Algoritmos e Estruturas de Dados II

Grafos

Prof. Tiago Eugenio de Melo
tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

- As palavras com a fonte `Courier` indicam as palavras-reservadas da linguagem de programação.

Referências

- **Projetos de Algoritmos – com implementações em Pascal e C**. Nivio Ziviani. 2ª edição. Thomson, 2005.
- Material baseado nas notas de aula do professor Marco Antônio Moreira de Carvalho. Acessado em 01/10/2019: http://www.decom.ufop.br/marco/ensino/bcc204/material-das-aulas

REVISÃO

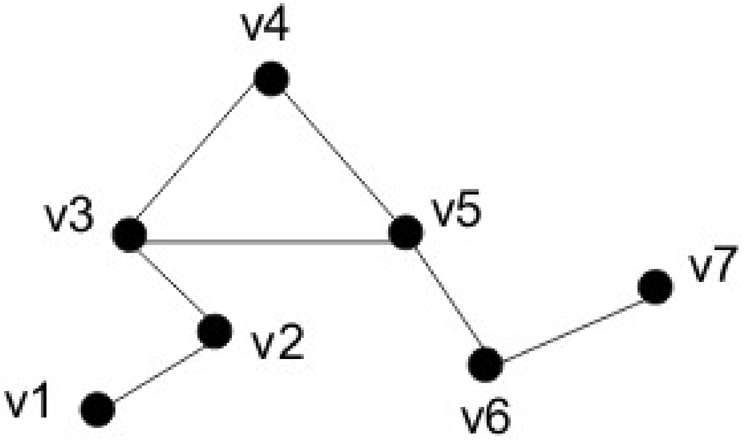
Revisão

Revisão

- Com relação ao grafo abaixo, responda:

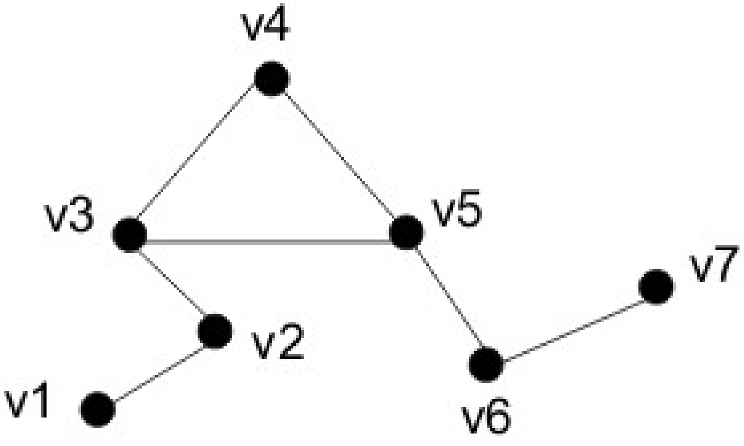
Revisão

- Com relação ao grafo abaixo, responda:



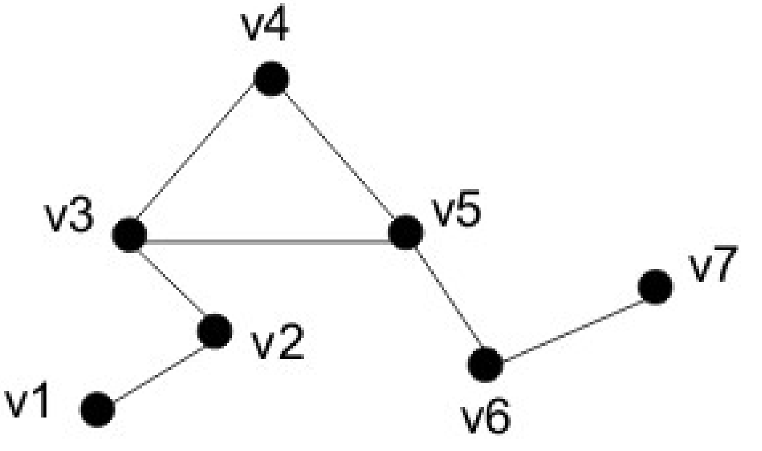
Revisão

- Com relação ao grafo abaixo, responda:
  - O grafo é simples?



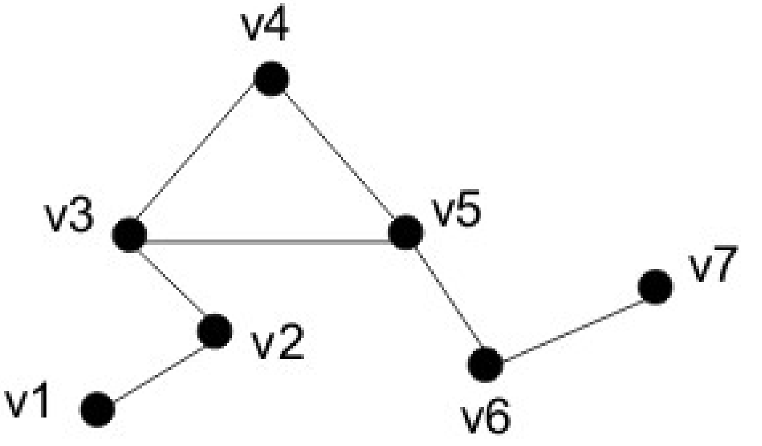
Revisão

- Com relação ao grafo abaixo, responda:
  - O grafo é simples?
  - Completo?



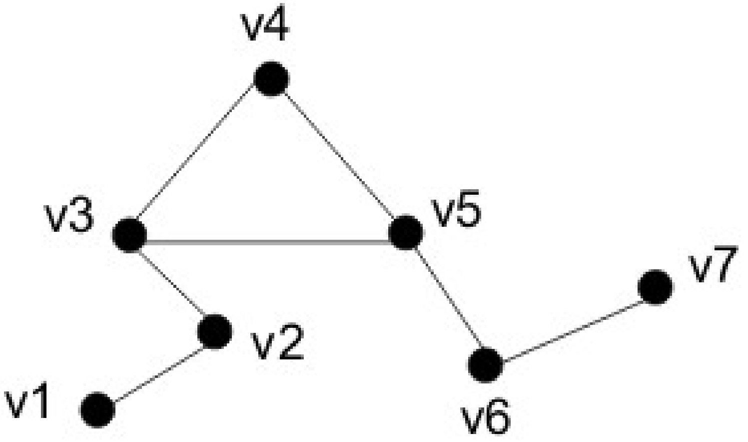
Revisão

- Com relação ao grafo abaixo, responda:
  - O grafo é simples?
  - Completo?
  - Regular?



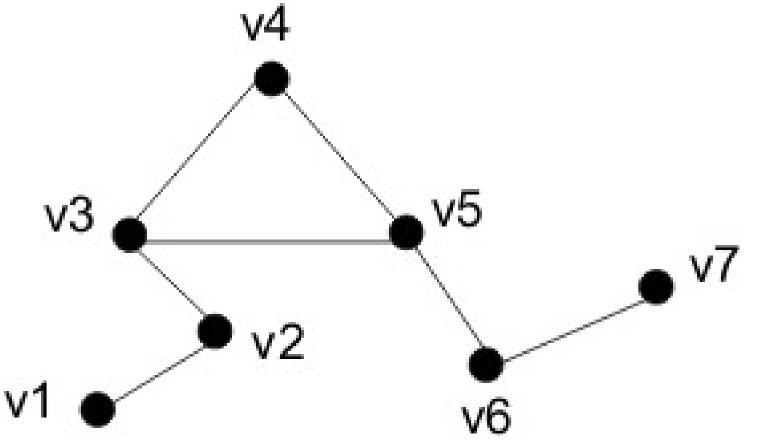
Revisão

- Com relação ao grafo abaixo, responda:
  - O grafo é simples?
  - Completo?
  - Regular?
  - Conexo?



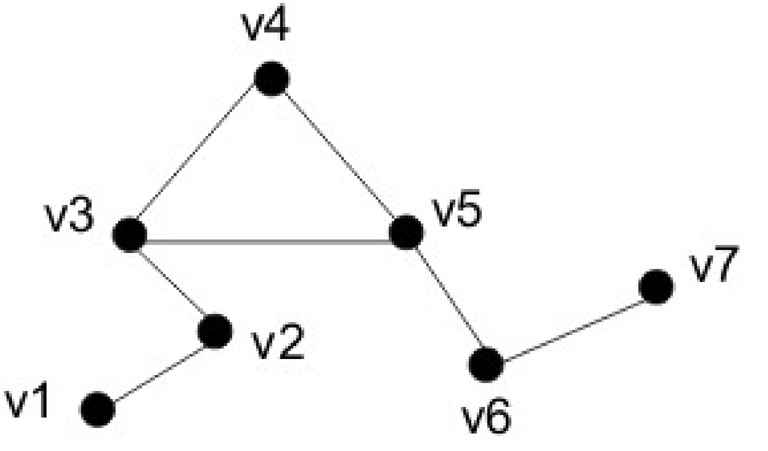
Revisão

- Com relação ao grafo abaixo, responda:
  - O grafo é simples?
  - Completo?
  - Regular?
  - Conexo?
  - Encontre dois caminhos diferentes entre V3 e V6.



Revisão

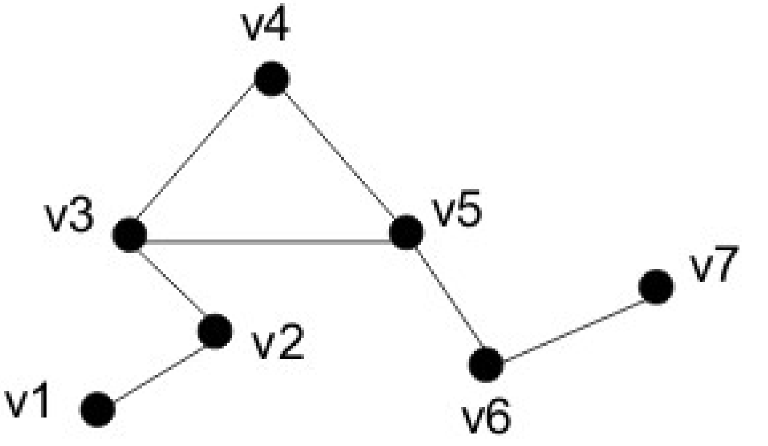
- Com relação ao grafo abaixo, responda:
  - O grafo é simples?
  - Completo?
  - Regular?
  - Conexo?



  - Encontre dois caminhos diferentes entre V3 e V6.
  - Indique uma aresta cuja remoção torna o grafo desconexo.

Revisão

- Com relação ao grafo abaixo, responda:
  - O grafo é simples?
  - Completo?
  - Regular?
  - Conexo?
  - Encontre dois caminhos diferentes entre V3 e V6.
  - Indique uma aresta cuja remoção torna o grafo desconexo.
  - Indique a representação deste grafo por listas de adjacências.



ISOMORFISMO

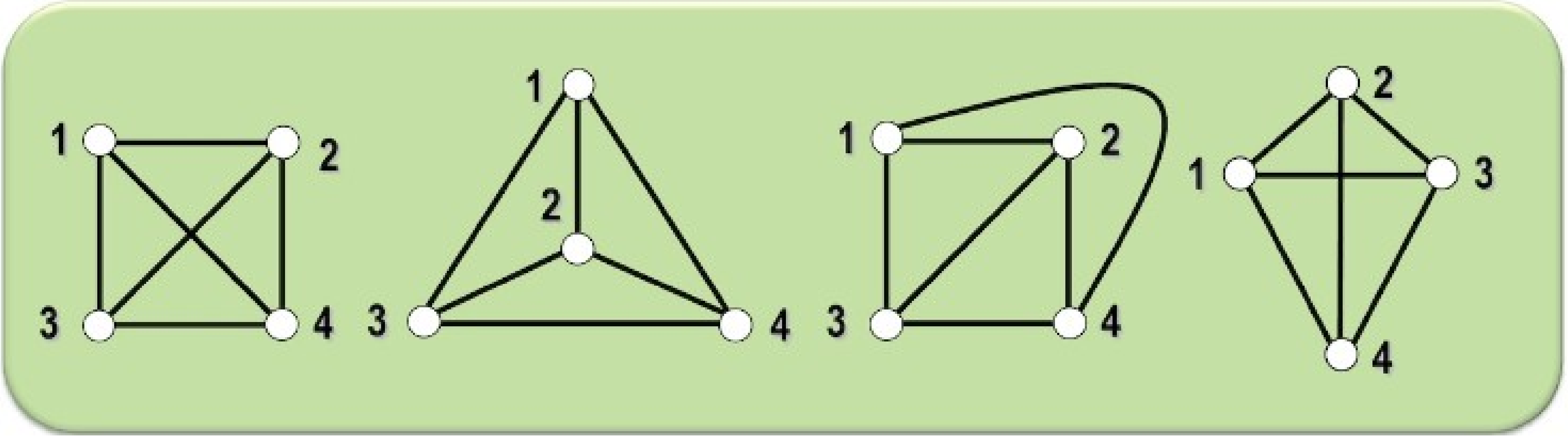
Isomorfismo

Isomorfismo

- Dois grafos G e H são considerados **isomorfos** se existir uma correspondência um-para-um entre seus vértices e entre suas arestas, de maneira que as relações de incidência sejam preservadas.

Isomorfismo

- Dois grafos G e H são considerados **isomorfos** se existir uma correspondência um-para-um entre seus vértices e entre suas arestas, de maneira que as relações de incidência sejam preservadas.



Isomorfismo

Isomorfismo

- Condições necessárias, mas não suficientes para o isomorfismo:

Isomorfismo

- Condições necessárias, mas não suficientes para o isomorfismo:
  - Mesmo número de vértices.

Isomorfismo

- Condições necessárias, mas não suficientes para o isomorfismo:
  - Mesmo número de vértices.
  - Mesmo número de arestas.

Isomorfismo

- Condições necessárias, mas não suficientes para o isomorfismo:
  - Mesmo número de vértices.
  - Mesmo número de arestas.
  - Mesmo número de componentes.

Isomorfismo

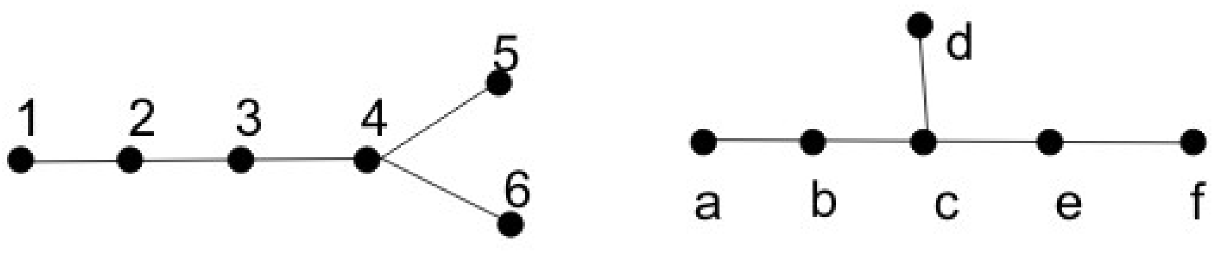
- Condições necessárias, mas não suficientes para o isomorfismo:
  - Mesmo número de vértices.
  - Mesmo número de arestas.
  - Mesmo número de componentes.
  - Mesmo número de vértices com o mesmo grau.

Isomorfismo

- Condições necessárias, mas não suficientes para o isomorfismo:
  - Mesmo número de vértices.
  - Mesmo número de arestas.
  - Mesmo número de componentes.
  - Mesmo número de vértices com o mesmo grau.
- Exemplos:

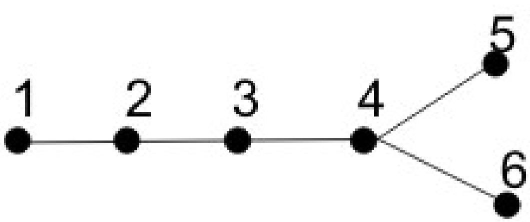
Isomorfismo

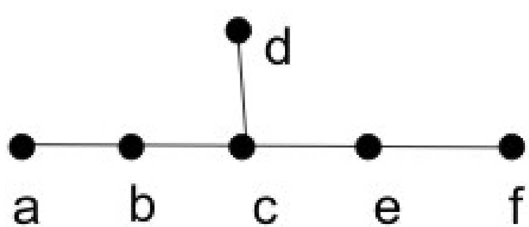
- Condições necessárias, mas não suficientes para o isomorfismo:
  - Mesmo número de vértices.
  - Mesmo número de arestas.
  - Mesmo número de componentes.
  - Mesmo número de vértices com o mesmo grau.
- Exemplos:



Isomorfismo

- Condições necessárias, mas não suficientes para o isomorfismo:
  - Mesmo número de vértices.
  - Mesmo número de arestas.
  - Mesmo número de componentes.
  - Mesmo número de vértices com o mesmo grau.
- Exemplos:





Não existem algoritmos comprovadamente eficientes para determinar se dois grafos são isomorfos.

Isomorfismo

1. Mais lento que polinomial, mas significativamente mais rápido que exponencial.
2. https://jeremykun.com/2015/11/12/a-quasipolynomial-time-algorithm-for-graph-isomorphism-the-details
3. Mais lento que o quasipolinomial, mas mais rápido que o exponencial.
4. http://people.cs.uchicago.edu/~laci/update.html

Isomorfismo

- Complexidade

1. Mais lento que polinomial, mas significativamente mais rápido que exponencial.
2. https://jeremykun.com/2015/11/12/a-quasipolynomial-time-algorithm-for-graph-isomorphism-the-details
3. Mais lento que o quasipolinomial, mas mais rápido que o exponencial.
4. http://people.cs.uchicago.edu/~laci/update.html

Isomorfismo

- Complexidade
  - O algoritmo intuitivo para testes de isomorfismo consiste em analisar as permutações de linhas e colunas de matrizes de equivalência, em busca de uma relação um-para-um, ou seja, O(n!).

1. Mais lento que polinomial, mas significativamente mais rápido que exponencial.
2. https://jeremykun.com/2015/11/12/a-quasipolynomial-time-algorithm-for-graph-isomorphism-the-details
3. Mais lento que o quasipolinomial, mas mais rápido que o exponencial.
4. http://people.cs.uchicago.edu/~laci/update.html

Isomorfismo

- Complexidade
  - O algoritmo intuitivo para testes de isomorfismo consiste em analisar as permutações de linhas e colunas de matrizes de equivalência, em busca de uma relação um-para-um, ou seja, O(n!).
  - Em outubro de 2015, Lászó Babai, da Universidade de Chicago, anunciou um algoritmo quasipolinomial[1] para o teste do isomorfismo![2]

1. Mais lento que polinomial, mas significativamente mais rápido que exponencial.
2. https://jeremykun.com/2015/11/12/a-quasipolynomial-time-algorithm-for-graph-isomorphism-the-details
3. Mais lento que o quasipolinomial, mas mais rápido que o exponencial.
4. http://people.cs.uchicago.edu/~laci/update.html

Isomorfismo

- Complexidade
  - O algoritmo intuitivo para testes de isomorfismo consiste em analisar as permutações de linhas e colunas de matrizes de equivalência, em busca de uma relação um-para-um, ou seja, O(n!).
  - Em outubro de 2015, Lászó Babai, da Universidade de Chicago, anunciou um algoritmo quasipolinomial[1] para o teste do isomorfismo![2]
  - Em 4 de outubro de 2017 foi descoberto um erro na prova, reclassificando o algoritmo como subexponencial[3].

1. Mais lento que polinomial, mas significativamente mais rápido que exponencial.
2. https://jeremykun.com/2015/11/12/a-quasipolynomial-time-algorithm-for-graph-isomorphism-the-details
3. Mais lento que o quasipolinomial, mas mais rápido que o exponencial.
4. http://people.cs.uchicago.edu/~laci/update.html

Isomorfismo

- Complexidade
  - O algoritmo intuitivo para testes de isomorfismo consiste em analisar as permutações de linhas e colunas de matrizes de equivalência, em busca de uma relação um-para-um, ou seja, O(n!).
  - Em outubro de 2015, Lászó Babai, da Universidade de Chicago, anunciou um algoritmo quasipolinomial[1] para o teste do isomorfismo![2]
  - Em 4 de outubro de 2017 foi descoberto um erro na prova, reclassificando o algoritmo como subexponencial[3].
  - Em 9 de janeiro de 2018, o erro da prova foi anunciado como contornado[4].

1. Mais lento que polinomial, mas significativamente mais rápido que exponencial.
2. https://jeremykun.com/2015/11/12/a-quasipolynomial-time-algorithm-for-graph-isomorphism-the-details
3. Mais lento que o quasipolinomial, mas mais rápido que o exponencial.
4. http://people.cs.uchicago.edu/~laci/update.html

Isomorfismo

Isomorfismo

- Algoritmo Básico:

Isomorfismo

- Algoritmo Básico:
  - Mesmo número de vértices.

Isomorfismo

- Algoritmo Básico:
  - Mesmo número de vértices.
  - Mesmo número de arestas.

Isomorfismo

- Algoritmo Básico:
  - Mesmo número de vértices.
  - Mesmo número de arestas.
  - Mesmo número de componentes.

Isomorfismo

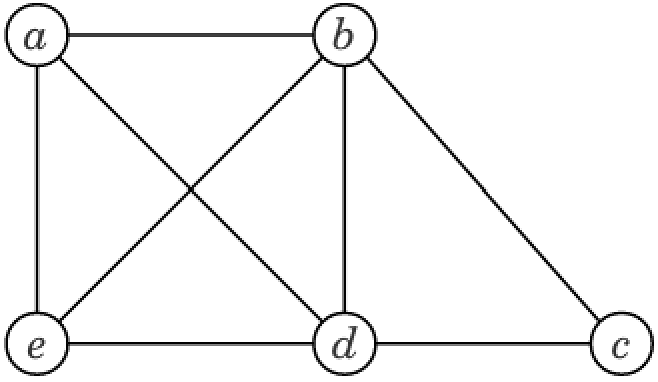
- Algoritmo Básico:
  - Mesmo número de vértices.
  - Mesmo número de arestas.
  - Mesmo número de componentes.
  - Mesmo número de vértices com o mesmo grau.

Isomorfismo

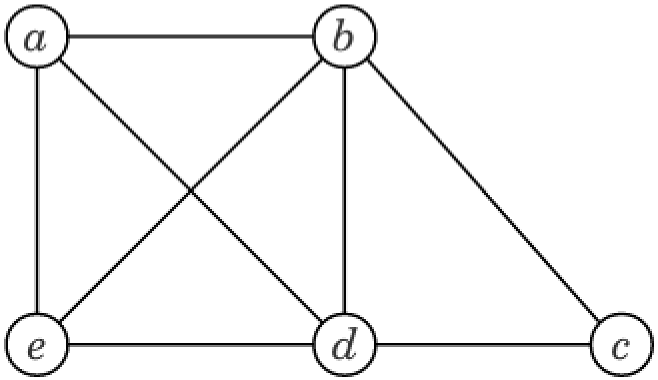
- Algoritmo Básico:
  - Mesmo número de vértices.
  - Mesmo número de arestas.
  - Mesmo número de componentes.
  - Mesmo número de vértices com o mesmo grau.
- Em seguida, efetuar a combinação das matrizes de adjacência dos grafos, verificando se são semelhantes.

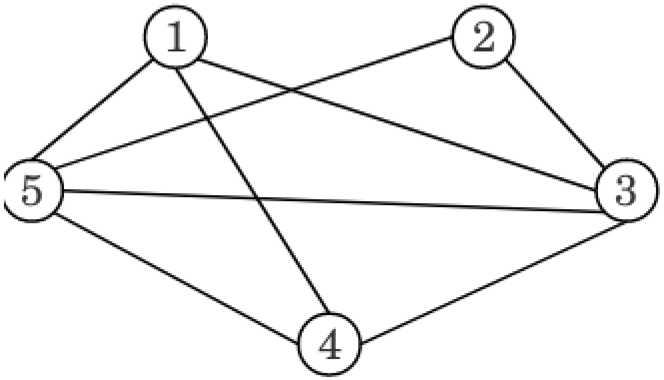
Isomorfismo e Matrizes de Adjacência

Isomorfismo e Matrizes de Adjacência

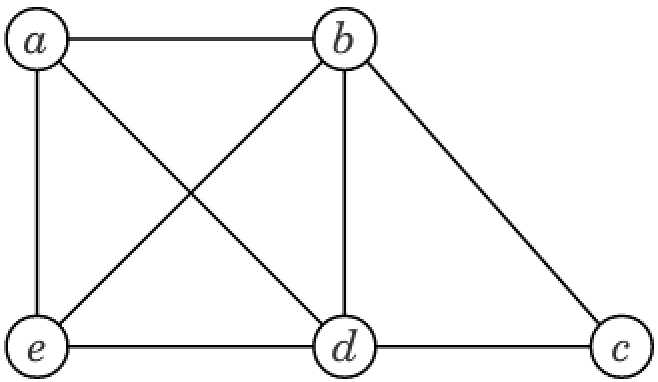


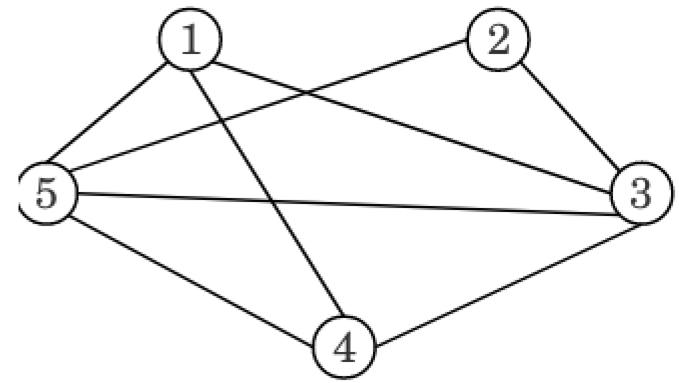
Isomorfismo e Matrizes de Adjacência



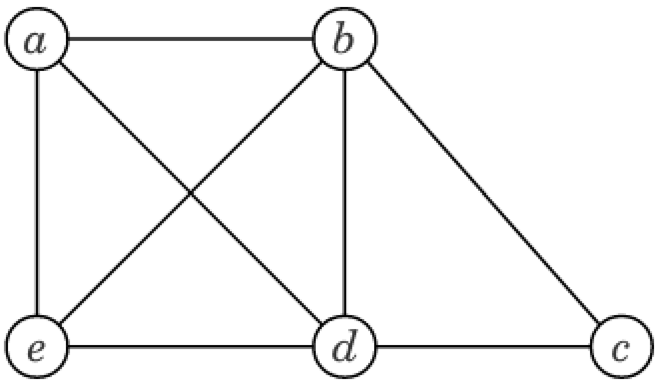


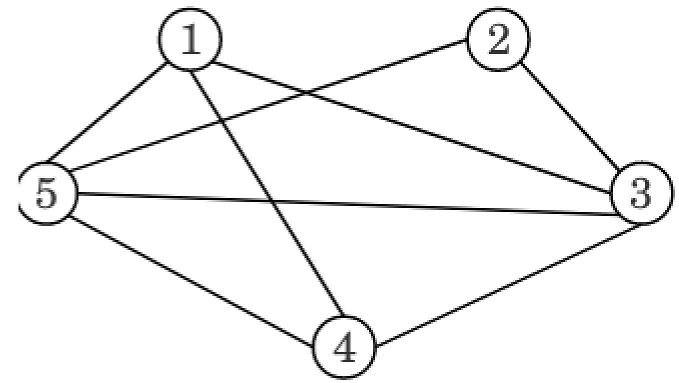
Isomorfismo e Matrizes de Adjacência



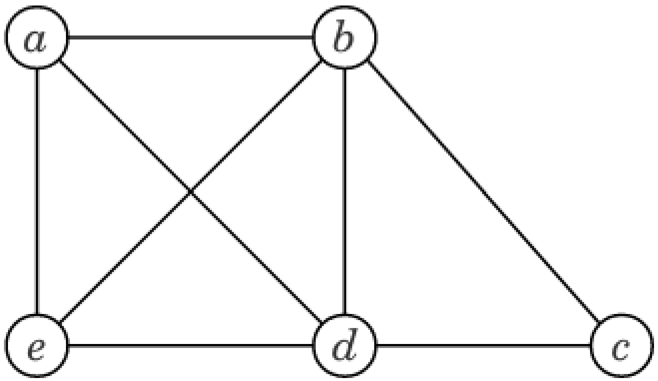


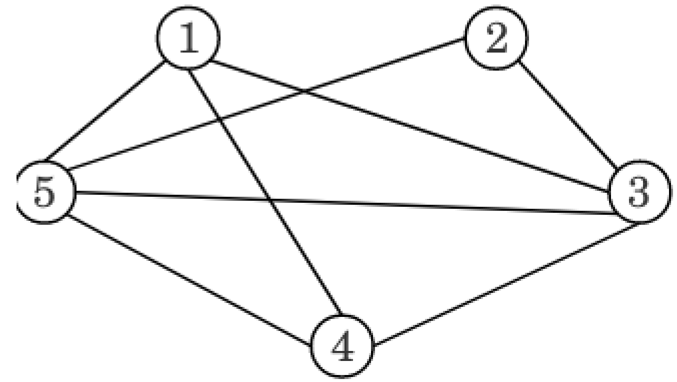
Isomorfismo e Matrizes de Adjacência





Isomorfismo e Matrizes de Adjacência





Matrizes de Adjacência

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
a	0	1	0	1	1
b	1	0	1	1	1
c	0	1	0	1	0
d	1	1	1	0	1
e	1	1	0	1	0

	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	1
2	0	0	1	0	1
3	1	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	1	1	1	1	0

SUBGRAFOS

Subgrafo

Subgrafo

- Um grafo $G_s = (V_s, A_s)$ é considerado um **subgrafo** de um grafo $G = (V, A)$ se todos os vértices e todas as arestas de G_s estão em G, ou seja, se $V_s \subseteq V$ e $A_s \subseteq A$.

Subgrafo

- Um grafo $G_s = (V_s, A_s)$ é considerado um **subgrafo** de um grafo $G = (V, A)$ se todos os vértices e todas as arestas de G_s estão em G, ou seja, se V_s □ V e A_s □ A.
- Observações:

Subgrafo

- Um grafo $G_s = (V_s, A_s)$ é considerado um **subgrafo** de um grafo $G = (V, A)$ se todos os vértices e todas as arestas de G_s estão em G, ou seja, se V_s □ V e A_s □ A.
- Observações:
  - Todo grafo é subgrafo de si próprio.

Subgrafo

- Um grafo $G_s = (V_s, A_s)$ é considerado um **subgrafo** de um grafo $G = (V, A)$ se todos os vértices e todas as arestas de G_s estão em G, ou seja, se $V_s \subseteq V$ e $A_s \subseteq A$.
- Observações:
  - Todo grafo é subgrafo de si próprio.
  - O subgrafo G_{s2} de um subgrafo G_s de G também é subgrafo de G.

Subgrafo

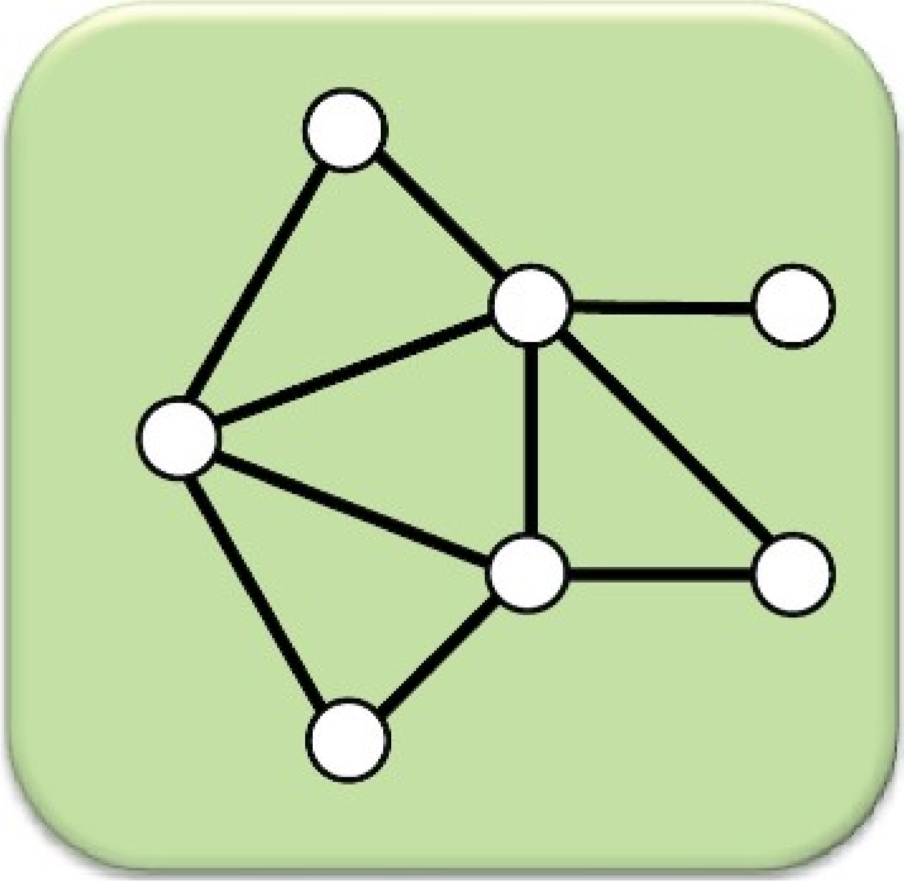
- Um grafo $G_s = (V_s, A_s)$ é considerado um **subgrafo** de um grafo $G = (V, A)$ se todos os vértices e todas as arestas de G_s estão em G, ou seja, se $V_s \subseteq V$ e $A_s \subseteq A$.
- Observações:
  - Todo grafo é subgrafo de si próprio.
  - O subgrafo G_{s2} de um subgrafo G_s de G também é subgrafo de G.
  - Um vértice simples de G é um subgrafo de G.

Subgrafo

- Um grafo $G_s = (V_s, A_s)$ é considerado um **subgrafo** de um grafo $G = (V, A)$ se todos os vértices e todas as arestas de G_s estão em G, ou seja, se $V_s \subseteq V$ e $A_s \subseteq A$.
- Observações:
  - Todo grafo é subgrafo de si próprio.
  - O subgrafo G_{s2} de um subgrafo G_s de G também é subgrafo de G.
  - Um vértice simples de G é um subgrafo de G.
  - Uma aresta simples de G (juntamente com as suas extremidades) é um subgrafo de G.

Subgrafo

- Encontre todos os subgrafos:



CONECTIVIDADE E CAMINHOS

Definições

Definições

- Passeio

Definições

- Passeio
  - Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Definições

- Passeio
  - Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.
  - Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Definições

- Passeio
  - Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.
  - Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.
  - Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice (não necessariamente o mesmo).

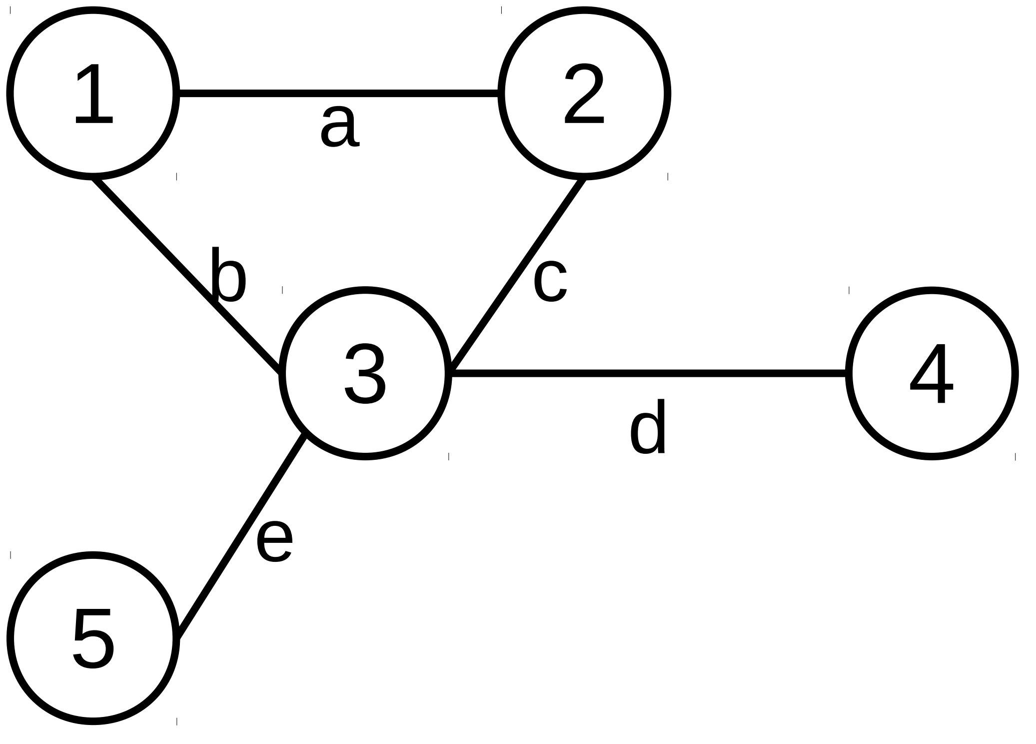
Passeio

Passeio

- Exemplo:

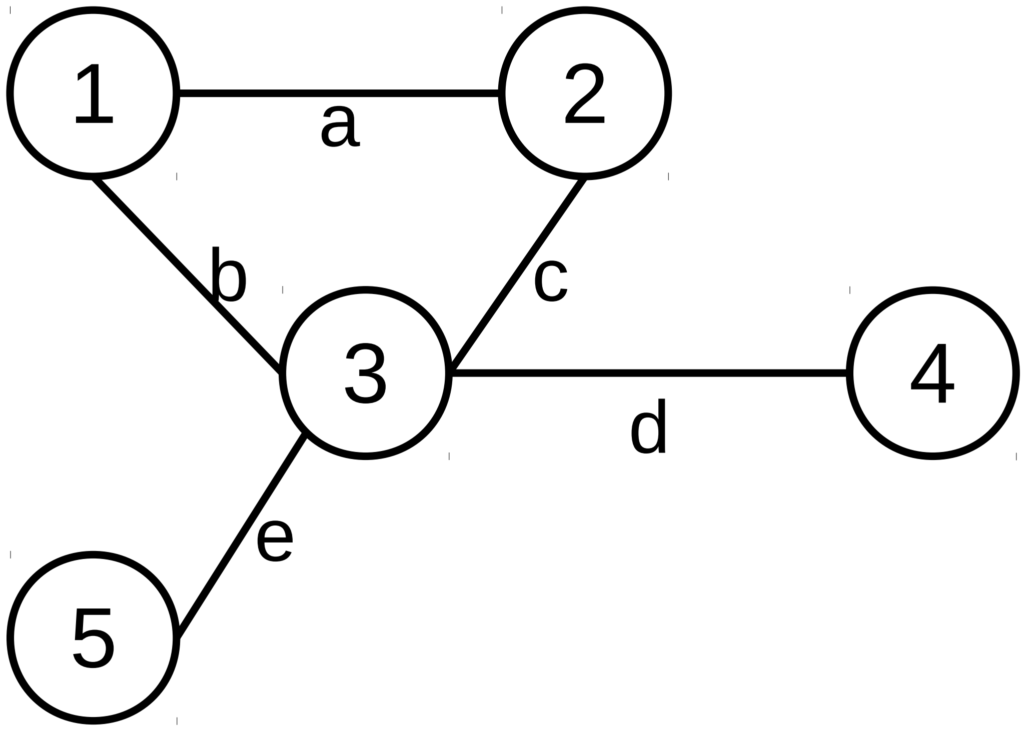
Passeio

- Exemplo:



Passeio

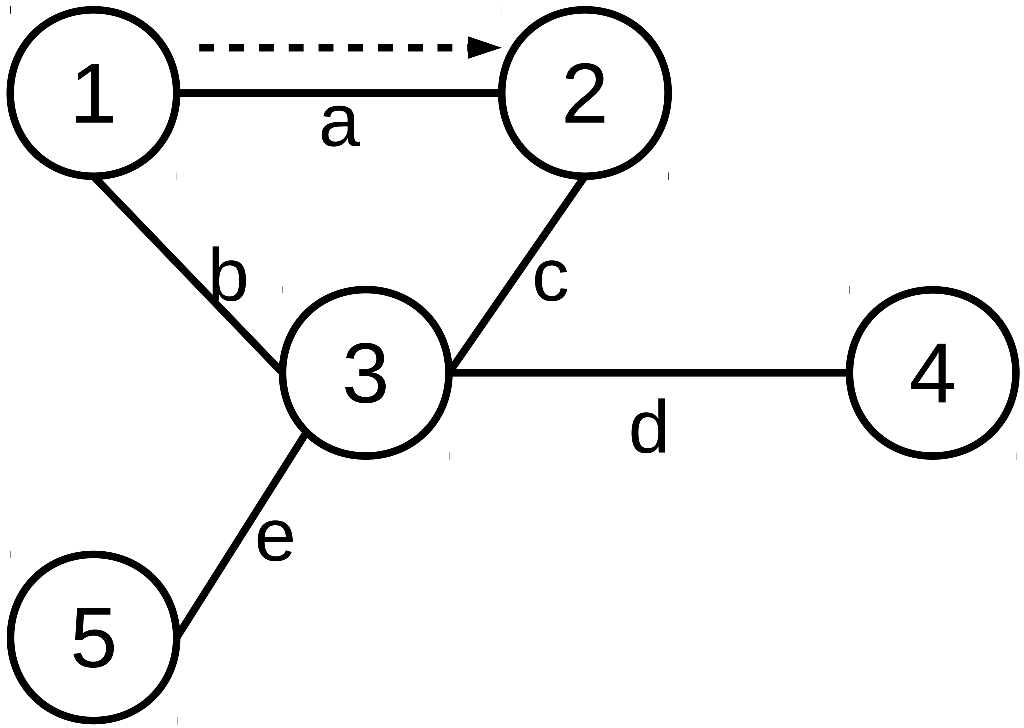
- Exemplo:



1 – a – 2

Passeio

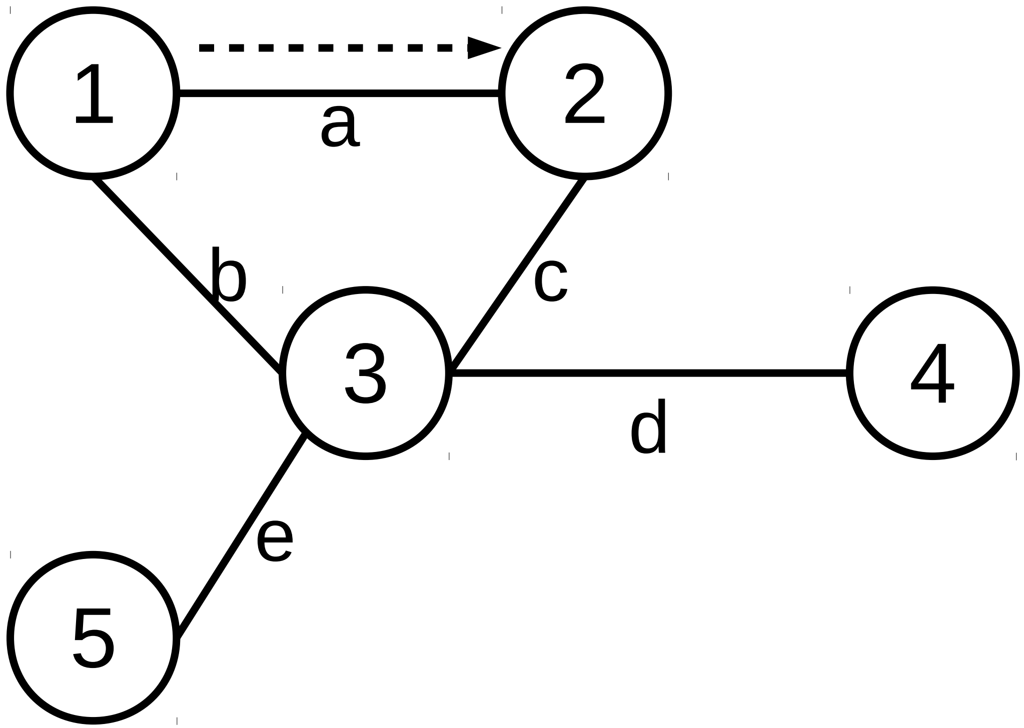
- Exemplo:



1 – a – 2

Passeio

- Exemplo:

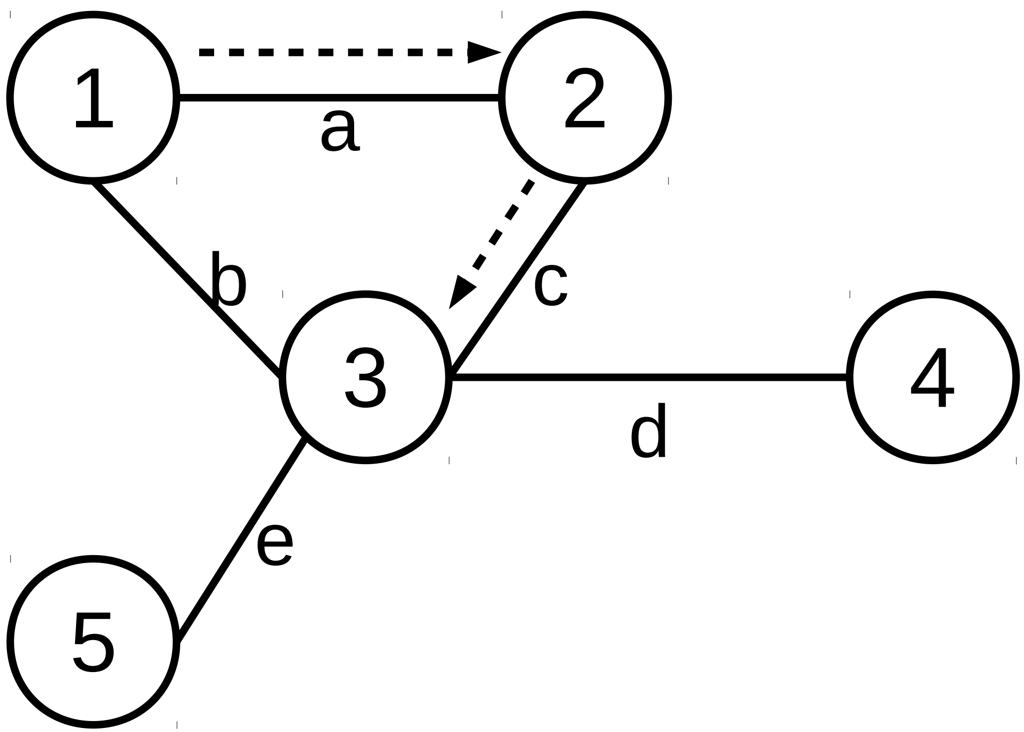


1 – a – 2

2 – c – 3

Passeio

- Exemplo:

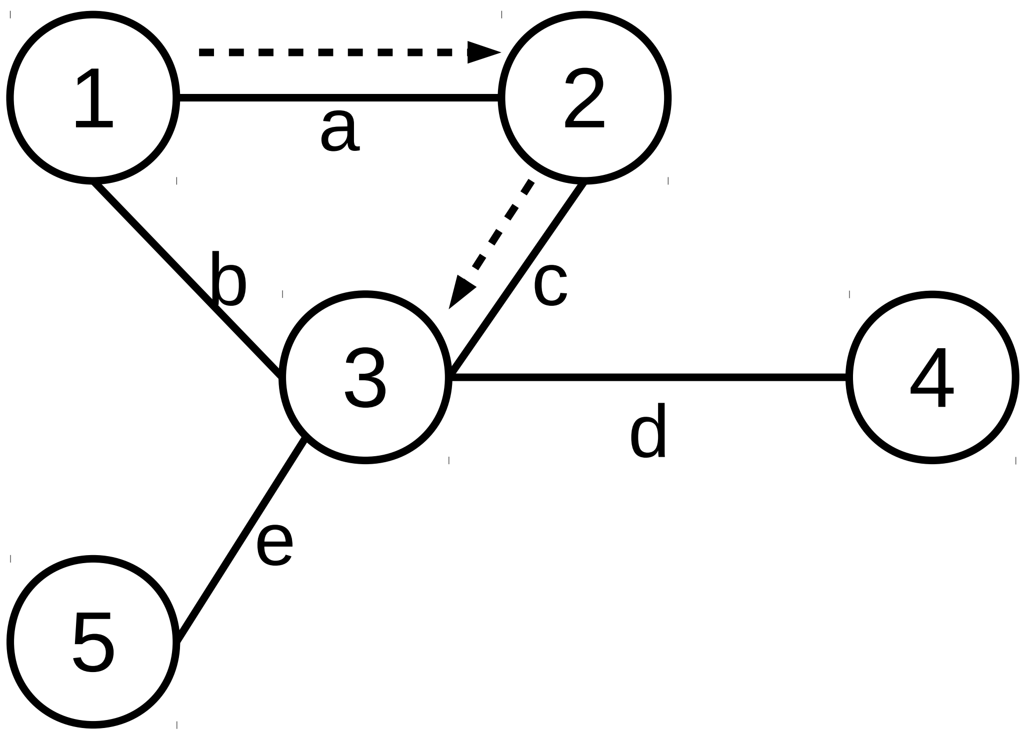


1 – a – 2

2 – c – 3

Passeio

- Exemplo:



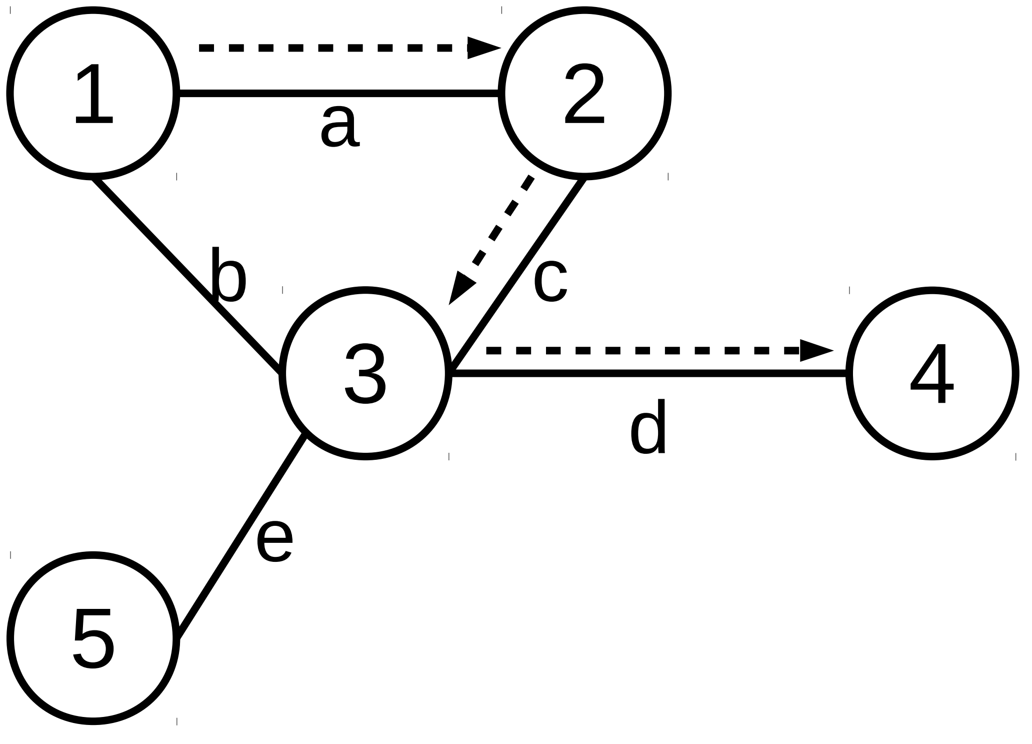
1 – a – 2

2 – c – 3

3 – d – 4

Passeio

- Exemplo:



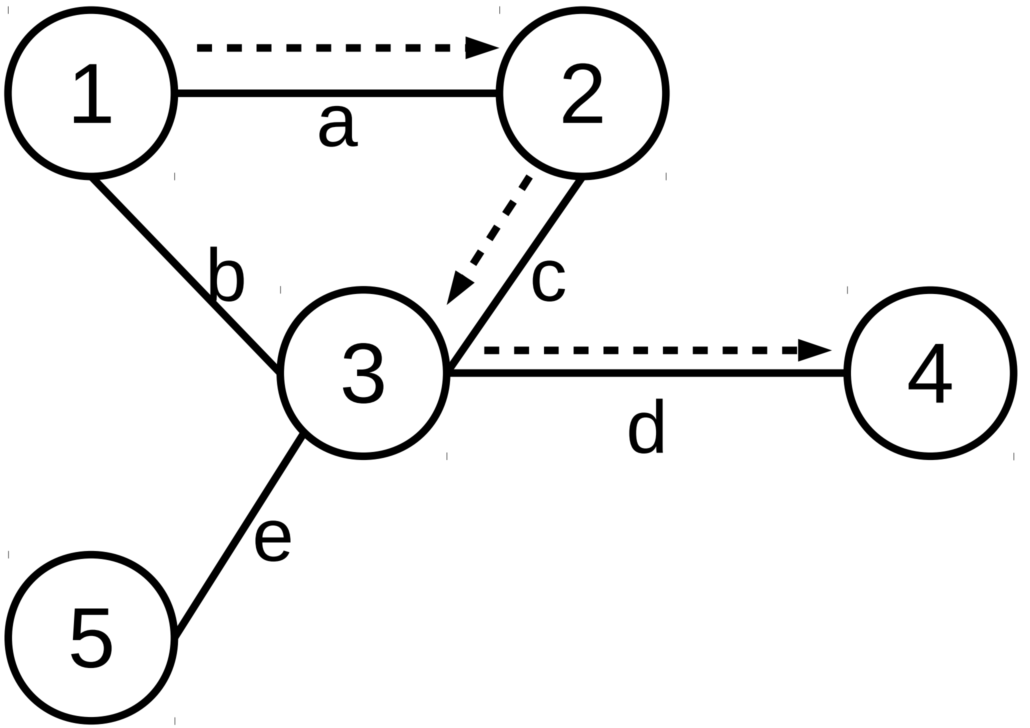
1 – a – 2

2 – c – 3

3 – d – 4

Passeio

- Exemplo:



1 – a – 2

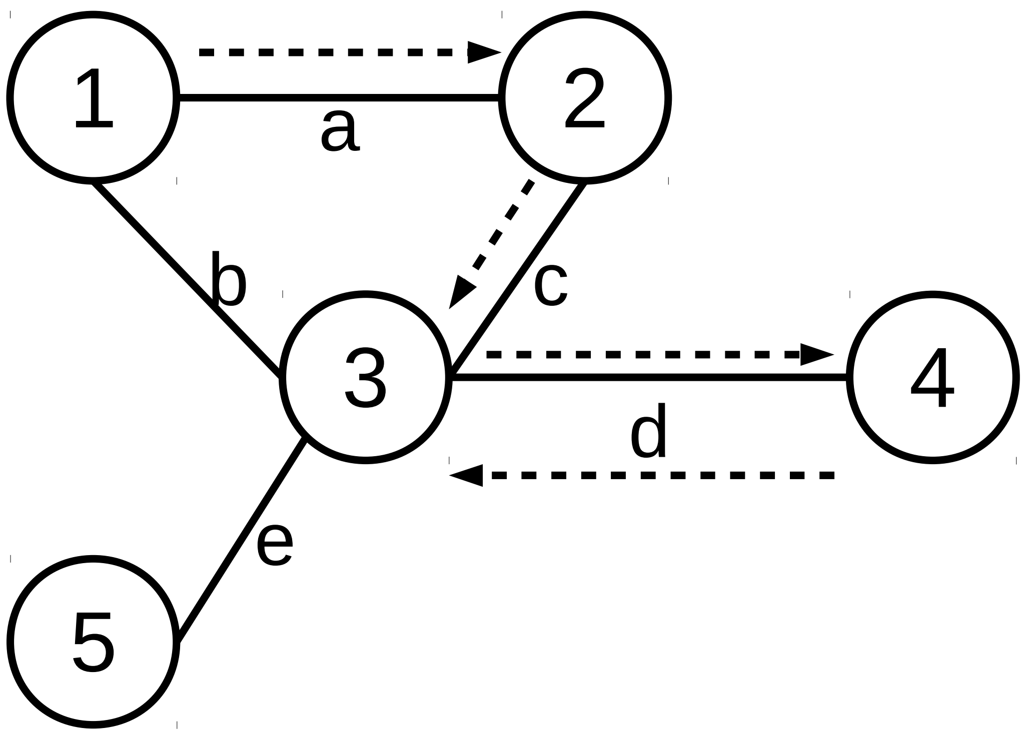
2 – c – 3

3 – d – 4

4 – d – 3

Passeio

- Exemplo:



1 – a – 2

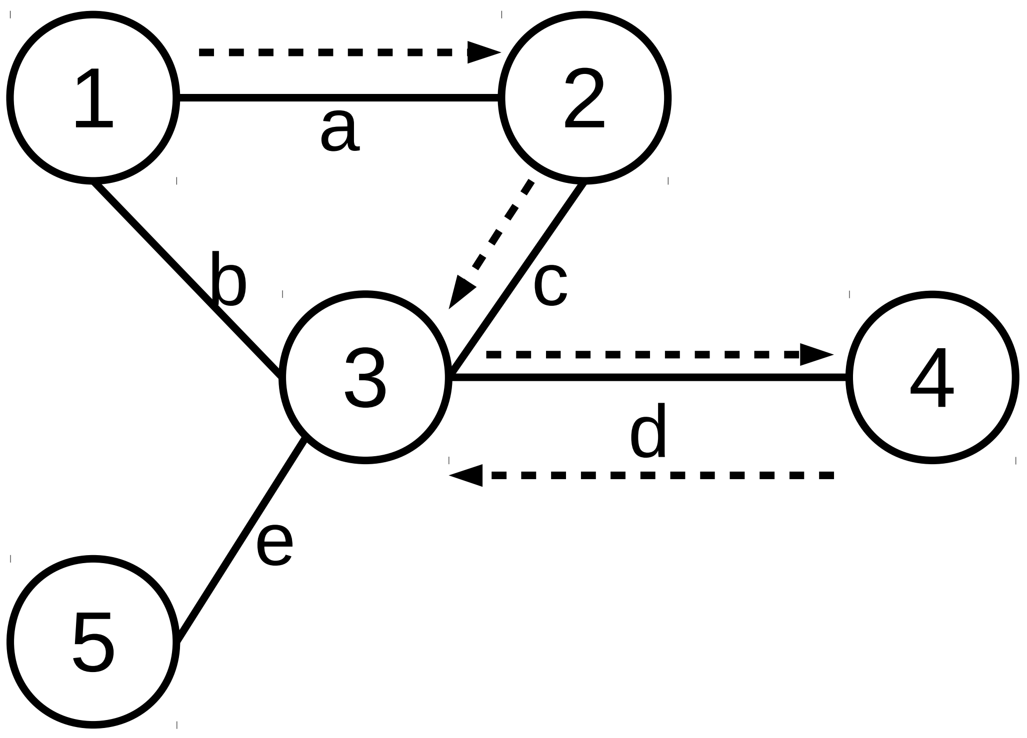
2 – c – 3

3 – d – 4

4 – d – 3

Passeio

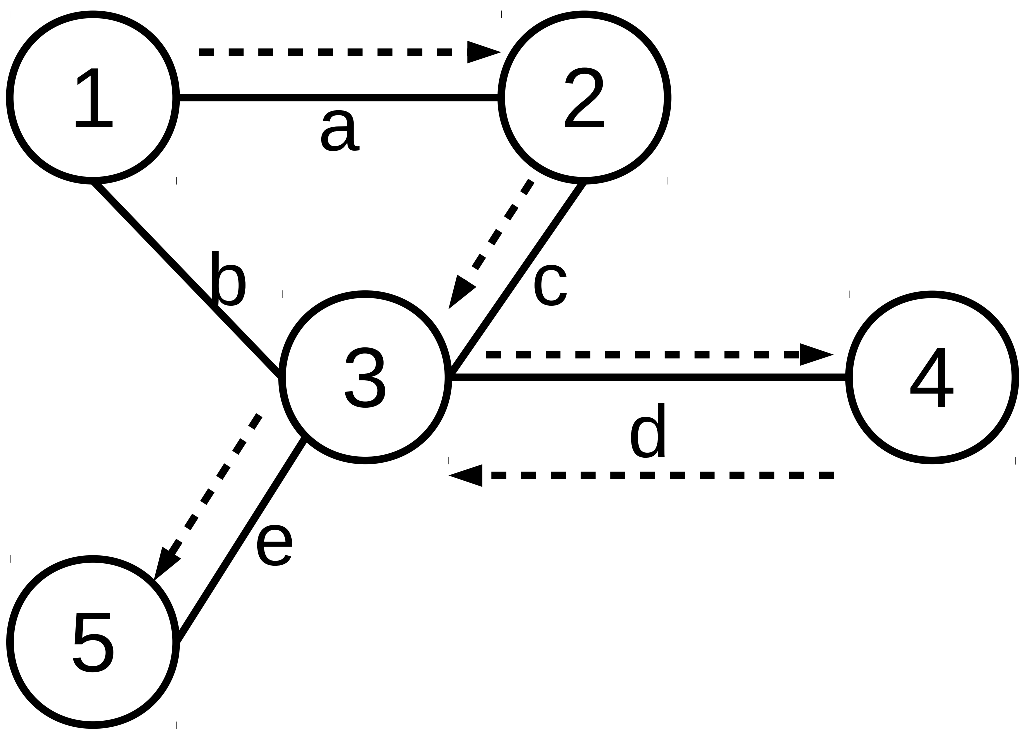
- Exemplo:



1 – a – 2
2 – c – 3
3 – d – 4
4 – d – 3
3 – e – 5

Passeio

- Exemplo:



1 – a – 2

2 – c – 3

3 – d – 4

4 – d – 3

3 – e – 5

Passeio

Passeio

- O passeio pode ser:

Passeio

- O passeio pode ser:
  - Aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso anterior).

Passeio

- O passeio pode ser:
  - Aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso anterior).
  - Fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Exemplo: 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 3 – 1.

Passeio

Passeio

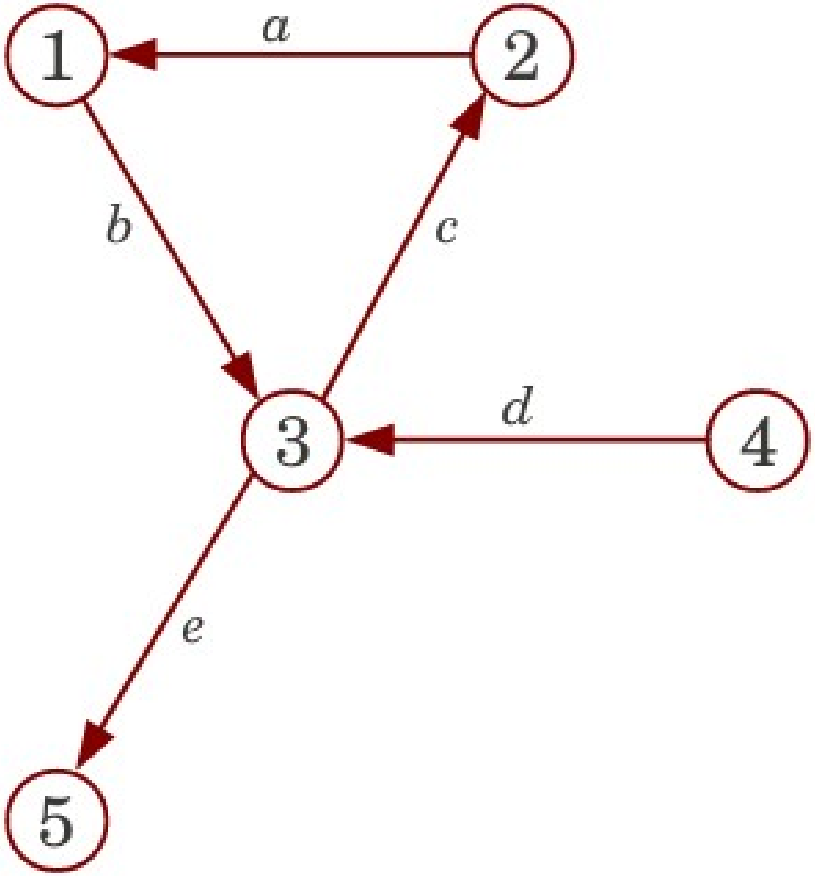
- Cadeia é um passeio que não repete arestas.

Passeio

- Cadeia é um passeio que não repete arestas.
- Exemplo: 4 – 3 – 2 – 1 – 3 – 5.

Passeio

- Cadeia é um passeio que não repete arestas.
- Exemplo: 4 – 3 – 2 – 1 – 3 – 5.



Passeio

Passeio

- Caminho é uma cadeia sem repetição de vértices.

Passeio

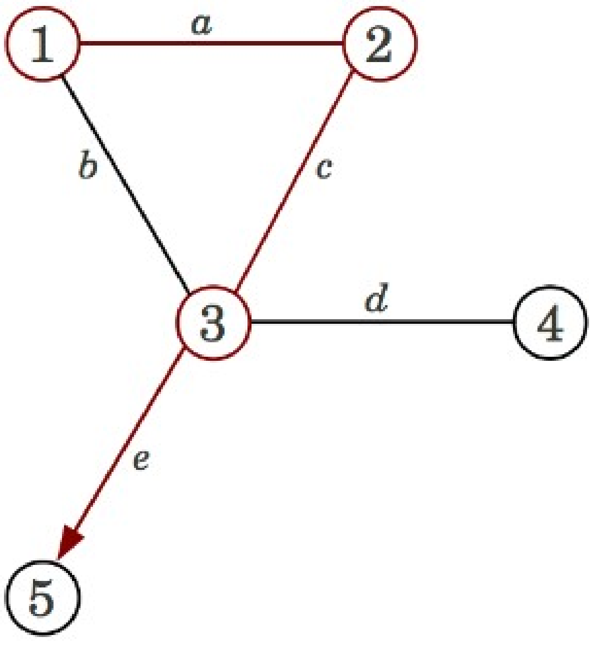
- Caminho é uma cadeia sem repetição de vértices.
- Exemplo: 1 – 2 – 3 – 5.

Passeio

- Caminho é uma cadeia sem repetição de vértices.
- Exemplo: 1 – 2 – 3 – 5.
- O comprimento de um caminho é o número de arestas que este inclui.

Passeio

- Caminho é uma cadeia sem repetição de vértices.
- Exemplo: 1 – 2 – 3 – 5.
- O comprimento de um caminho é o número de arestas que este inclui.



Ciclos

Ciclos

- Um **ciclo** é um caminho fechado.

Ciclos

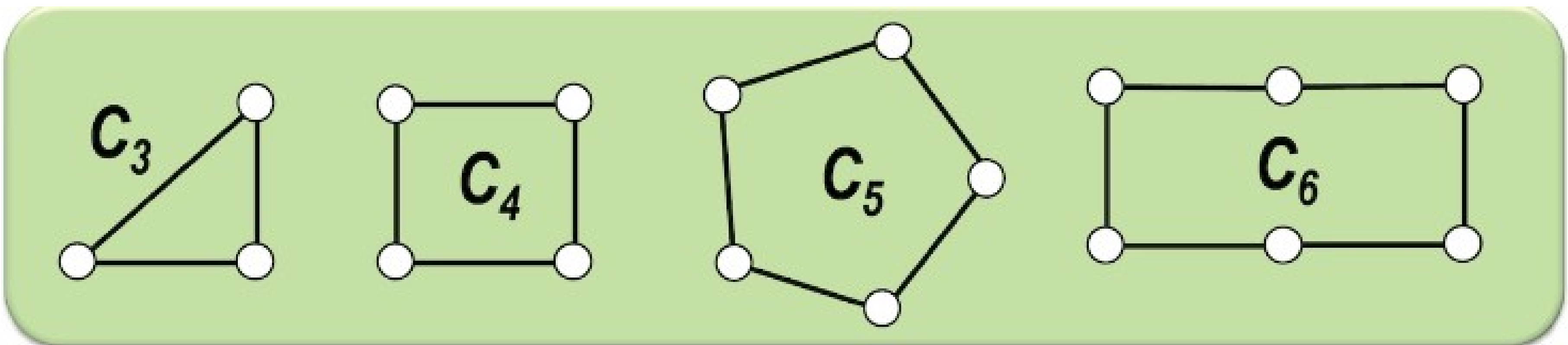
- Um **ciclo** é um caminho fechado.
- Alguns autores, utilizam o termo **circuito** para o caso de grafos orientados.

Ciclos

- Um **ciclo** é um caminho fechado.
- Alguns autores, utilizam o termo **circuito** para o caso de grafos orientados.
- Grafo Ciclo: é um grafo com n vértices formado por apenas um ciclo passando por todos os vértices.

Ciclos

- Um **ciclo** é um caminho fechado.
- Alguns autores, utilizam o termo **circuito** para o caso de grafos orientados.
- Grafo Ciclo: é um grafo com n vértices formado por apenas um ciclo passando por todos os vértices.



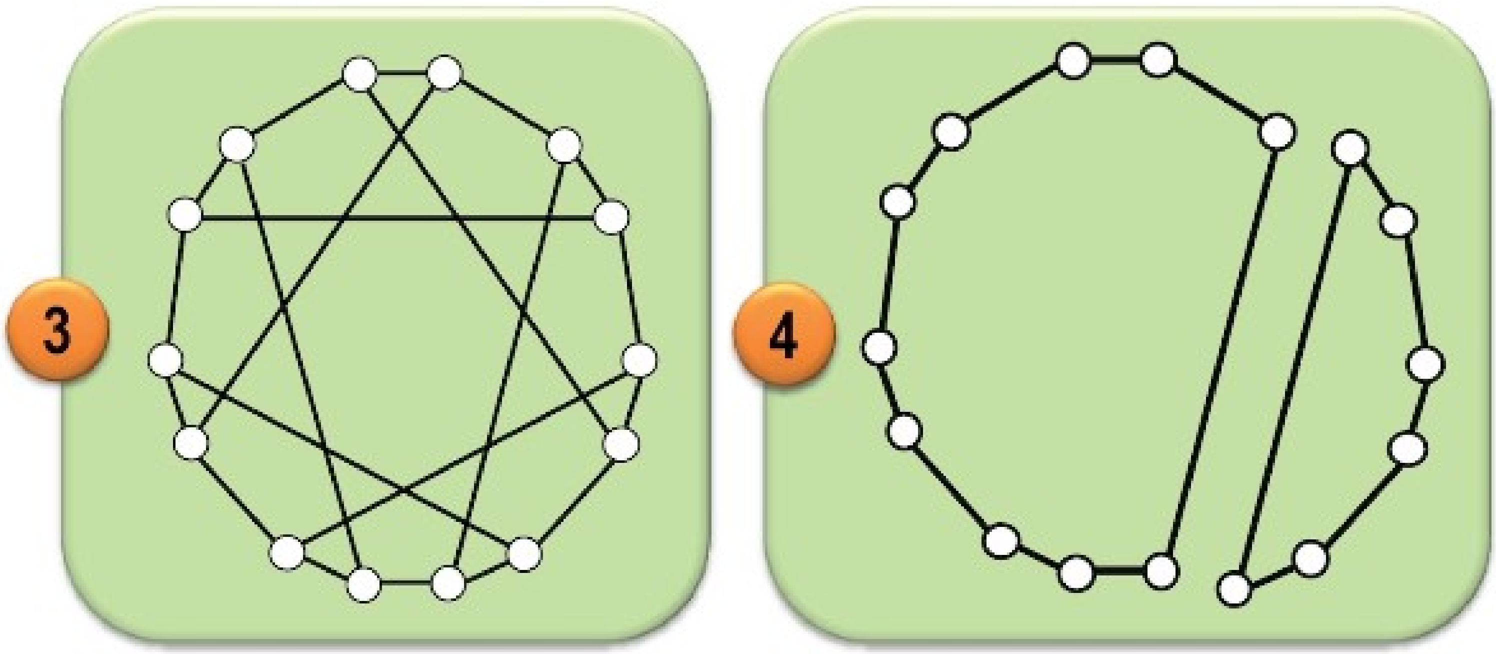
Ciclos

Ciclos

- A **cintura** de um grafo é o comprimento do menor ciclo existente no mesmo.

Ciclos

- A **cintura** de um grafo é o comprimento do menor ciclo existente no mesmo.



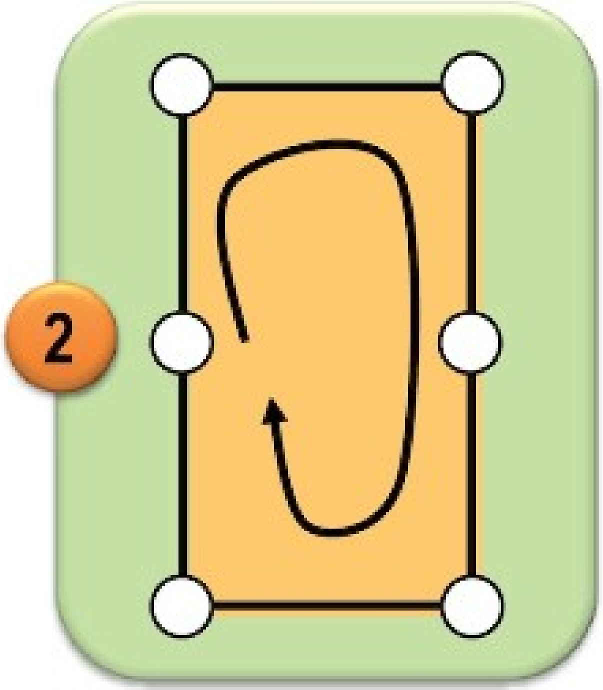
Ciclos

Ciclos

- A **circunferência** de um grafo é o comprimento do maior ciclo existente no mesmo.

Ciclos

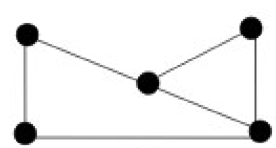
- A **circunferência** de um grafo é o comprimento do maior ciclo existente no mesmo.



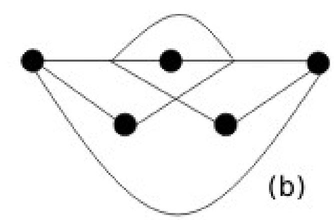
EXERCÍCIOS

Exercícios

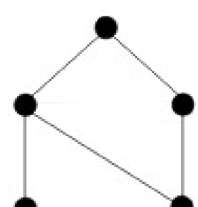
- Escreva um grafo com 4 vértices que seja isomorfo ao seu complemento (ou seja, auto-complementar).
- Qualé o número de arestas de um grafo que é isomorfo ao seu complemento?
- Considere os grafos abaixo. Qual deles é diferente dos demais?



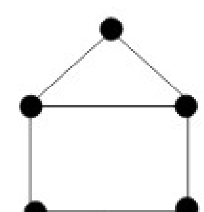
(a)



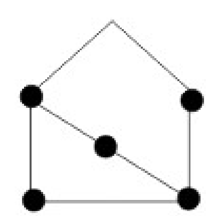
(b)



(c)



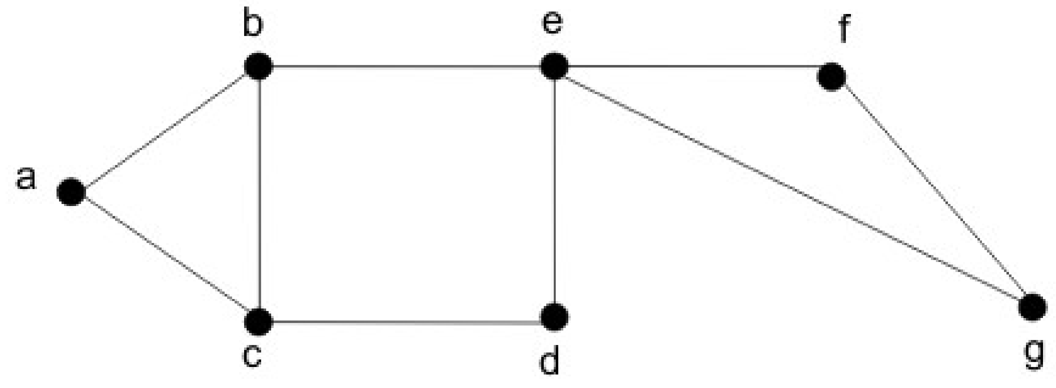
(d)



(e)

Exercícios

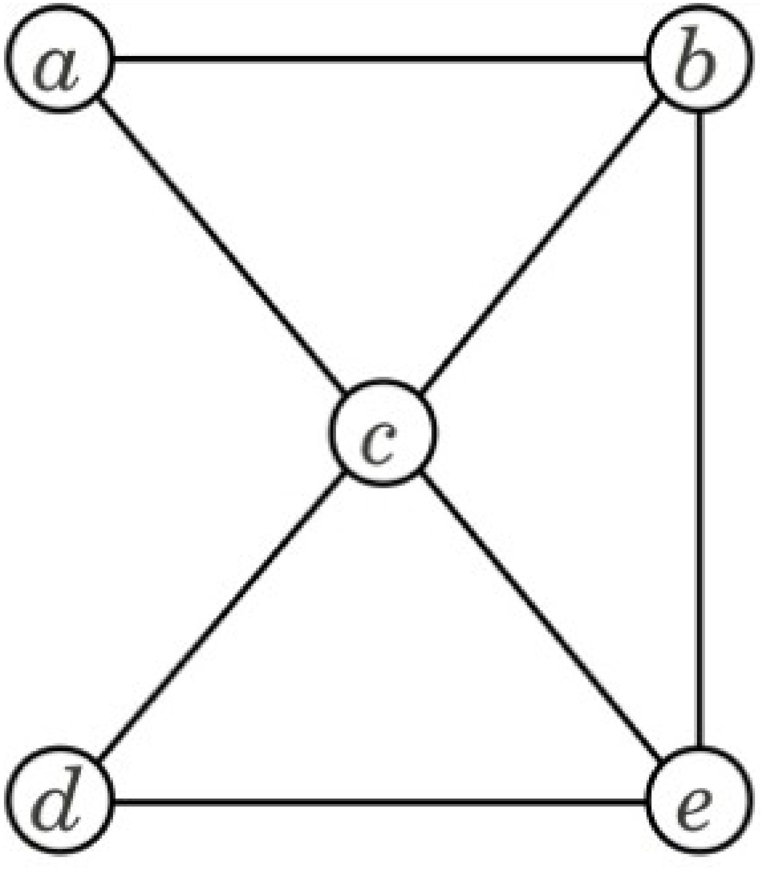
- Quantos caminhos existem entre os vértices b e f?



- Dê um exemplo de grafo conexo G cuja remoção de qualquer aresta torna G desconexo.
- Quantas arestas possui um grafo com essas características?

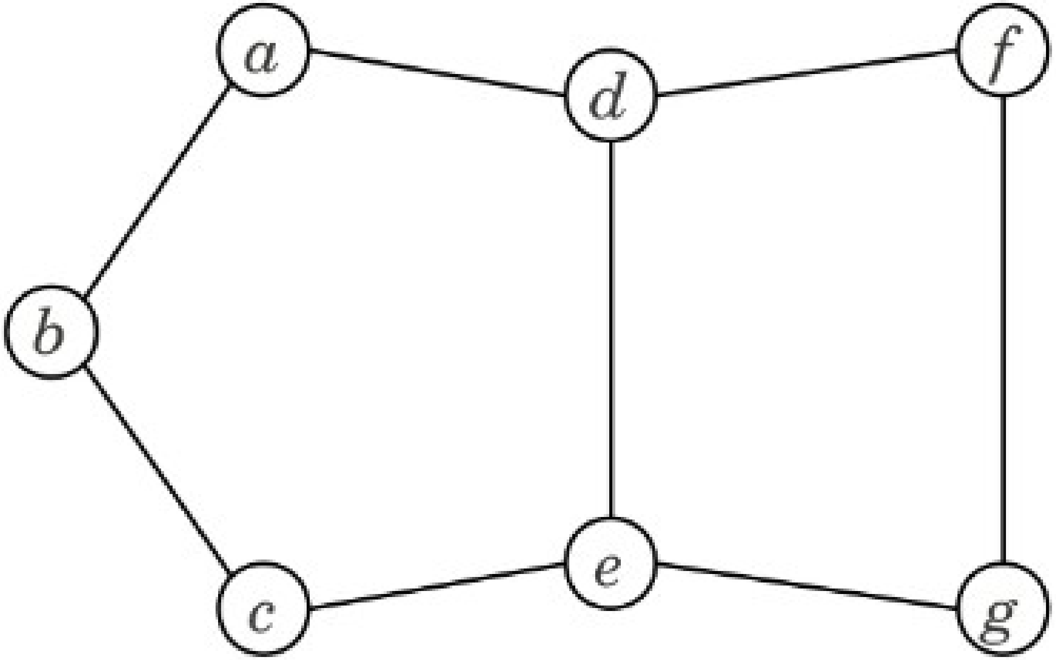
Exercícios

- Quantos grafos ciclos (não isomorfos) são subgrafos do grafo abaixo?



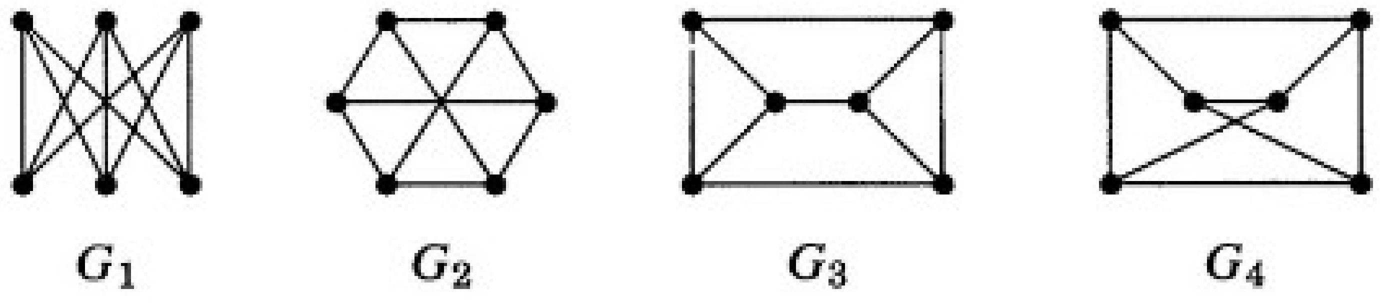
Exercícios

- Qual é a cintura e a circunferência do grafo abaixo?



Exercícios

- [POSCOMP] Considere os grafos, a seguir:

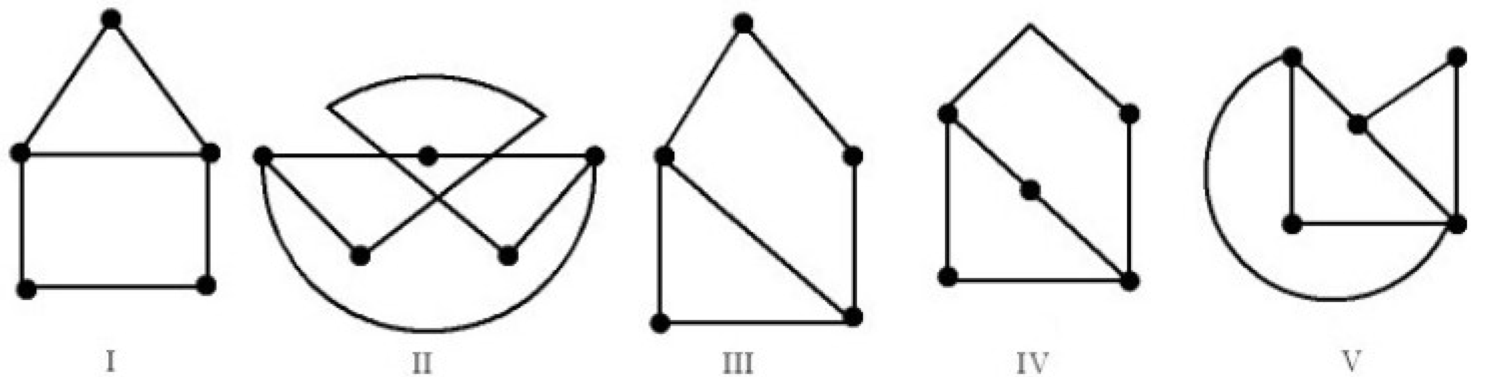


Pela análise desses grafos, verifica-se que

- (A) G3 e G4 são grafos completos.
- (B) G1 e G2 são grafos isomorfos.
- (C) G3 e G1 são grafos bipartidos.
- (D) G2 e G3 são grafos planares.
- (E) G4 e G1 são multigrafos.

Exercícios

- [POSCOMP] Considere os grafos I, II, III, IV e V, mostrados abaixo:

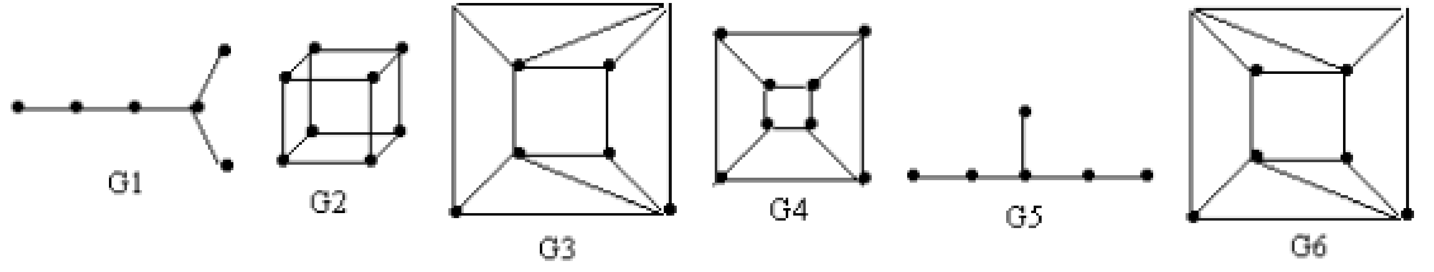


São grafos isomorfos

  - A) todos acima apresentados.
  - B) apenas I e III.
  - C) apenas II e V.
  - D) apenas III e IV.
  - E) apenas I, II e III.

Exercícios

- [POSCOMP] Considere os seis grafos G1, G2, G3, G4, G5 e G6 mostrados a seguir.



Pode-se afirmar que os únicos pares de grafos isomorfos entre si são:

  - (a) G1 e G5; G3 e G6
  - (b) G3 e G4; G2 e G6
  - (c) G1 e G5
  - (d) G2 e G4
  - (e) G3 e G6