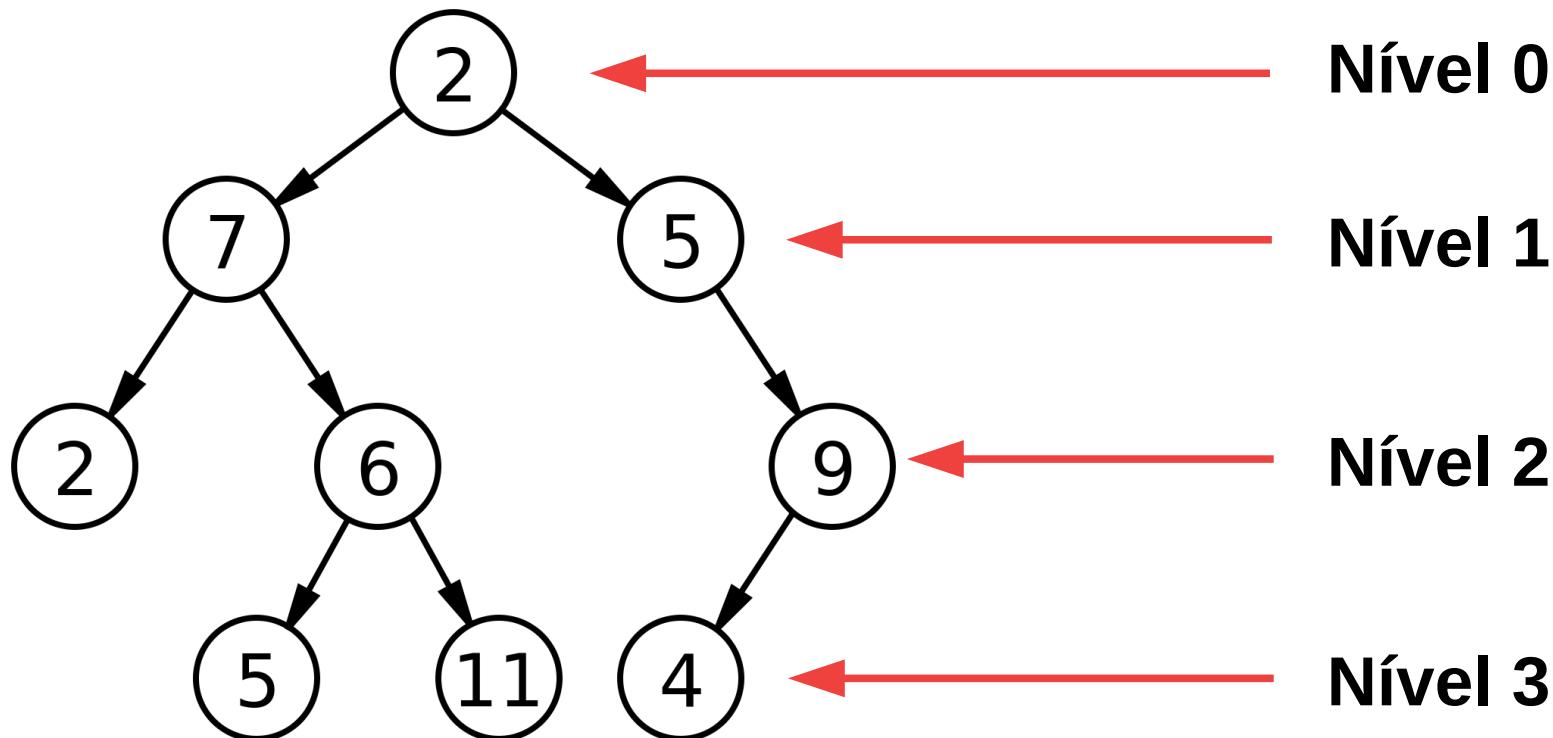
Árvores Binárias

- Tamanho da árvore
 - Os nós em uma árvore binária são organizados em níveis (*levels*), onde o nó raiz está no nível 0, os seus filhos no nível 1, etc.



Árvores Binárias

- Tamanho da árvore
 - Os nós em uma árvore binária são organizados em níveis (*levels*), onde o nó raiz está no nível 0, os seus filhos no nível 1, etc.



Árvores Binárias

Árvores Binárias

- Profundidade (*depth*)

Árvores Binárias

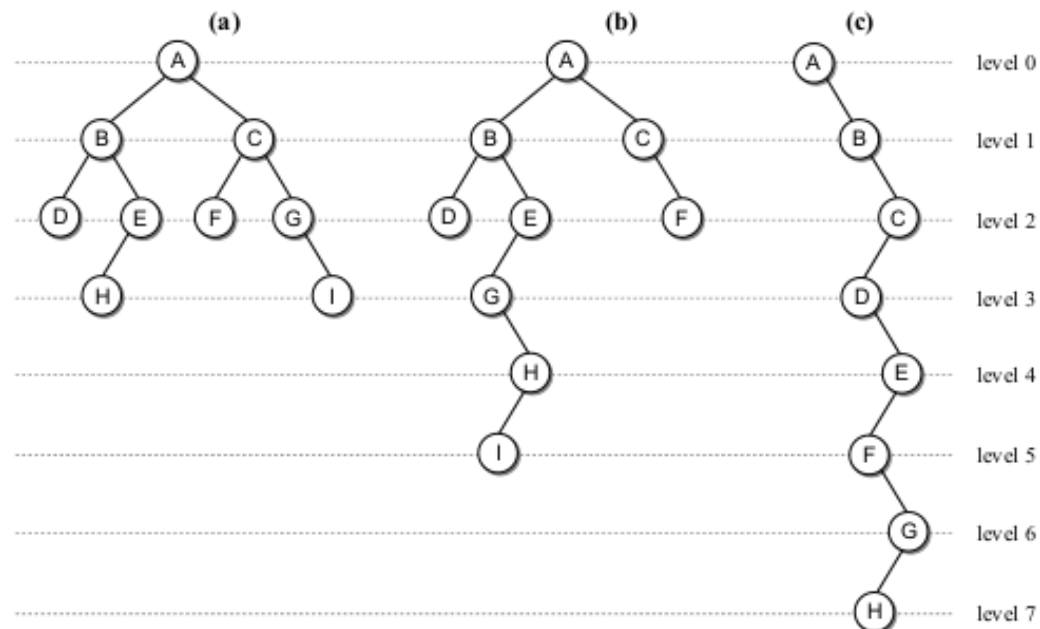
- Profundidade (*depth*)
 - Profundidade é a distância de um nó até a raiz.

Árvores Binárias

- Profundidade (*depth*)
 - Profundidade é a distância de um nó até a raiz.
 - A profundidade do nó G:

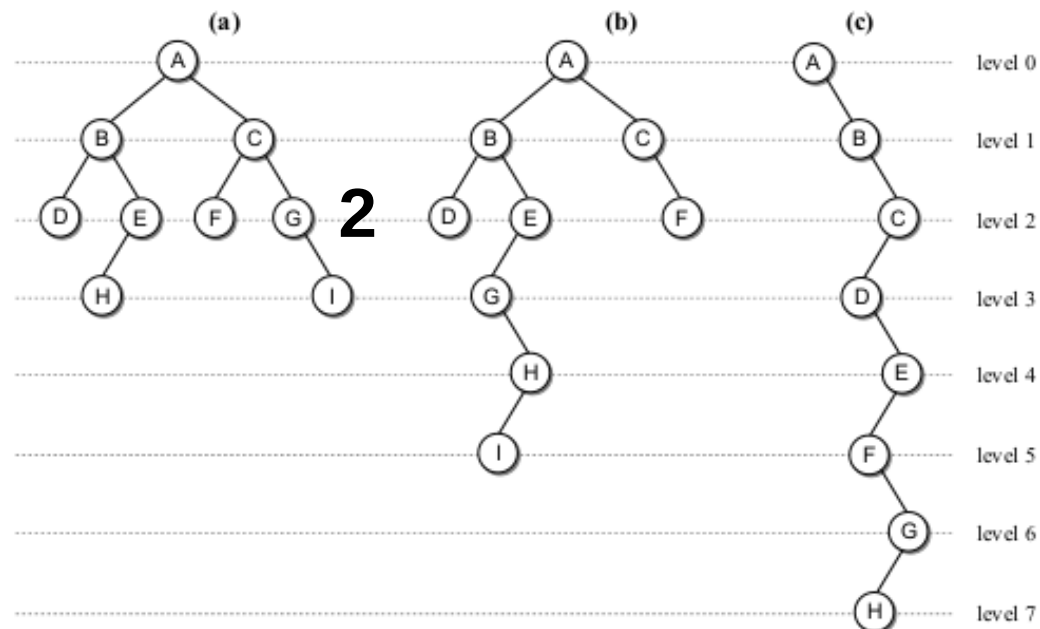
Árvores Binárias

- Profundidade (*depth*)
 - Profundidade é a distância de um nó até a raiz.
 - A profundidade do nó G:



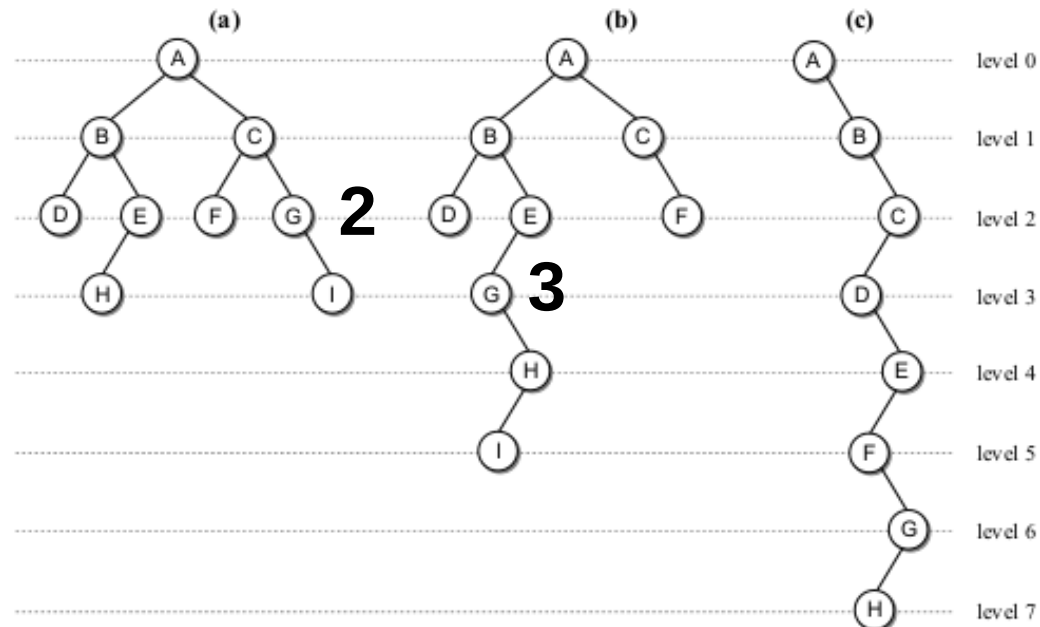
Árvores Binárias

- Profundidade (*depth*)
 - Profundidade é a distância de um nó até a raiz.
 - A profundidade do nó G:



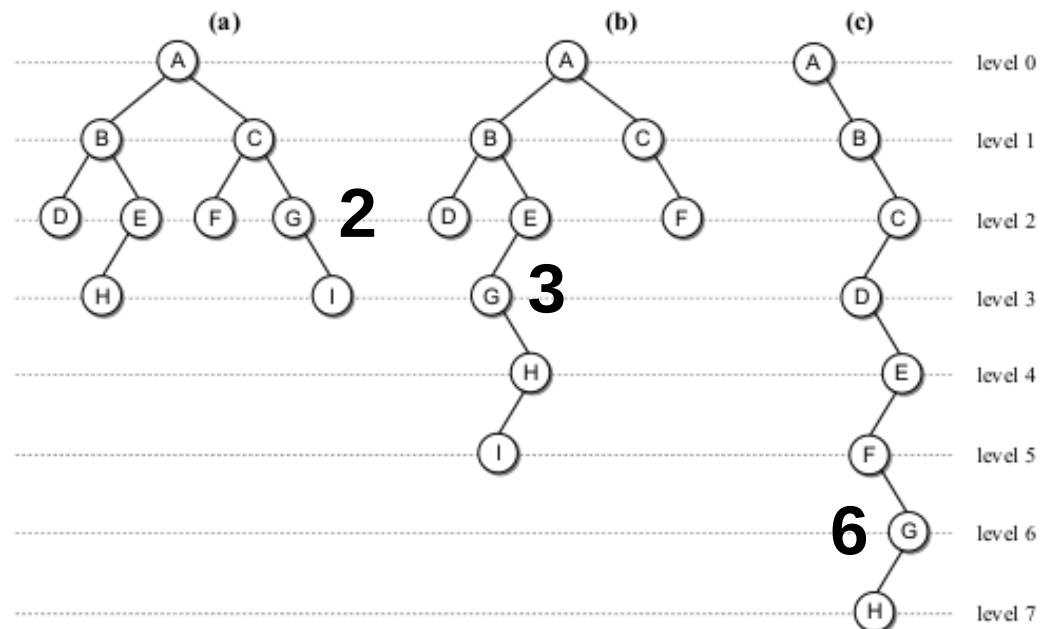
Árvores Binárias

- Profundidade (*depth*)
 - Profundidade é a distância de um nó até a raiz.
 - A profundidade do nó G:



Árvores Binárias

- Profundidade (*depth*)
 - Profundidade é a distância de um nó até a raiz.
 - A profundidade do nó G:



Árvores Binárias

Árvores Binárias

- Altura (*height*)

Árvores Binárias

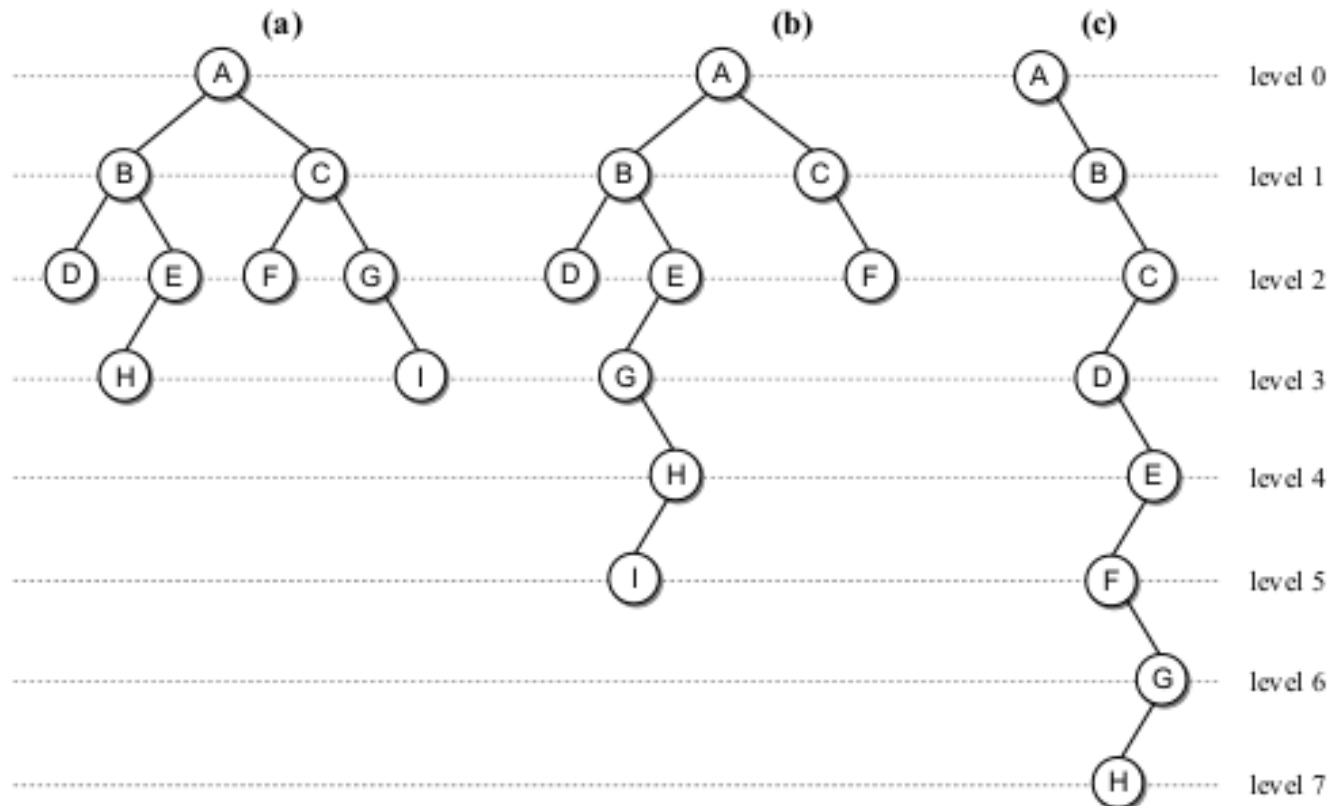
- Altura (*height*)
 - É o número de níveis de uma árvore.

Árvores Binárias

- Altura (*height*)
 - É o número de níveis de uma árvore.
 - Exemplo:

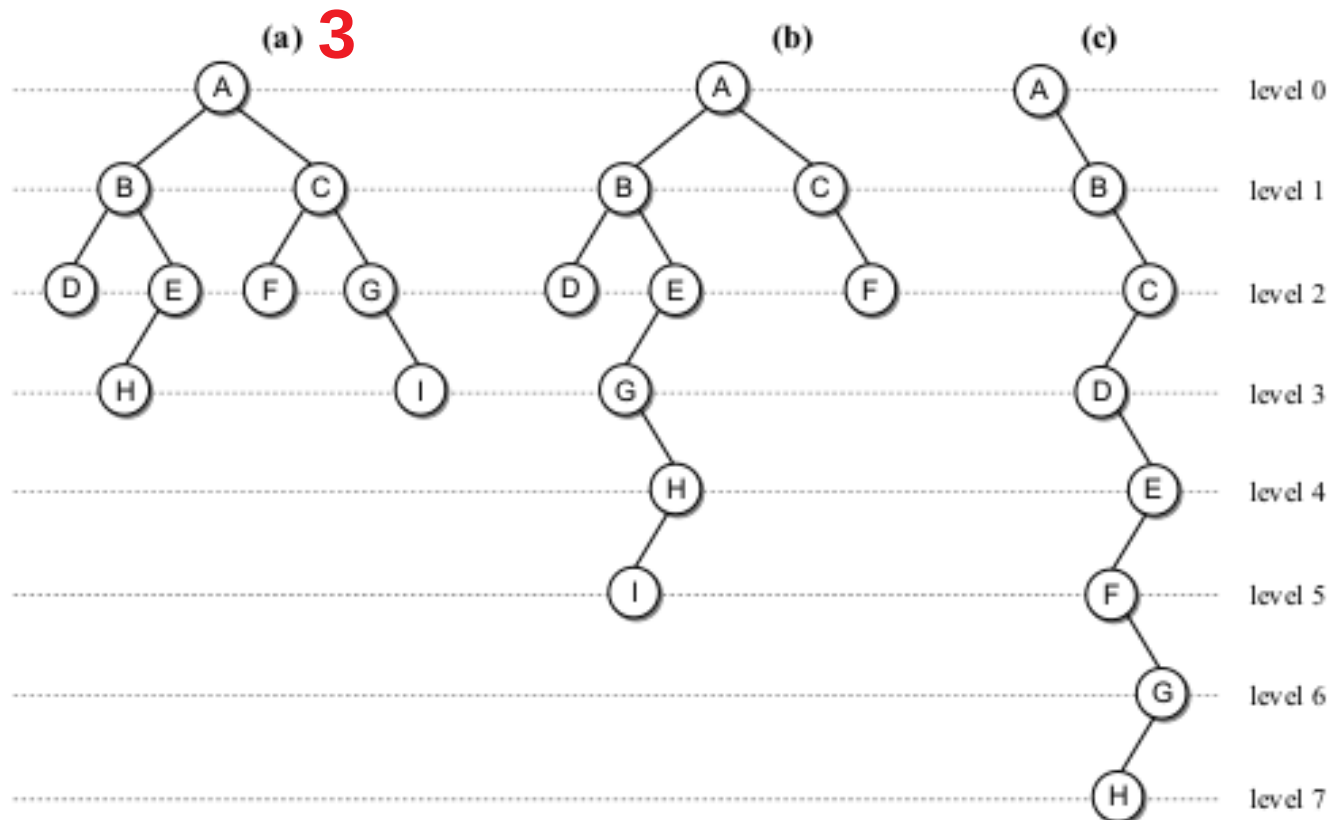
Árvores Binárias

- *Altura (height)*
 - É o número de níveis de uma árvore.
 - Exemplo:



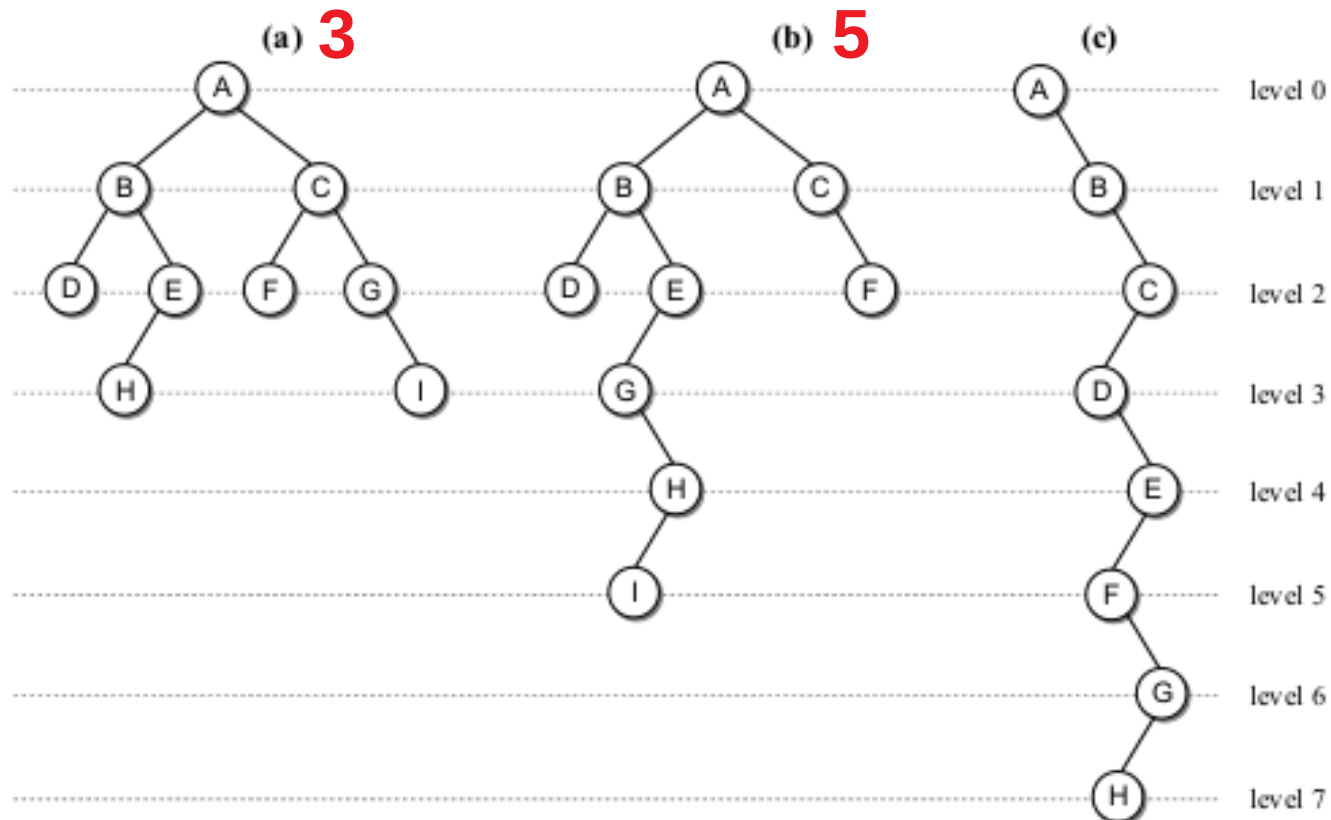
Árvores Binárias

- Altura (*height*)
 - É o número de níveis de uma árvore.
 - Exemplo:



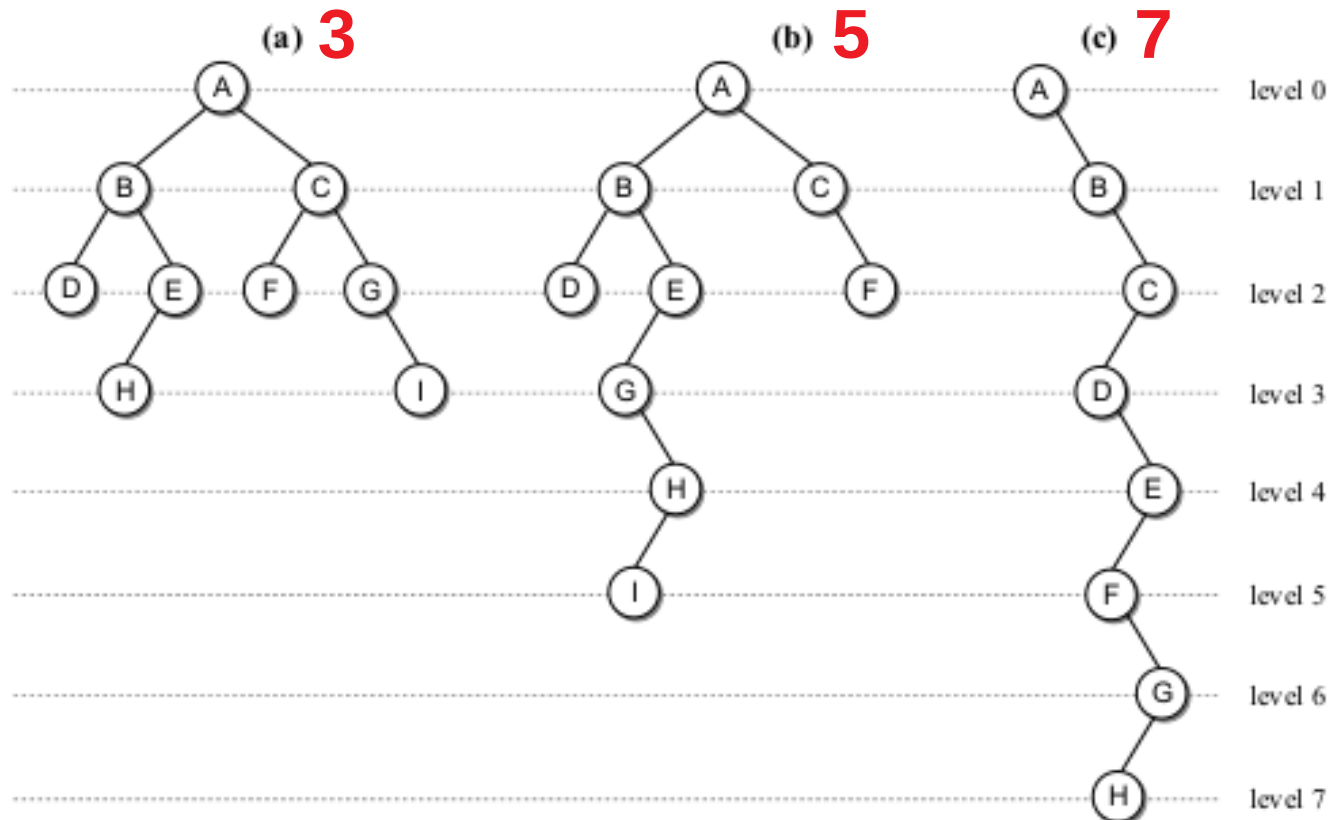
Árvores Binárias

- *Altura (height)*
 - É o número de níveis de uma árvore.
 - Exemplo:



Árvores Binárias

- Altura (*height*)
 - É o número de níveis de uma árvore.
 - Exemplo:



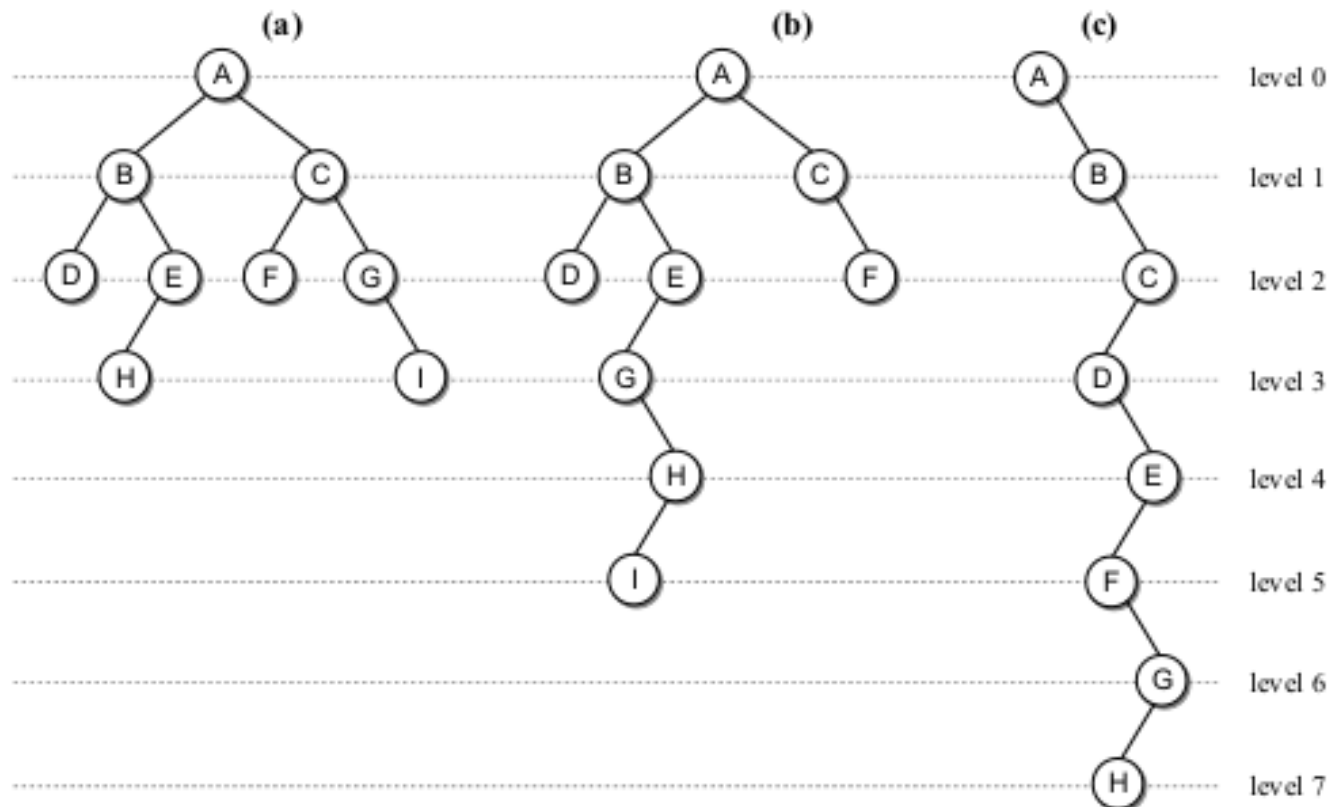
Árvores Binárias

Árvores Binárias

- Largura (*width*)
 - É o número de nós no nível que contém a maioria dos nós.

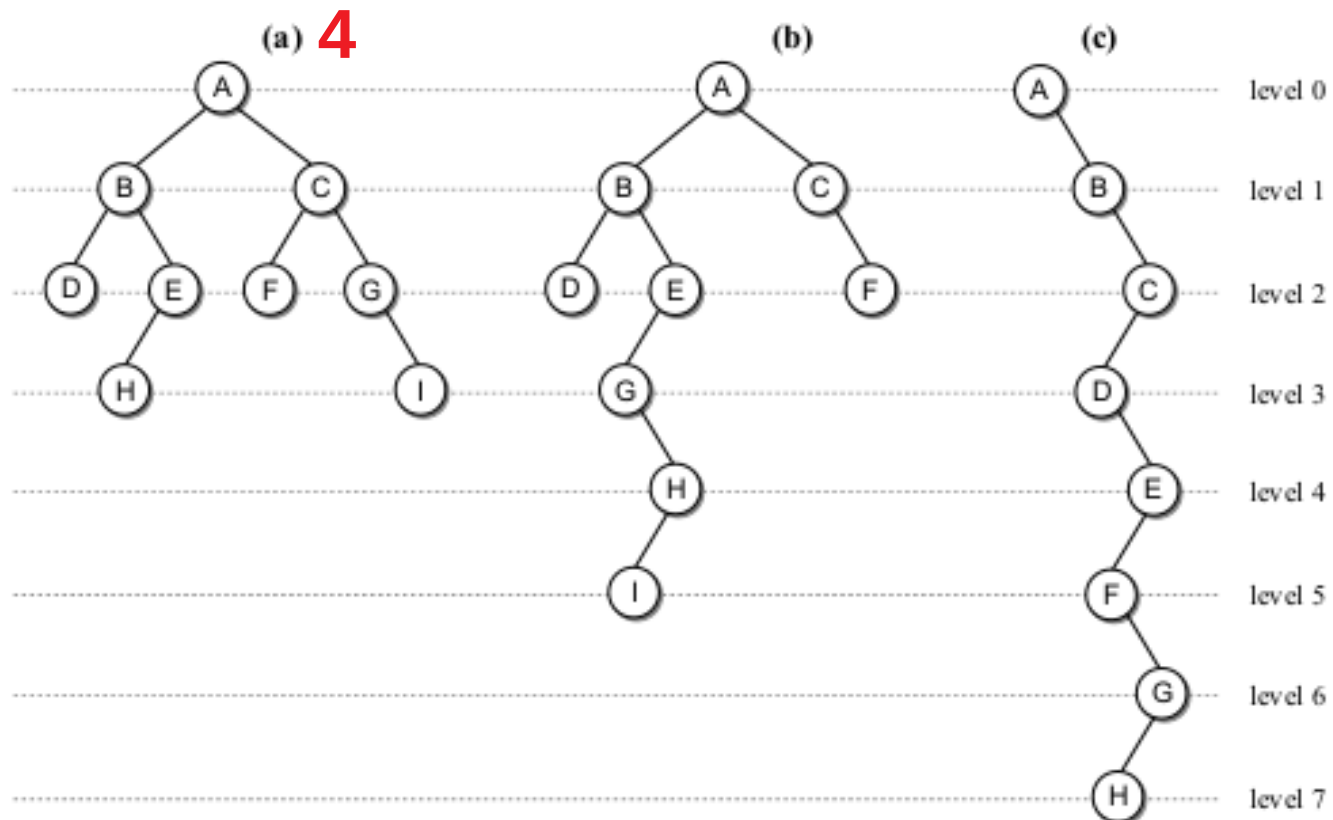
Árvores Binárias

- Largura (*width*)
 - É o número de nós no nível que contém a maioria dos nós.



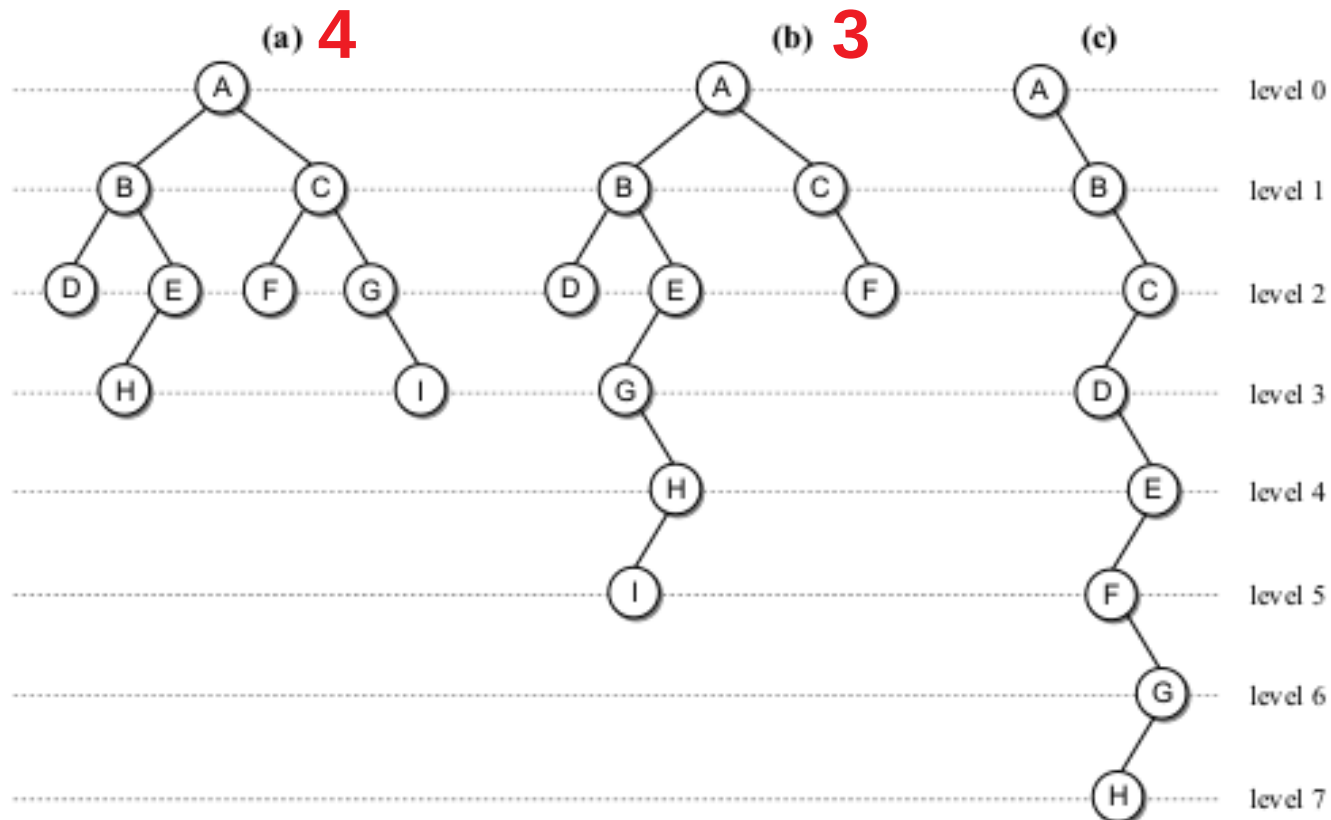
Árvores Binárias

- Largura (*width*)
 - É o número de nós no nível que contém a maioria dos nós.



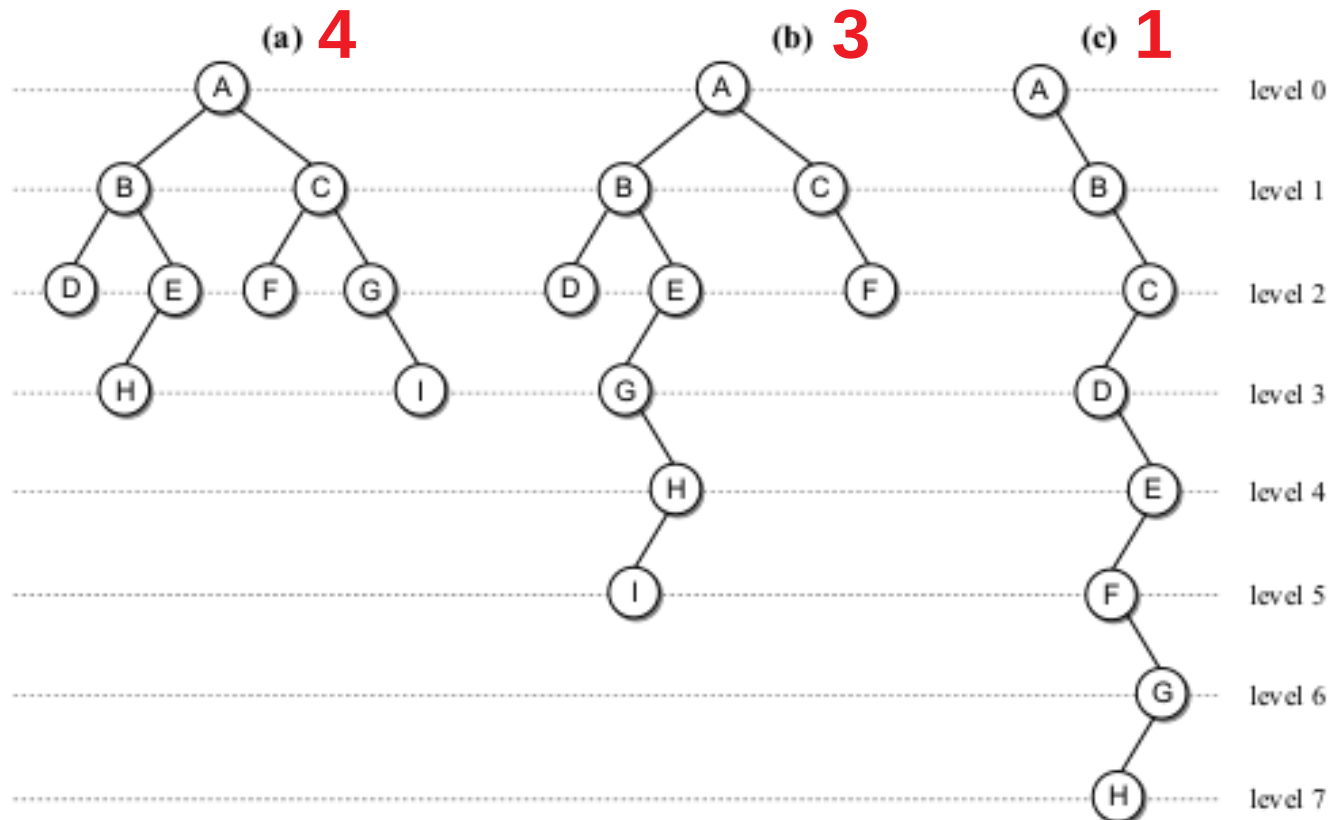
Árvores Binárias

- Largura (*width*)
 - É o número de nós no nível que contém a maioria dos nós.



Árvores Binárias

- Largura (*width*)
 - É o número de nós no nível que contém a maioria dos nós.



Árvores Binárias

Árvores Binárias

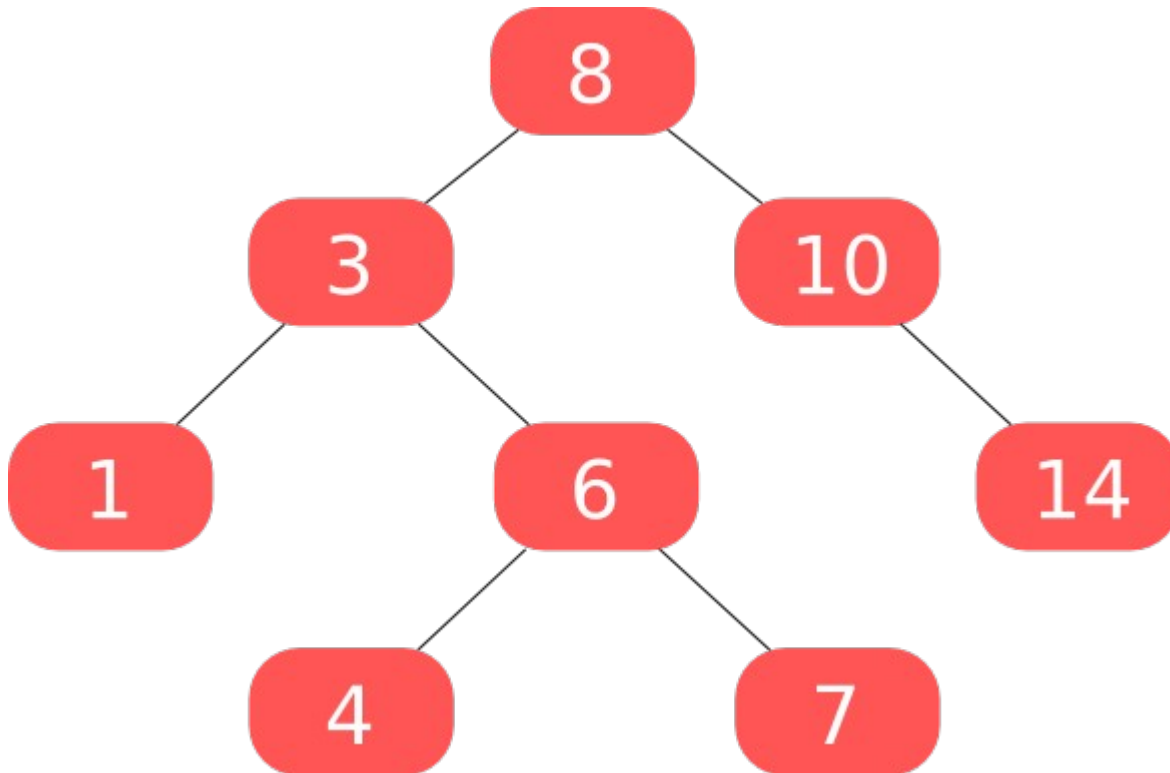
- Tamanho (*size*)

Árvores Binárias

- Tamanho (*size*)
 - O tamanho máximo de uma árvore é o número de nós da árvore.

Árvores Binárias

- Tamanho (*size*)
 - O tamanho máximo de uma árvore é o número de nós da árvore.



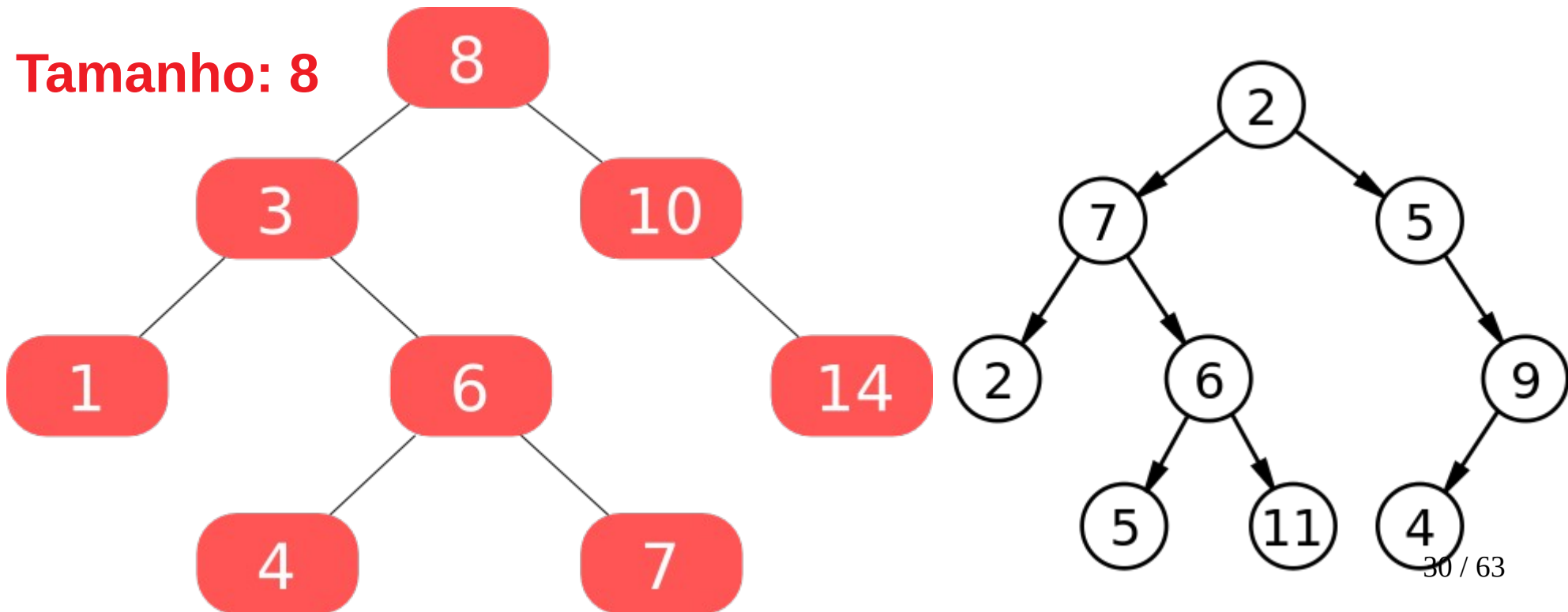
Árvores Binárias

- Tamanho (*size*)
 - O tamanho máximo de uma árvore é o número de nós da árvore.



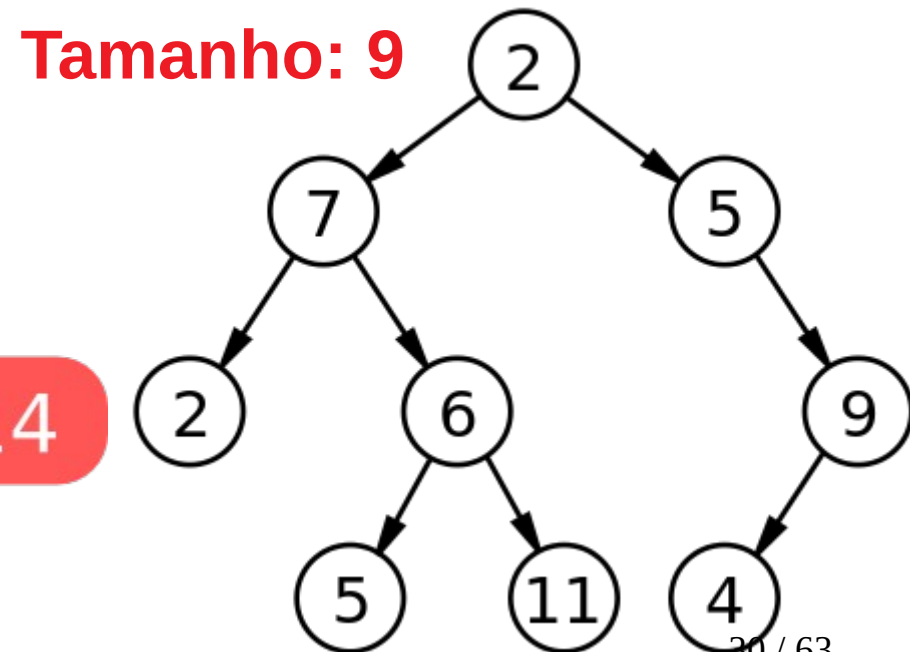
Árvores Binárias

- Tamanho (*size*)
 - O tamanho máximo de uma árvore é o número de nós da árvore.



Árvores Binárias

- Tamanho (*size*)
 - O tamanho máximo de uma árvore é o número de nós da árvore.



Árvores Binárias

Árvores Binárias

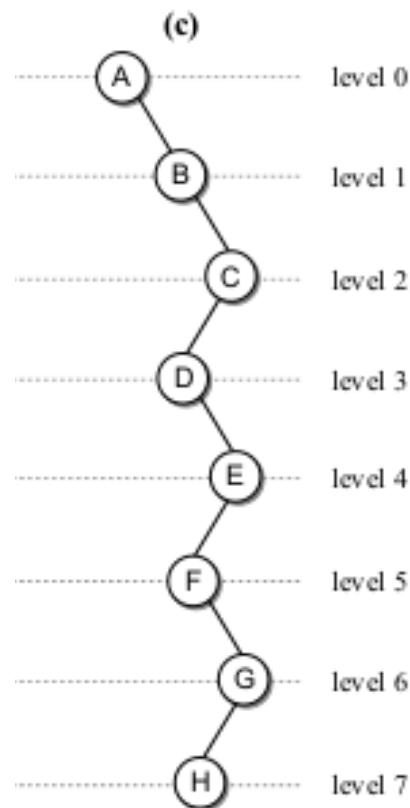
- Uma árvore binária de tamanho n pode ter uma altura máxima de n , quando existe um nó por nível.

Árvores Binárias

- Uma árvore binária de tamanho n pode ter uma altura máxima de n , quando existe um nó por nível.
- Exemplo:

Árvores Binárias

- Uma árvore binária de tamanho n pode ter uma altura máxima de n , quando existe um nó por nível.
- Exemplo:



Árvores Binárias

Árvores Binárias

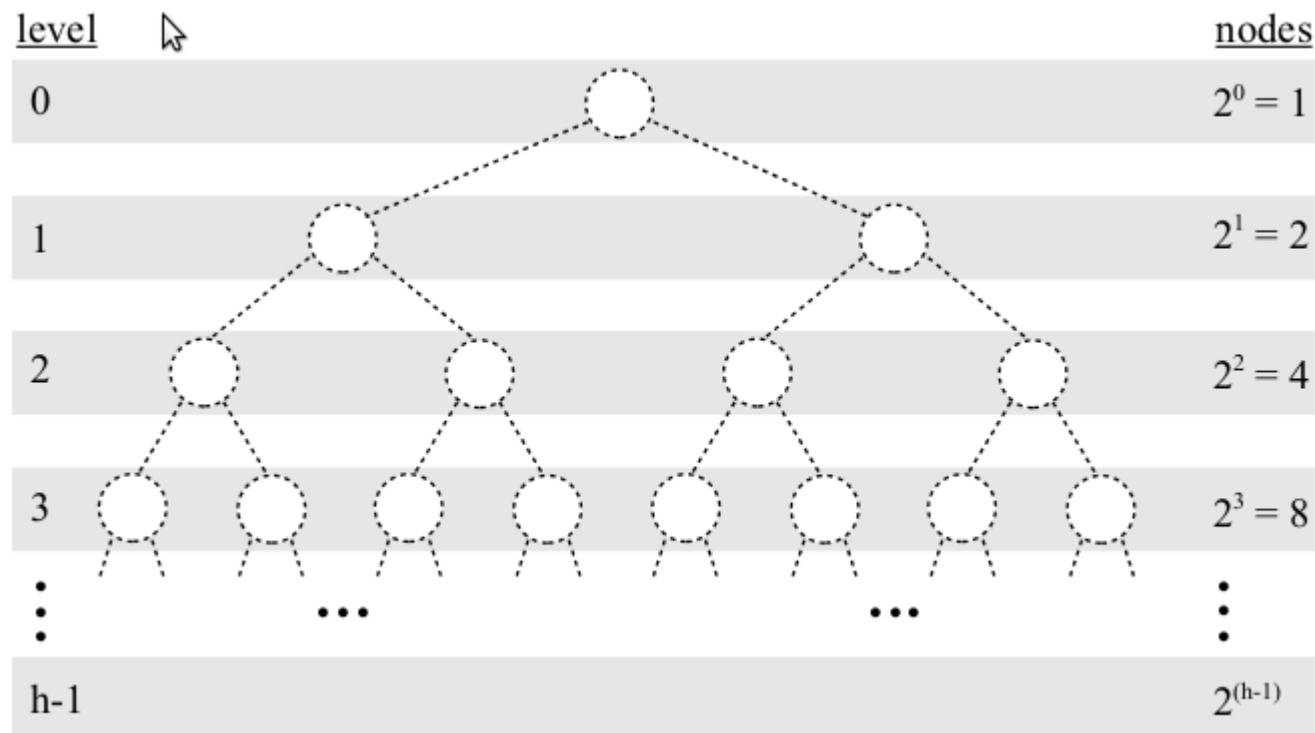
- Qual é a altura mínima de uma árvore binária com n nós?

Árvores Binárias

- Qual é a altura mínima de uma árvore binária com n nós?
 - Cada nível i terá 2^i nós.

Árvores Binárias

- Qual é a altura mínima de uma árvore binária com n nós?
 - Cada nível i terá 2^i nós.



Árvores Binárias

Árvores Binárias

- Qual é a altura mínima de uma árvore binária com n nós?

Árvores Binárias

- Qual é a altura mínima de uma árvore binária com n nós?

$$n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{d-1} + 2^d$$

Árvores Binárias

- Qual é a altura mínima de uma árvore binária com n nós?

$$n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{d-1} + 2^d$$

$$n = 2^{d+1} - 1$$

Árvores Binárias

- Qual é a altura mínima de uma árvore binária com n nós?

$$n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{d-1} + 2^d$$

$$n = 2^{d+1} - 1$$

$$d = \log(n + 1) - 1$$

Árvores Binárias

Árvores Binárias

- Árvore binária cheia (*full binary tree*)

Árvores Binárias

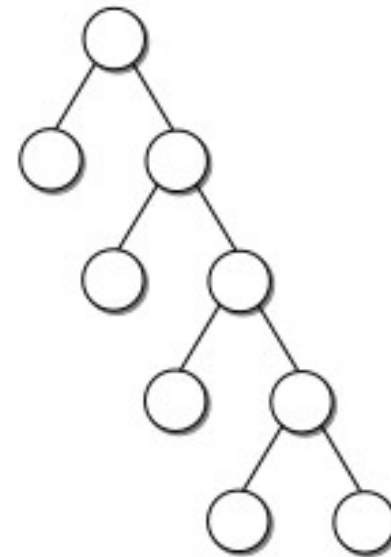
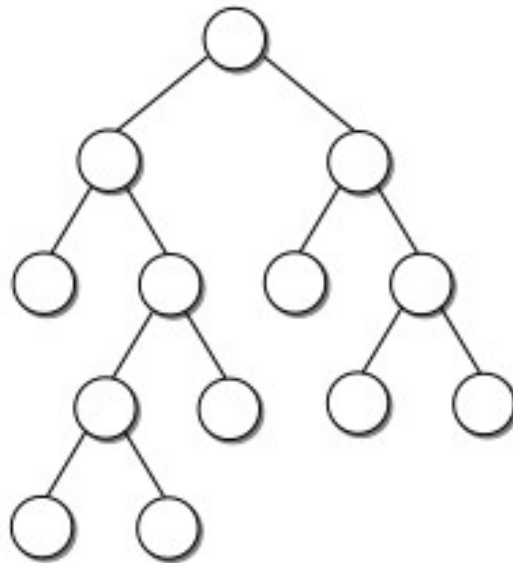
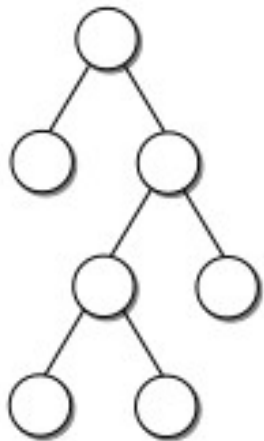
- Árvore binária cheia (*full binary tree*)
 - É uma árvore em que cada nó interior contém dois filhos.

Árvores Binárias

- Árvore binária cheia (*full binary tree*)
 - É uma árvore em que cada nó interior contém dois filhos.
 - Exemplos:

Árvores Binárias

- Árvore binária cheia (*full binary tree*)
 - É uma árvore em que cada nó interior contém dois filhos.
 - Exemplos:



Árvores Binárias

Árvores Binárias

- Árvore binária perfeita (*perfect binary tree*)

Árvores Binárias

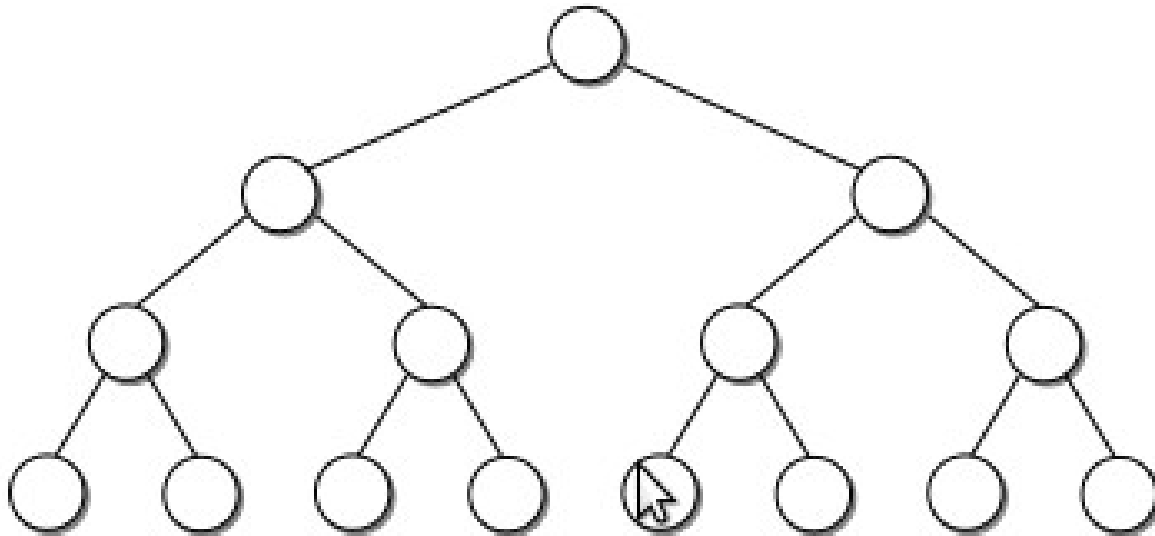
- Árvore binária perfeita (*perfect binary tree*)
 - É uma árvore binária em que todos os nós folhas estão no mesmo nível.

Árvores Binárias

- Árvore binária perfeita (*perfect binary tree*)
 - É uma árvore binária em que todos os nós folhas estão no mesmo nível.
 - Exemplo:

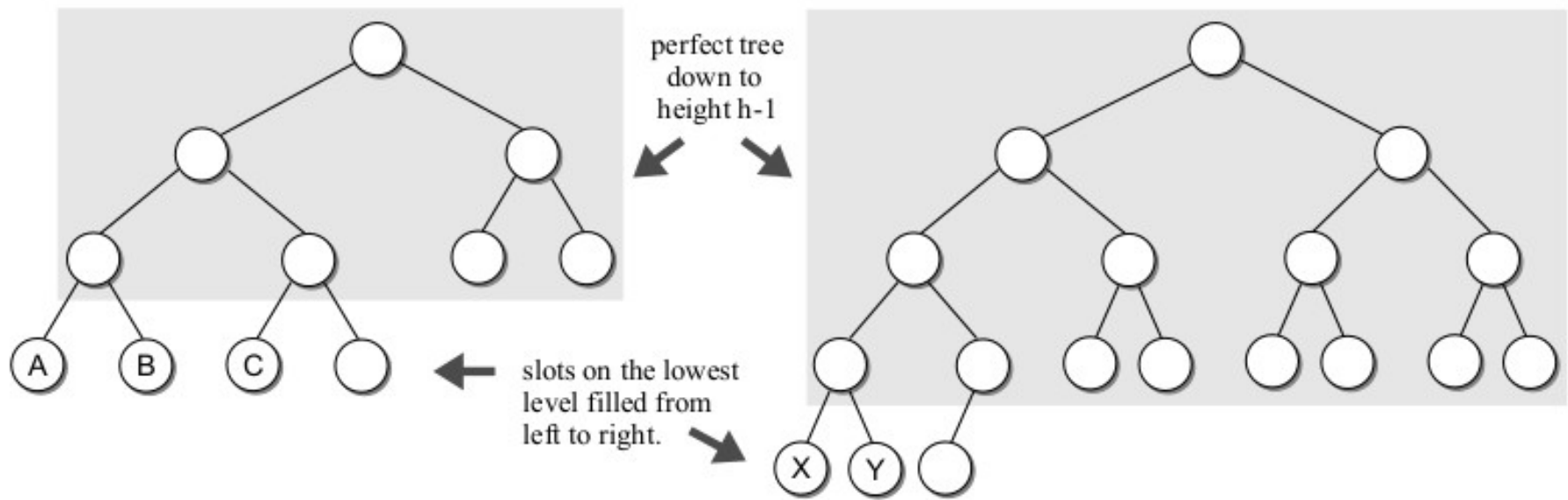
Árvores Binárias

- **Árvore binária perfeita** (*perfect binary tree*)
 - É uma árvore binária em que todos os nós folhas estão no mesmo nível.
 - Exemplo:



Árvores Binárias

- **Árvore binária completa** (*complete binary tree*)
 - É uma árvore completa em todos os níveis, exceto possivelmente o último.
 - Exemplo:



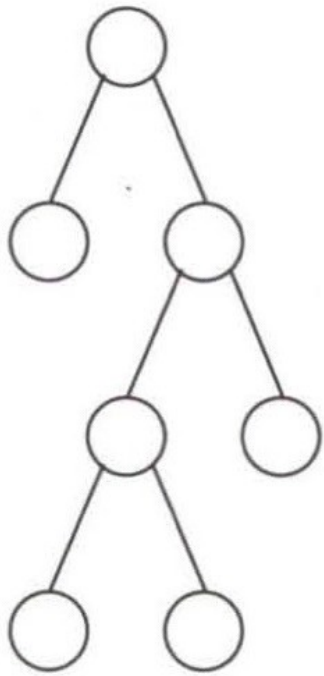
Árvores Binárias

Árvores Binárias

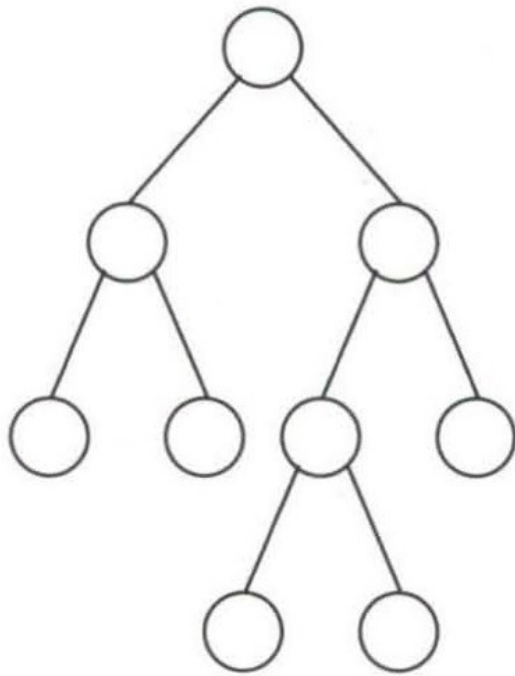
- Comparação

Árvores Binárias

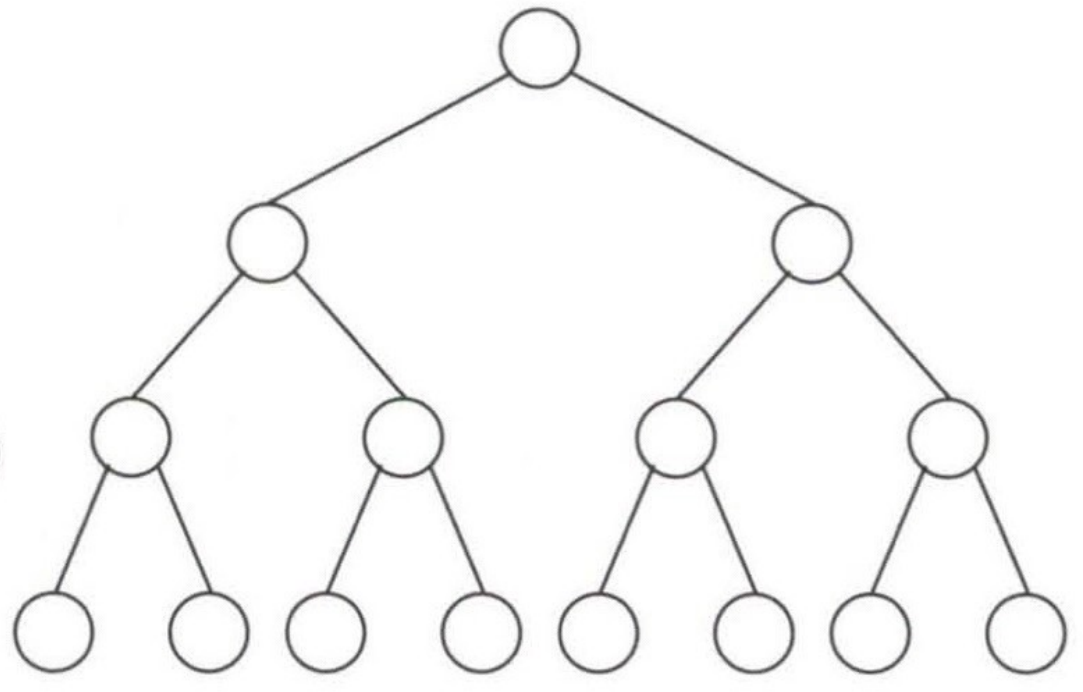
- Comparação



(a)



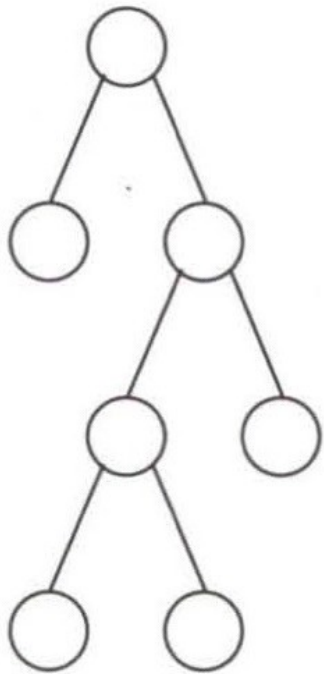
(b)



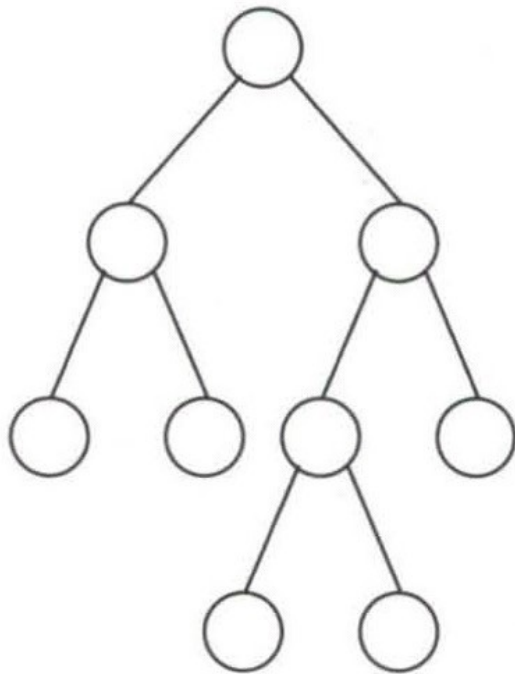
(c)

Árvores Binárias

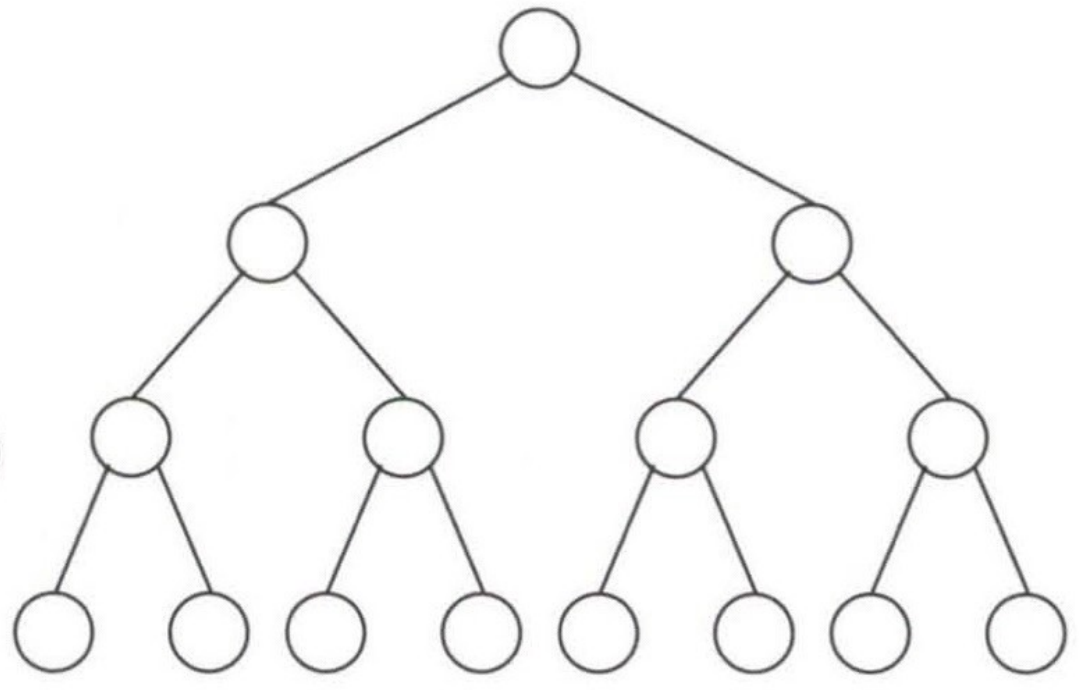
- Comparação



(a)



(b)

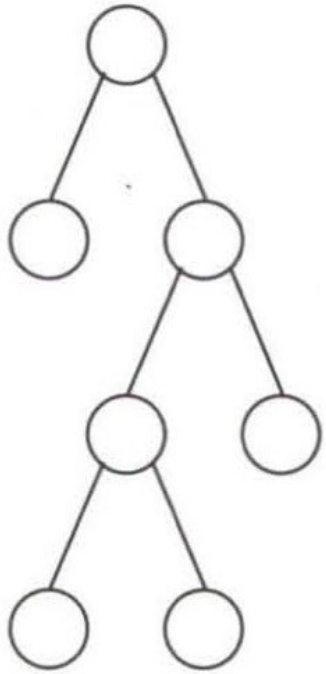


(c)

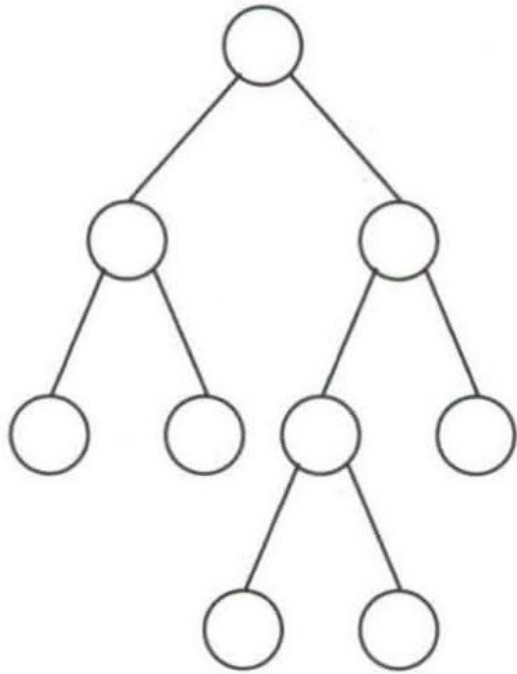
estritamente binária

Árvores Binárias

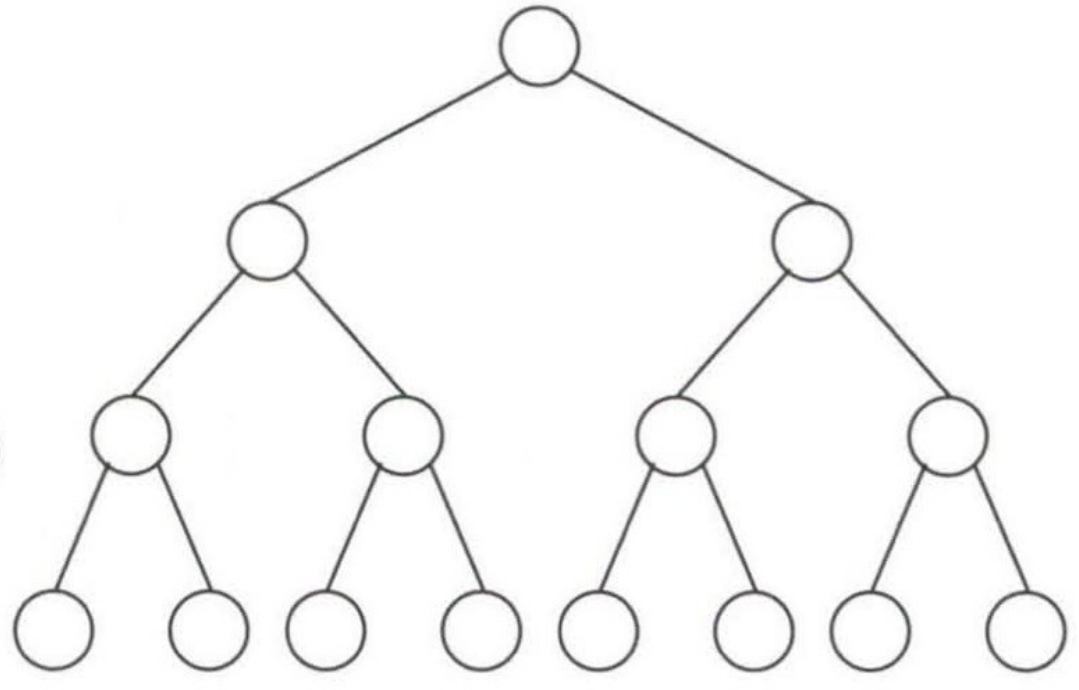
- Comparação



(a)



(b) **binária completa**



(c)

estritamente binária

Árvores Binárias

Árvores Binárias

- Árvores binárias são comumente implementadas como estruturas dinâmicas, assim como fizemos com as listas ligadas.

Árvores Binárias

- Árvores binárias são comumente implementadas como estruturas dinâmicas, assim como fizemos com as listas ligadas.
- Uma árvore binária é uma estrutura de dados que pode ser usada para implementar diferentes tipos abstratos de dados (TAD).

Árvores Binárias

- Árvores binárias são comumente implementadas como estruturas dinâmicas, assim como fizemos com as listas ligadas.
- Uma árvore binária é uma estrutura de dados que pode ser usada para implementar diferentes tipos abstratos de dados (TAD).
- Para a sua implementação, nós devemos explicitamente armazenar em cada nó as ligações (*links*) para os dois nós filhos juntamente com os dados armazenados em cada nó.

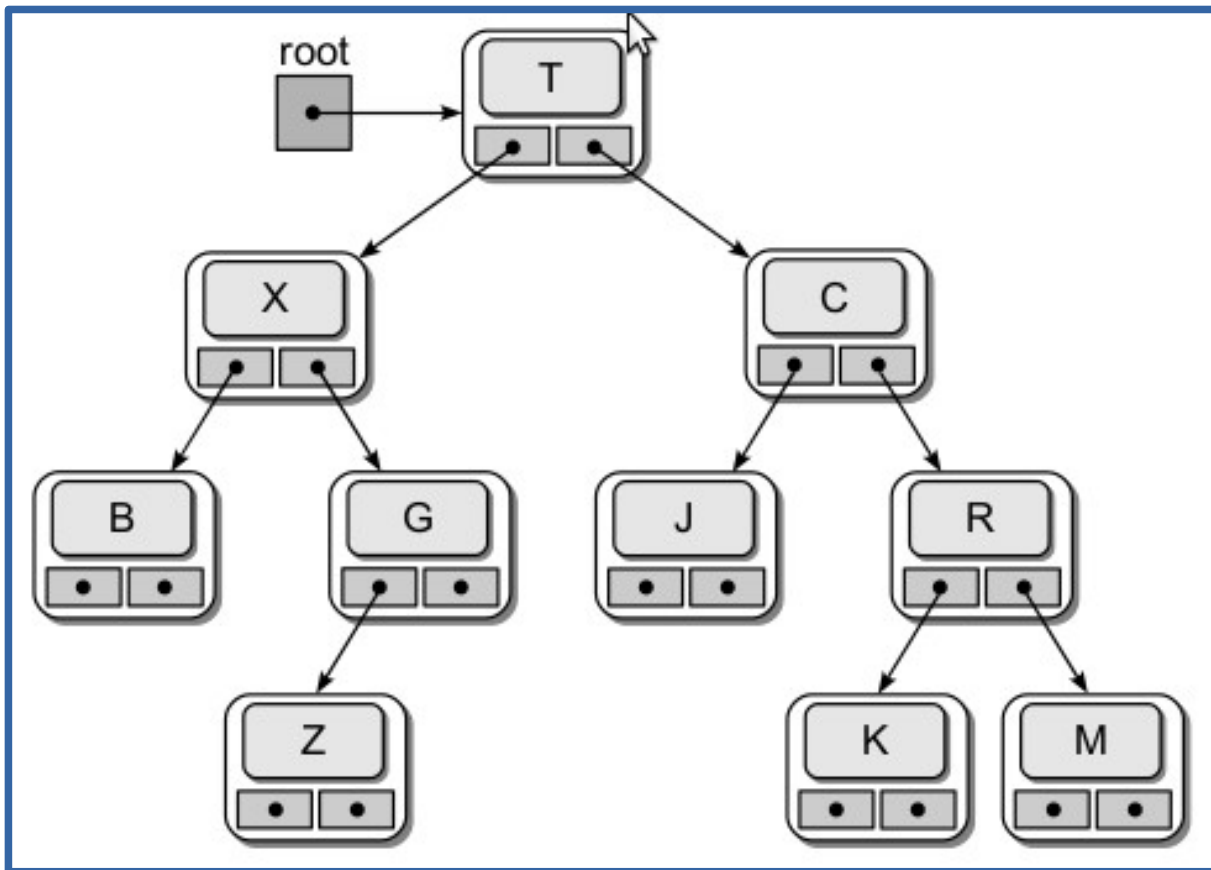
Árvores Binárias

- Classe Nó

```
1 # The storage class for creating binary tree nodes.
2 class _BinTreeNode :
3     def __init__( self, data ):
4         self.data = data
5         self.left = None
6         self.right = None
```

Árvores Binárias

- Exemplo de implementação física da AB:



Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- A operação de varredura é uma das mais importantes na manipulação de coleções de dados.

Árvores Binárias - Varredura

- A operação de varredura é uma das mais importantes na manipulação de coleções de dados.
- O objetivo aqui é percorrer toda a coleção, acessando um elemento de cada vez.

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Como seria a busca em uma lista ligada?

Árvores Binárias - Varredura

- Como seria a busca em uma lista ligada?
 - Bastaria iniciar do primeiro nó e percorrer a lista, seguindo as ligações, até o último nó.

Árvores Binárias - Varredura

- Como seria a busca em uma lista ligada?
 - Bastaria iniciar do primeiro nó e percorrer a lista, seguindo as ligações, até o último nó.
- Mas seria possível visitar cada nó em uma árvore binária?

Árvores Binárias - Varredura

- Como seria a busca em uma lista ligada?
 - Bastaria iniciar do primeiro nó e percorrer a lista, seguindo as ligações, até o último nó.
- Mas seria possível visitar cada nó em uma árvore binária?
 - Não existe um único caminho que parta da raiz e consiga visitar todos os nós.

Árvores Binárias - Varredura

- Como seria a busca em uma lista ligada?
 - Bastaria iniciar do primeiro nó e percorrer a lista, seguindo as ligações, até o último nó.
- Mas seria possível visitar cada nó em uma árvore binária?
 - Não existe um único caminho que parta da raiz e consiga visitar todos os nós.
 - As árvores podem ser percorridas de várias formas.

Árvores Binárias - Varredura

- Existem vários métodos de varredura (caminhamento) em árvores, que permitem percorrê-la de forma sistemática e de tal modo que cada nó seja visitado apenas uma vez.

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Existem 3 principais ordens de caminhamento:

Árvores Binárias - Varredura

- Existem 3 principais ordens de caminhamento:
 - Pré-fixado

Árvores Binárias - Varredura

- Existem 3 principais ordens de caminhamento:
 - Pré-fixado
 - Central

Árvores Binárias - Varredura

- Existem 3 principais ordens de caminhamento:
 - Pré-fixado
 - Central
 - Pós-fixado

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Pré-fixado

Árvores Binárias - Varredura

- Pré-fixado
 - Visita a raiz.

Árvores Binárias - Varredura

- Pré-fixado
 - Visita a raiz.
 - Percorre a subárvore da esquerda.

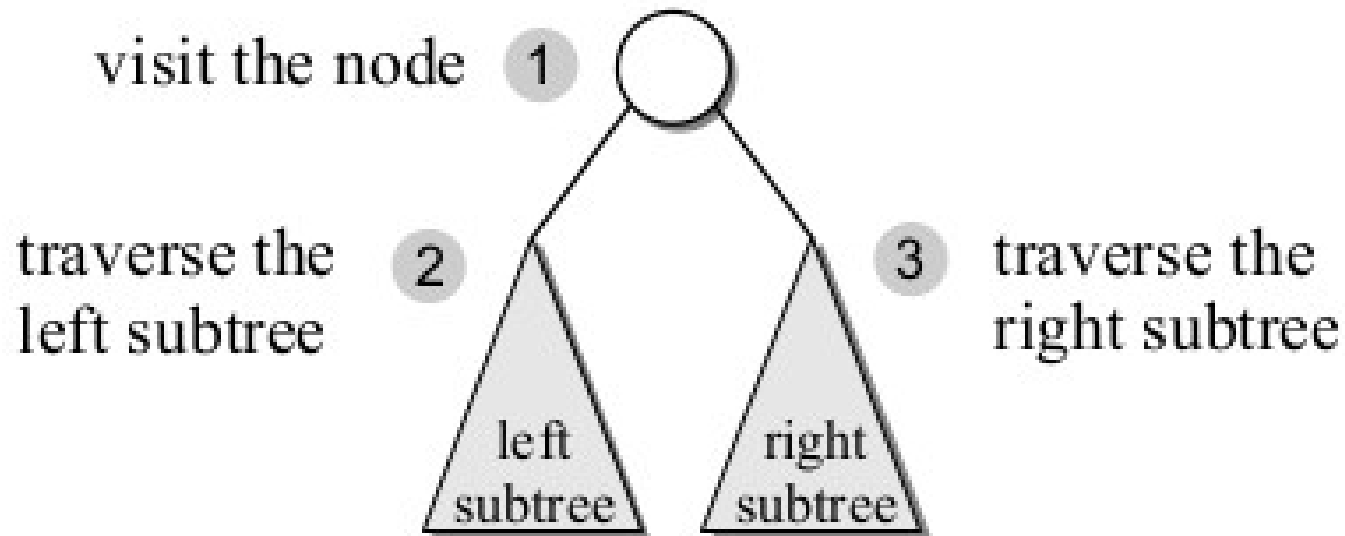
Árvores Binárias - Varredura

- Pré-fixado
 - Visita a raiz.
 - Percorre a subárvore da esquerda.
 - Percorre a subárvore da direita.

Árvores Binárias - Varredura

- Pré-fixado

- Visita a raiz.
- Percorre a subárvore da esquerda.
- Percorre a subárvore da direita.



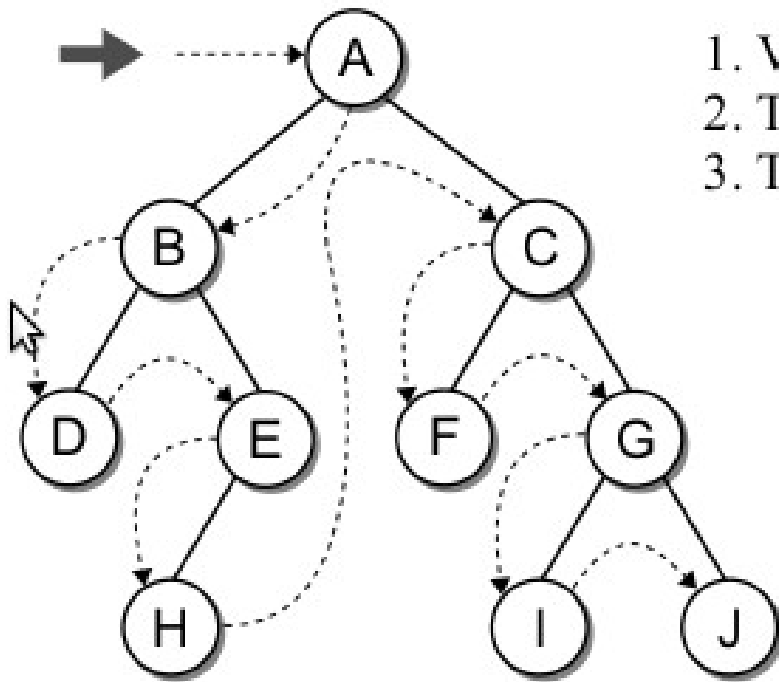
Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de pré-fixado:

Árvores Binárias - Varredura

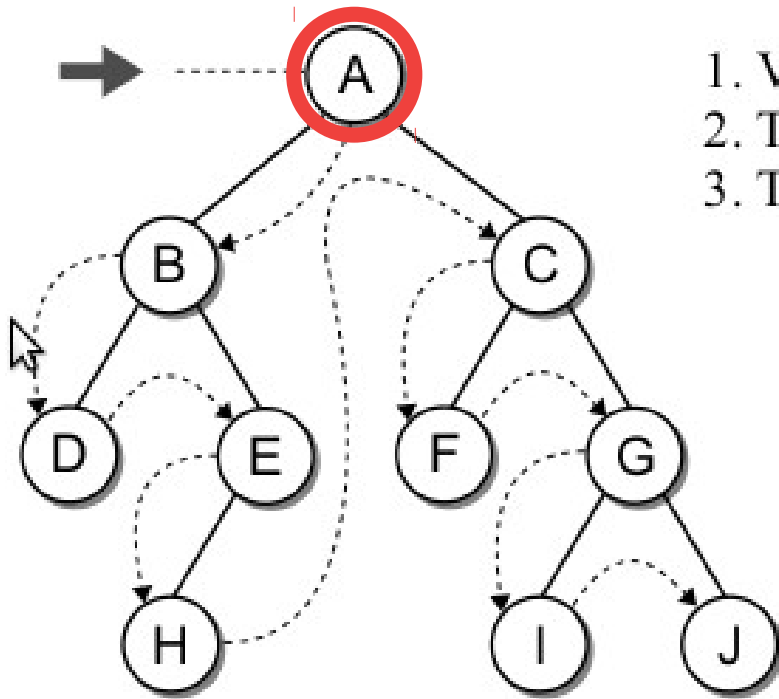
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

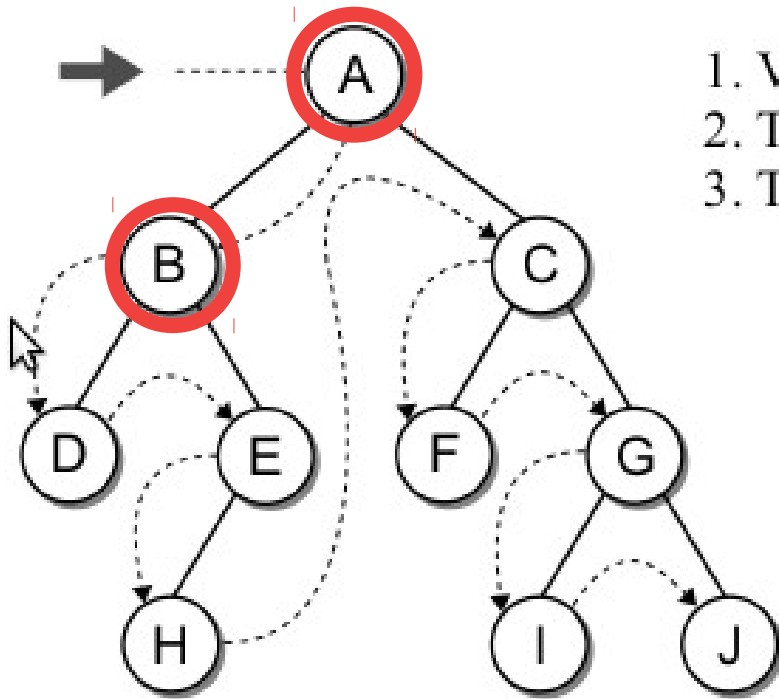
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

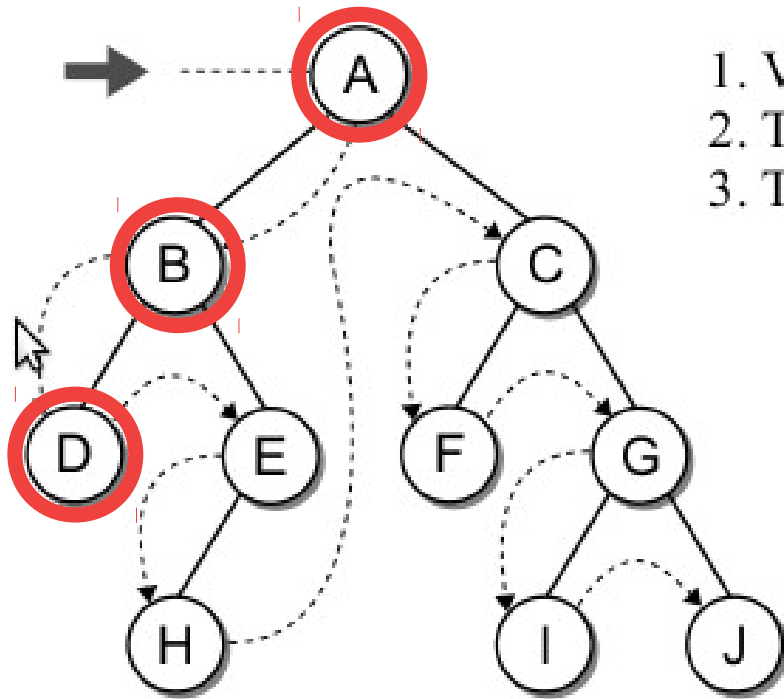
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

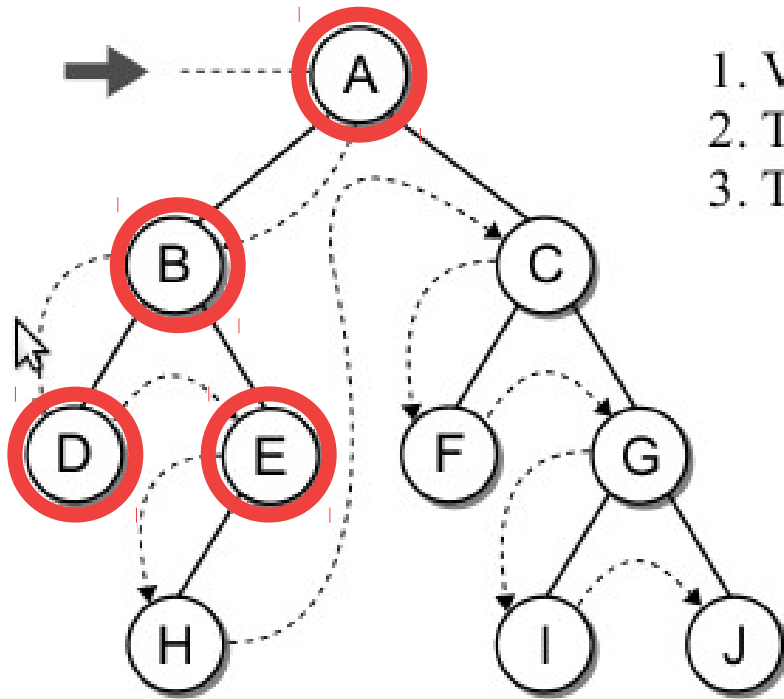
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

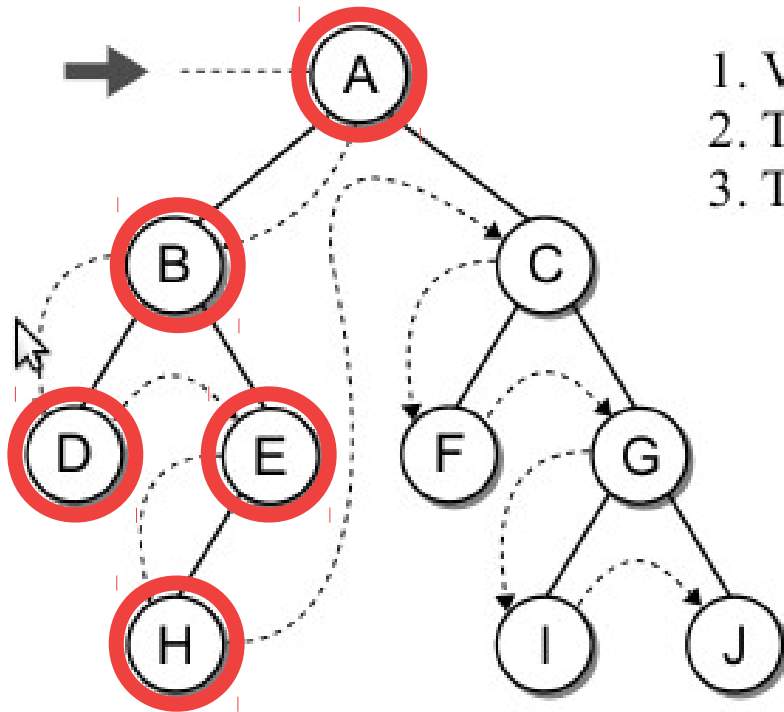
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

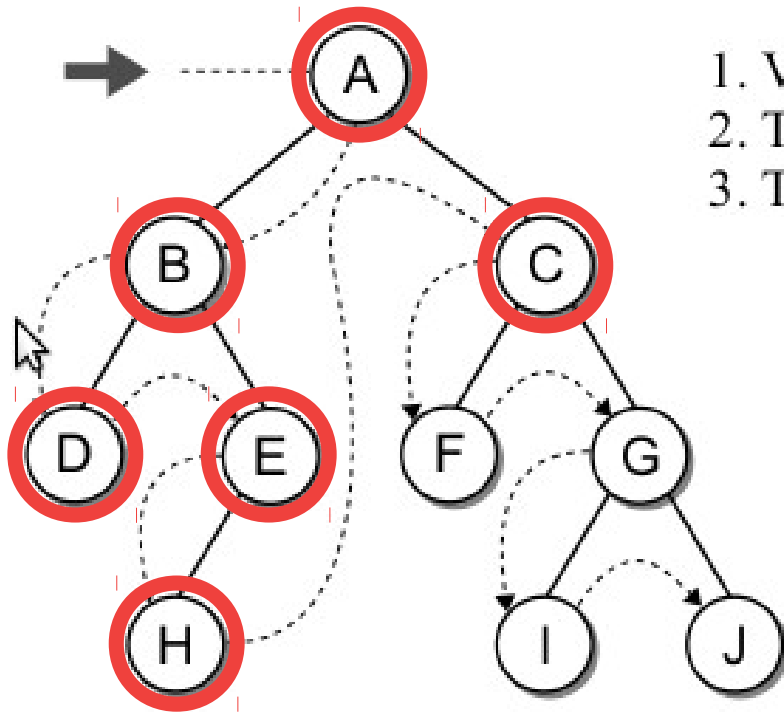
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

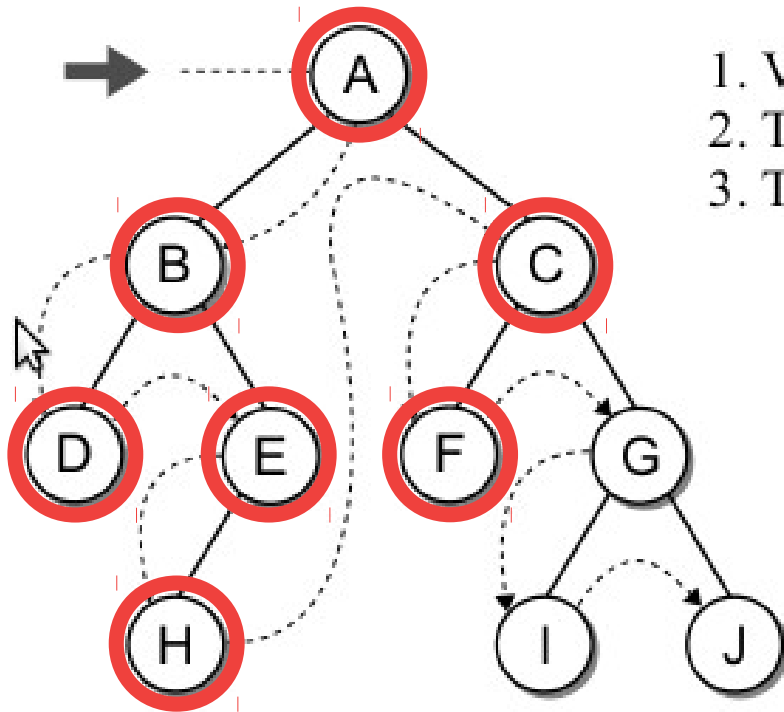
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

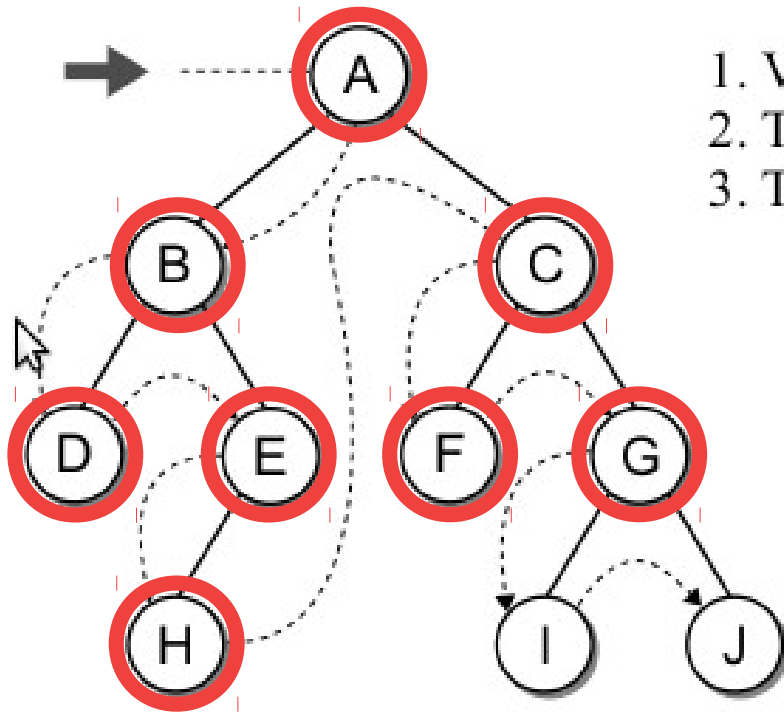
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

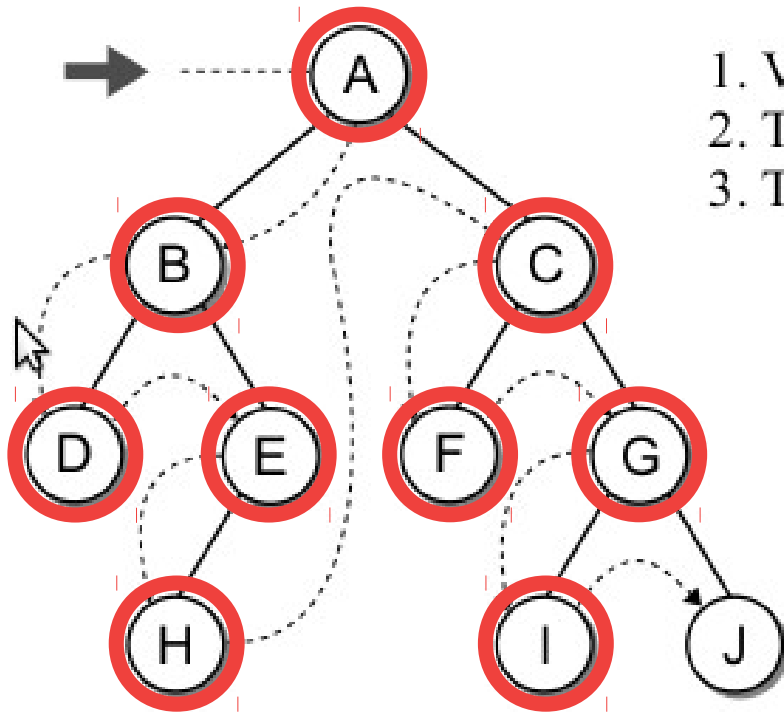
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

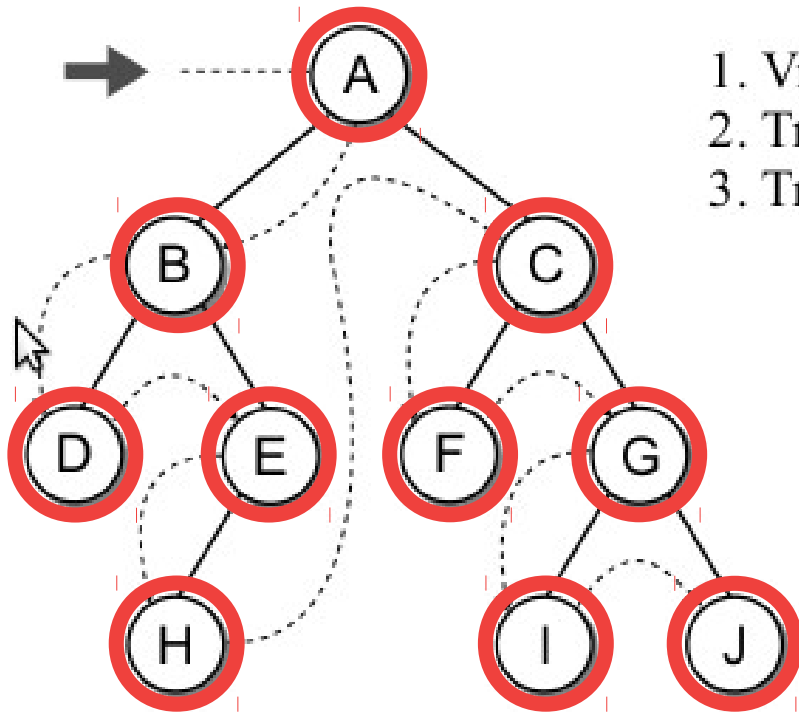
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

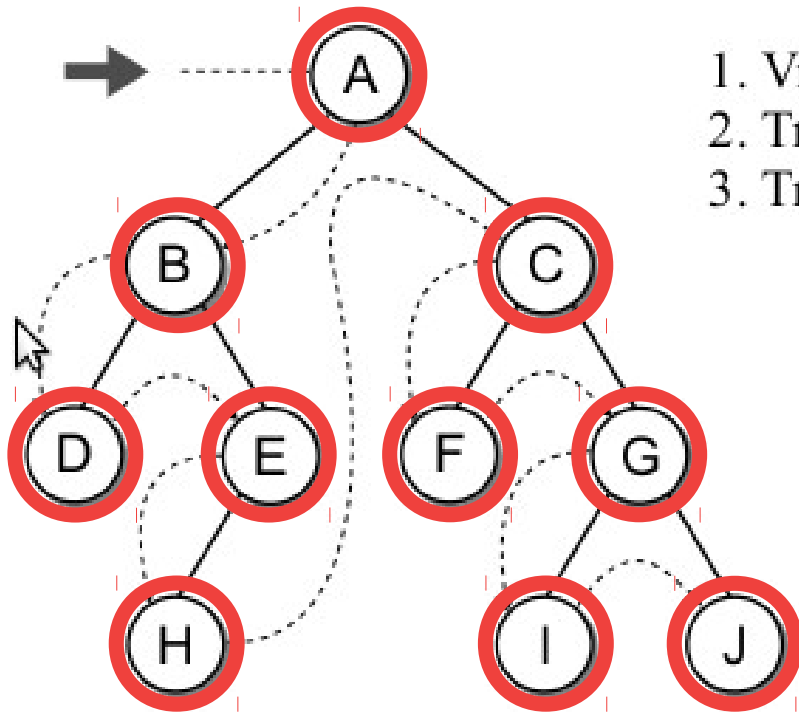
- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de pré-fixado:



1. Visit the node.
2. Traverse the left subtree.
3. Traverse the right subtree.

A → B → D → E → H → C → F → G → I → J

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pré-fixado:

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pré-fixado:
 - Função recursiva.

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pré-fixado:
 - Função recursiva.

```
1  def preorderTrav( subtree ):  
2      if subtree is not None :  
3          print( subtree.data )  
4          preorderTrav( subtree.left )  
5          preorderTrav( subtree.right )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pré-fixado:
 - Função recursiva.
 - O parâmetro será uma subárvore:

```
1  def preorderTrav( subtree ):  
2      if subtree is not None :  
3          print( subtree.data )  
4          preorderTrav( subtree.left )  
5          preorderTrav( subtree.right )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pré-fixado:
 - Função recursiva.
 - O parâmetro será uma subárvore:
 - Referência null (None) ou

```
1 def preorderTrav( subtree ):  
2     if subtree is not None :  
3         print( subtree.data )  
4         preorderTrav( subtree.left )  
5         preorderTrav( subtree.right )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pré-fixado:
 - Função recursiva.
 - O parâmetro será uma subárvore:
 - Referência null (None) ou
 - Referência para o nó raiz de uma subárvore.

```
1 def preorderTrav( subtree ):  
2     if subtree is not None :  
3         print( subtree.data )  
4         preorderTrav( subtree.left )  
5         preorderTrav( subtree.right )
```


Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Caminhamento pré-fixado

Árvores Binárias - Varredura

- Caminhamento pré-fixado
 - Dada uma árvore binária de tamanho n , o caminhamento completo dessa árvore visitará cada nó uma única vez.

Árvores Binárias - Varredura

- Caminhamento pré-fixado
 - Dada uma árvore binária de tamanho n , o caminhamento completo dessa árvore visitará cada nó uma única vez.
 - Se a operação de visita requerer tempo constante, então o tempo de caminhamento será feito em $O(n)$.

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Central

Árvores Binárias - Varredura

- Central
 - Percorre a subárvore da esquerda.

Árvores Binárias - Varredura

- Central
 - Percorre a subárvore da esquerda.
 - Visita a raiz.

Árvores Binárias - Varredura

- Central
 - Percorre a subárvore da esquerda.
 - Visita a raiz.
 - Percorre a subárvore da direita.

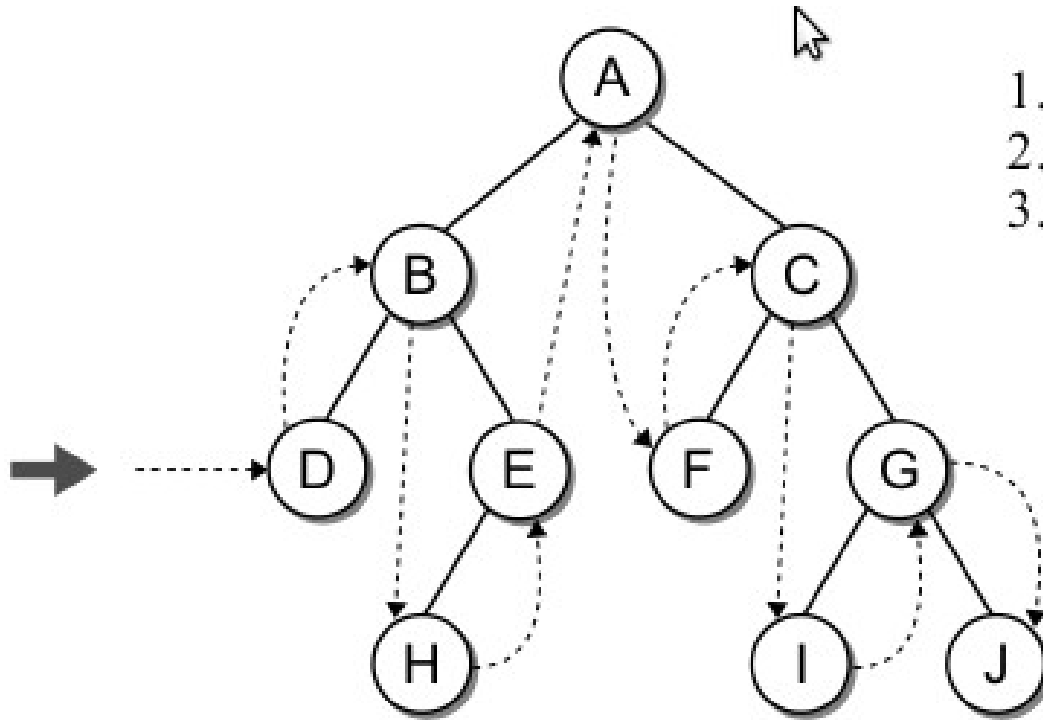
Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento central

Árvores Binárias - Varredura

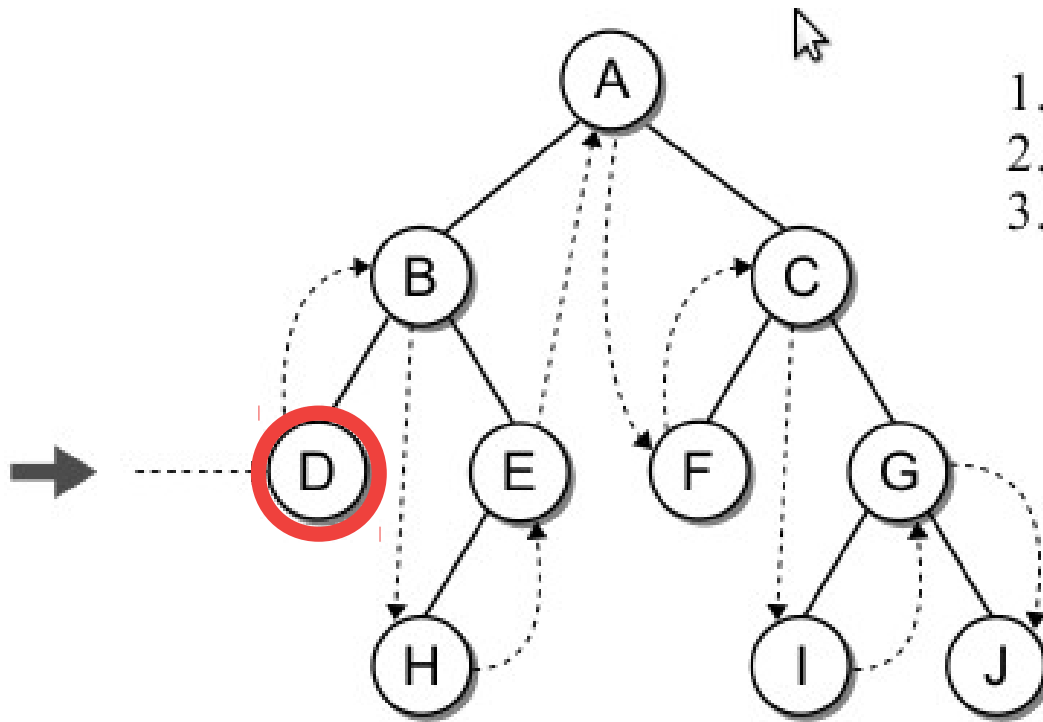
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

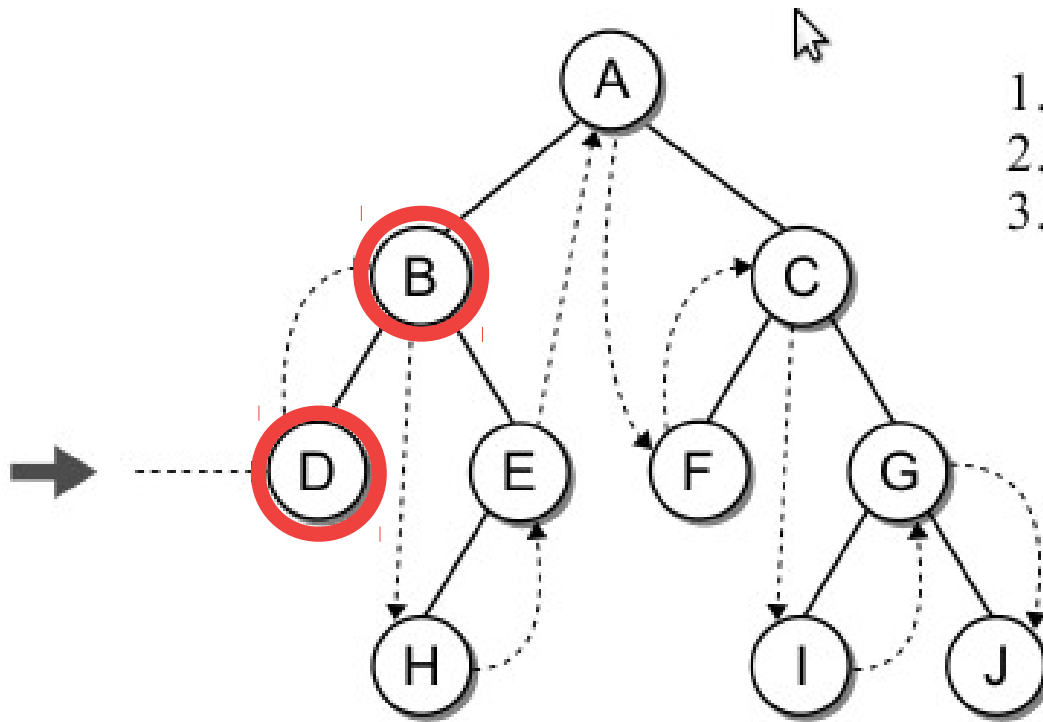
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

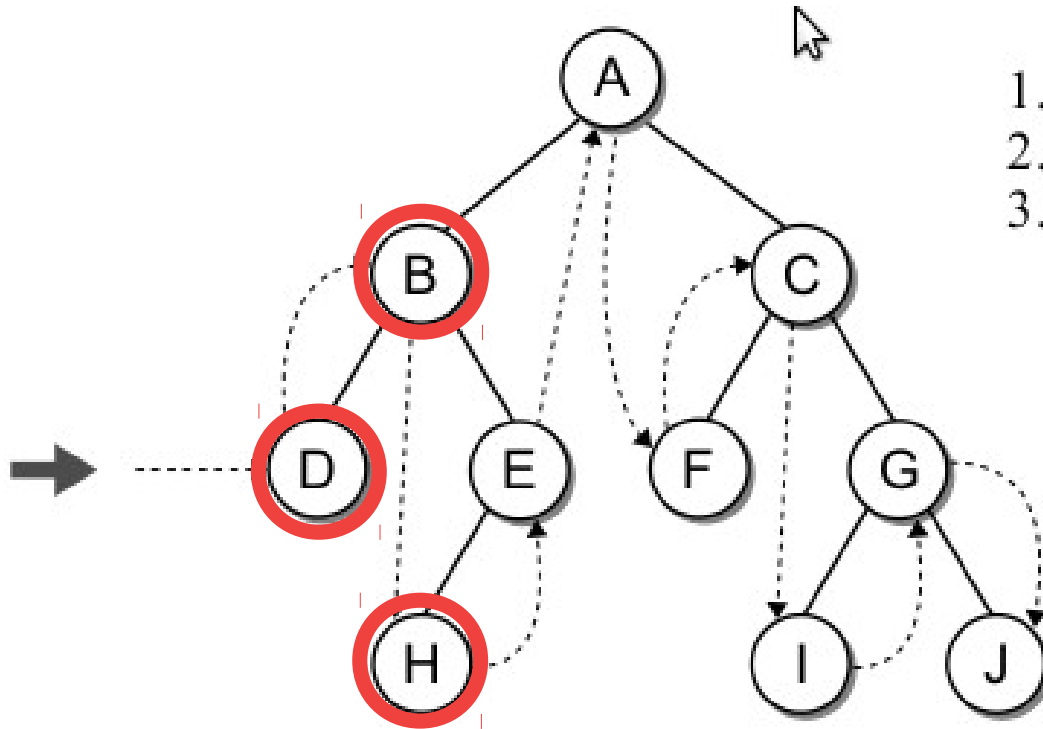
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

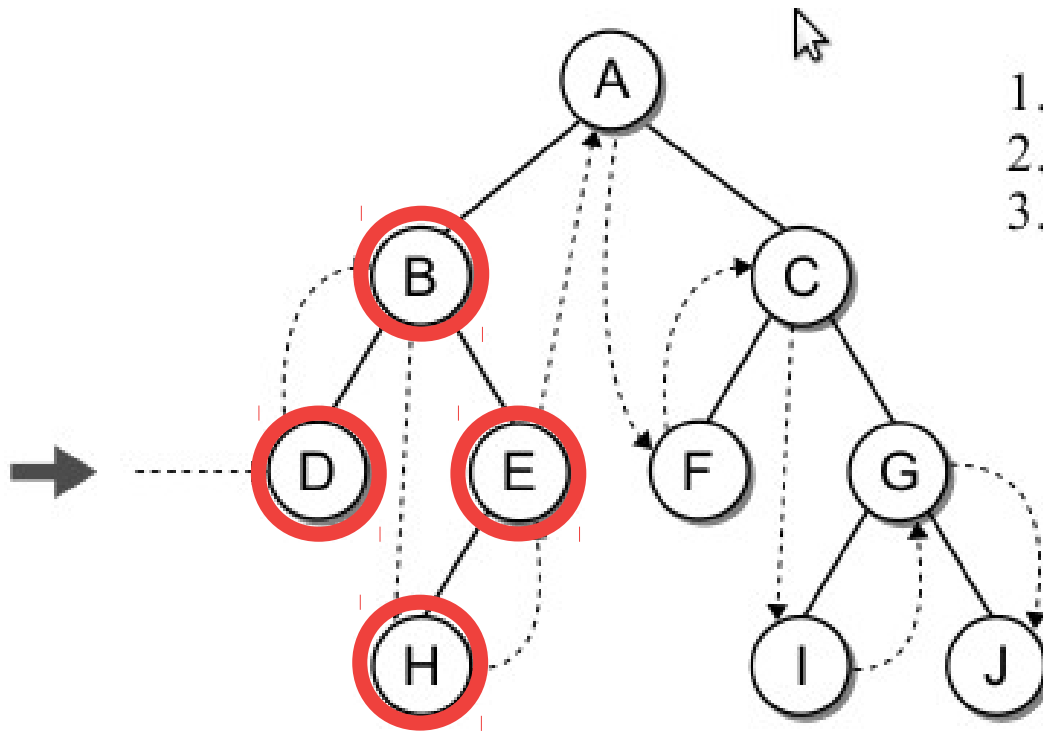
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

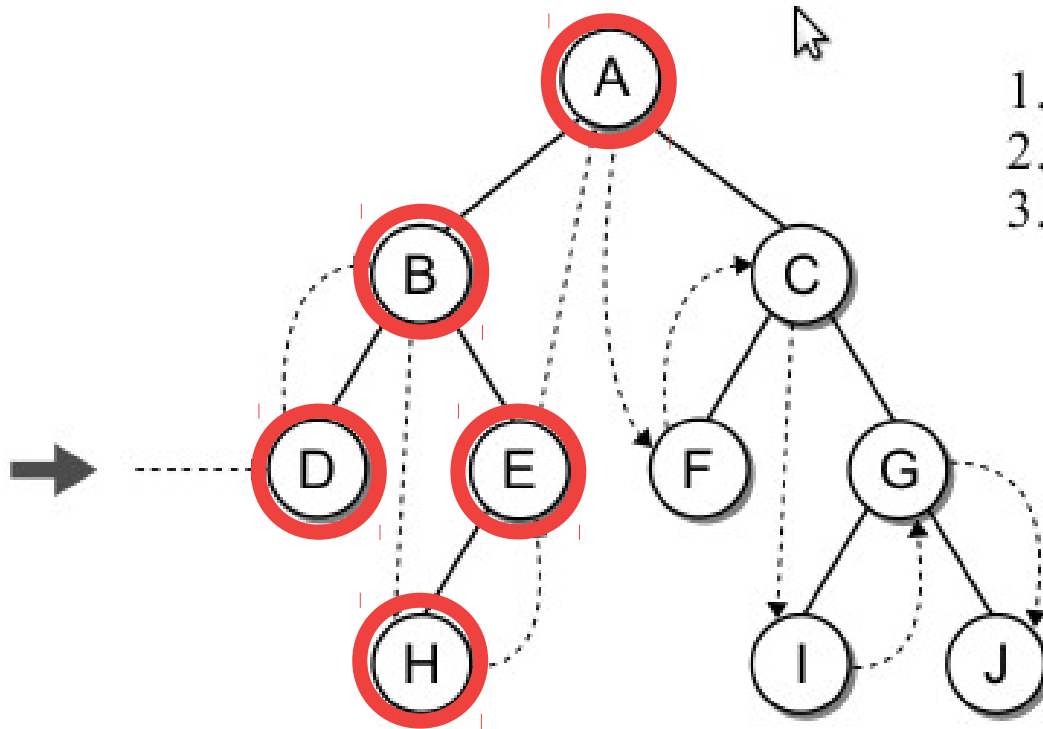
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

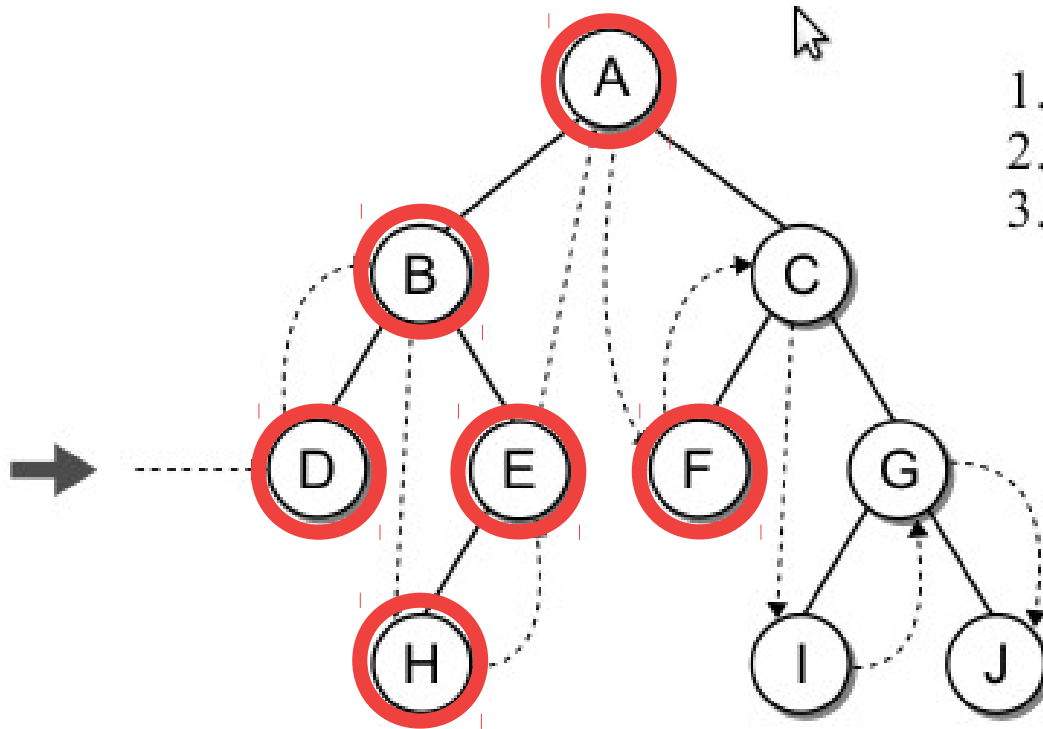
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

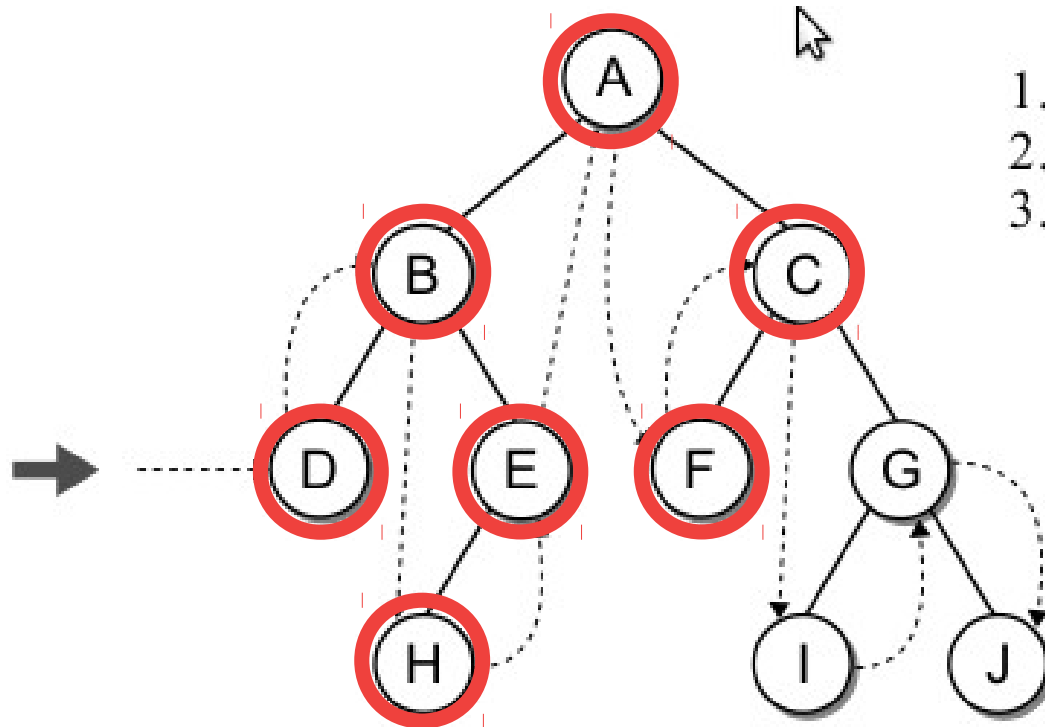
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

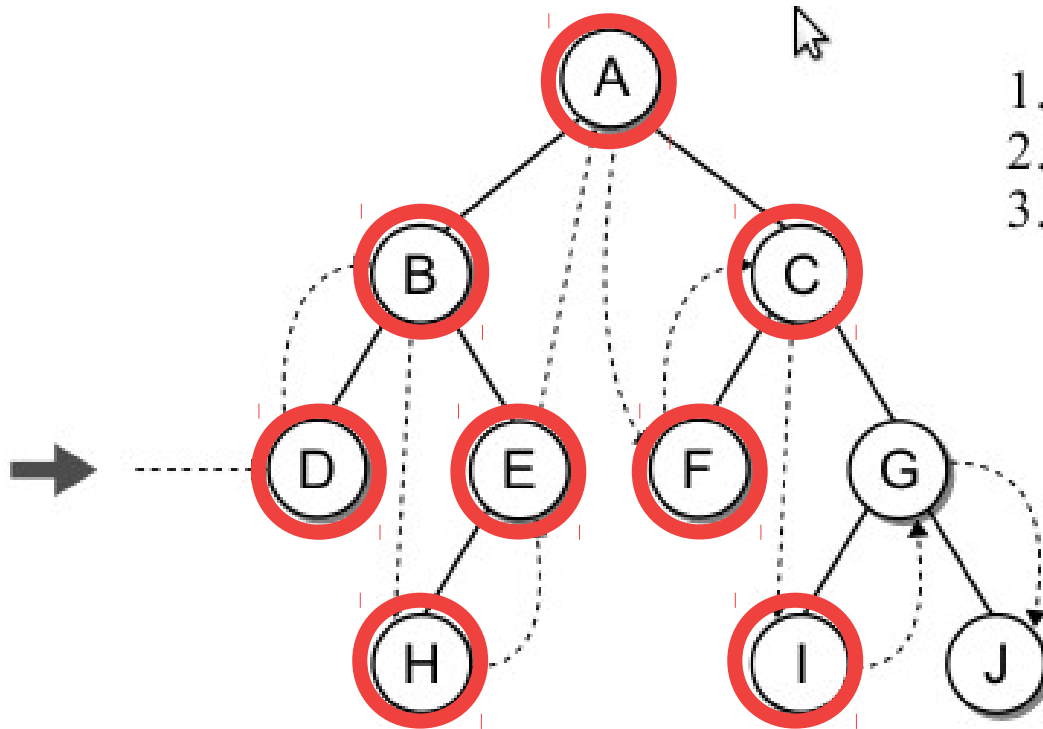
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

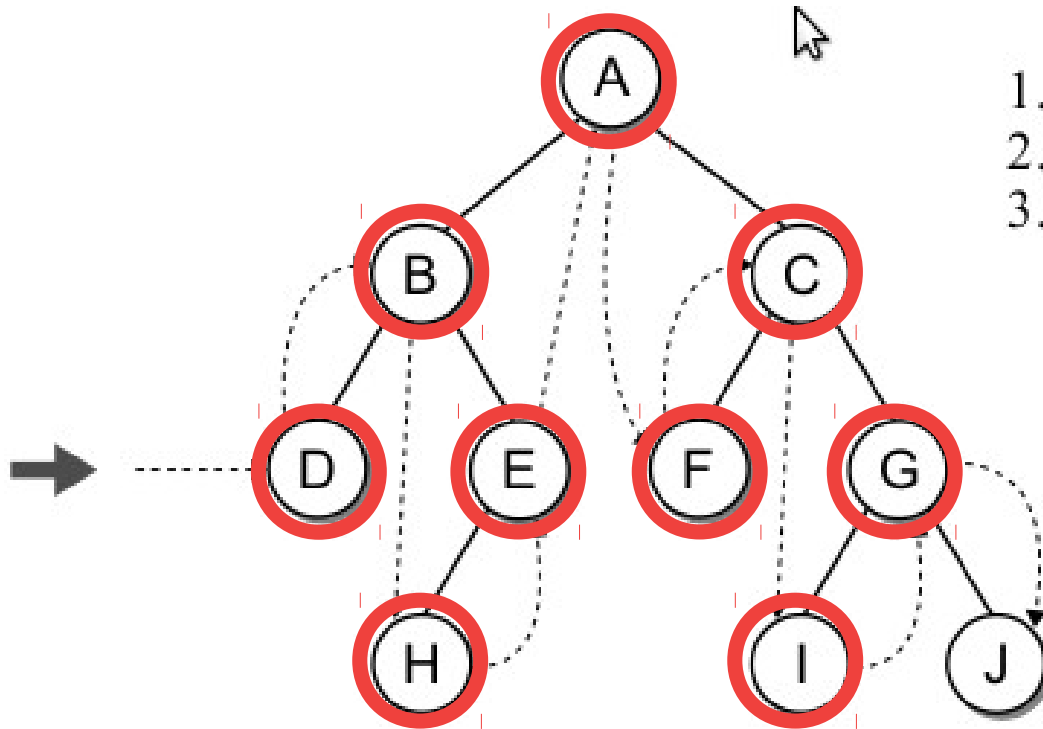
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

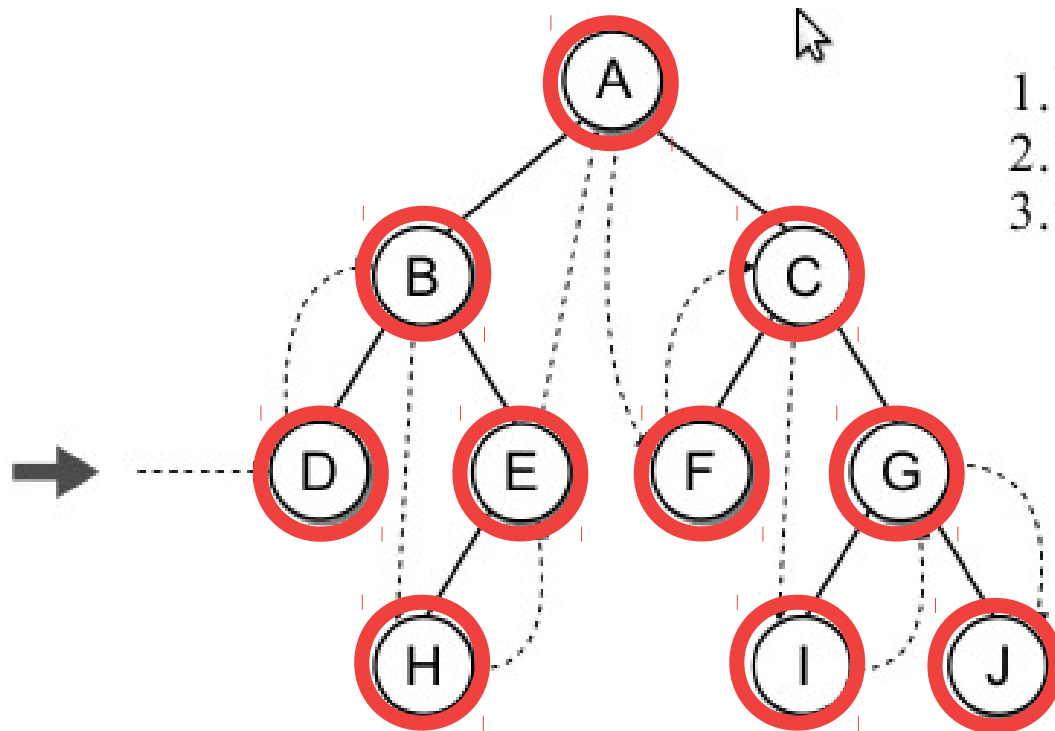
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

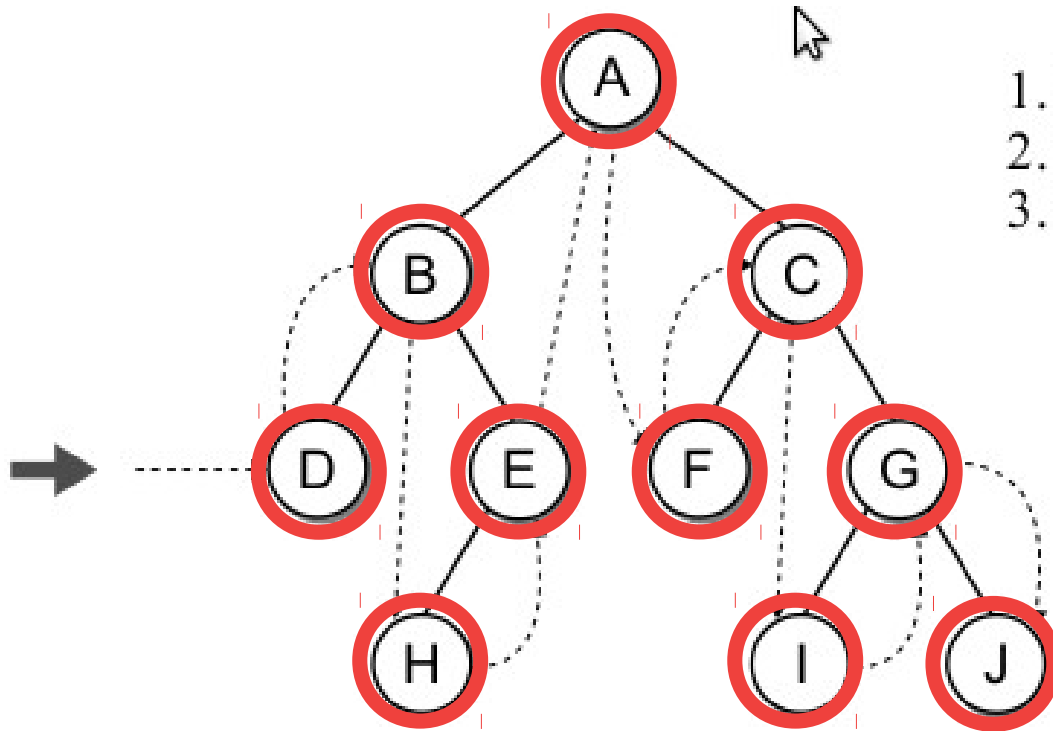
- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento central



1. Traverse the left subtree.
2. Visit the node.
3. Traverse the right subtree.

D → B → H → E → A → F → C → I → G → J

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho central:

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho central:
 - Função recursiva.

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho central:
 - Função recursiva.

```
1  def inorderTrav( subtree ) :
2      if subtree is not None :
3          inorderTrav( subtree.left )
4          print( subtree.data )
5          inorderTrav( subtree.right )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho central:
 - Função recursiva.
 - O parâmetro será uma subárvore:

```
1  def inorderTrav( subtree ):  
2      if subtree is not None :  
3          inorderTrav( subtree.left )  
4          print( subtree.data )  
5          inorderTrav( subtree.right )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho central:
 - Função recursiva.
 - O parâmetro será uma subárvore:
 - Referência null (None) ou

```
1  def inorderTrav( subtree ):  
2      if subtree is not None :  
3          inorderTrav( subtree.left )  
4          print( subtree.data )  
5          inorderTrav( subtree.right )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho central:
 - Função recursiva.
 - O parâmetro será uma subárvore:
 - Referência null (None) ou
 - Referência para o nó raiz de uma subárvore.

```
1  def inorderTrav( subtree ):  
2      if subtree is not None :  
3          inorderTrav( subtree.left )  
4          print( subtree.data )  
5          inorderTrav( subtree.right )
```

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Pós-fixado

Árvores Binárias - Varredura

- Pós-fixado
 - Percorre a subárvore da esquerda.

Árvores Binárias - Varredura

- Pós-fixado
 - Percorre a subárvore da esquerda.
 - Percorre a subárvore da direita.

Árvores Binárias - Varredura

- Pós-fixado
 - Percorre a subárvore da esquerda.
 - Percorre a subárvore da direita.
 - Visita a raiz.

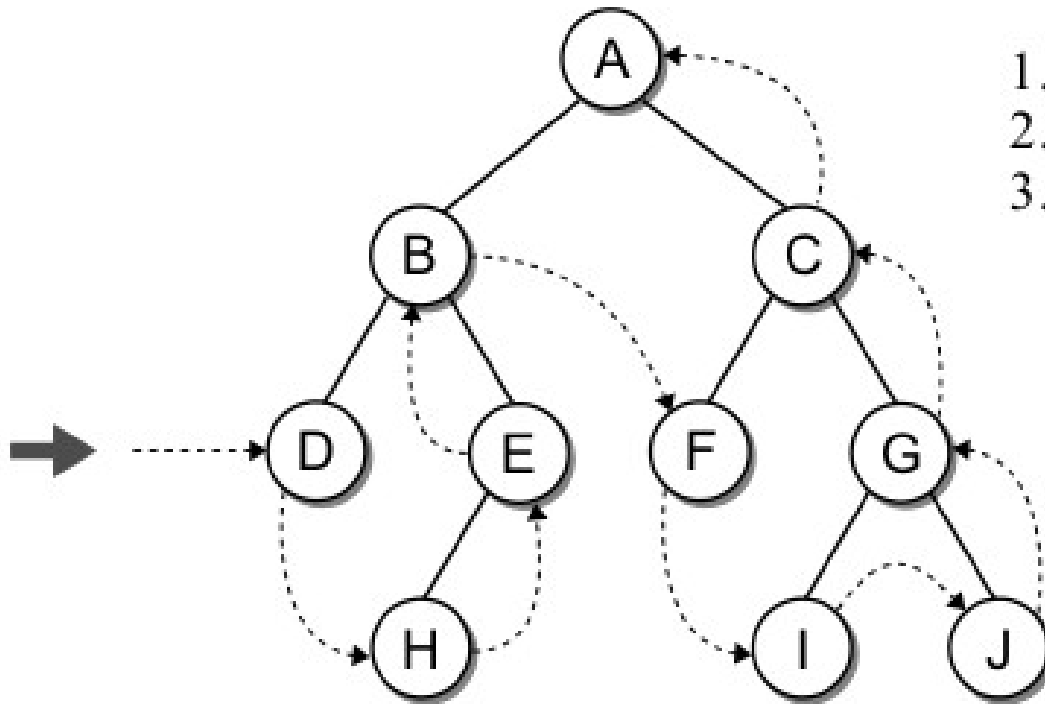
Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento pós-fixado

Árvores Binárias - Varredura

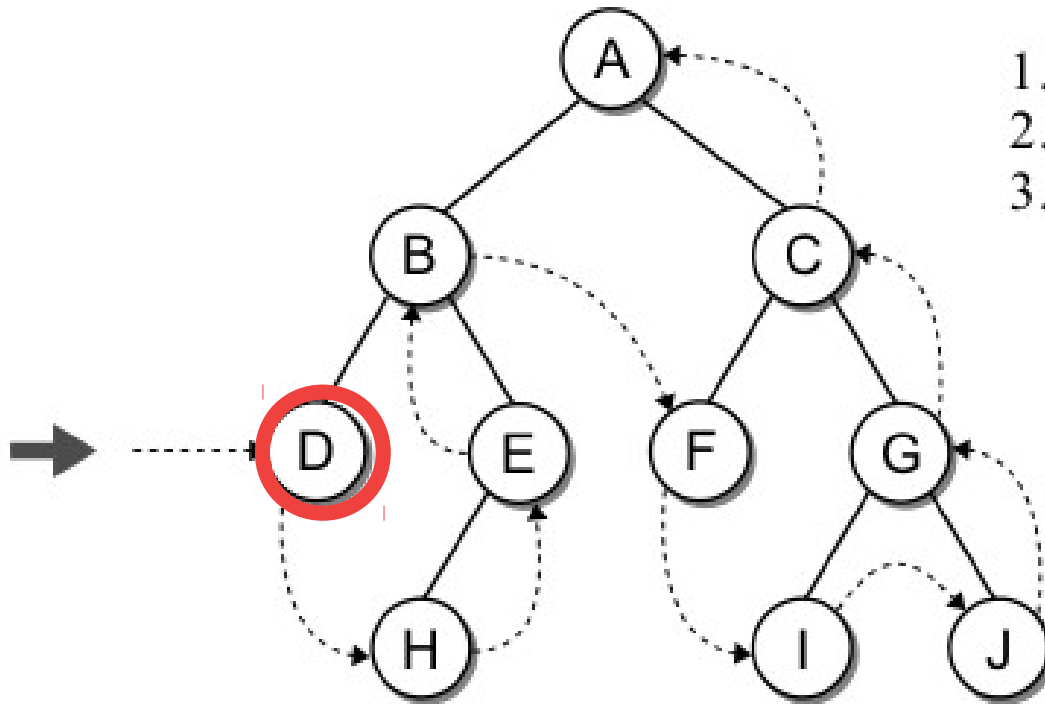
- Exemplo de caminhamento pós-fixado



1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.

Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento pós-fixado

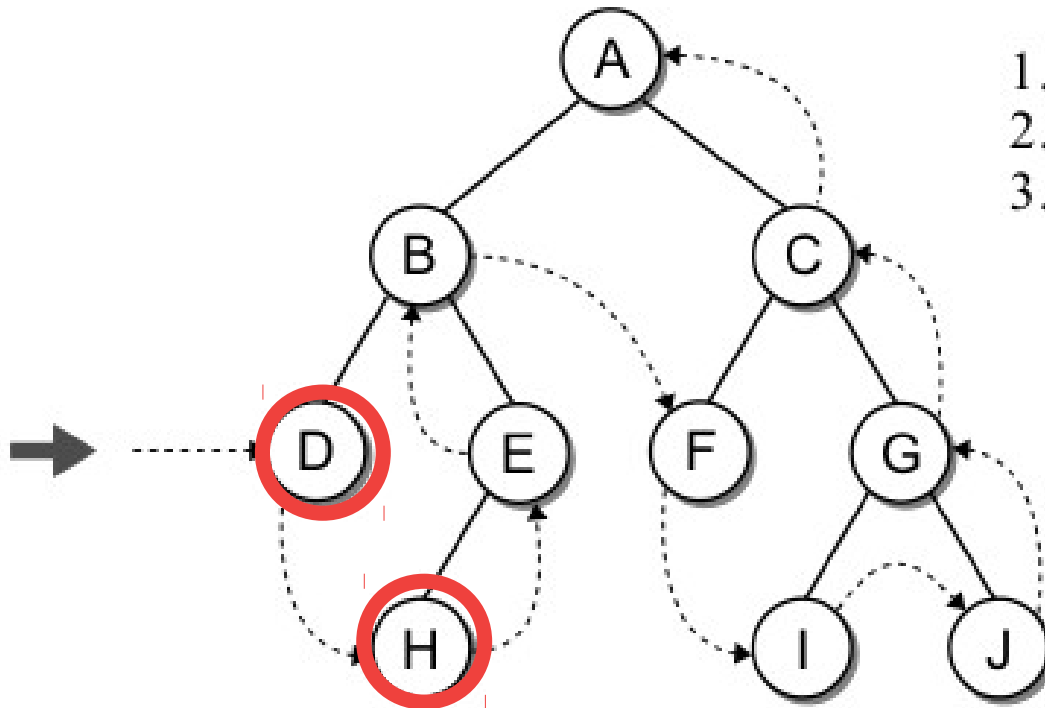


1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.



Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento pós-fixado

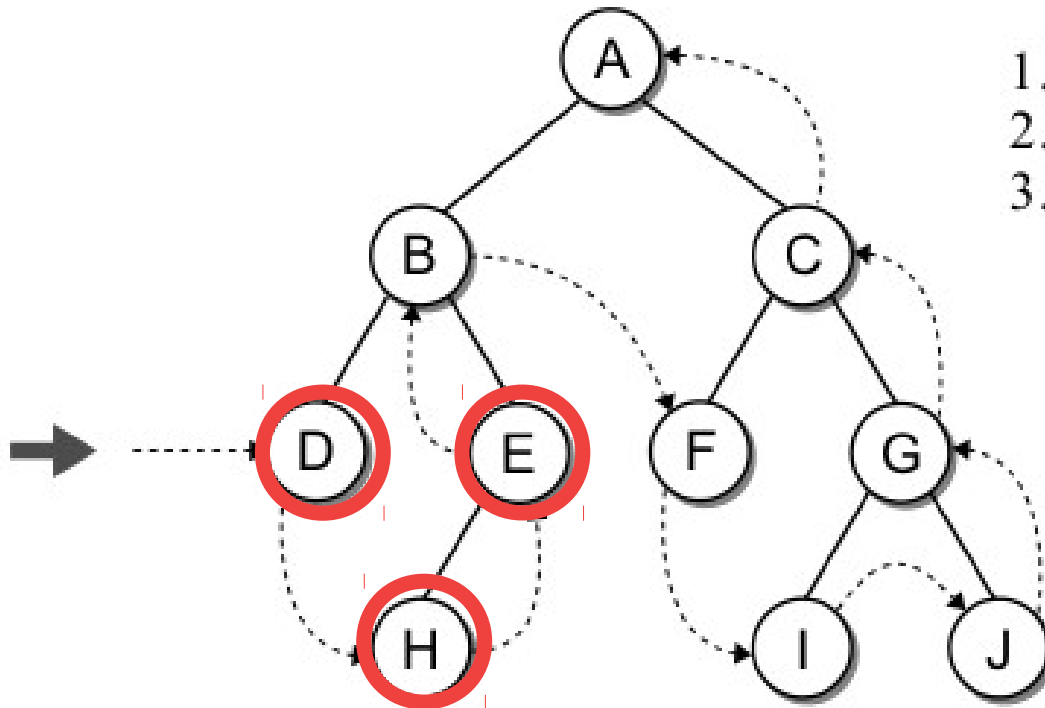


1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.



Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento pós-fixado

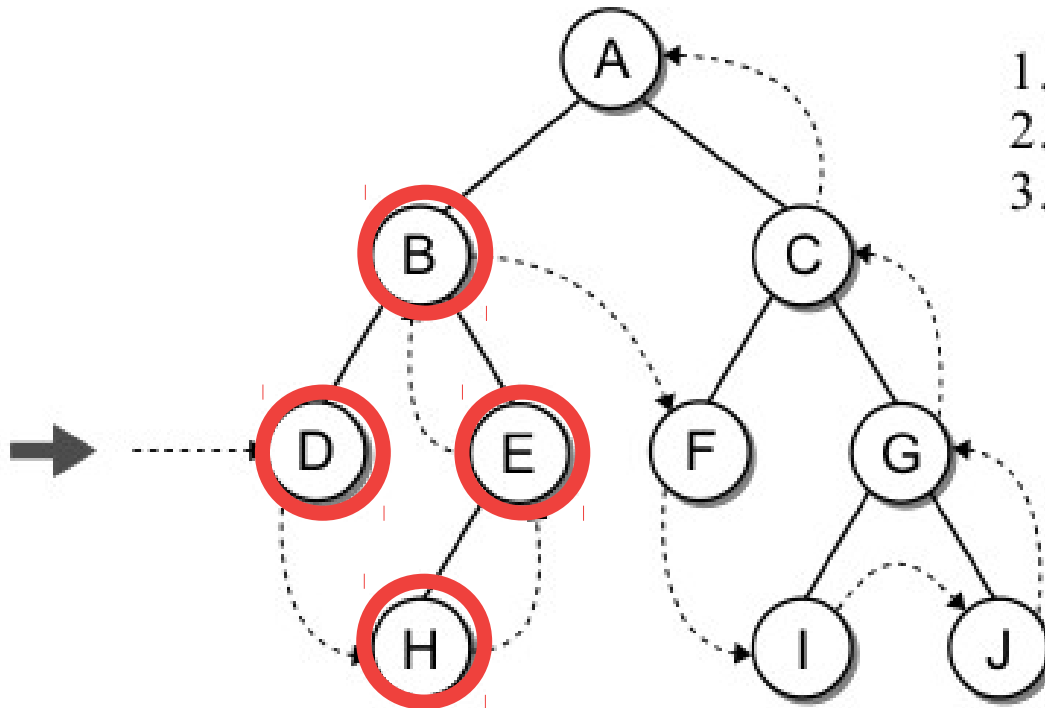


1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.



Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento pós-fixado

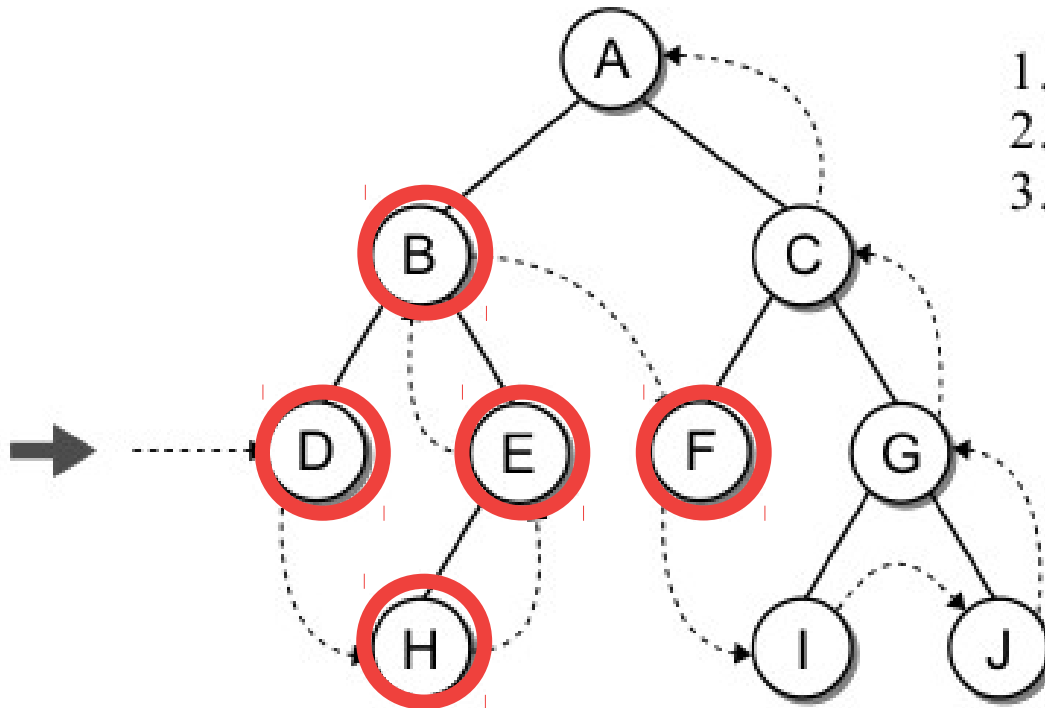


1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.



Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento pós-fixado

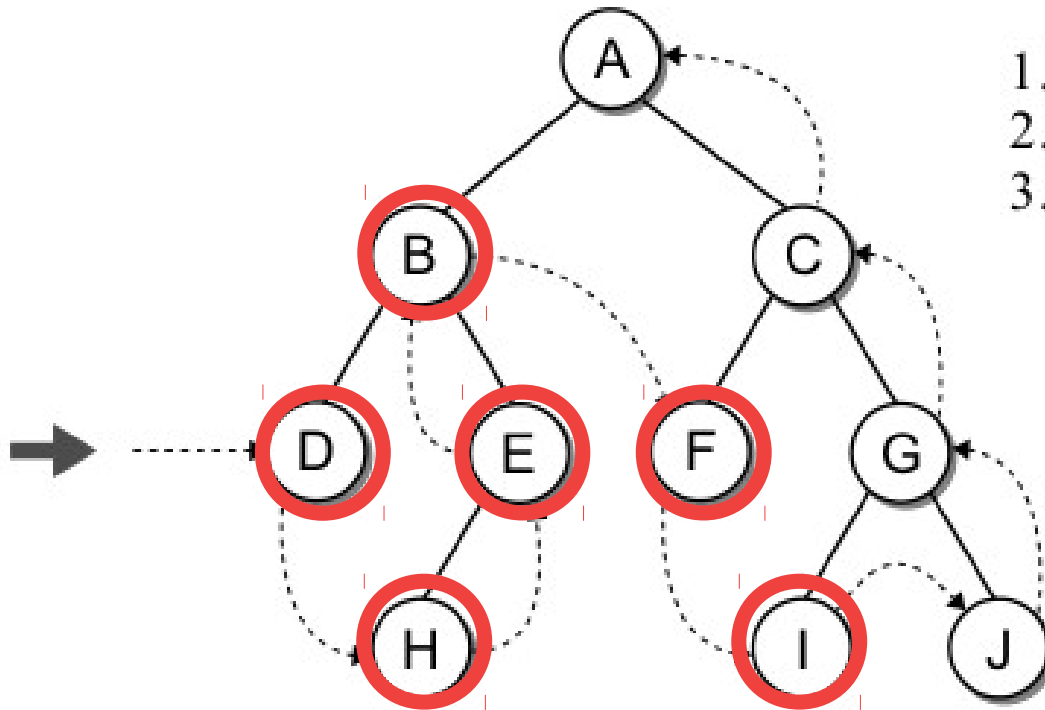


1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.



Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento pós-fixado

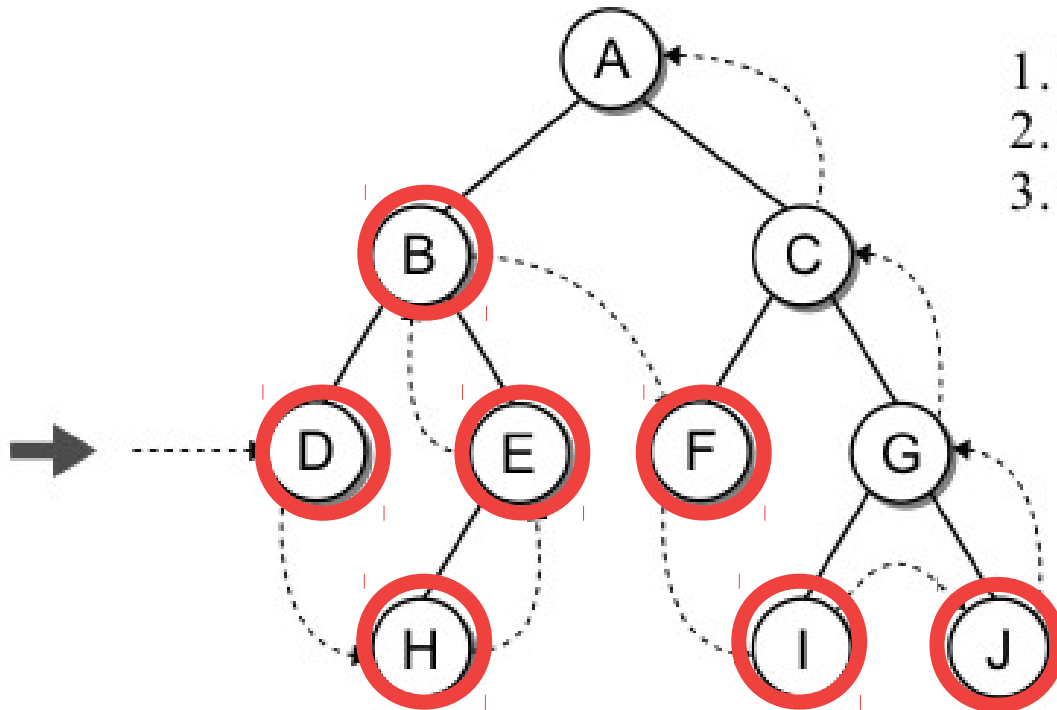


1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.



Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento pós-fixado

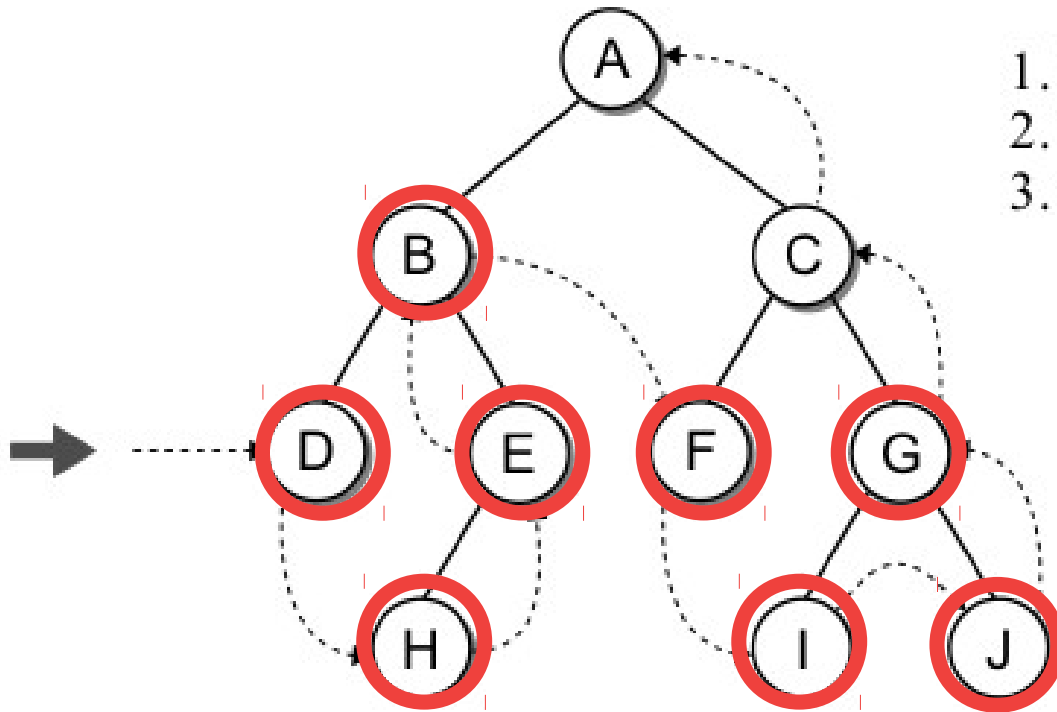


1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.



Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento pós-fixado

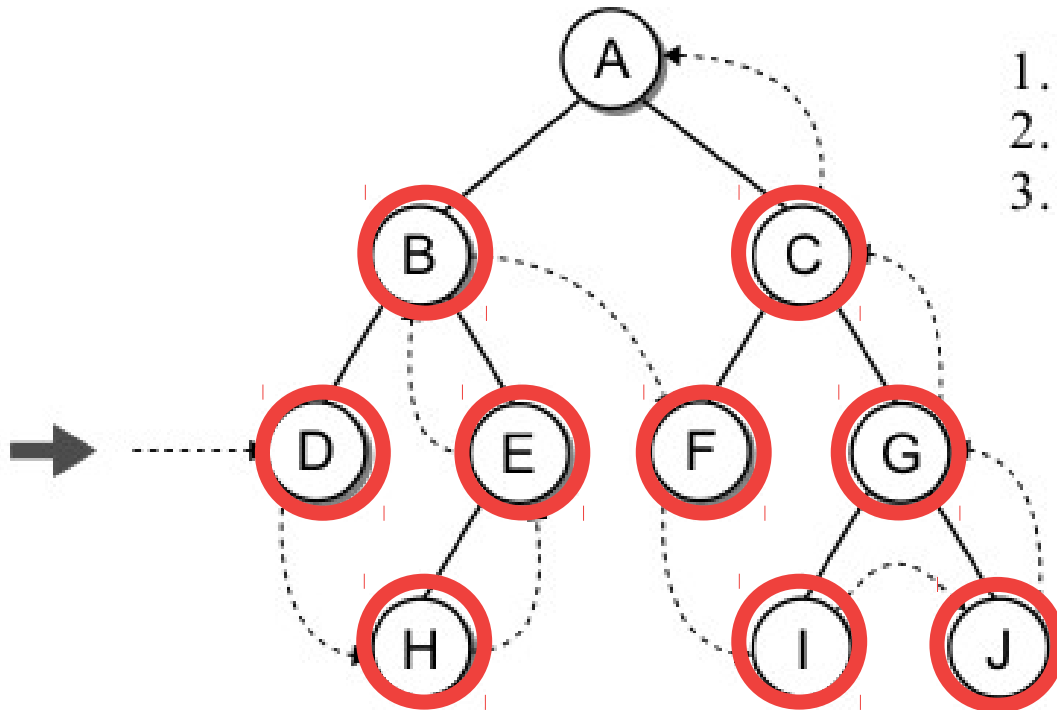


1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.



Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento pós-fixado

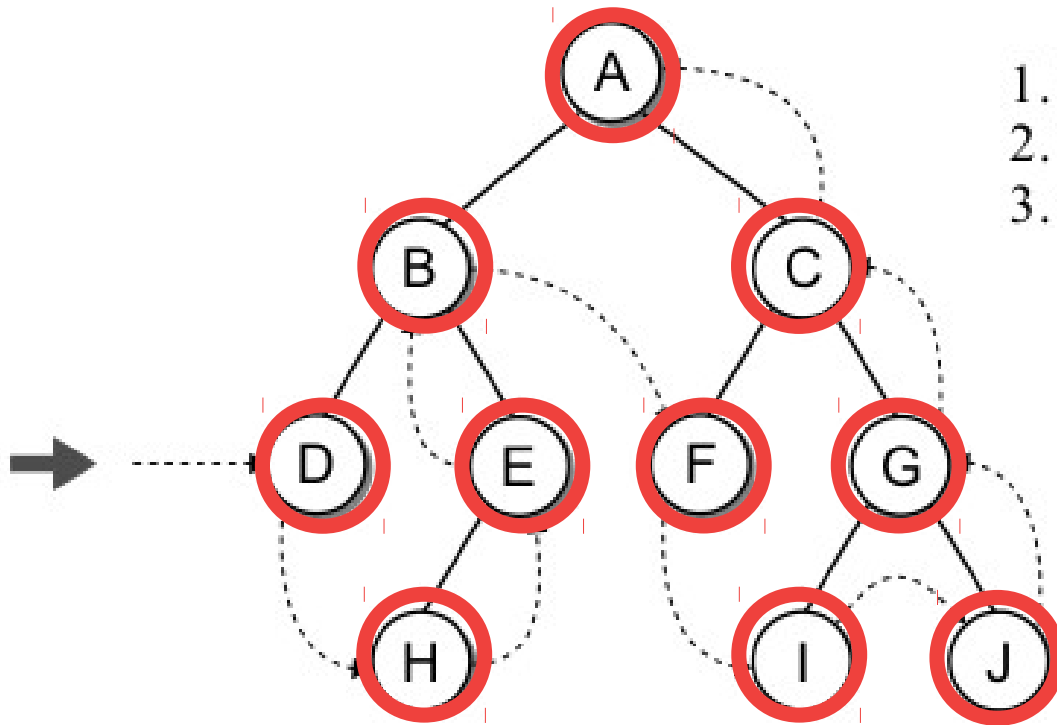


1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.



Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento pós-fixado

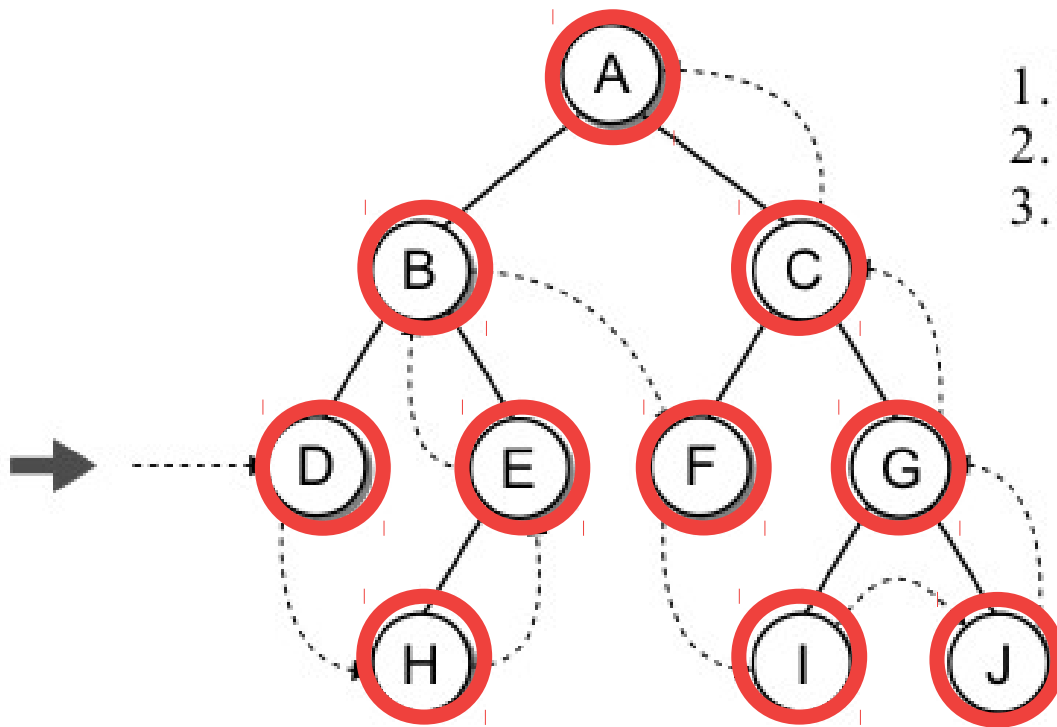


1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.



Árvores Binárias - Varredura

- Exemplo de caminhamento pós-fixado



1. Traverse the left subtree.
2. Traverse the right subtree.
3. Visit the node.

D → H → E → B → F → I → J → G → C → A

Árvores Binárias - Varredura

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pós-fixado:

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pós-fixado:
 - Função recursiva.

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pós-fixado:
 - Função recursiva.

```
1  def postorderTrav( subtree ):  
2      if subtree is not None :  
3          postorderTrav( subtree.left )  
4          postorderTrav( subtree.right )  
5          print( subtree.data )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pós-fixado:
 - Função recursiva.
 - O parâmetro será uma subárvore:

```
1  def postorderTrav( subtree ):  
2      if subtree is not None :  
3          postorderTrav( subtree.left )  
4          postorderTrav( subtree.right )  
5          print( subtree.data )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pós-fixado:
 - Função recursiva.
 - O parâmetro será uma subárvore:
 - Referência null (None) ou

```
1  def postorderTrav( subtree ):
2      if subtree is not None :
3          postorderTrav( subtree.left )
4          postorderTrav( subtree.right )
5          print( subtree.data )
```

Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pós-fixado:
 - Função recursiva.
 - O parâmetro será uma subárvore:
 - Referência null (None) ou
 - Referência para o nó raiz de uma subárvore.

```
1 def postorderTrav( subtree ):  
2     if subtree is not None :  
3         postorderTrav( subtree.left )  
4         postorderTrav( subtree.right )  
5         print( subtree.data )
```


Árvores Binárias - Varredura

- A função para caminho pós-fixado:
 - Função recursiva.
 - O parâmetro será uma subárvore:
 - Referência null (None) ou
 - Referência para o nó raiz de uma subárvore.
 - O nó raiz é sempre visitado por último.

```
1 def postorderTrav( subtree ):
2     if subtree is not None :
3         postorderTrav( subtree.left )
4         postorderTrav( subtree.right )
5     print( subtree.data )
```

Caminhamento em Largura

Caminhamento em Largura

- Os caminhamentos pré-fixado, central e pós-fixado são exemplos de busca em profundidade.

Caminhamento em Largura

- Os caminhamentos pré-fixado, central e pós-fixado são exemplos de busca em profundidade.
- Outra forma de pesquisa é o **caminhamento em largura** (*breadth-first*).

Caminhamento em Largura

Caminhamento em Largura

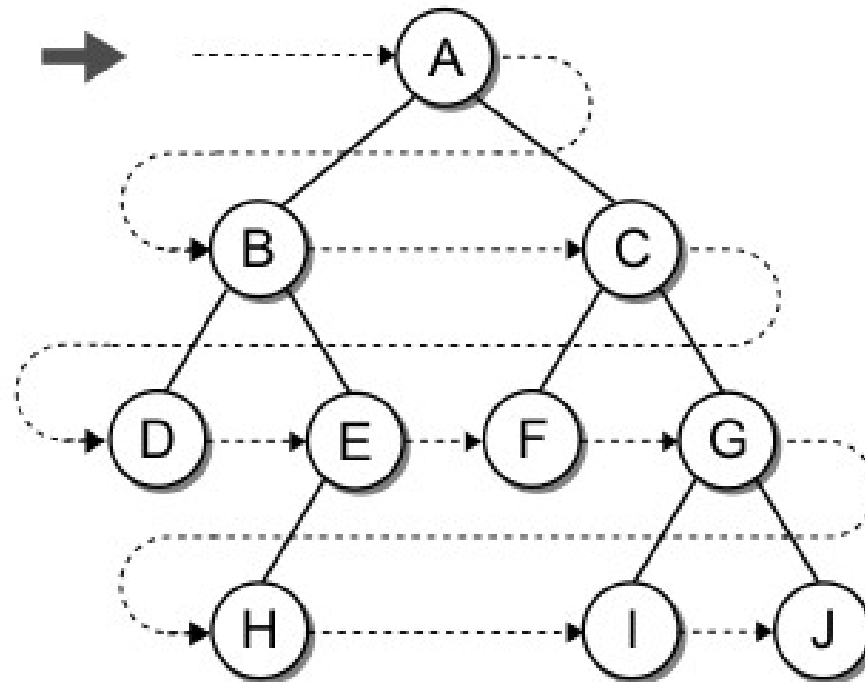
- No caminhamento em largura, os nós são visitados por nível, da esquerda para a direita.

Caminhamento em Largura

- No caminhamento em largura, os nós são visitados por nível, da esquerda para a direita.
- Exemplo:

Caminhamento em Largura

- No caminhamento em largura, os nós são visitados por nível, da esquerda para a direita.
- Exemplo:



Caminhamento em Largura

Caminhamento em Largura

- Não é possível usar funções recursivas nesse tipo de caminhamento.

Caminhamento em Largura

- Não é possível usar funções recursivas nesse tipo de caminhamento.
- Uma alternativa é usar uma estrutura do tipo Fila.

Caminhamento em Largura

- Não é possível usar funções recursivas nesse tipo de caminhamento.
- Uma alternativa é usar uma estrutura do tipo Fila.
- Algoritmo:

Caminhamento em Largura

- Não é possível usar funções recursivas nesse tipo de caminhamento.
- Uma alternativa é usar uma estrutura do tipo Fila.
- Algoritmo:
 - Inicia pelo nó raiz.

Caminhamento em Largura

- Não é possível usar funções recursivas nesse tipo de caminhamento.
- Uma alternativa é usar uma estrutura do tipo Fila.
- Algoritmo:
 - Inicia pelo nó raiz.
 - Durante cada iteração, nós removemos o nó da fila, visitamos o nó, e então adicionamos os seus filhos à fila.

Caminhamento em Largura

- Não é possível usar funções recursivas nesse tipo de caminhamento.
- Uma alternativa é usar uma estrutura do tipo Fila.
- Algoritmo:
 - Inicia pelo nó raiz.
 - Durante cada iteração, nós removemos o nó da fila, visitamos o nó, e então adicionamos os seus filhos à fila.
 - O algoritmo termina quando todos os nós tiverem sido visitados.

Caminhamento em Largura

Caminhamento em Largura

- Exemplo de código:

Caminhamento em Largura

- Exemplo de código:

```
1  def breadthFirstTrav( bintree ):  
2      # Create a queue and add the root node to it.  
3      Queue q  
4      q.enqueue( bintree )  
5  
6      # Visit each node in the tree.  
7      while not q.isEmpty() :  
8          # Remove the next node from the queue and visit it.  
9          node = q.dequeue()  
10         print( node.data )  
11  
12         # Add the two children to the queue.  
13         if node.left is not None :  
14             q.enqueue( node.left )  
15         if node.right is not None :  
16             q.enqueue( node.right )
```

Para pensar...

Como seria possível representar uma expressão tal como $(9 + 3) * (8 - 4)$ em uma árvore binária?

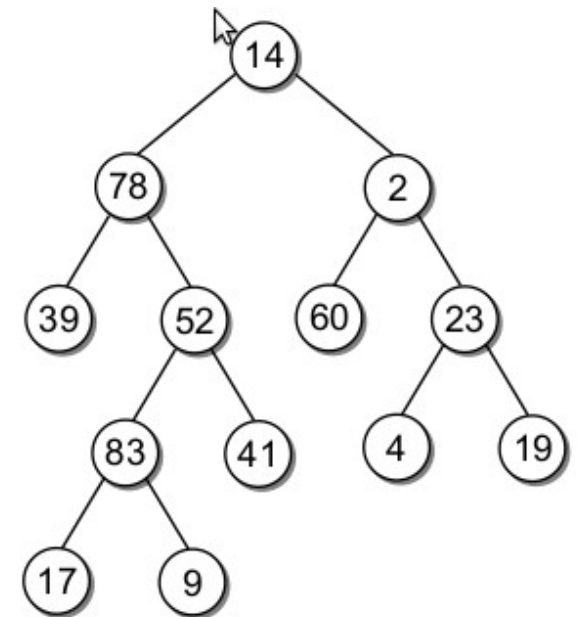


Exercícios

- Dada uma árvore binária de tamanho 76, qual é o número mínimo de níveis que ela pode ter? E qual seria o número máximo de níveis?
- Qual é o número máximo de nós de uma árvore binária de 5 níveis?

Exercícios

- Considere a árvore abaixo e faça o que se pede:
 - Mostre a ordem em que os nós seria visitados para cada caminhamento visto em sala de aula.
 - Identifique os nós folhas.
 - Identifique os nós internos.
 - Liste todos os nós do nível 4.
 - Identifique a profundidade do nó 2.
 - Quem são as ascendentes do nó 4?



Exercícios

- Considere as árvores binárias abaixo e responda ao que se pede:
 - Elas são balanceadas?
 - Elas são perfeitamente balanceadas?
 - Liste os nós conforme os vários tipos de caminhamento vistos em sala de aula.
 - a) (1 (2 (4) (5)) (3 (6) (7)));
 - b) (A (B (D (F)) (E)) (C (G (H))));

Exercícios

- Implemente a função `treeSize(root)` para calcular o número de nós de uma árvore binária.
- Implemente a função `treeHeight(root)` para calcular a altura de uma árvore binária.