Algoritmos e Estruturas de Dados II

Grafos

Prof. Tiago Eugenio de Melo
tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

- As palavras com a fonte `Courier` indicam as palavras-reservadas da linguagem de programação.

Referências

- **Projetos de Algoritmos – com implementações em Pascal e C**. Nivio Ziviani. 2ª edição. Thomson, 2005.
- Material de aula do professor Marco Antônio Moreira de Carvalho. Acessado em 30/09/2019: http://www.decom.ufop.br/marco/ensino/bcc204/material-das-aulas

CONTEXTO

Contexto

- Em um mundo real, diversos problemas são representados por objetos e as suas conexões.

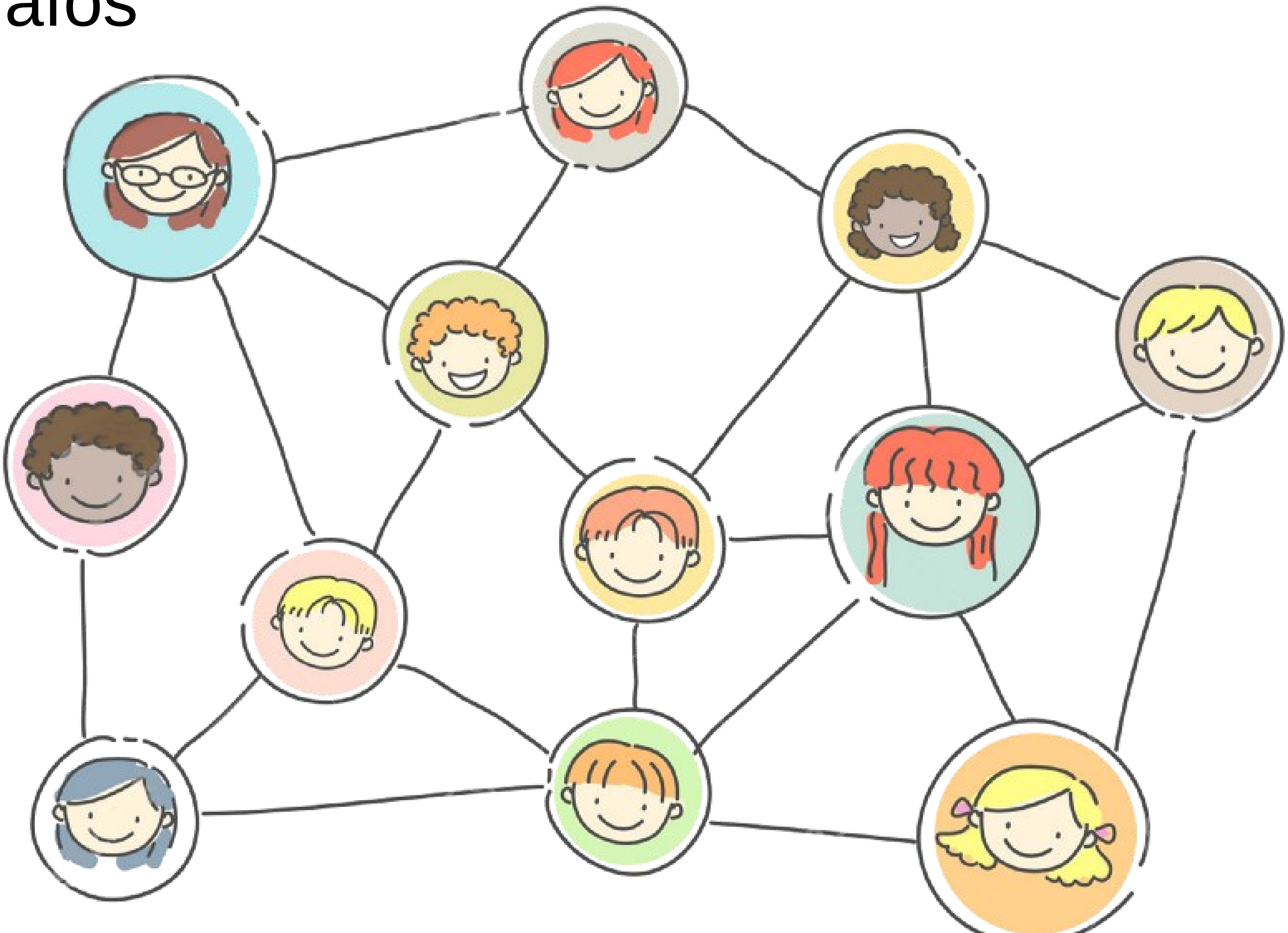
Contexto

- Facebook em 2021: aproximadamente 2.74 bilhões de usuários ativos.

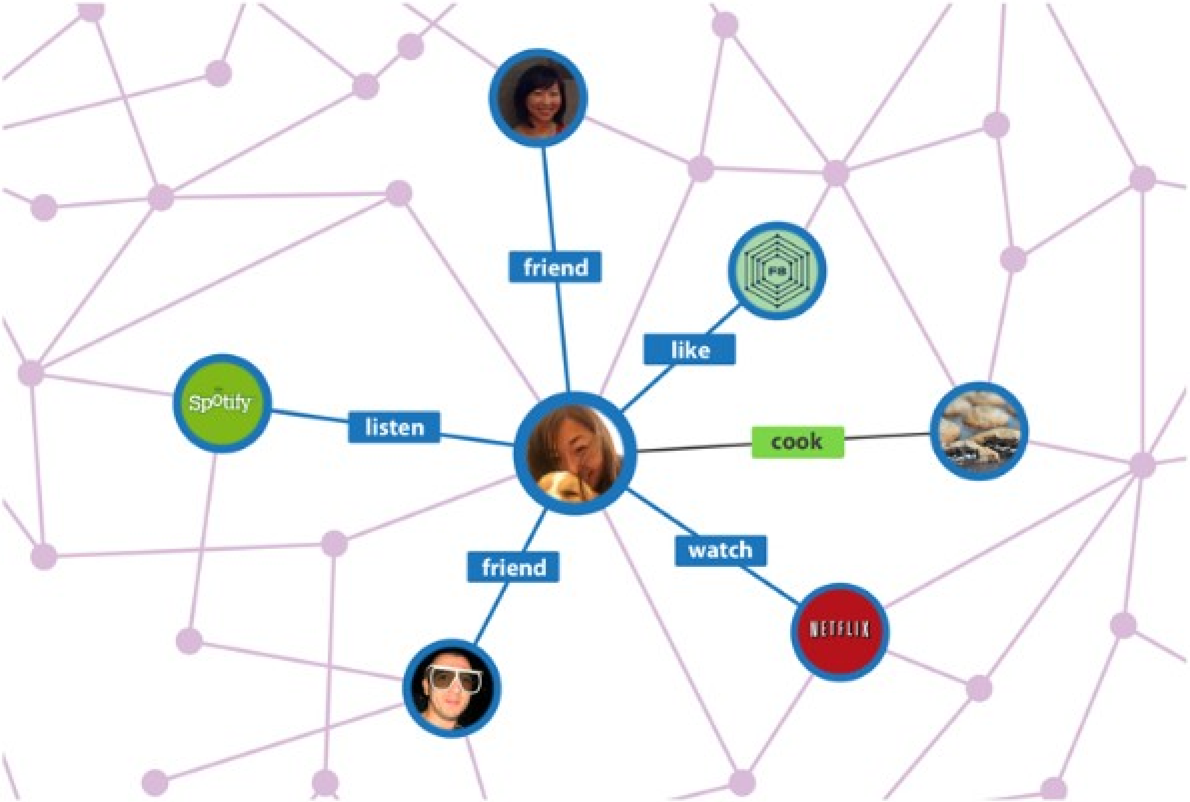
Fonte: https://resultadosdigitais.com.br/blog/redes-sociais-mais-usadas-no-brasil

Contexto

- Grafos

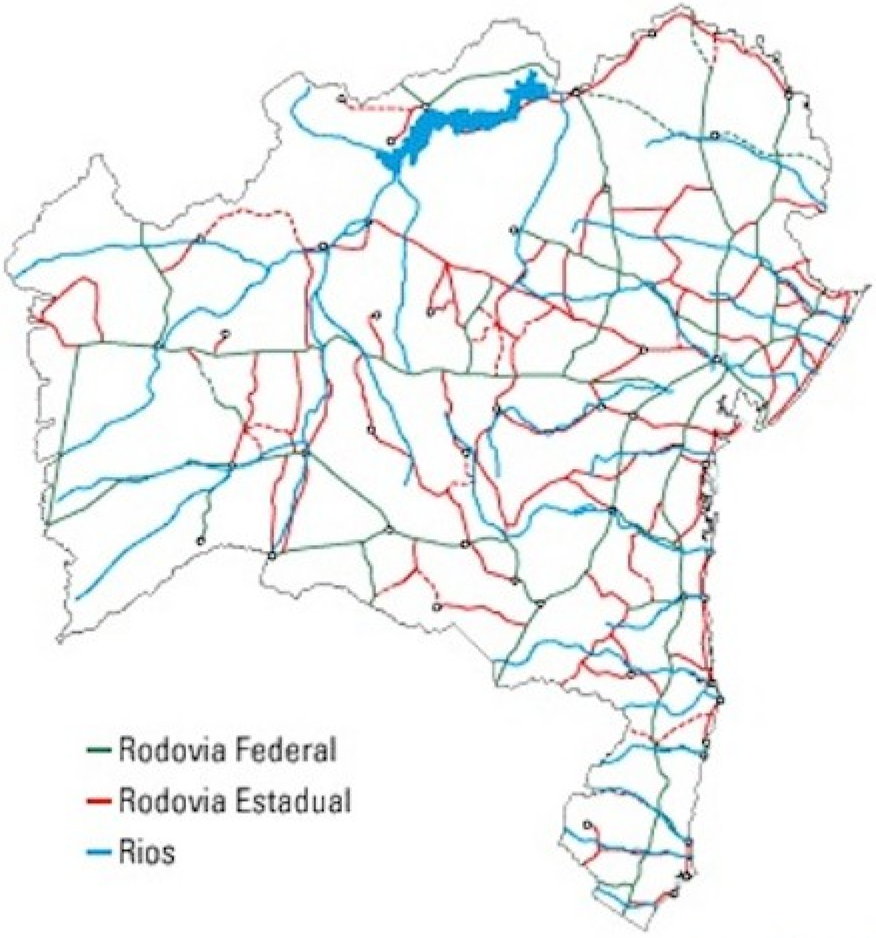


Contexto



Facebook Graph Search.

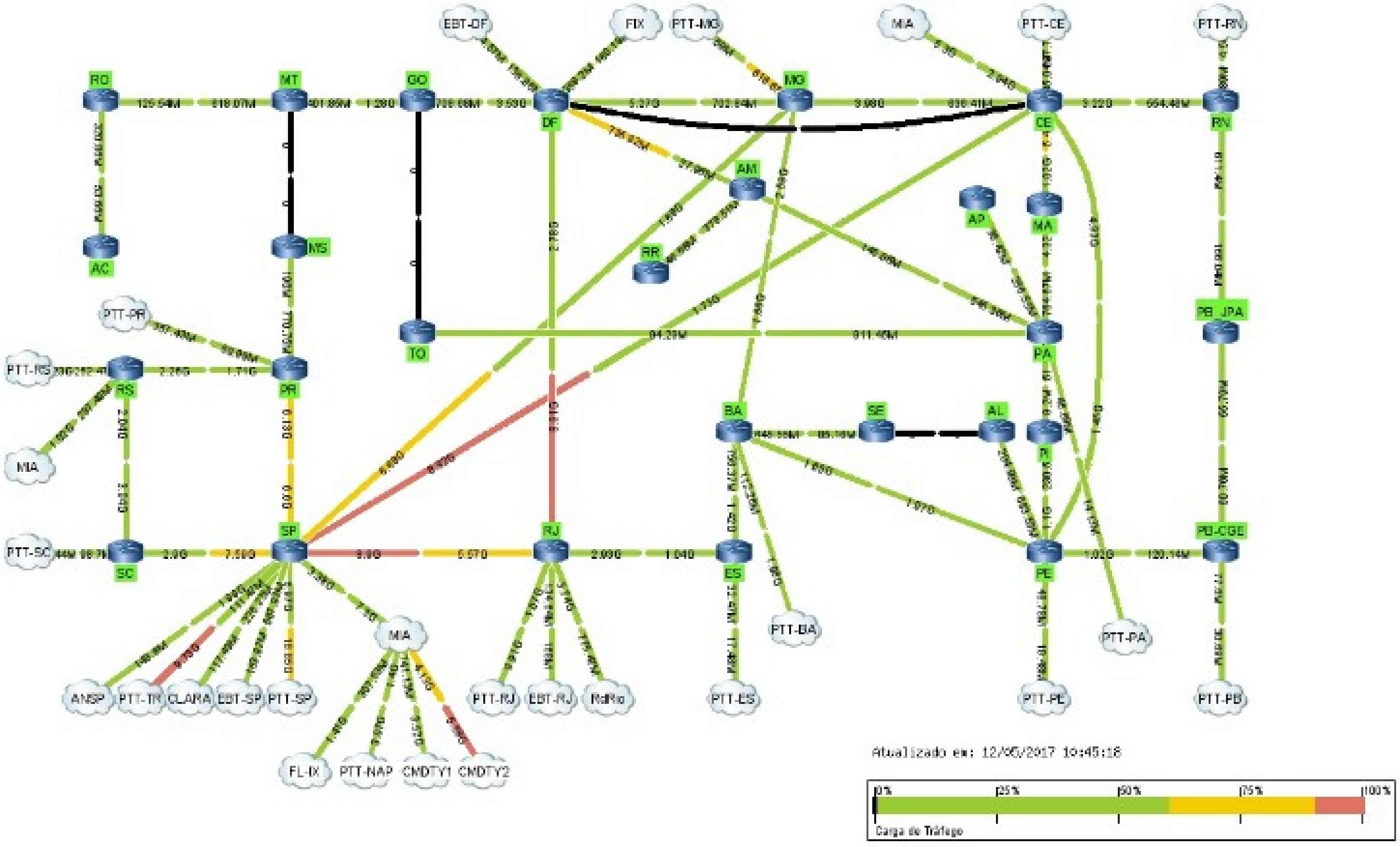
Contexto



Contexto


Lumiar
Aeroporto
Moscavide
Pontinha
Encarnação
Quinta das Conchas
Carnide
Campo Grande
Telheiras
Oriente
Colégio Militar/Luz
Alvalade
Alto dos Moinhos
Cid. Universitária
Cabo Ruivo
Sete Rios
Jd. Zoológico
Roma
Olivais
Para Cascais
Roma/
Areeiro
Entre Campos
Sete Rios
Areeiro
Chelas
Campo Pequeno
Braço
de Prata
Pr. de Espanha
Bela Vista
Chelas
Olaias
Campolide
Saldanha
S. Sebastião
Alameda
Marvila
Parque
Picoas
Arroios
Marquês
de Pombal
Anjos
Avenida
Intendente
Rato
Martins Moniz
Restauradores
Rossio
Rossio
Baixa-Chiado
Para Cascais
Sta. Apolónia
Alcânta-Terra
Santos
Belém
Alcânta-Mar
Cais do Sodré
Terreiro do Paço

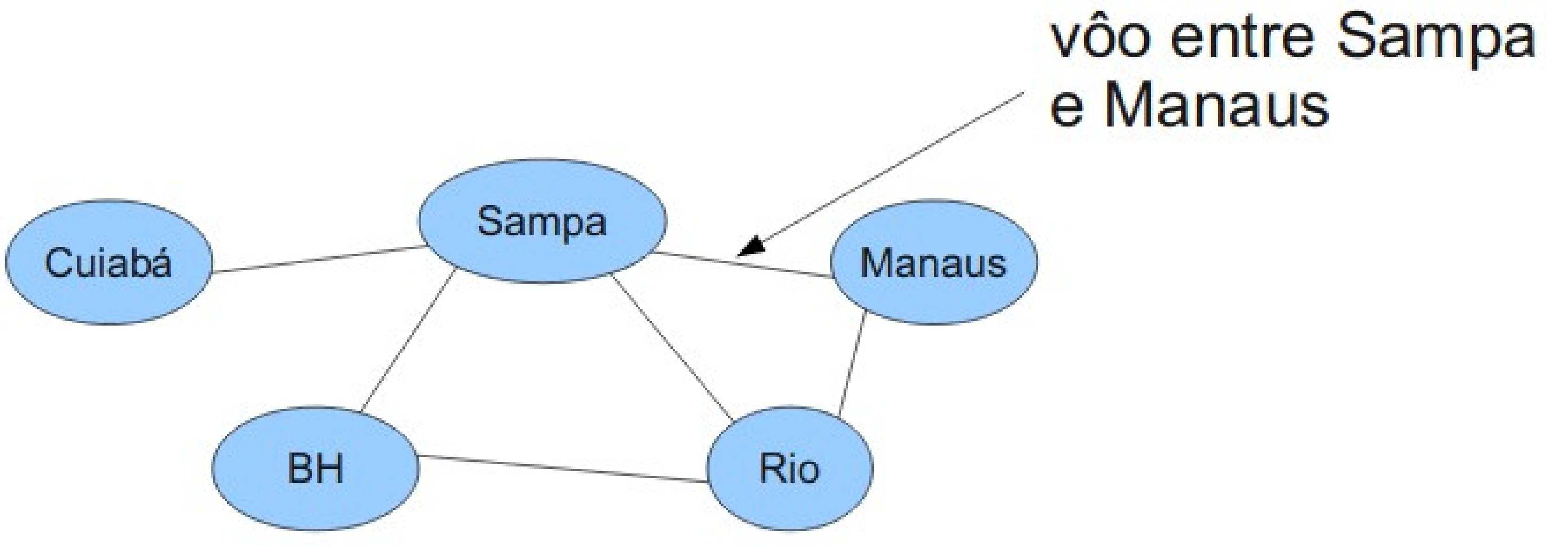
Contexto



https://memoria.rnp.br/ceo/trafego/panorama.php

Contexto

- Transporte aéreo

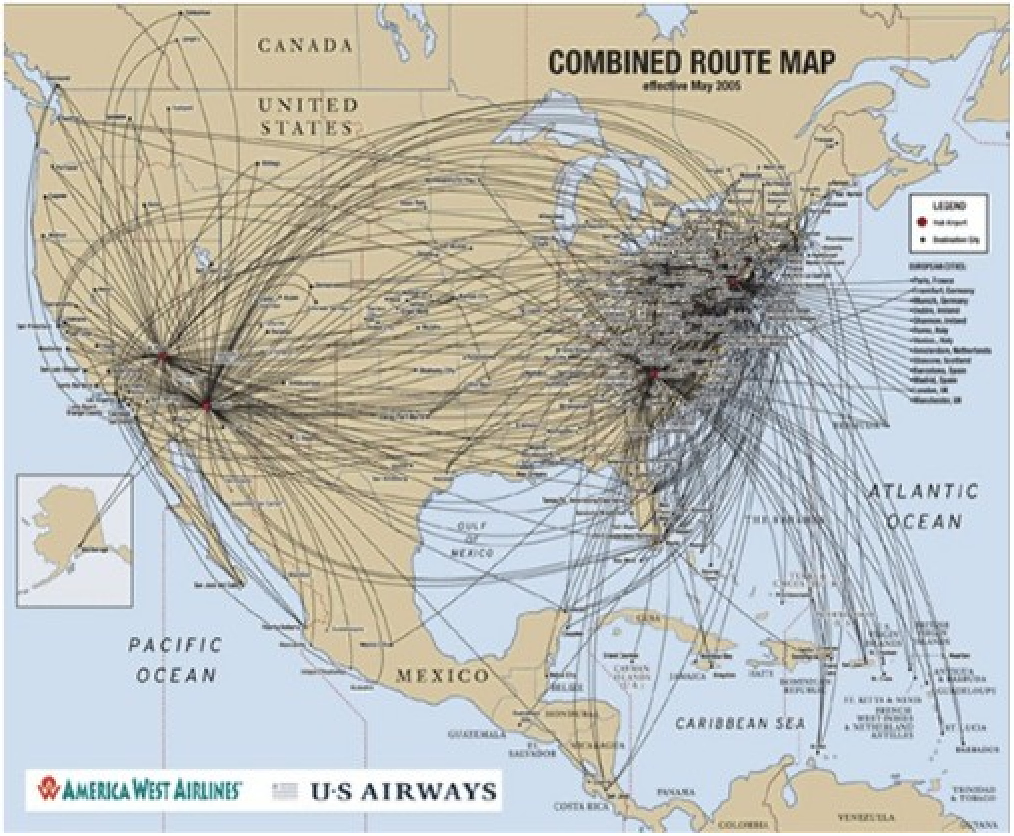


Contexto

- Transporte aéreo

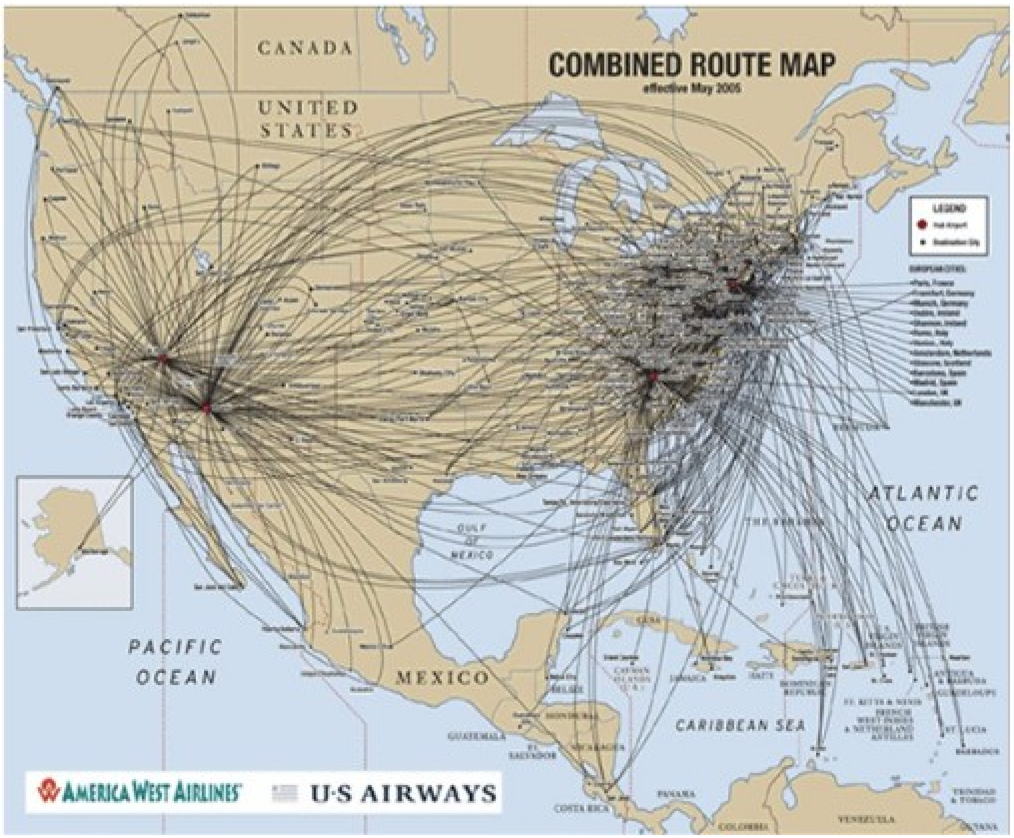
Contexto

- Transporte aéreo



Contexto

- Transporte aéreo



Existem vôos para todas as cidades?

Contexto

- Transporte aéreo

Existem vôos para todas as cidades?

Qual menor caminho entre duas

Contexto

- Transporte aéreo

Existem vôos para todas as cidades?

Qual menor caminho entre duas cidades?

Contexto

- Transporte aéreo

Existem vôos para todas as cidades?

Qual menor caminho entre duas cidades?

Qual é o trajeto com o menor número

Contexto

- Transporte aéreo

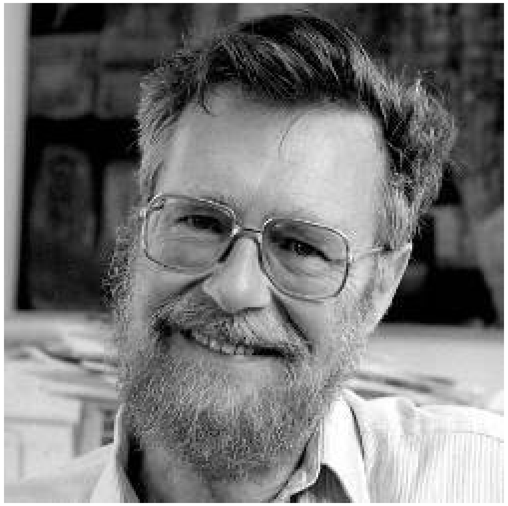
Existem vôos para todas as cidades?

Qual menor caminho entre duas cidades?

Qual é o trajeto com o menor número de paradas (conexões)?

HISTÓRICO

Histórico



Edsger Dijkstra

- “A Ciência da Computação tem tanto a ver com o computador como a Astronomia com o telescópio, a Biologia com o microscópio, ou a Química com os tubos de ensaio. A Ciência não estuda ferramentas, mas o que fazemos e o que descobrimos com elas.”

Histórico

Histórico

- Um grafo é uma estrutura de abstração muito útil na representação e solução de problemas computacionais, por representarem relações de interdependência entre elementos de um conjunto.

Histórico

- Um grafo é uma estrutura de abstração muito útil na representação e solução de problemas computacionais, por representarem relações de interdependência entre elementos de um conjunto.
- O primeiro registro de uso data de 1736, por Euler.

Histórico

- Um grafo é uma estrutura de abstração muito útil na representação e solução de problemas computacionais, por representarem relações de interdependência entre elementos de um conjunto.
- O primeiro registro de uso data de 1736, por Euler.
- O problema era encontrar um caminho circular por Königsberg (atual Kaliningrado) usando cada uma das pontes sobre o rio Pregel (ou Pregolya, Pregola) exatamente uma vez.

Histórico

Histórico

- 1736: Euler e as Pontes de Königsberg

Histórico

- 1736: Euler e as Pontes de Königsberg

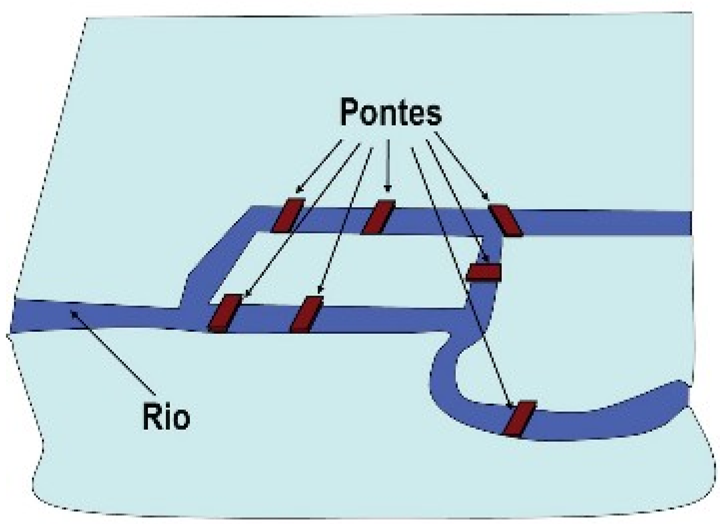
Histórico

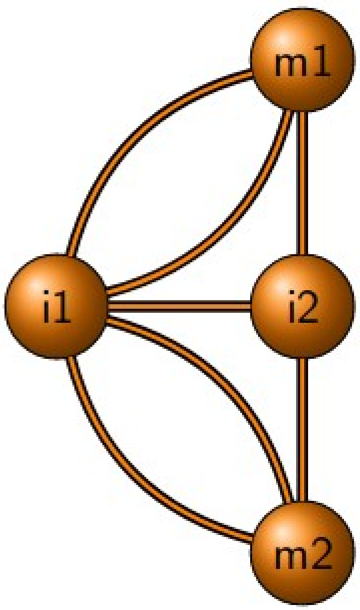
- 1736: Euler e as Pontes de Königsberg

- Partindo de uma das margens, pode-se encontrar um percurso que passe somente **uma vez em cada ponte** e retorne ao ponto de partida?

Histórico

- Pontes de Königsberg - O Grafo





INTRODUÇÃO

Introdução

Introdução

- Definição formal:

Introdução

- Definição formal:
  - Grafo $G = (V, A)$

Introdução

- Definição formal:
  - Grafo G = (V, A)
  - Conjunto V com n vértices (também chamado de nós): $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Introdução

- Definição formal:
  - Grafo G = (V, A)
  - Conjunto V com n vértices (também chamado de nós): $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
  - Conjunto A com m arestas ou arcos: $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

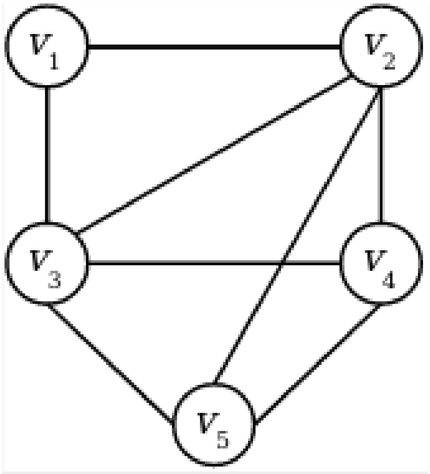
Introdução

Introdução

- Grafo Não Direcionado (GND)

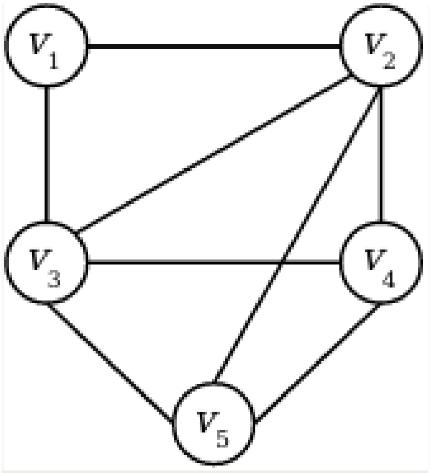
Introdução

- Grafo Não Direcionado (GND)



Introdução

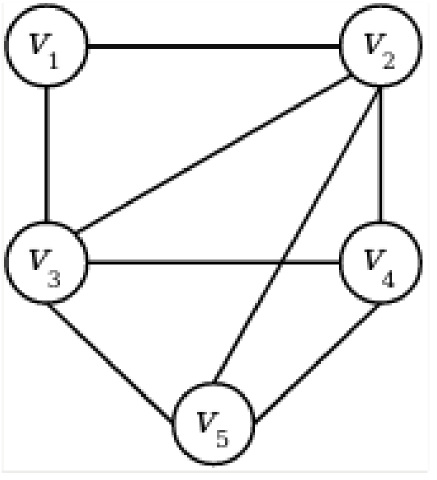
- Grafo Não Direcionado (GND)



  - Ligações através de arestas.

Introdução

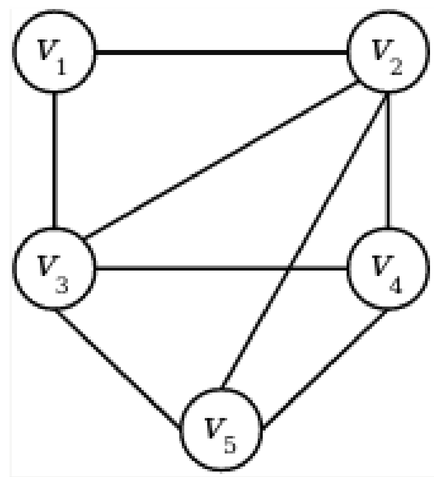
- Grafo Não Direcionado (GND)



  - Ligações através de arestas.
  - Se o vértice a está ligado com o vértice b, a recíproca é verdadeira.

Introdução

- Grafo Não Direcionado (GND)



  - Ligações através de arestas.
  - Se o vértice a está ligado com o vértice b, a recíproca é verdadeira.
  - Cada aresta é representada por um conjunto {v_1, v_2}, indicando os dois vértices envolvidos.

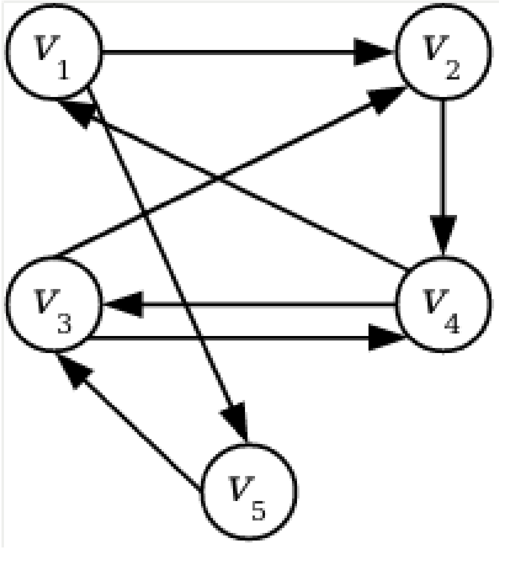
Introdução

Introdução

- Grafo Direcionado (GD)

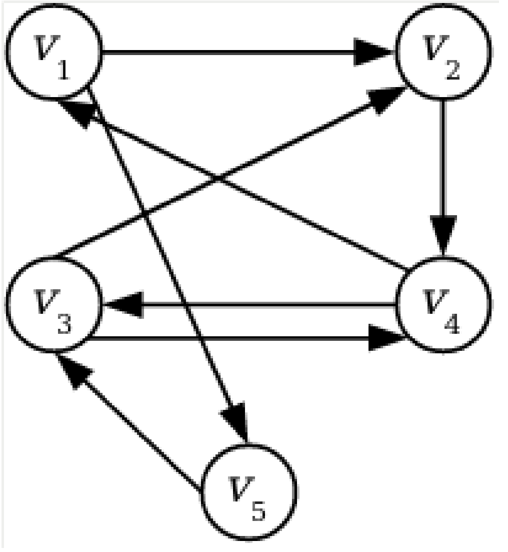
Introdução

- Grafo Direcionado (GD)



Introdução

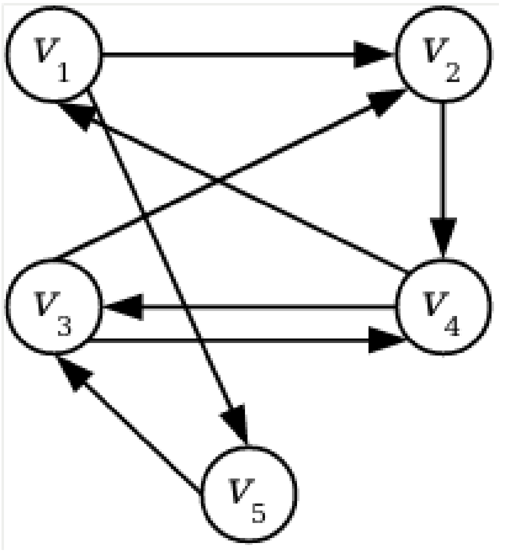
- Grafo Direcionado (GD)



  - Ligações representadas pelos arcos.

Introdução

- Grafo Direcionado (GD)



  - Ligações representadas pelos arcos.
  - Cada arco é representado por um par ordenado (v_1, v_2), indicando os dois vértices envolvidos.

Introdução

1. Peter Bearman, James Moody, and Katherine Stovel. Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks. American Journal of Sociology, 110(1):44- 99, 2004.

Introdução

- Exemplos: Redes Sociais Analógicas[1]

1. Peter Bearman, James Moody, and Katherine Stovel. Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks. American Journal of Sociology, 110(1):44- 99, 2004.

Introdução

- Exemplos: Redes Sociais Analógicas[1]
  - *Chains of Affection*

1. Peter Bearman, James Moody, and Katherine Stovel. Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks. American Journal of Sociology, 110(1):44- 99, 2004.

Introdução

- Exemplos: Redes Sociais Analógicas[1]
  - *Chains of Affection*
  - Pesquisa com 800 estudantes de uma escola secundária americana.

1. Peter Bearman, James Moody, and Katherine Stovel. Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks. American Journal of Sociology, 110(1):44- 99, 2004.

Introdução

- Exemplos: Redes Sociais Analógicas[1]
  - *Chains of Affection*
  - Pesquisa com 800 estudantes de uma escola secundária americana.
  - A estrutura das relações românticas e sexuais da Jefferson High School.

1. Peter Bearman, James Moody, and Katherine Stovel. Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks. American Journal of Sociology, 110(1):44- 99, 2004.

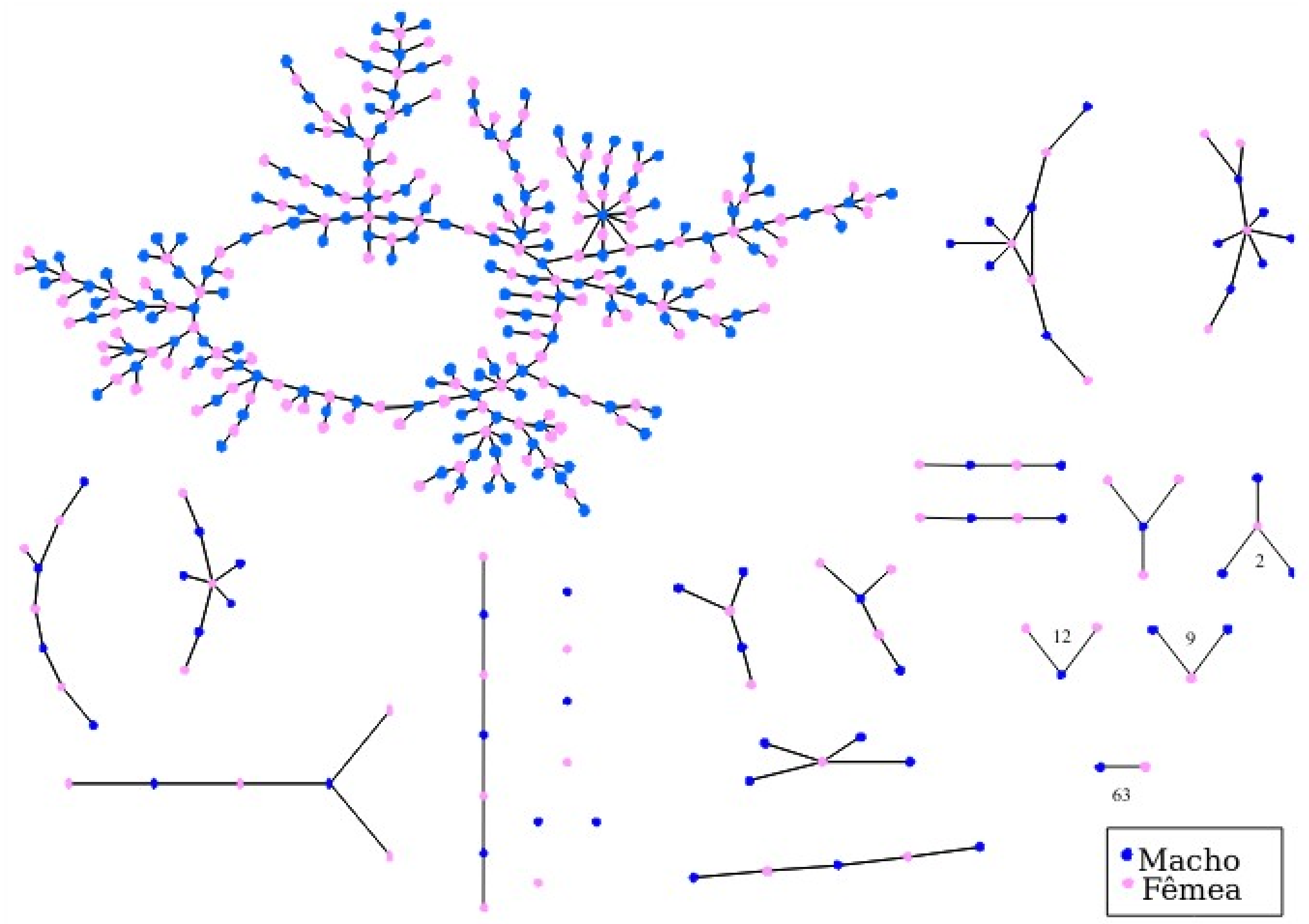
Introdução

Introdução

- Exemplos: Redes Sociais Analógicas

Introdução

- Exemplos: Redes Sociais Analógicas



TERMINOLOGIA

Terminologia

Terminologia

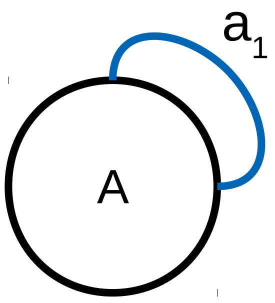
- Laço

Terminologia

- Laço
  - Uma aresta cujas duas extremidades incidem em um mesmo vértice.

Terminologia

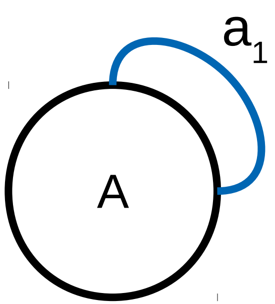
- Laço
  - Uma aresta cujas duas extremidades incidem em um mesmo vértice.



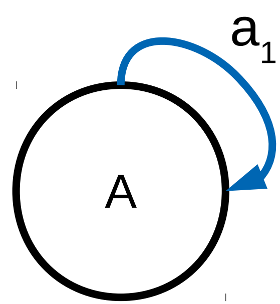
GRAFO NÃO DIRECIONADO

Terminologia

- Laço
  - Uma aresta cujas duas extremidades incidem em um mesmo vértice.



GRAFO NÃO DIRECIONADO



GRAFO DIRECIONADO

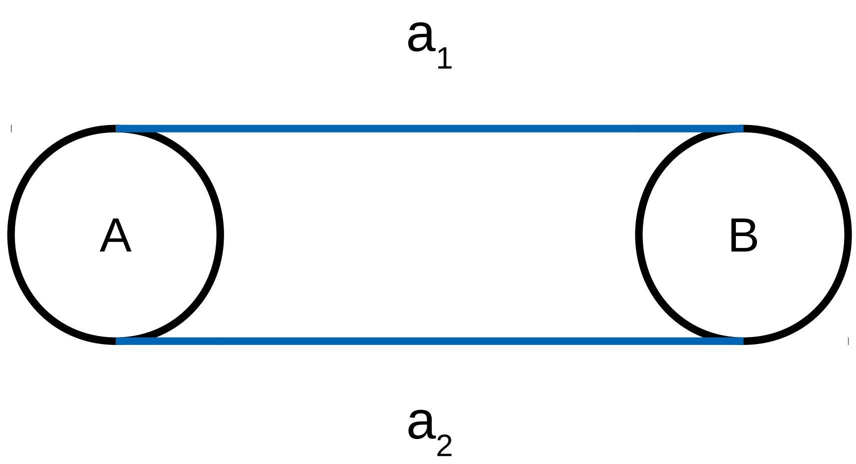
Terminologia

Terminologia

- Arestas paralelas
  - Mais de uma aresta associada ao mesmo par de vértices.

Terminologia

- Arestas paralelas
  - Mais de uma aresta associada ao mesmo par de vértices.



Terminologia

Terminologia

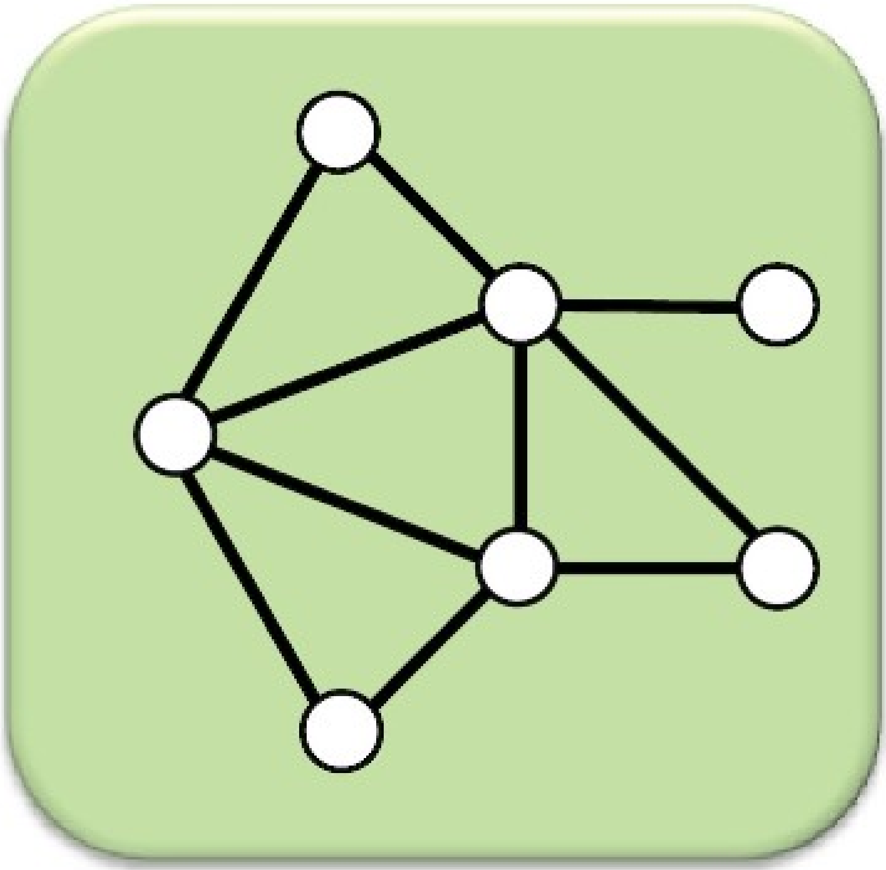
- Grafos simples

Terminologia

- Grafos simples
  - Grafo que não possui laços e nem arestas paralelas.

Terminologia

- Grafos simples
  - Grafo que não possui laços e nem arestas paralelas.



Terminologia

Terminologia

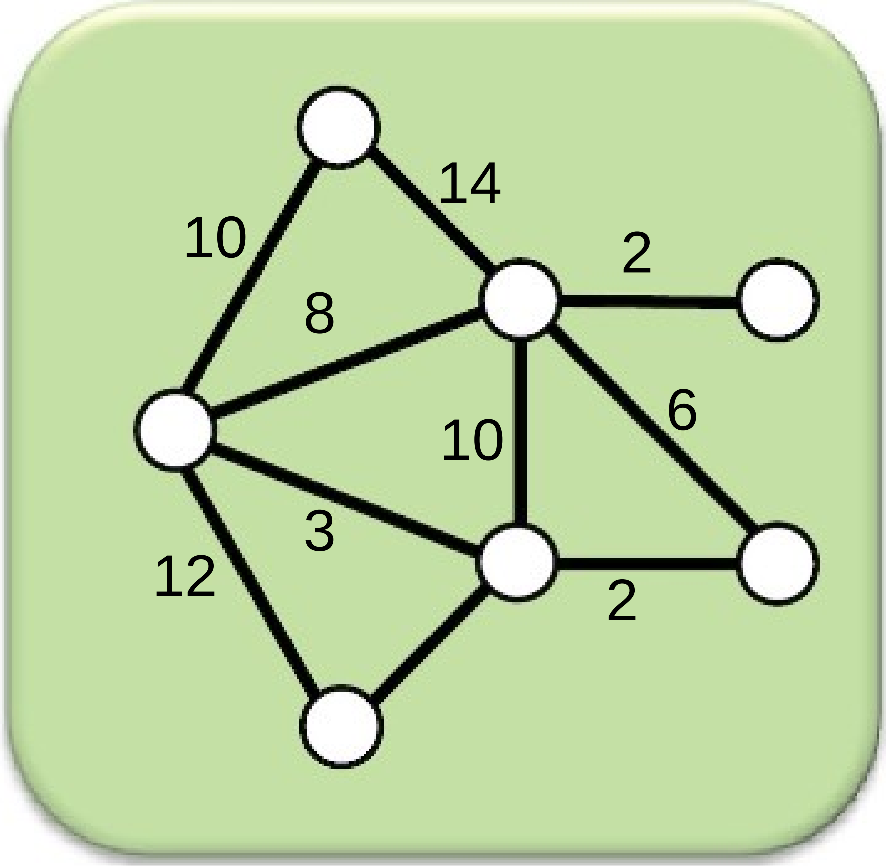
- Grafos ponderado

Terminologia

- Grafos ponderado
  - Grafo cujas arestas têm peso.

Terminologia

- Grafos ponderado
  - Grafo cujas arestas têm peso.



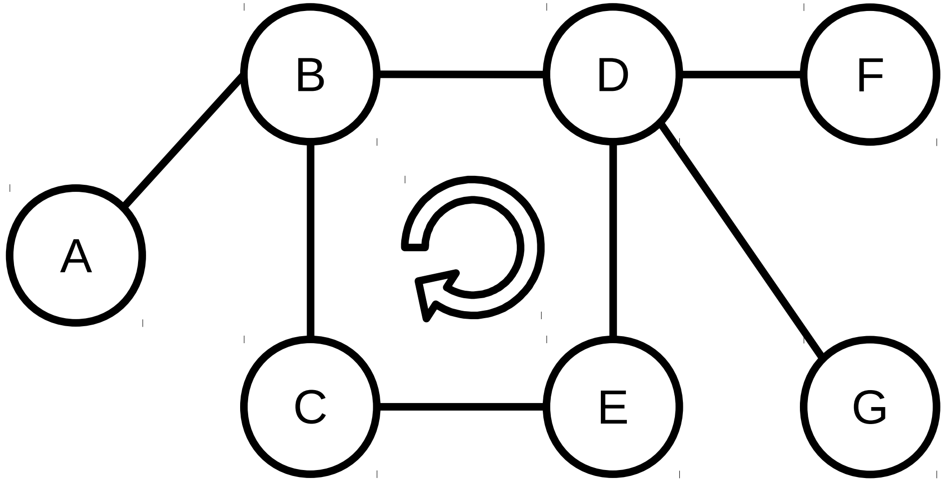
Terminologia

Terminologia

- Um grafo sem ciclos é chamado de árvore:

Terminologia

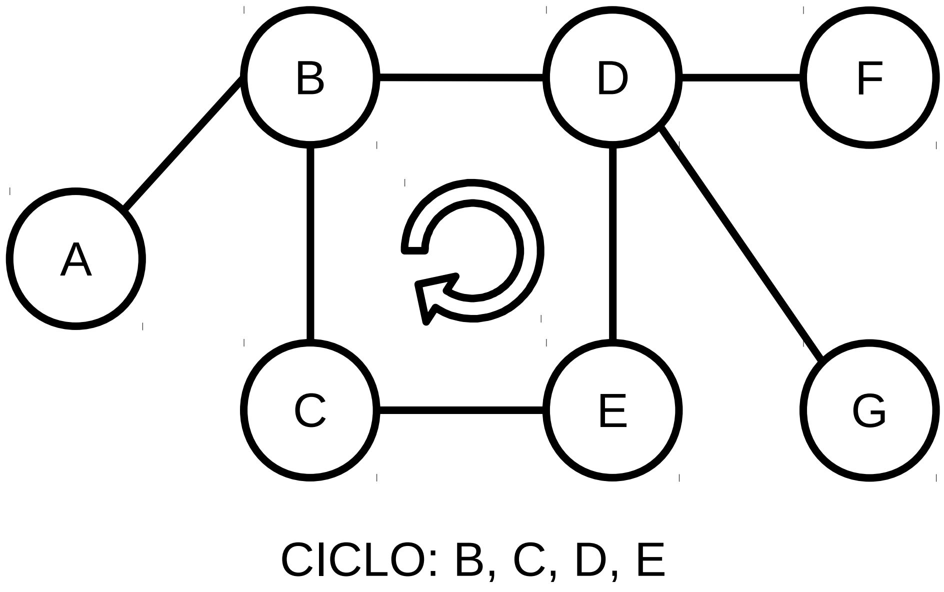
- Um grafo sem ciclos é chamado de árvore:

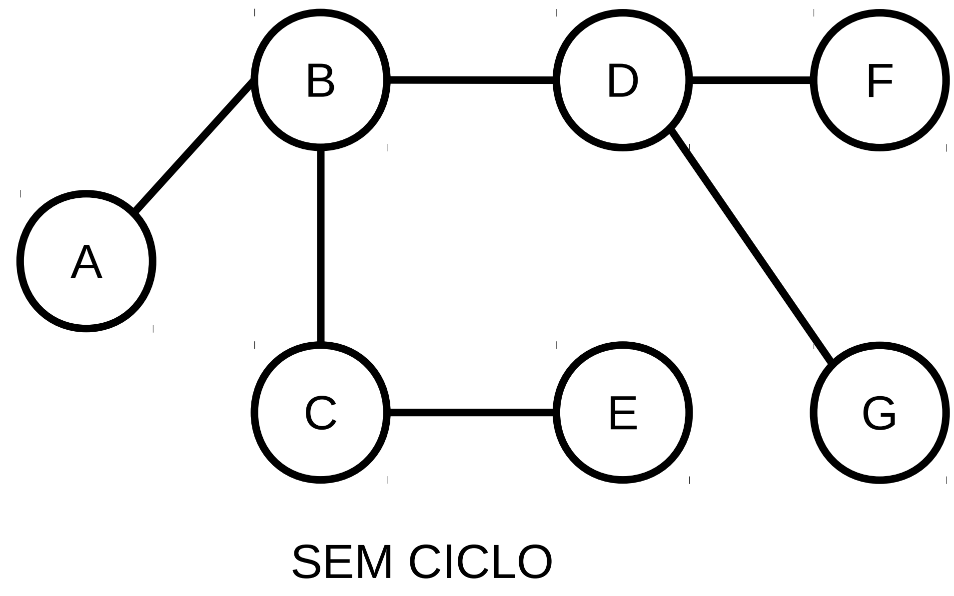


CICLO: B, C, D, E

Terminologia

- Um grafo sem ciclos é chamado de árvore:





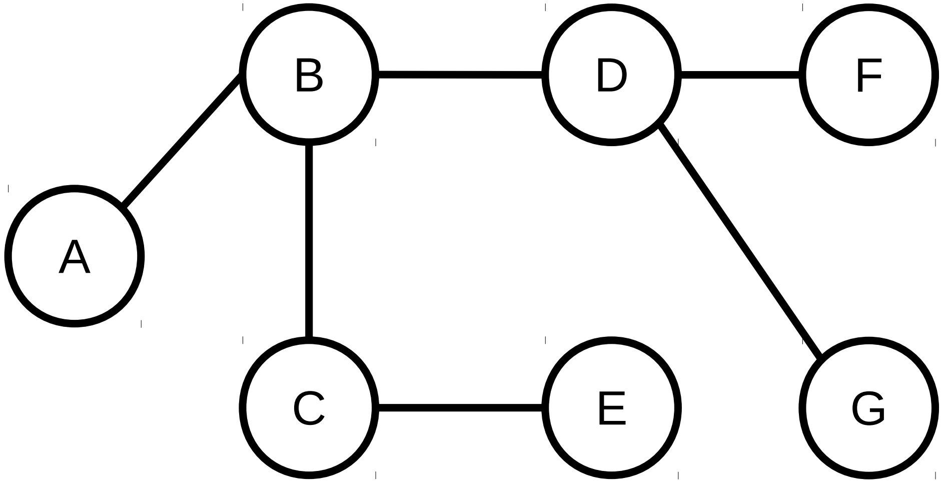
Terminologia

Terminologia

- Uma árvore é um grafo acíclico conectado:

Terminologia

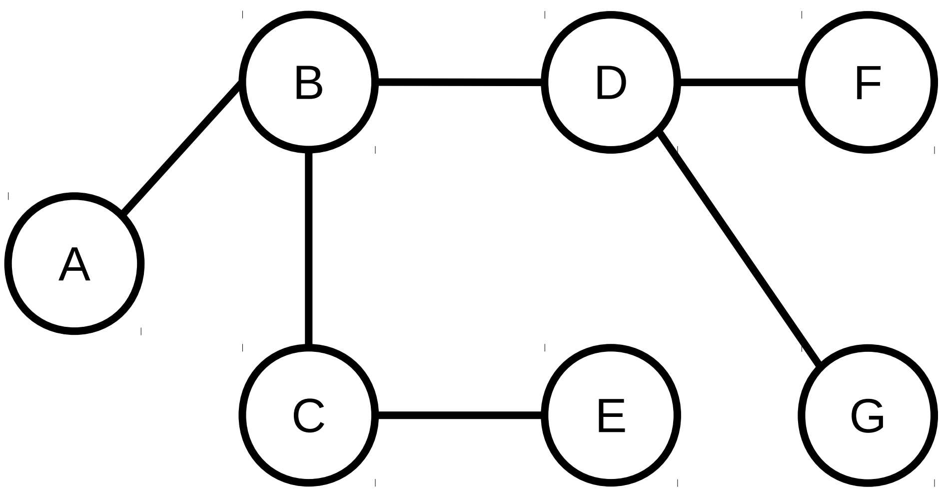
- Uma árvore é um grafo acíclico conectado:



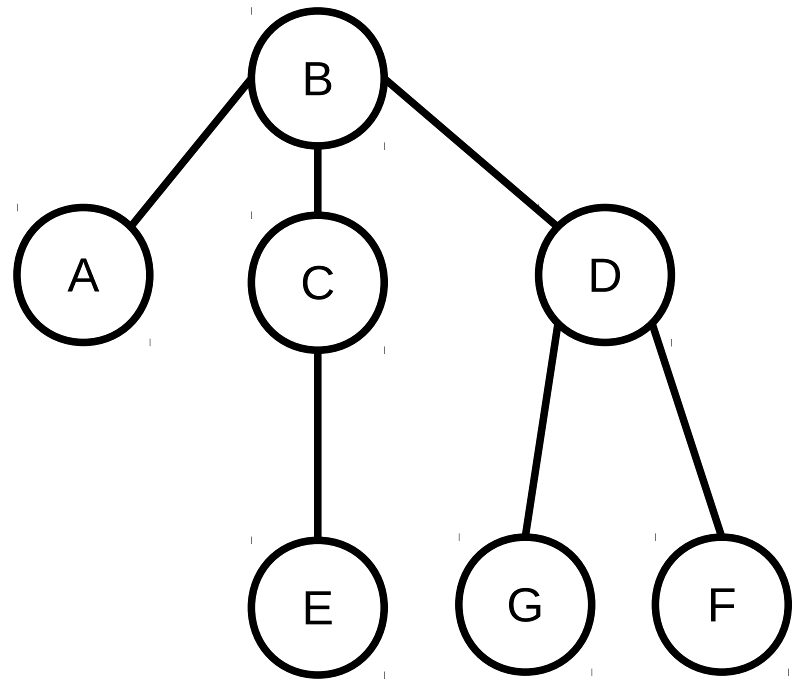
SEM CICLO

Terminologia

- Uma árvore é um grafo acíclico conectado:



SEM CICLO



ÁRVORE

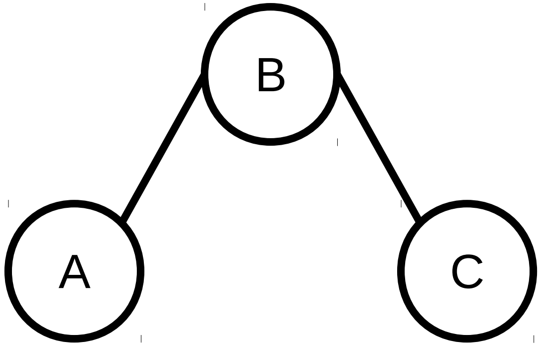
Terminologia

Terminologia

- Uma **floresta** é um conjunto disjunto de árvores:

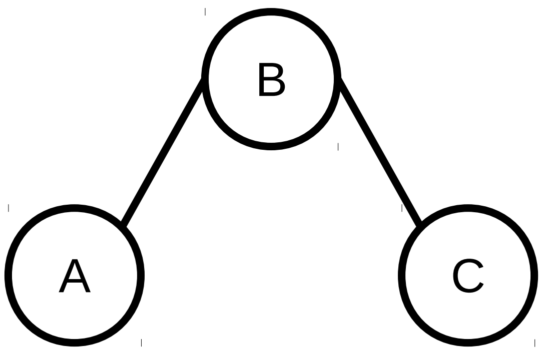
Terminologia

- Uma **floresta** é um conjunto disjunto de árvores:



Terminologia

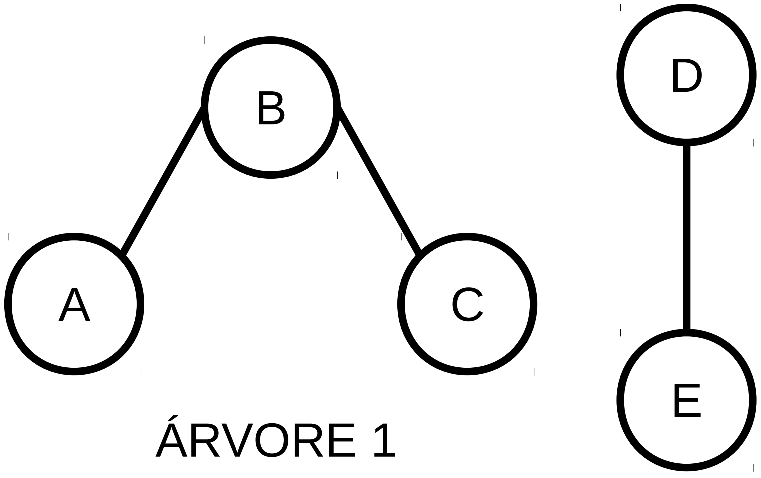
- Uma **floresta** é um conjunto disjunto de árvores:



ÁRVORE 1

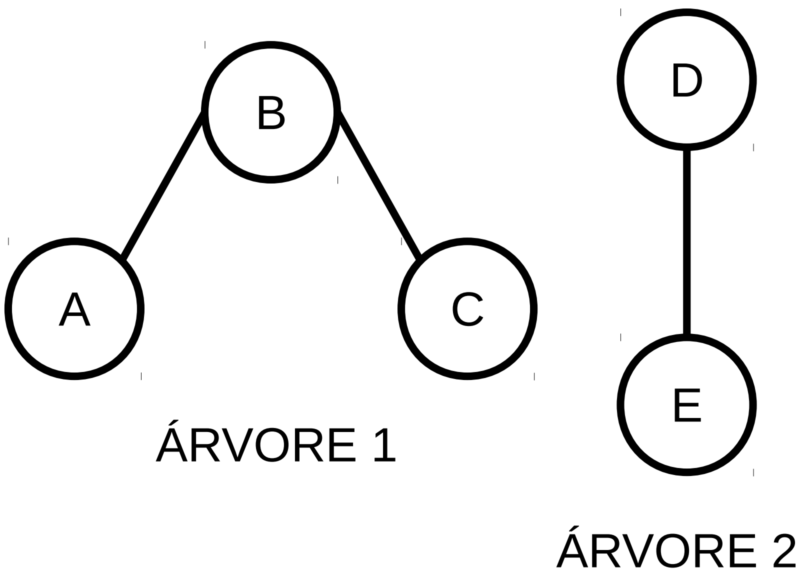
Terminologia

- Uma **floresta** é um conjunto disjunto de árvores:



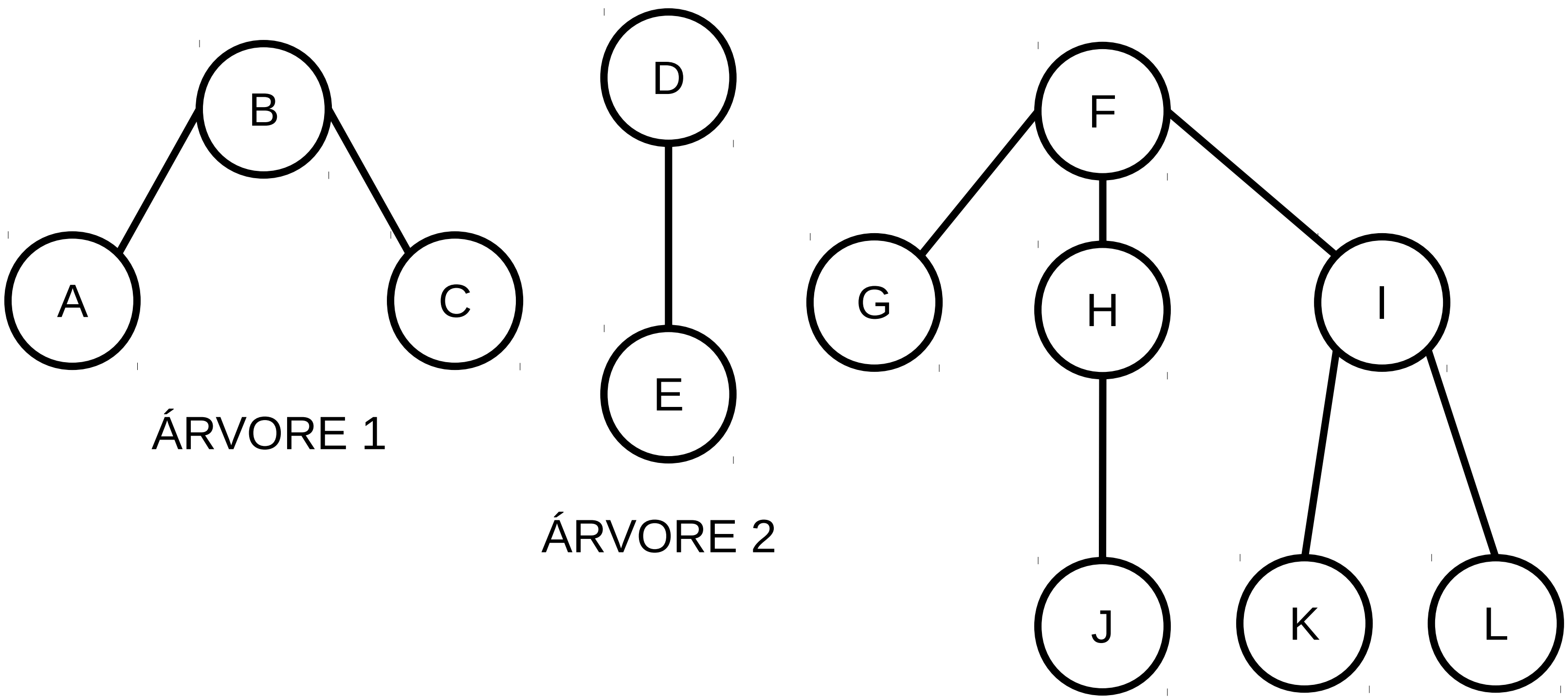
Terminologia

- Uma **floresta** é um conjunto disjunto de árvores:



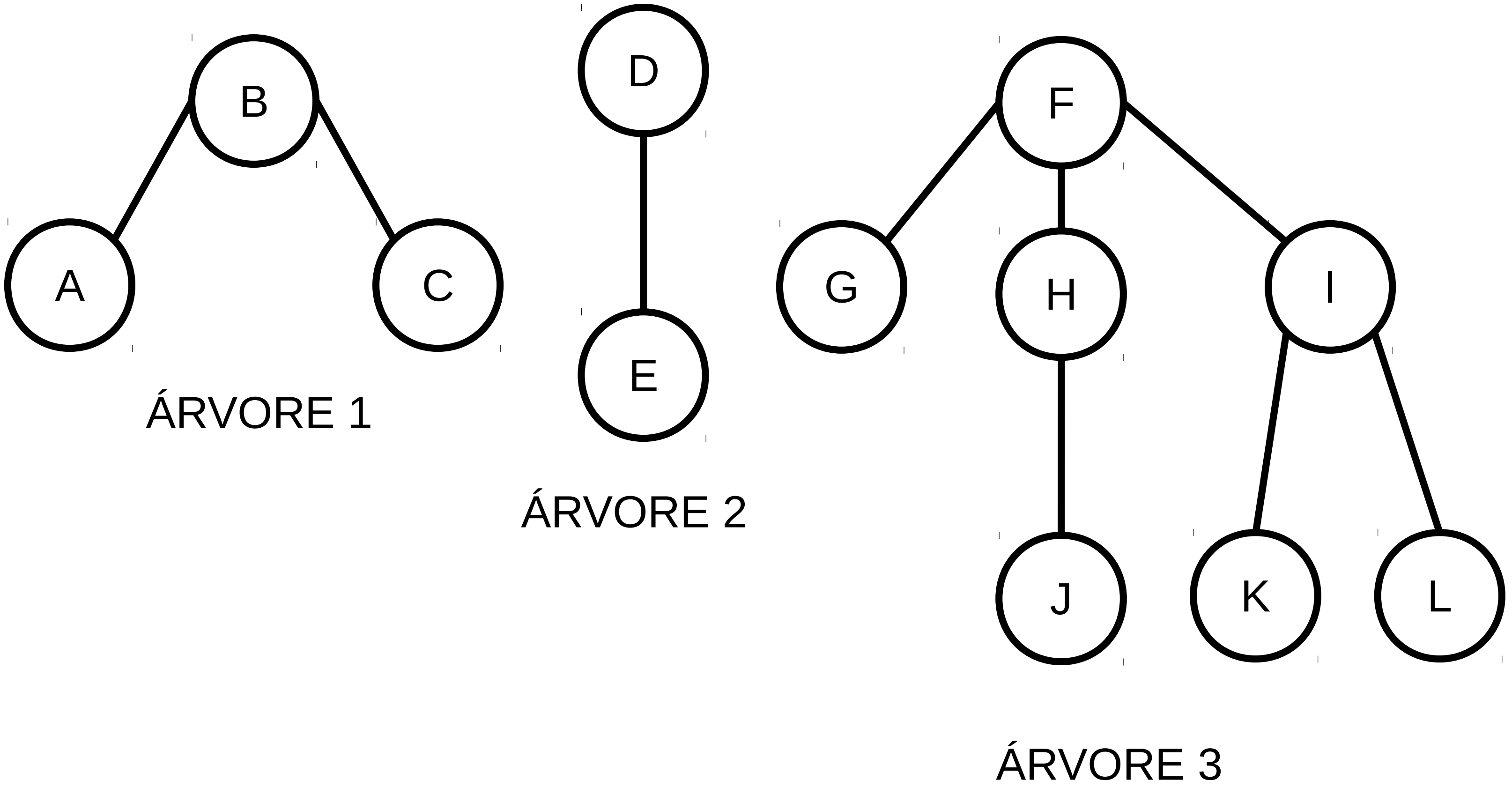
Terminologia

- Uma **floresta** é um conjunto disjunto de árvores:



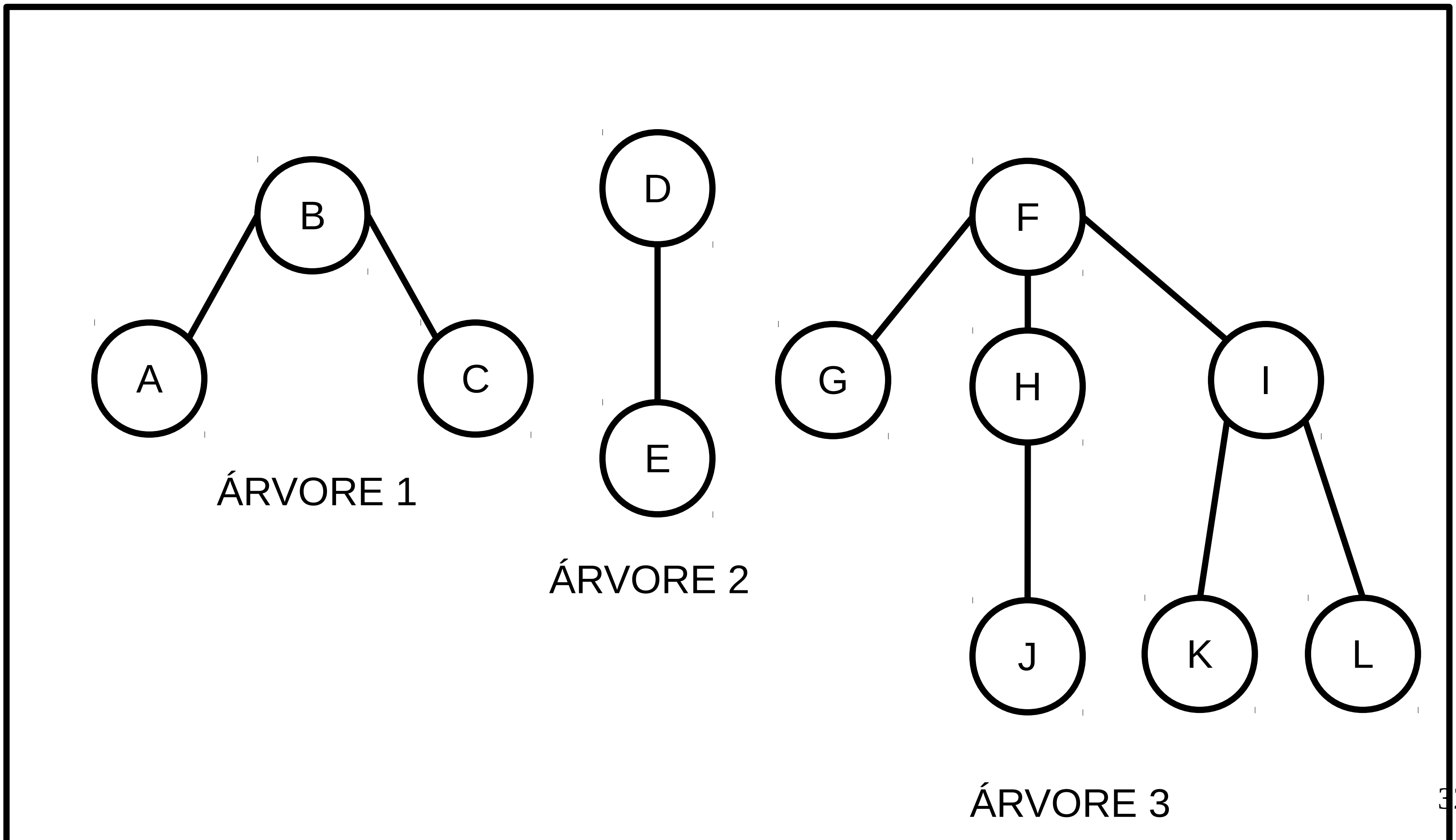
Terminologia

- Uma **floresta** é um conjunto disjunto de árvores:



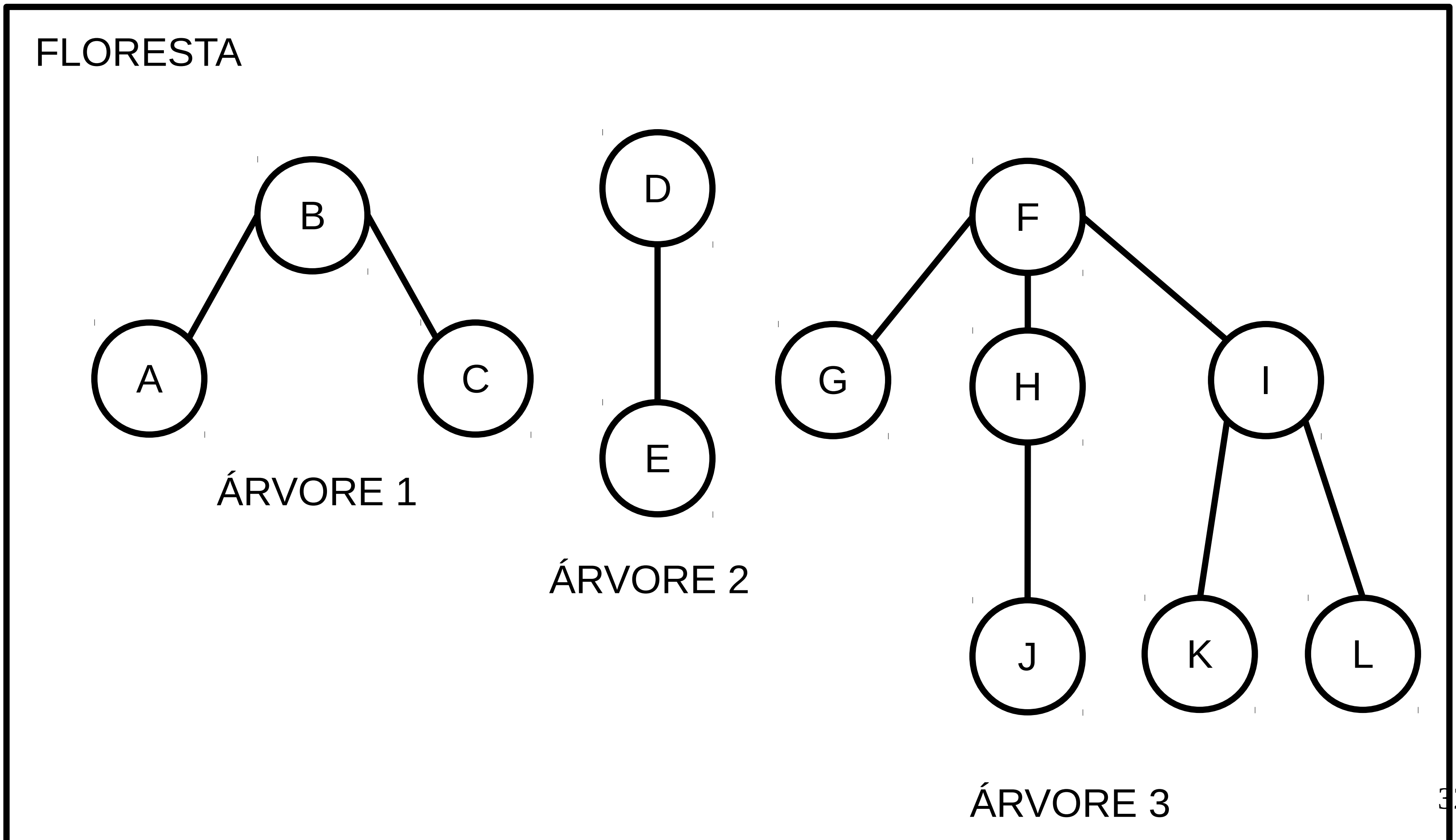
Terminologia

- Uma **floresta** é um conjunto disjunto de árvores:



Terminologia

- Uma **floresta** é um conjunto disjunto de árvores:



Terminologia

Terminologia

- Vértices adjacentes

Terminologia

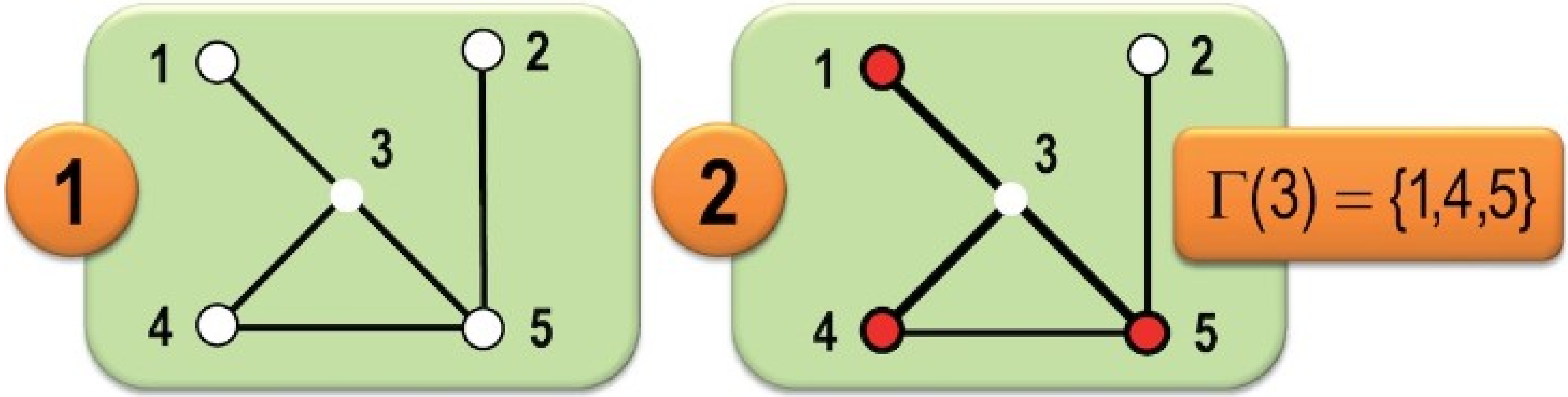
- Vértices adjacentes
  - Vértices que são os pontos finais de uma mesma aresta.

Terminologia

- Vértices adjacentes
  - Vértices que são os pontos finais de uma mesma aresta.
  - A função Γ(i) retorna o conjunto de vértices adjacentes ao vértice i.

Terminologia

- Vértices adjacentes
  - Vértices que são os pontos finais de uma mesma aresta.
  - A função Γ(i) retorna o conjunto de vértices adjacentes ao vértice i.



Terminologia

Terminologia

- Grau de um vértice

Terminologia

- Grau de um vértice
  - O grau d(i) de um vértice i em um **grafo não direcionado** é igual ao número de arestas incidentes a i.

Terminologia

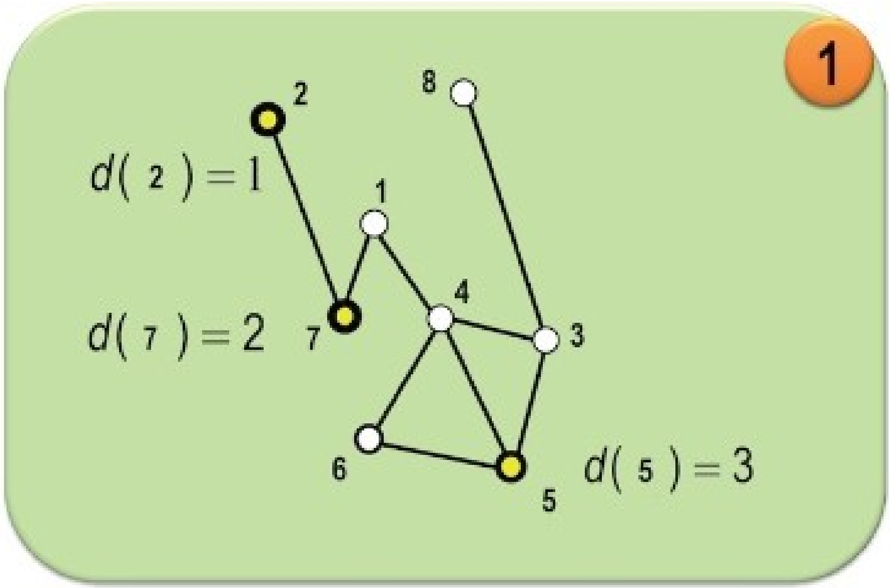
- Grau de um vértice
  - O grau d(i) de um vértice i em um **grafo não direcionado** é igual ao número de arestas incidentes a i.
  - O grau de entrada d(i) de um vértice i em um **grafo direcionado** é igual ao número de arestas que entram em i.

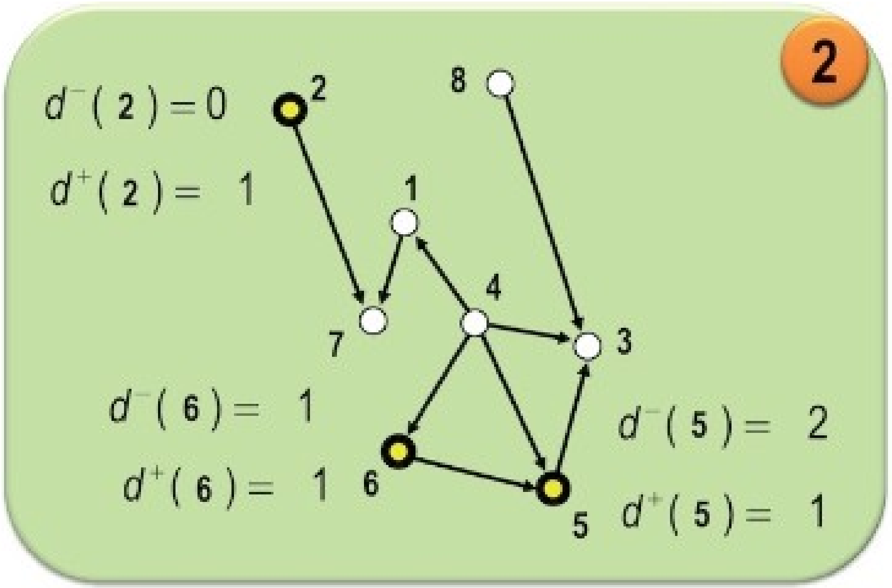
Terminologia

- Grau de um vértice
  - O grau d(i) de um vértice i em um **grafo não direcionado** é igual ao número de arestas incidentes a i.
  - O grau de entrada d(i) de um vértice i em um **grafo direcionado** é igual ao número de arestas que entram em i.
  - O grau de saída d(i) de um vértice i em um **grafo direcionado** é igual ao número de arestas que saem de i.

Terminologia

- Grau de um vértice





Terminologia

Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G.

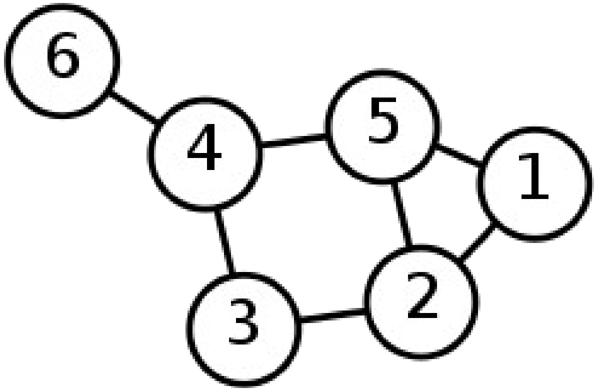
$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$

Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$

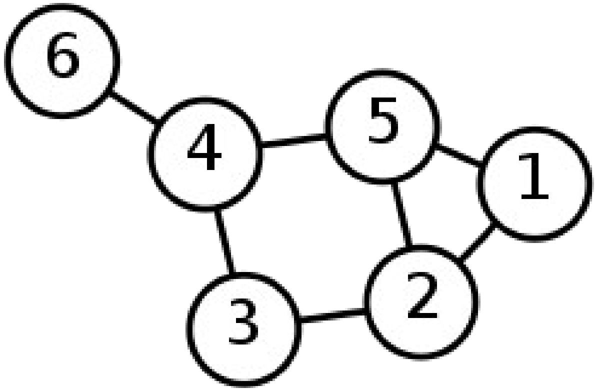


Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$



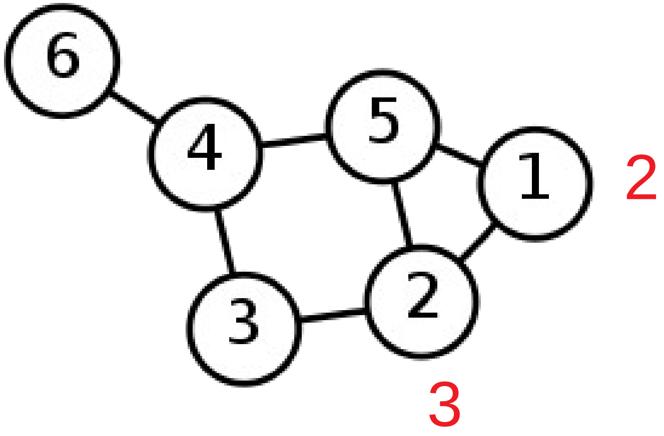
2

Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$

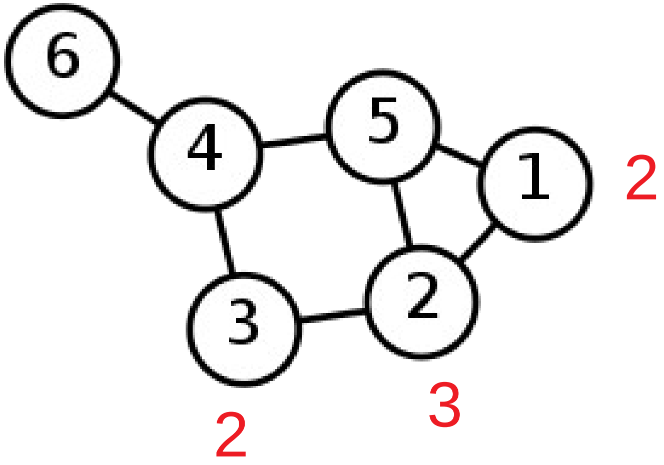


Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$

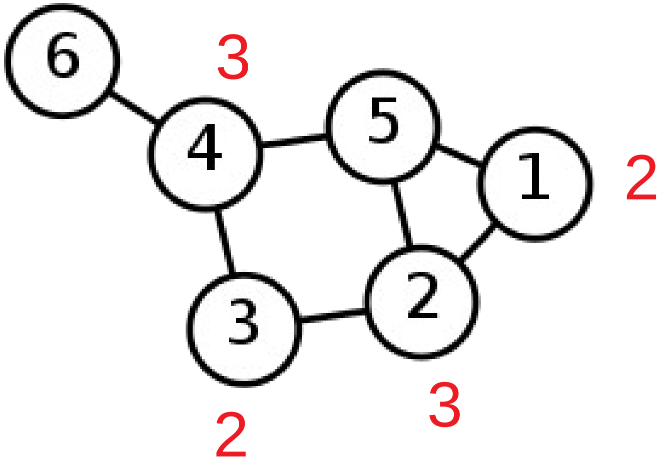


Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$

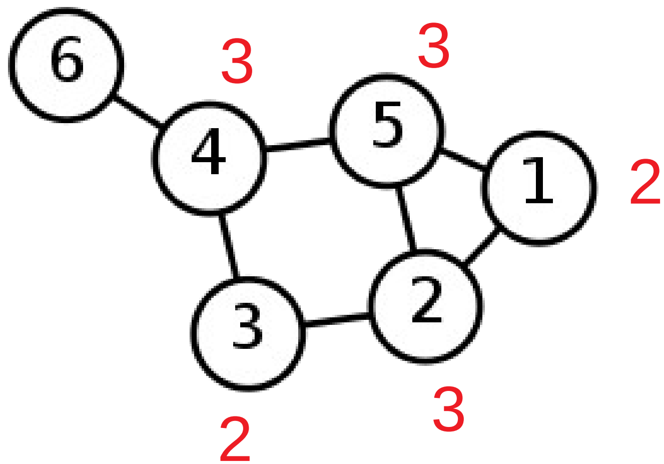


Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$

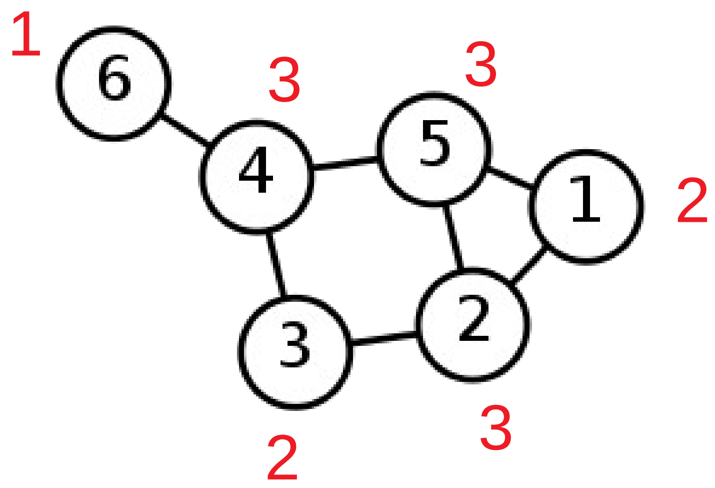


Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$

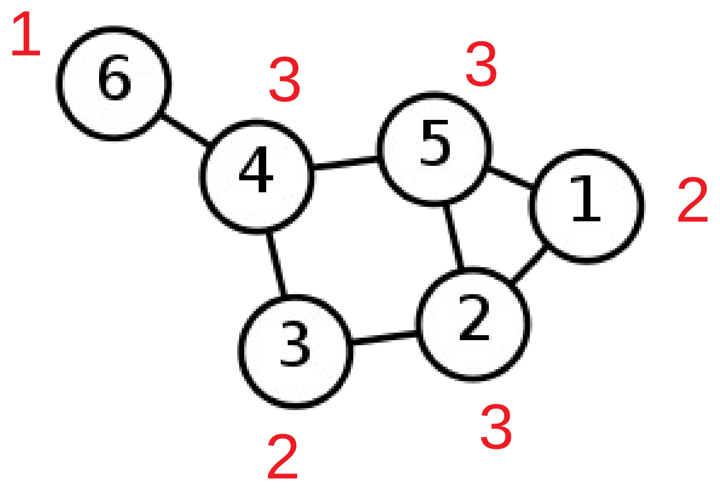


Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$



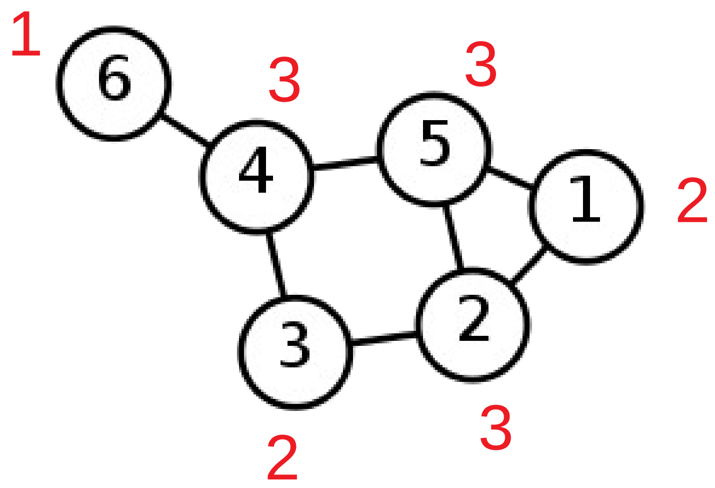
A soma será:

Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$



A soma será:

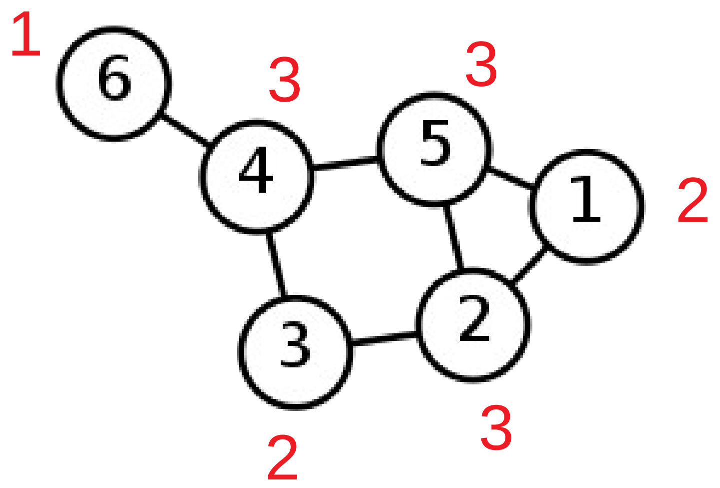
2 + 3 + 2 + 3 + 3 + 1 = 14

Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$



A soma será:

2 + 3 + 2 + 3 + 3 + 1 = 14

onde 14 é o **dobro** de 7 (arestas)

Terminologia

- Corolário:
  - O número de vértices de grau ímpar em GND é par.

Terminologia

Terminologia

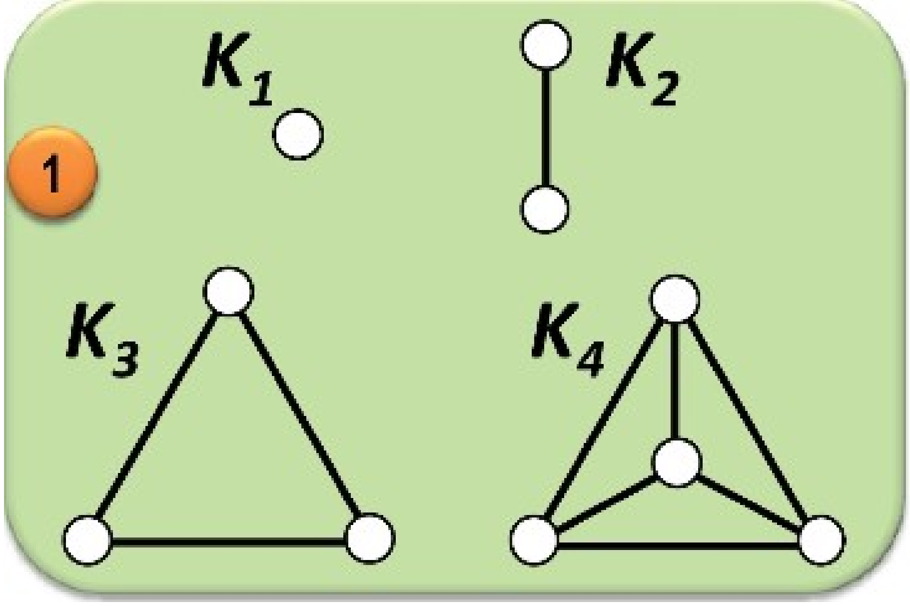
- Grafo completo

Terminologia

- Grafo completo
  - Um grafo completo com n vértices, denominado K_n, é um grafo simples contendo exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.

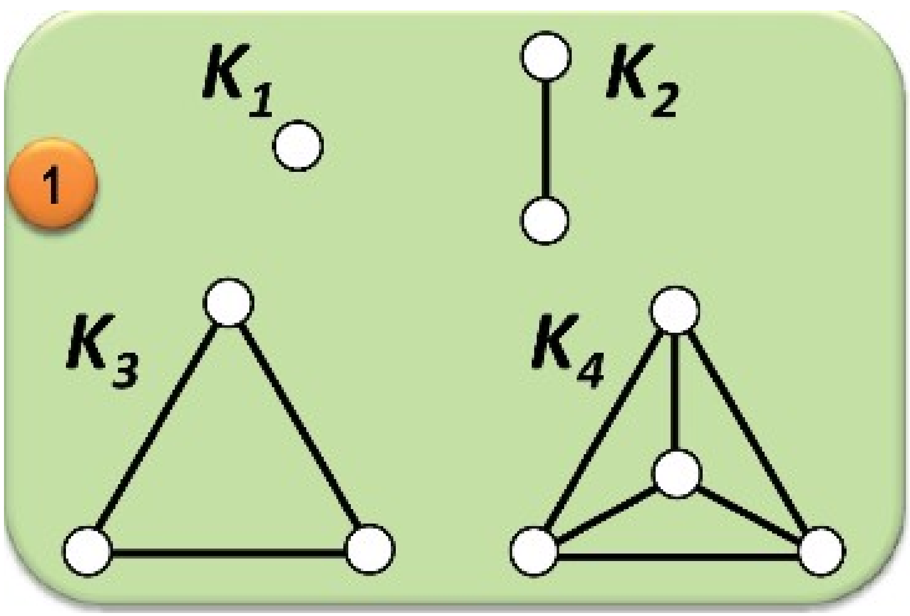
Terminologia

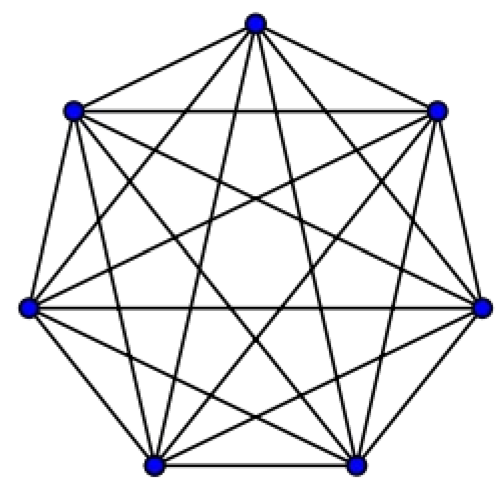
- Grafo completo
  - Um grafo completo com n vértices, denominado K_n, é um grafo simples contendo exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.



Terminologia

- Grafo completo
  - Um grafo completo com n vértices, denominado K_n, é um grafo simples contendo exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.





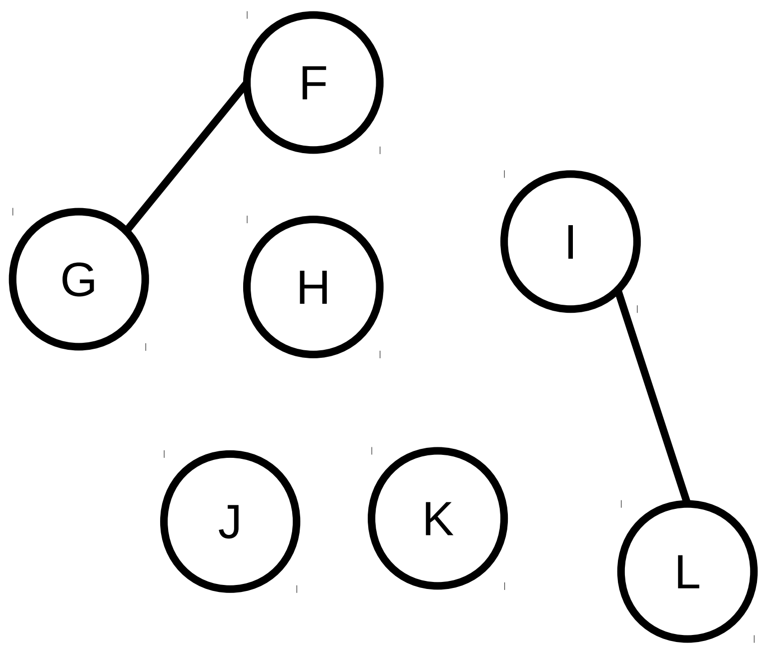
Terminologia

Terminologia

- Grafo **esparso** possui poucas arestas.

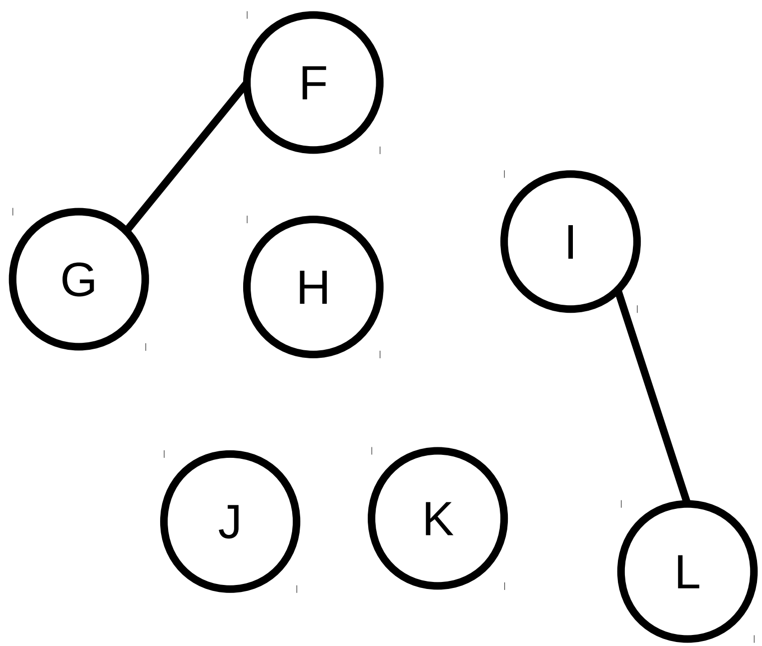
Terminologia

- Grafo **esparso** possui poucas arestas.



Terminologia

- Grafo **esparso** possui poucas arestas.
- Geralmente se |A| < |V| x |log V|.



Terminologia

Terminologia

- Grafo regular

Terminologia

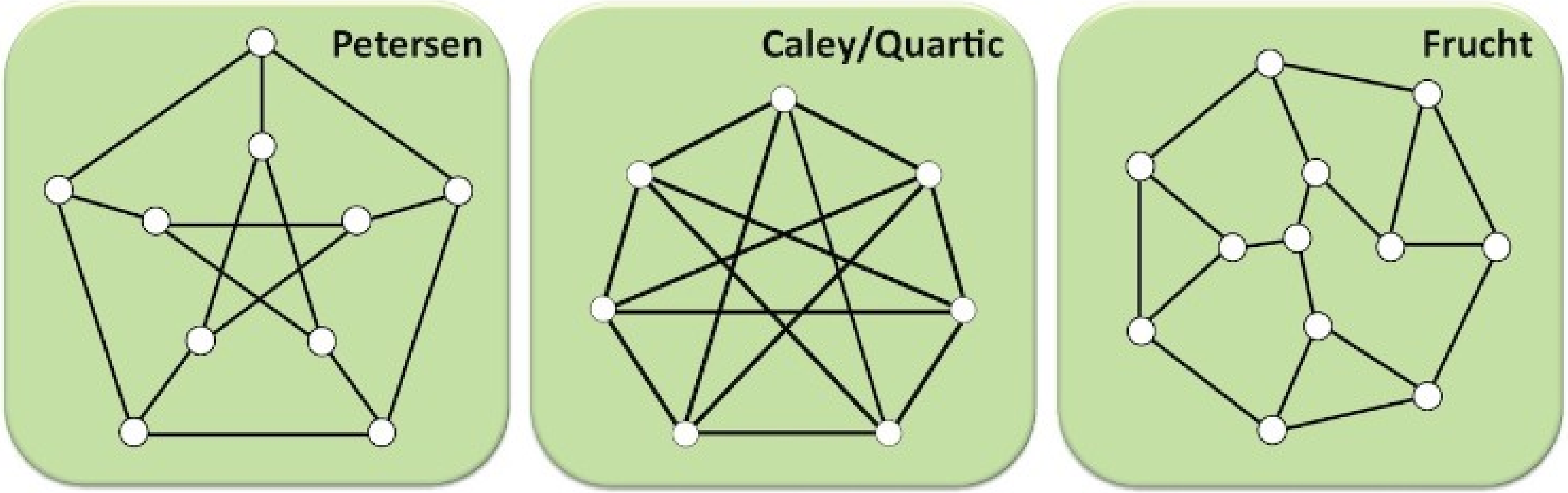
- Grafo regular
  - Grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau.

Terminologia

- Grafo regular
  - Grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau.
  - Obs.: qualquer grafo completo é regular.

Terminologia

- Grafo regular
  - Grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau.
  - Obs.: qualquer grafo completo é regular.



Terminologia

Terminologia

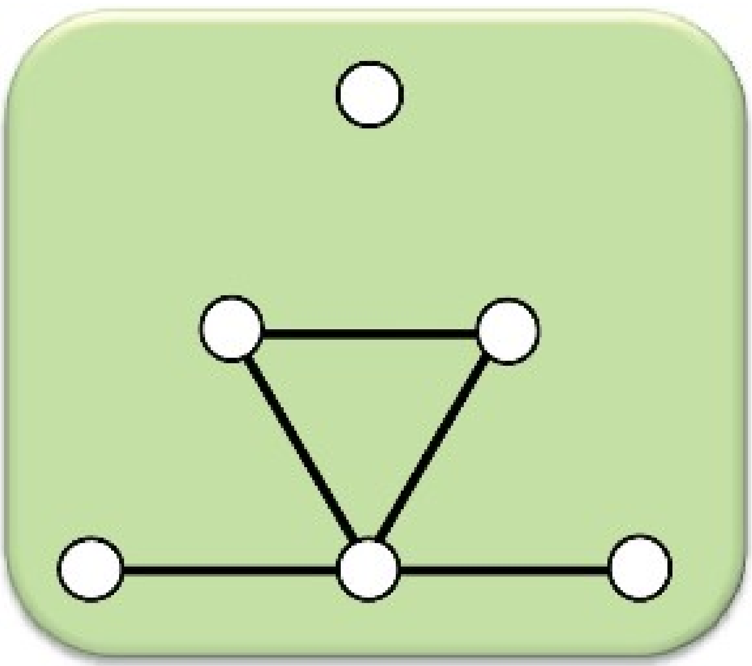
- Vértice isolado

Terminologia

- Vértice isolado
  - Vértice com nenhuma aresta incidente.

Terminologia

- Vértice isolado
  - Vértice com nenhuma aresta incidente.



Terminologia

Terminologia

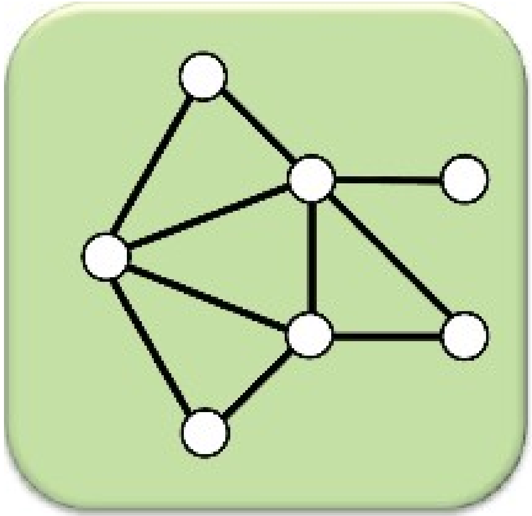
- Grafo conexo

Terminologia

- Grafo conexo
  - Para todo par de vértices i e j de G existe pelo menos um caminho entre i e j.

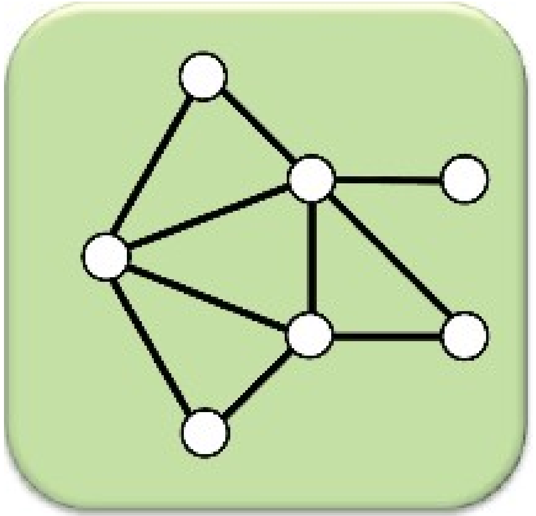
Terminologia

- Grafo conexo
  - Para todo par de vértices i e j de G existe pelo menos um caminho entre i e j.



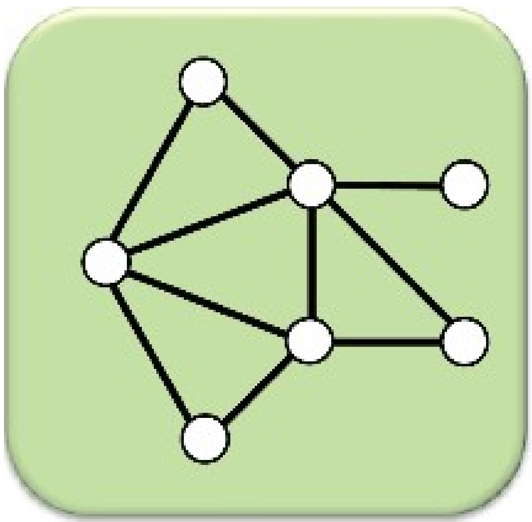
Terminologia

- Grafo conexo
  - Para todo par de vértices i e j de G existe pelo menos um caminho entre i e j.
- Grafo desconexo



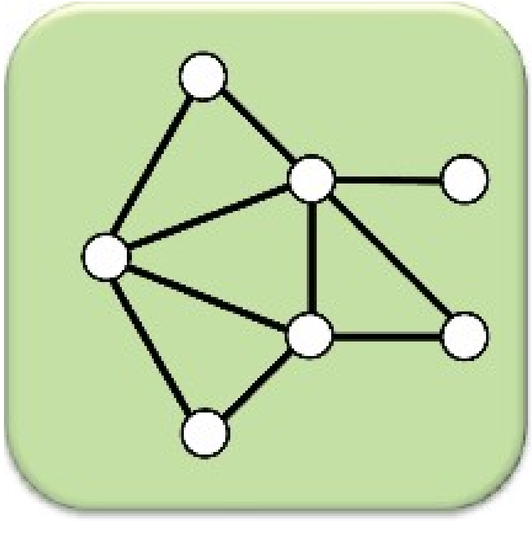
Terminologia

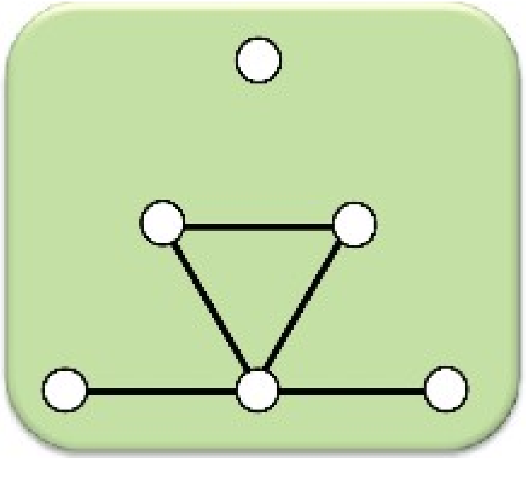
- Grafo conexo
  - Para todo par de vértices i e j de G existe pelo menos um caminho entre i e j.
- Grafo desconexo
  - Consiste de 2 ou mais grafos conexos, chamados componentes.



Terminologia

- Grafo conexo
  - Para todo par de vértices i e j de G existe pelo menos um caminho entre i e j.
- Grafo desconexo
  - Consiste de 2 ou mais grafos conexos, chamados componentes.





Terminologia

Terminologia

- Grafo complemento

Terminologia

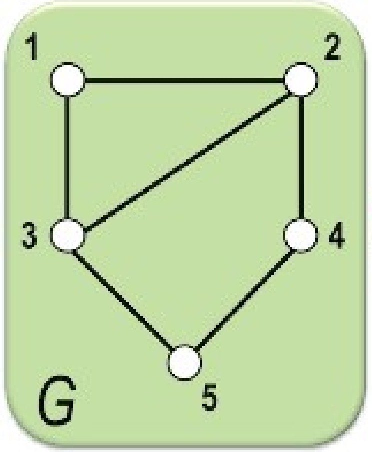
- Grafo complemento
  - Seja G = (V,E) um grafo simples não direcionado, o complemento de G, $\overline{G}$, é um grafo formado da seguinte maneira:

Terminologia

- Grafo complemento
  - Seja G = (V,E) um grafo simples não direcionado, o complemento de G, $\overline{G}$, é um grafo formado da seguinte maneira:
    - As arestas de $\overline{G}$ são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo.

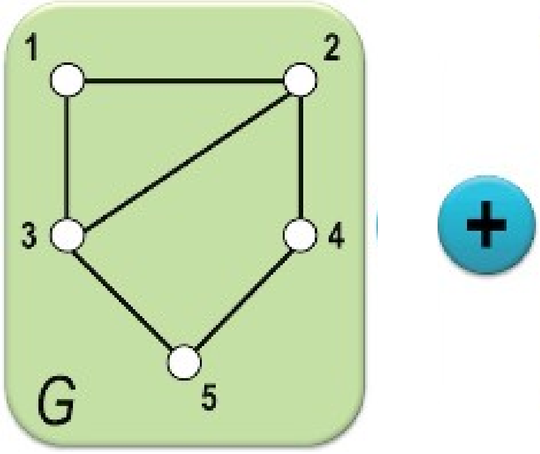
Terminologia

- Grafo complemento
  - Seja G = (V,E) um grafo simples não direcionado, o complemento de G, $\overline{G}$, é um grafo formado da seguinte maneira:
    - As arestas de $\overline{G}$ são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo.



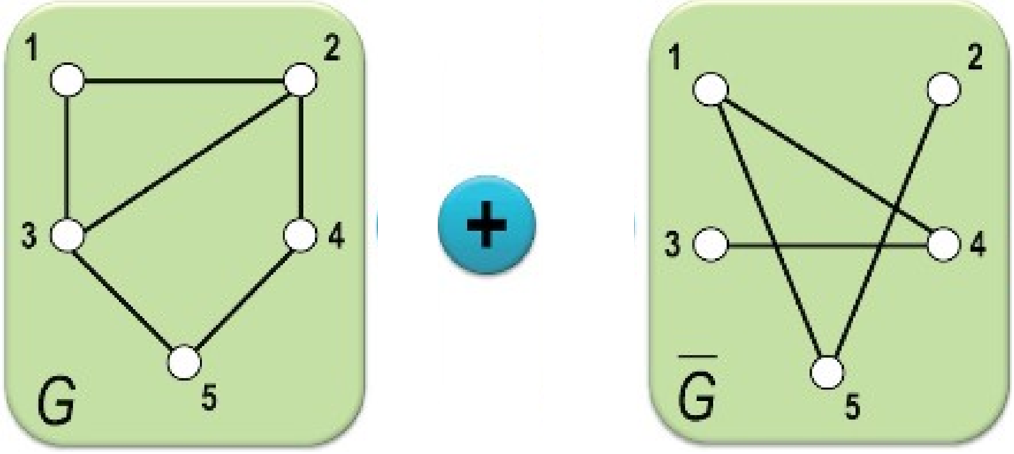
Terminologia

- Grafo complemento
  - Seja G = (V,E) um grafo simples não direcionado, o complemento de G, $\overline{G}$, é um grafo formado da seguinte maneira:
    - As arestas de $\overline{G}$ são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo.



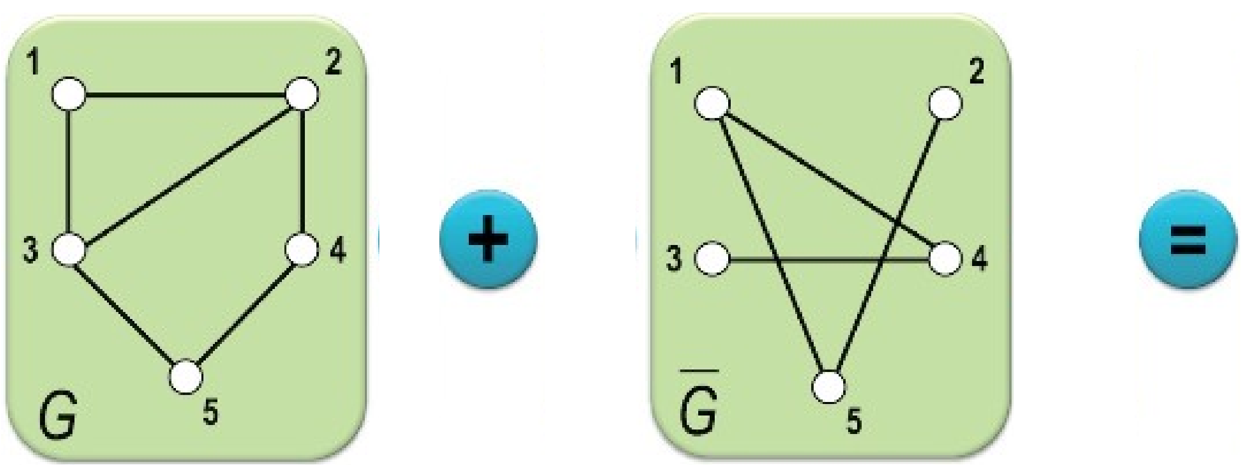
Terminologia

- Grafo complemento
  - Seja G = (V,E) um grafo simples não direcionado, o complemento de G, $\overline{G}$, é um grafo formado da seguinte maneira:
    - As arestas de $\overline{G}$ são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo.



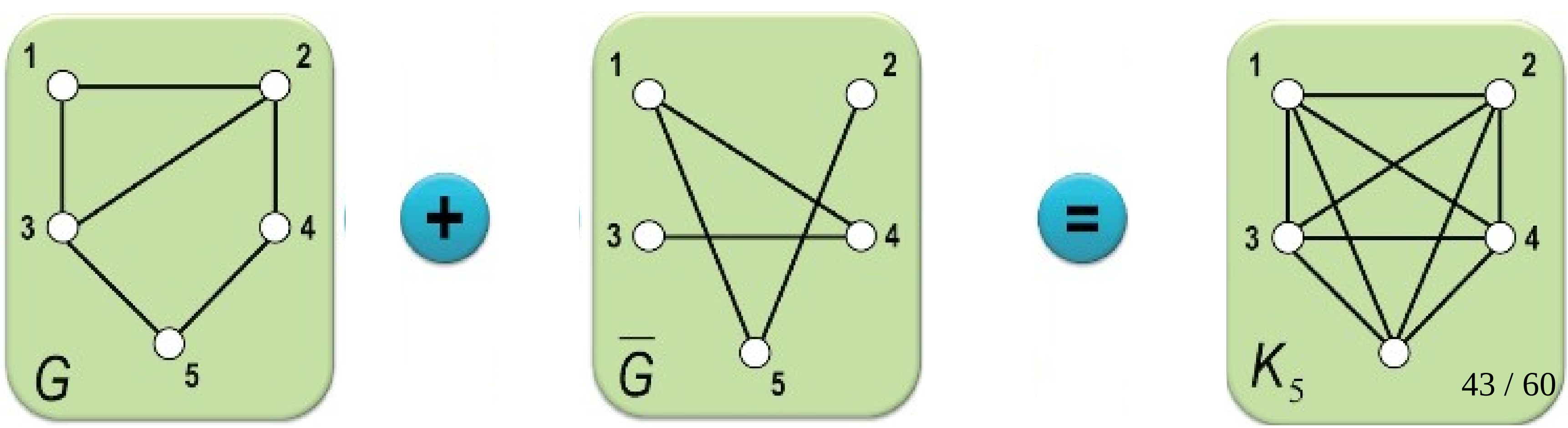
Terminologia

- Grafo complemento
  - Seja G = (V,E) um grafo simples não direcionado, o complemento de G, $\overline{G}$, é um grafo formado da seguinte maneira:
    - As arestas de $\overline{G}$ são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo.



Terminologia

- Grafo complemento
  - Seja G = (V,E) um grafo simples não direcionado, o complemento de G, $\overline{G}$, é um grafo formado da seguinte maneira:
    - As arestas de $\overline{G}$ são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo.



Terminologia

Terminologia

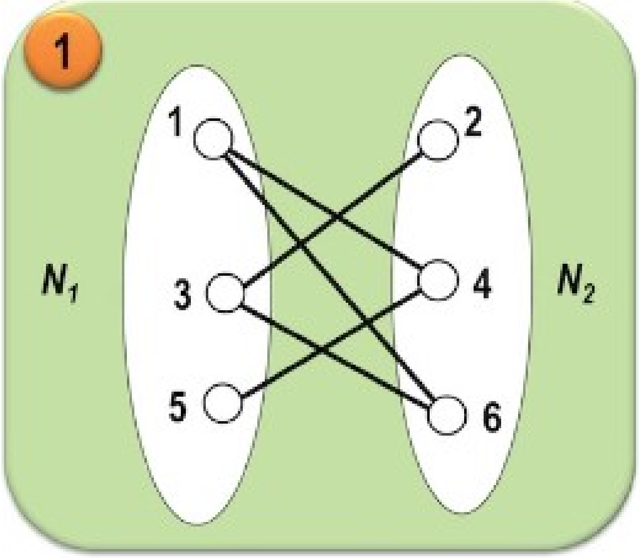
- Grafo bipartido

Terminologia

- Grafo bipartido
  - Um grafo é bipartido se o conjunto de vértices V pode ser particionado em 2 subconjuntos V_1 e V_2 tal que todas as arestas do grafo são incidentes a um vértice de V_1 e a um vértice de V_2.

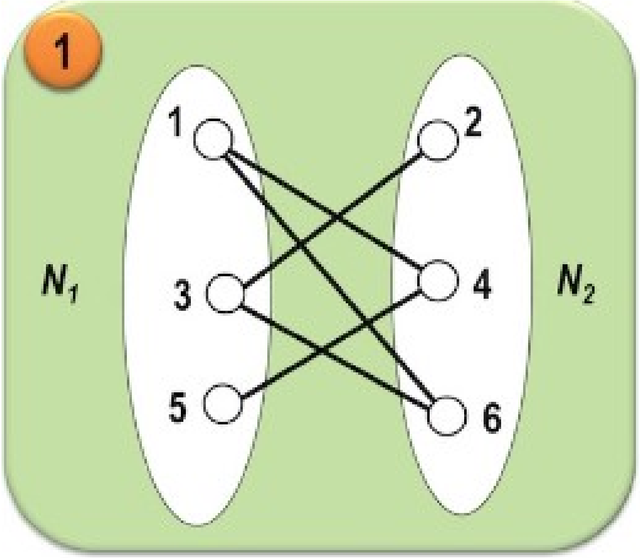
Terminologia

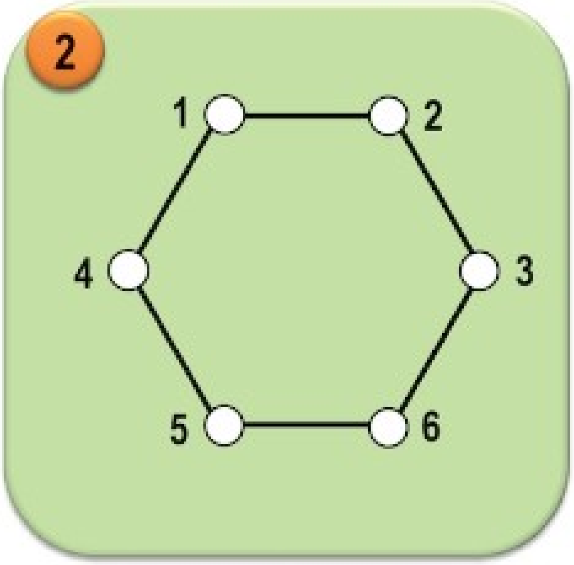
- Grafo bipartido
  - Um grafo é bipartido se o conjunto de vértices V pode ser particionado em 2 subconjuntos V_1 e V_2 tal que todas as arestas do grafo são incidentes a um vértice de V_1 e a um vértice de V_2.



Terminologia

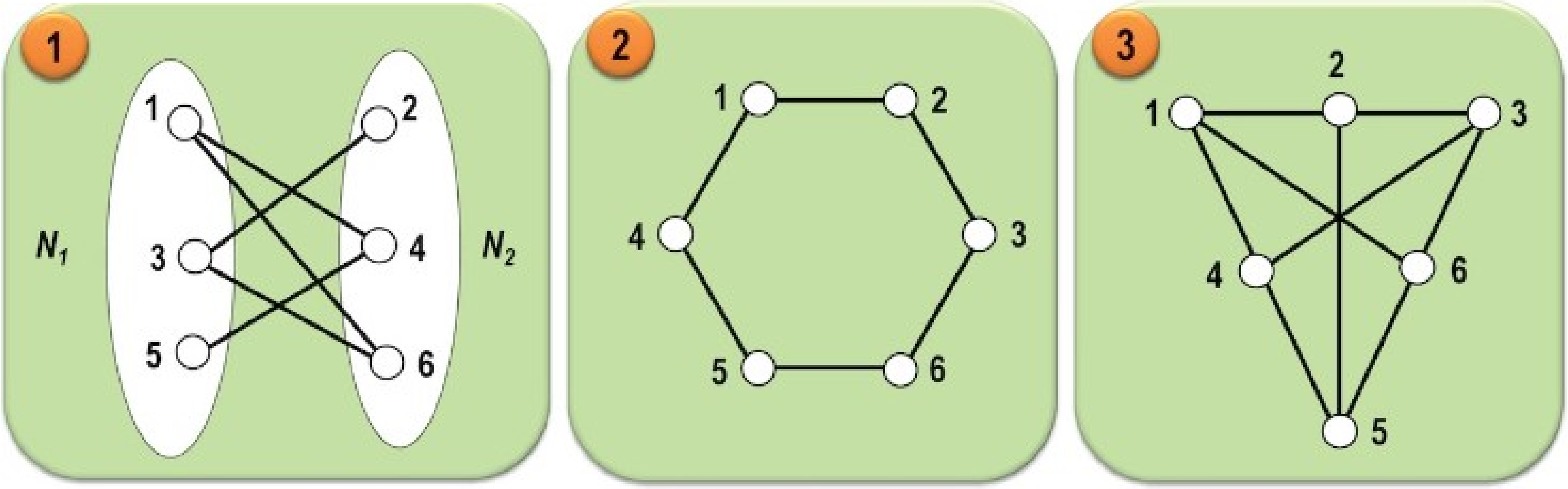
- Grafo bipartido
  - Um grafo é bipartido se o conjunto de vértices V pode ser particionado em 2 subconjuntos V_1 e V_2 tal que todas as arestas do grafo são incidentes a um vértice de V_1 e a um vértice de V_2.





Terminologia

- Grafo bipartido
  - Um grafo é bipartido se o conjunto de vértices V pode ser particionado em 2 subconjuntos V_1 e V_2 tal que todas as arestas do grafo são incidentes a um vértice de V_1 e a um vértice de V_2.



Terminologia

Terminologia

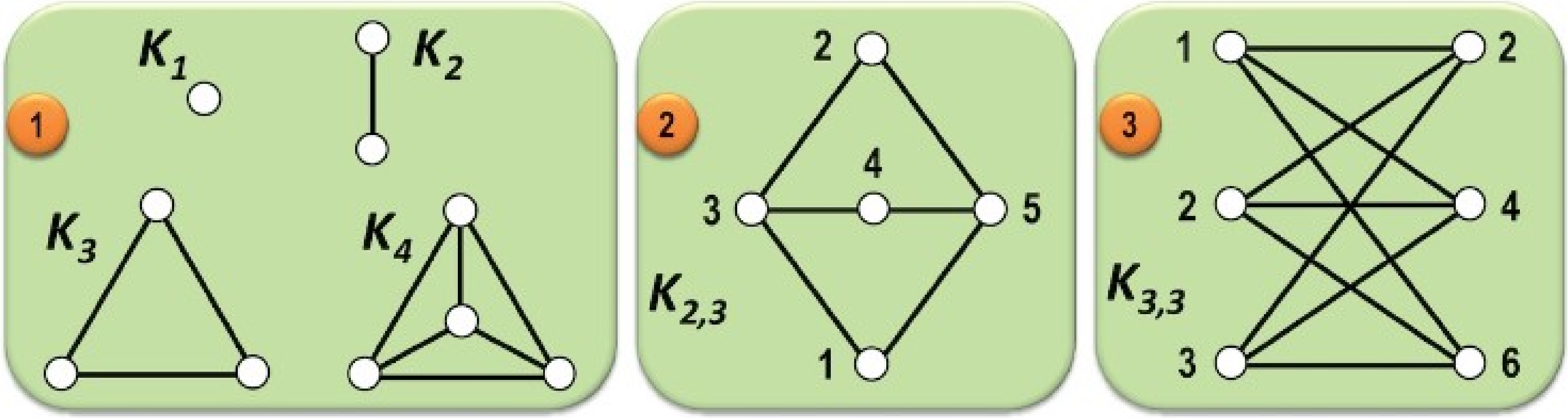
- Grafo bipartido completo

Terminologia

- Grafo bipartido completo
  - Um grafo bipartido é completo (K|v1|,|v2|) se cada vértice do subconjunto V_1 é adjacente a todos os vértices do subconjunto V_2 e vice-versa.

Terminologia

- Grafo bipartido completo
  - Um grafo bipartido é completo (K|v1|,|v2|) se cada vértice do subconjunto V_1 é adjacente a todos os vértices do subconjunto V_2 e vice-versa.



Exemplo de grafos completos (1) e bipartidos completos (2 e 3).

REPRESENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Representação

Representação

- Para manipular grafos, nós necessitamos representá-los de alguma forma.

Representação

- Para manipular grafos, nós necessitamos representá-los de alguma forma.
- Existem várias maneiras de representar grafos.

Representação

- Para manipular grafos, nós necessitamos representá-los de alguma forma.
- Existem várias maneiras de representar grafos.
- Cada forma apresenta vantagens e desvantagens.

Representação

- Para manipular grafos, nós necessitamos representá-los de alguma forma.
- Existem várias maneiras de representar grafos.
- Cada forma apresenta vantagens e desvantagens.
- Duas formas principais:

Representação

- Para manipular grafos, nós necessitamos representá-los de alguma forma.
- Existem várias maneiras de representar grafos.
- Cada forma apresenta vantagens e desvantagens.
- Duas formas principais:
  - Matriz de adjacência.

Representação

- Para manipular grafos, nós necessitamos representá-los de alguma forma.
- Existem várias maneiras de representar grafos.
- Cada forma apresenta vantagens e desvantagens.
- Duas formas principais:
  - Matriz de adjacência.
  - Lista de adjacência.

Representação Computacional

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências
  - Matriz A_{nxn}, sendo que:

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências
  - Matriz A_{nxn}, sendo que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe a aresta/arco } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

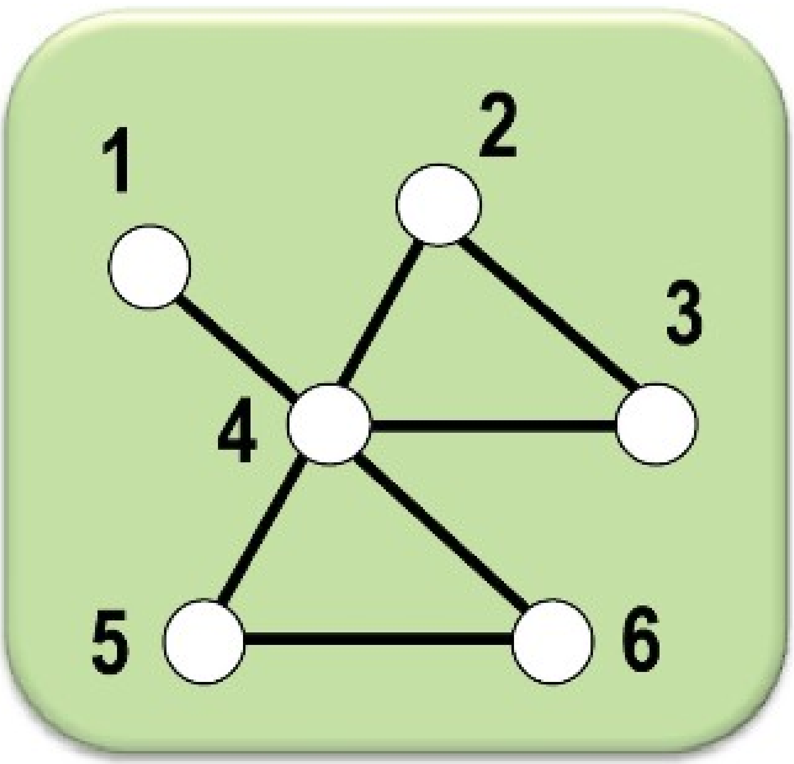
Representação Computacional

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências – Grafo Não Direcionado

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências – Grafo Não Direcionado



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

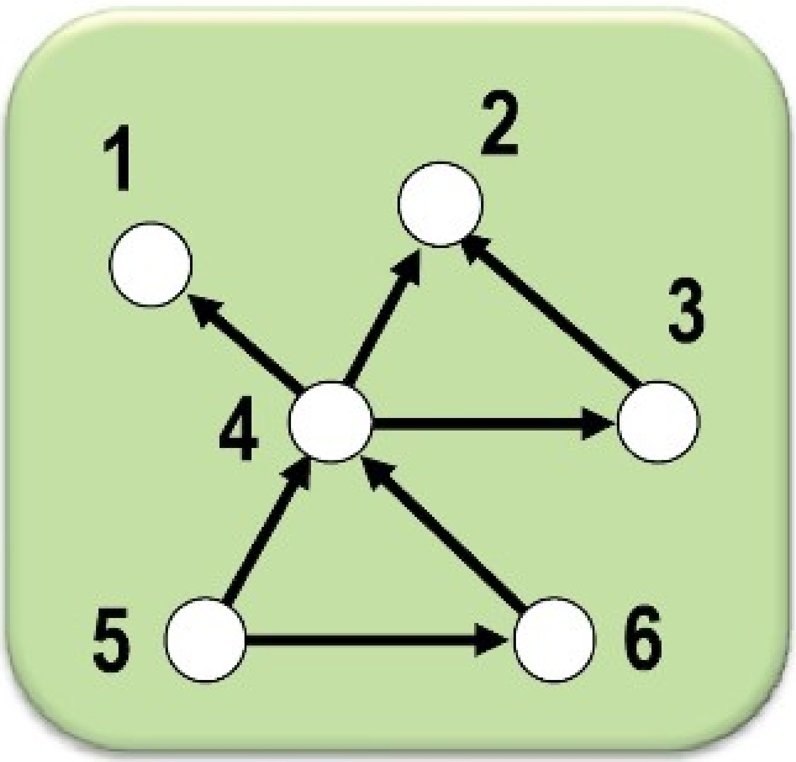
Representação Computacional

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências – Grafo Direcionado

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências – Grafo Direcionado



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Representação Computacional

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências
  - Propriedades:

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências
  - Propriedades:
    - Simétrica para grafos não direcionados.

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências
  - Propriedades:
    - Simétrica para grafos não direcionados.
    - Consulta existência de uma aresta/arco com um acesso à memória: O(1).

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências
  - Propriedades:
    - Simétrica para grafos não direcionados.
    - Consulta existência de uma aresta/arco com um acesso à memória: O(1).
    - Ocupa $\Theta(n^2)$ de espaço mesmo para grafos esparsos.

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências
  - Propriedades:
    - Simétrica para grafos não direcionados.
    - Consulta existência de uma aresta/arco com um acesso à memória: O(1).
    - Ocupa $\Theta(n^2)$ de espaço mesmo para grafos esparsos.
    - Portanto, essa é uma boa representação para <u>grafos densos</u>.

Representação Computacional

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências

Representação Computacional

- Matriz de Adjacências

Representação Computacional

Representação Computacional

- Listas de Adjacências:

Representação Computacional

- Listas de Adjacências:
  - Usa n listas, uma para cada vértice.

Representação Computacional

- Listas de Adjacências:
  - Usa n listas, uma para cada vértice.
  - Lista de v_i contém todos os vértices adjacentes a ele.

Representação Computacional

- Listas de Adjacências:
  - Usa n listas, uma para cada vértice.
  - Lista de v_i contém todos os vértices adjacentes a ele.
- Propriedades:

Representação Computacional

- Listas de Adjacências:
  - Usa n listas, uma para cada vértice.
  - Lista de v_i contém todos os vértices adjacentes a ele.
- Propriedades:
  - Ocupa menos memória: O(m);

Representação Computacional

- Listas de Adjacências:
  - Usa n listas, uma para cada vértice.
  - Lista de v_i contém todos os vértices adjacentes a ele.
- Propriedades:
  - Ocupa menos memória: O(m);
  - No entanto, a complexidade da operação de determinar uma adjacência é limitada por O(n).

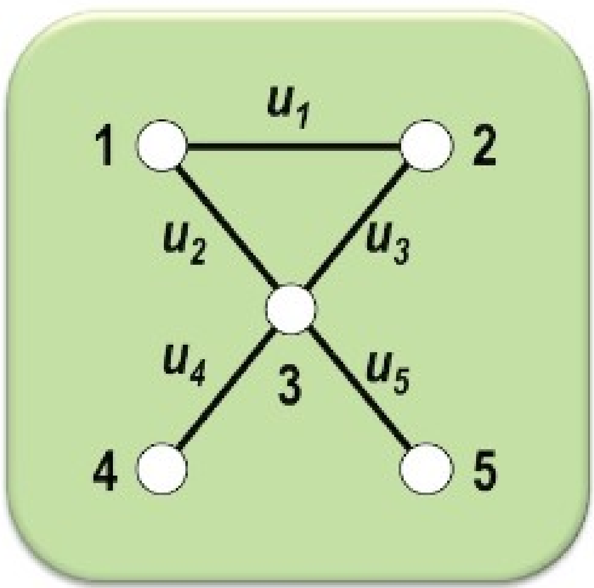
Representação Computacional

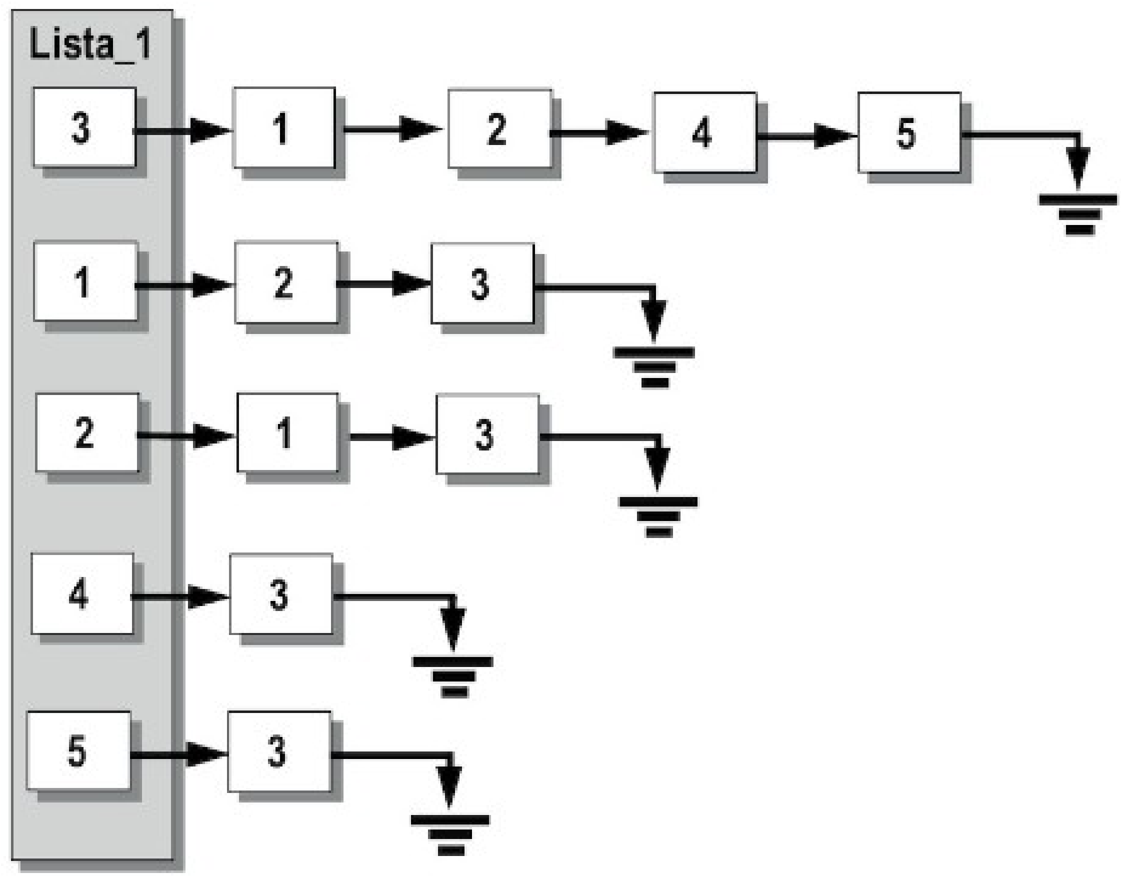
Representação Computacional

- Listas de Adjacências – Grafo Não Direcionado

Representação Computacional

- Listas de Adjacências – Grafo Não Direcionado





Exercícios

Exercícios

- Determine o número de vértices para os seguintes grafos:
  - G tem 9 arestas e todos os vértices têm grau 3;
  - G é regular com 15 arestas;
  - G tem 10 arestas com 2 vértices de grau 4 e todos os outros degrau 3.
- Dê um exemplo de grafo sem arestas paralelas com 8 vértices e com os seguintes graus: 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5 e 7.
- Dê exemplo de um grafo conexo sem *loops* com 7 vértices com os seguintes graus: 1, 1, 2, 3, 4, 5 e 7.

Exercícios

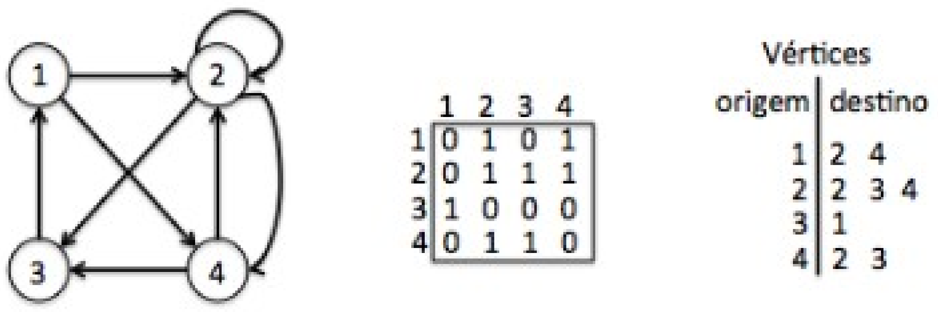
- [POSCOMP] Sobre grafos, assinale a alternativa correta.
  - A) Um grafo ponderado é um grafo não direcionado em que todos os pares de vértices são adjacentes, isto é, há arestas ligando todos os vértices entre si.
  - B) Todo grafo completo tem pesos associados às suas arestas.
  - C) Um caminho em um grafo é complexo se todos os vértices do caminho são distintos.
  - D) O grau de um vértice em um grafo não direcionado é o número de arestas que incidem nele.
  - E) Se existir um caminho c de x a y, então x é alcançável a partir de c via y.

Exercícios

- [POSCOMP] Assinale a alternativa correta sobre as definições básicas de grafos.
  - A) Um hipergrafo é um grafo direcionado em que cada aresta conecta dois vértices apenas.
  - B) Um grafo ponderado é um grafo não direcionado no qual todos os pares de vértices são adjacentes entre si.
  - C) Uma floresta é um grafo não direcionado acíclico e conectado.
  - D) Uma árvore livre é um grafo não direcionado acíclico, podendo ou não ser conectado.
  - E) Um grafo direcionado é fortemente conectado se cada dois vértices quaisquer forem alcançáveis a partir um do outro.

Exercícios

- [POSCOMP] Em relação ao grafo da Figura (a), as Figuras (b) e (c) representam, respectivamente:



(a) (b) (c)

  - A) matriz de arestas e lista de incidências.
  - B) matriz de adjacências e lista de adjacências.
  - C) matriz de conexões e lista de arestas.
  - D) matriz de incidências e lista de vértices.
  - E) matriz de vértices e lista de conexões.

Exercícios

- [POSCOMP] A respeito da representação de um grafo de n vértices e m arestas é correto dizer que:
  - (a) a representação sob a forma de matriz de adjacência exige espaço $\Omega(m2)$.
  - (b) a representação sob a forma de listas de adjacência permite verificar a existência de uma aresta ligando dois vértices dados em tempo $O(1)$.
  - (c) a representação sob a forma de matriz de adjacência não permite verificar a existência de uma aresta ligando dois vértices dados em tempo $O(1)$.
  - (d) a representação sob a forma de listas de adjacência exige espaço $\Omega(n + m)$.
  - (e) todas as alternativas estão corretas.