

Algoritmos e Estruturas de Dados I

Árvores Rubro-Negras

Prof. Tiago Eugenio de Melo

tmelo@uea.edu.br

www.tiagodemelo.info

Observações

- As palavras com a fonte `Courier` indicam uma palavra-reservada da linguagem de programação.
- Animação online:
 - <http://gregfjohnson.com/cgi-bin/redblackbuilder>
 - <https://www.inf.ufsc.br/~aldo.vw/estruturas/simulador/RB.html>

Árvores Rubro-Negras

Introdução

Introdução

- Criada em 1970 por Rudolf Bayer com o nome de B-Árvores binárias simétricas.

Introdução

- Criada em 1970 por Rudolf Bayer com o nome de B-Árvores binárias simétricas.
- O seu atual nome foi estabelecido em 1978 por Leo J. Guibas e Robert Sedgwick.

Introdução

- Criada em 1970 por Rudolf Bayer com o nome de B-Árvores binárias simétricas.
- O seu atual nome foi estabelecido em 1978 por Leo J. Guibas e Robert Sedgwick.
- Do inglês Red-Black Trees.

Árvore Rubro-Negra

Árvore Rubro-Negra

- A árvore rubro-negra tem esse nome devido a coloração de seus nós.

Árvore Rubro-Negra

- A árvore rubro-negra tem esse nome devido a coloração de seus nós.
- Uma árvore rubro-negra (ARN) é uma árvore binária de busca com um campo adicional que armazena a coloração do nó (rubro ou negro).

Árvore Rubro-Negra

- A árvore rubro-negra tem esse nome devido a coloração de seus nós.
- Uma árvore rubro-negra (ARN) é uma árvore binária de busca com um campo adicional que armazena a coloração do nó (rubro ou negro).
- O fato de um nó ser rubro ou negro é usado como fator de balanceamento da ARN.

Árvore Rubro-Negra

Árvore Rubro-Negra

- Apesar das árvores AVL e 2-3 apresentarem propriedades interessantes, elas também possuem algumas desvantagens.

Árvore Rubro-Negra

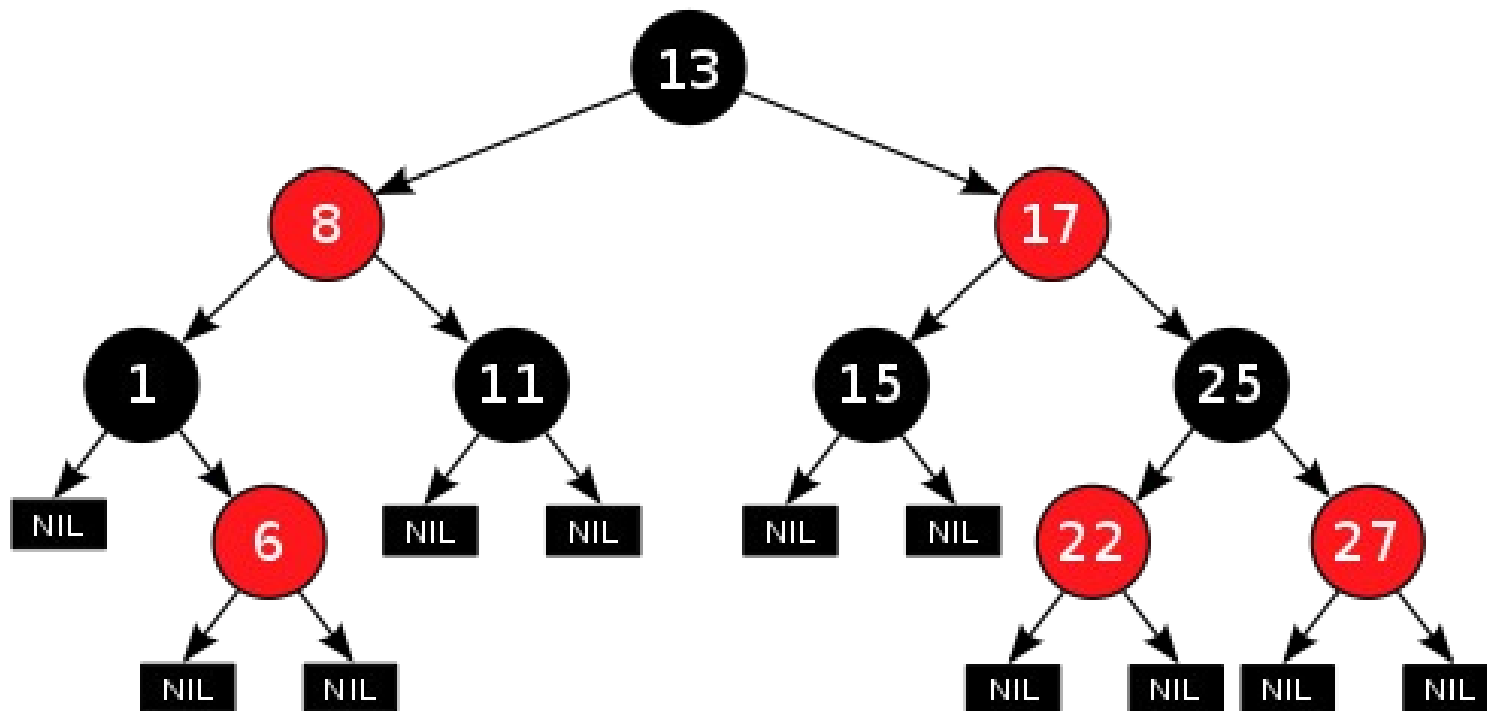
- Apesar das árvores AVL e 2-3 apresentarem propriedades interessantes, elas também possuem algumas desvantagens.
- As árvores AVL requerem muitas operações de reestrutura (rotações) após a remoção de um item.

Árvore Rubro-Negra

- Apesar das árvores AVL e 2-3 apresentarem propriedades interessantes, elas também possuem algumas desvantagens.
- As árvores AVL requerem muitas operações de reestrutura (rotações) após a remoção de um item.
- As árvores 2-3 requerem muitas operações de divisão e fusão depois da inserção ou remoção de elementos.

Árvore Rubro-Negra

- Exemplo:



Propriedades

Propriedades

- Todo nó é colorido com preto ou vermelho.

Propriedades

- Todo nó é colorido com preto ou vermelho.
- O nó raiz é preto.

Propriedades

- Todo nó é colorido com preto ou vermelho.
- O nó raiz é preto.
- Toda folha é preta.

Propriedades

- Todo nó é colorido com preto ou vermelho.
- O nó raiz é preto.
- Toda folha é preta.
- Se um nó é rubro (vermelho), então ambos os seus filhos são pretos.

Propriedades

- Todo nó é colorido com preto ou vermelho.
- O nó raiz é preto.
- Toda folha é preta.
- Se um nó é rubro (vermelho), então ambos os seus filhos são pretos.
- Qualquer caminho da raiz até uma subárvore vazia tem um número igual de nós negros.

Conceitos

- A altura de uma árvore rubro-negra é o número de nós negros que se encontram no caminho da raiz até uma folha.

Inserção/Remoção

Inserção/Remoção

- As operações de inserir e remover são complicadas nas árvore rubro-negras porque elas podem ferir alguma propriedade deste tipo de árvore.

Inserção/Remoção

- As operações de inserir e remover são complicadas nas árvore rubro-negras porque elas podem ferir alguma propriedade deste tipo de árvore.
- Porém, é possível implementar essas operações de modo bastante parecido com as operações das Árvores Binárias de Busca (ABB), bastando “apenas” modificar as cores dos nós para que as propriedades das ARN sejam mantidas.

Inserção

Inserção

- Ao contrário da AVL, temos agora vários critérios para ajustar simultaneamente.

Inserção

- Ao contrário da AVL, temos agora vários critérios para ajustar simultaneamente.
- Ao inserir um novo nó em uma posição vazia da árvore, este nó é pintado de vermelho.

Inserção

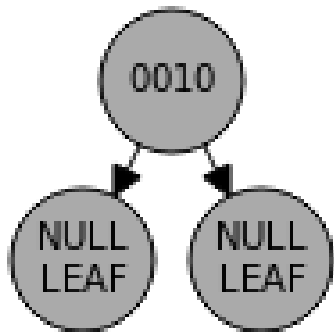
- Ao contrário da AVL, temos agora vários critérios para ajustar simultaneamente.
- Ao inserir um novo nó em uma posição vazia da árvore, este nó é pintado de vermelho.
- A razão para isto é preservar a altura da árvore, uma vez que um nó rubro não contribui para a altura negra da árvore.

Inserção

- Exemplo:

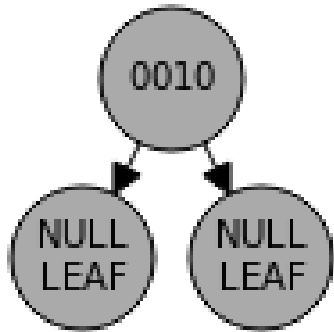
Inserção

- Exemplo:



Inserção

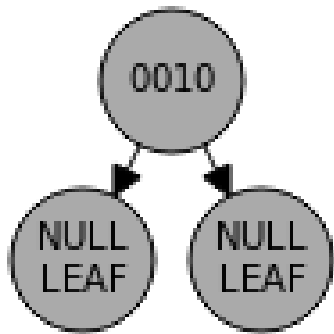
- Exemplo:



inserir o **20**

Inserção

- Exemplo:

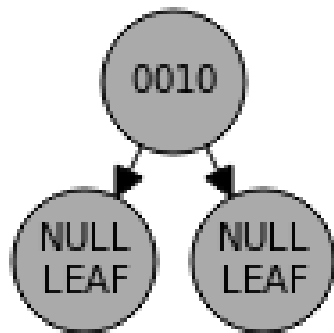


inserir o **20**

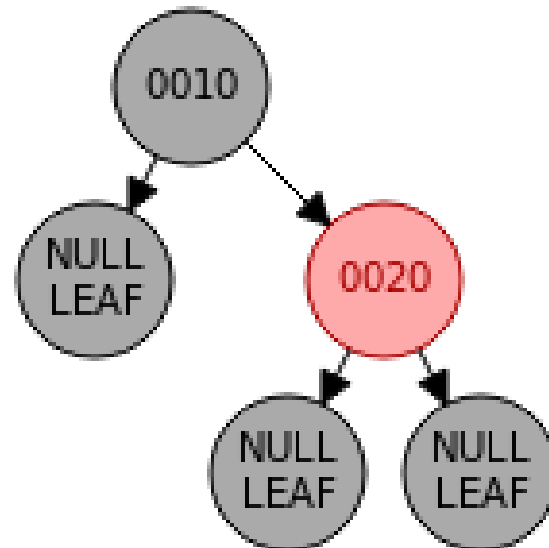


Inserção

- Exemplo:



inserir o **20**



Inserção

Inserção

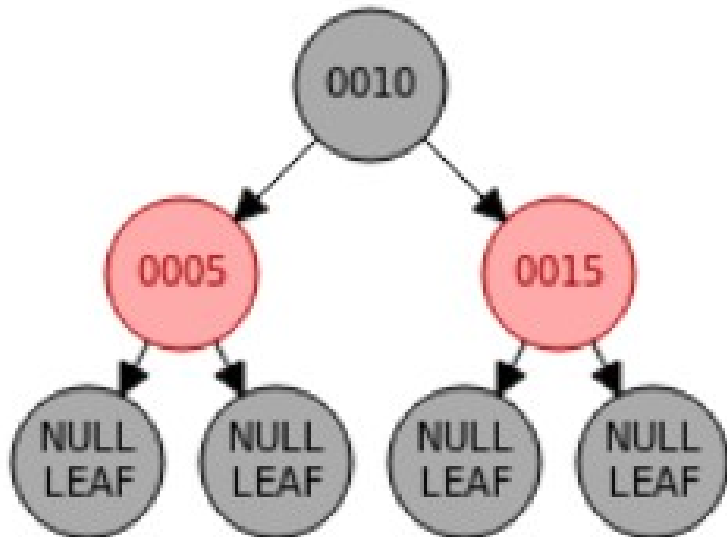
- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:

Inserção

- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:
 - Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro.

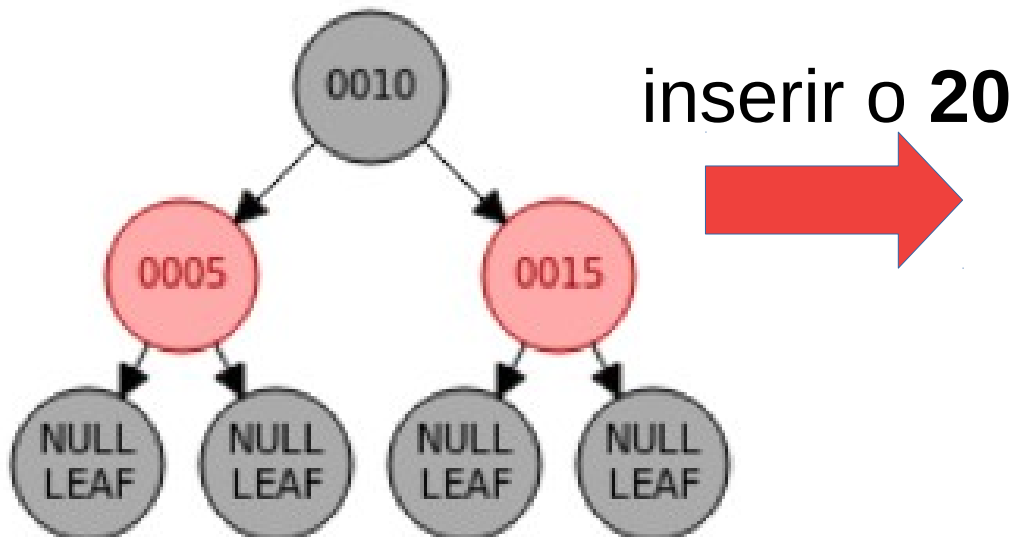
Inserção

- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:
 - Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro.



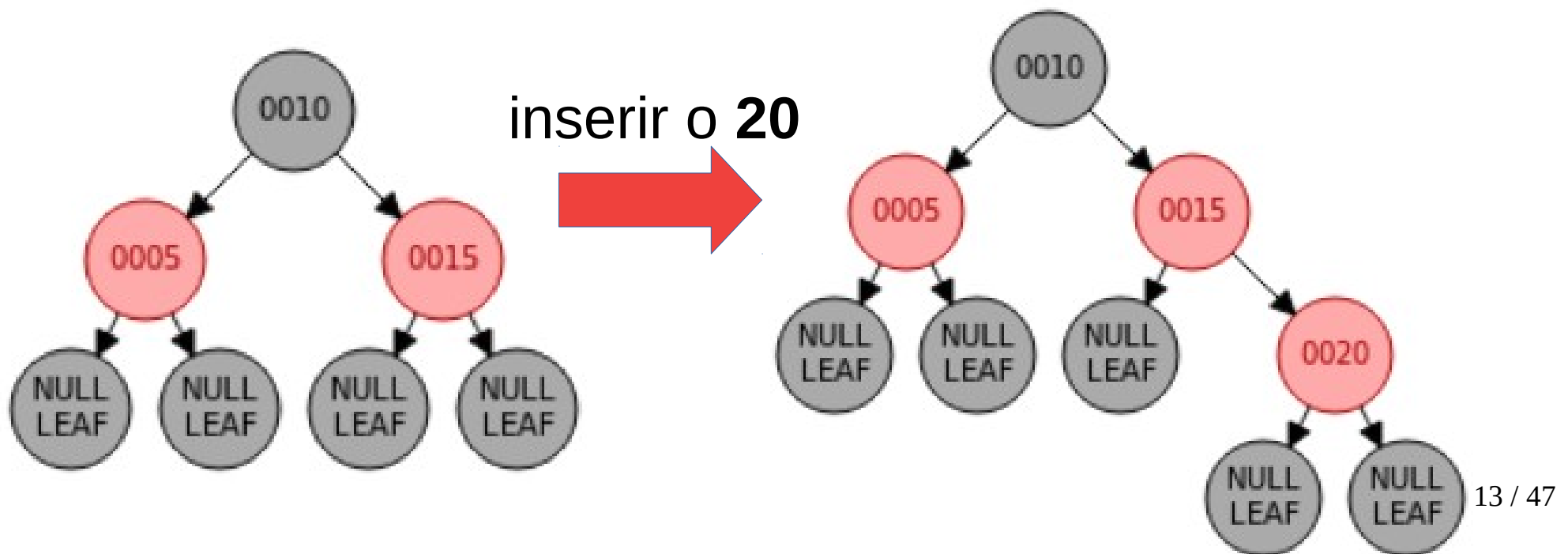
Inserção

- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:
 - Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro.



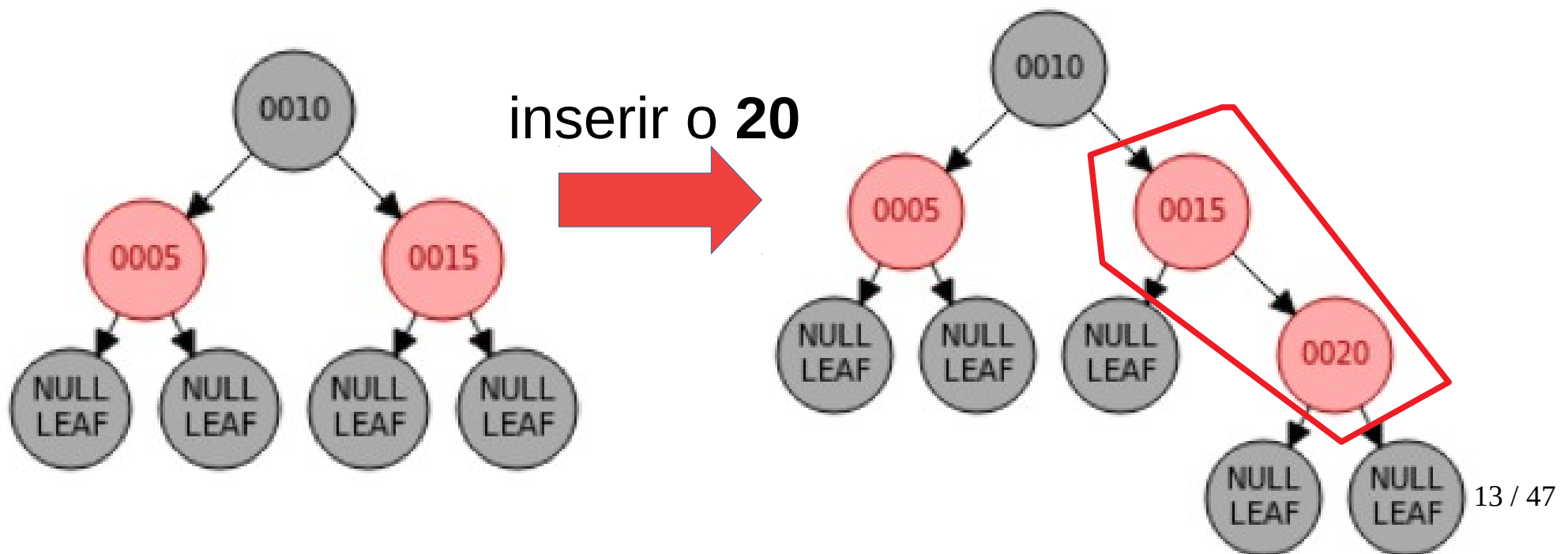
Inserção

- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:
 - Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro.



Inserção

- Existem três casos para corrigir as cores após a inserção de um novo nó:
 - Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro.



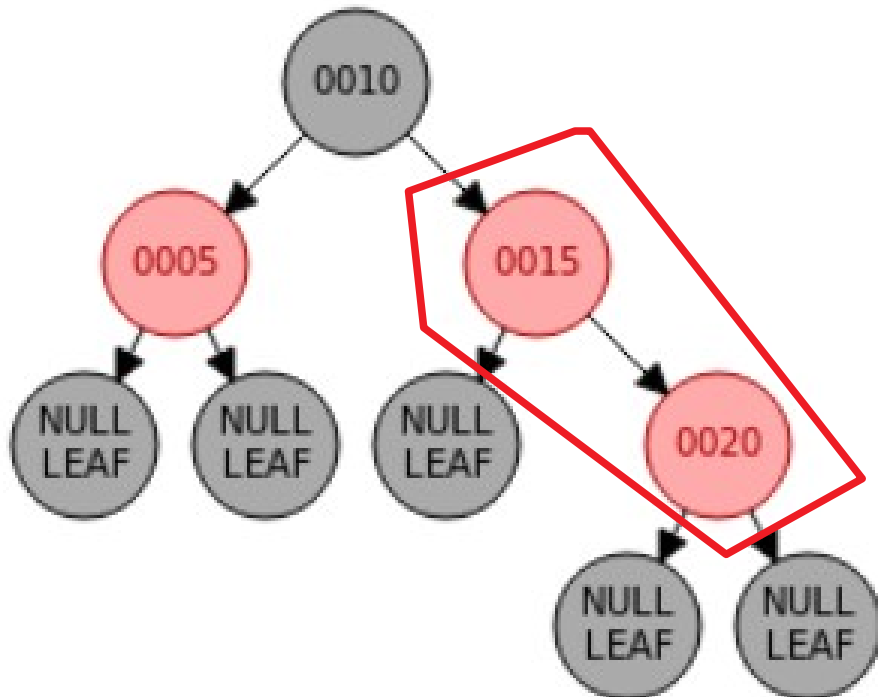
Inserção

Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)

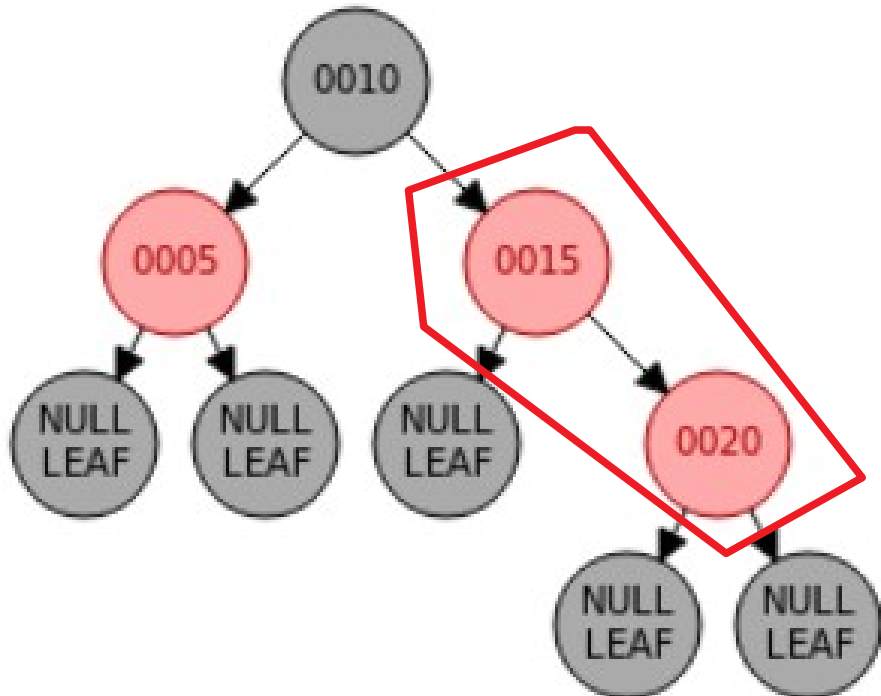
Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)



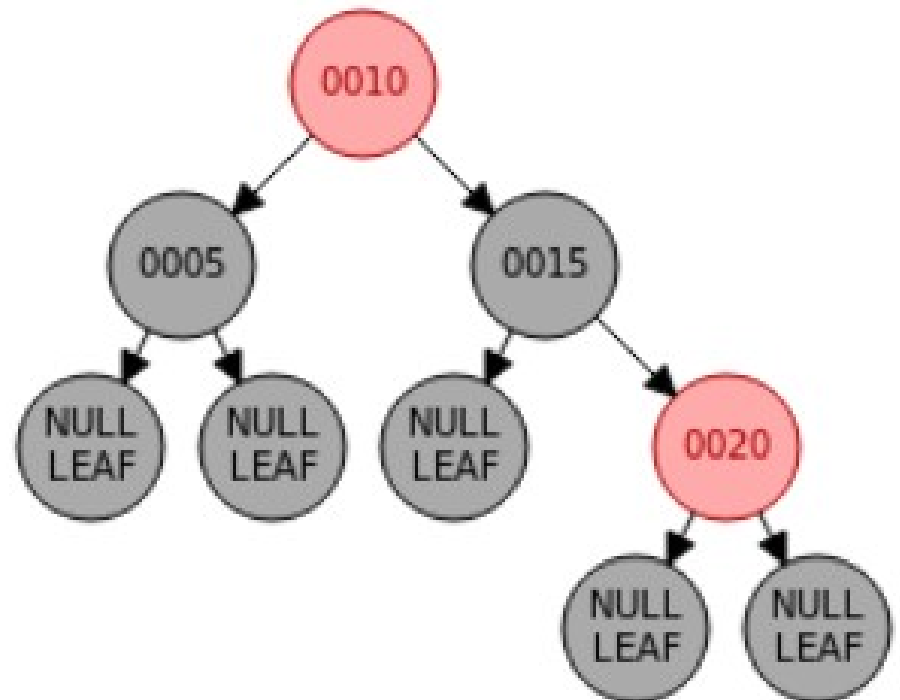
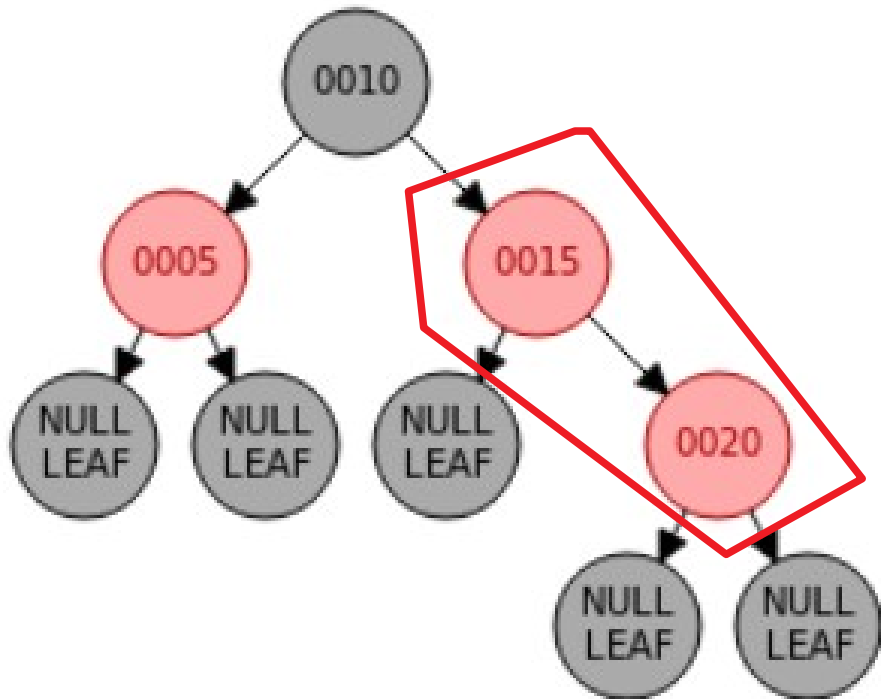
Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)
mudar as cores do pai, tio e avô



Inserção

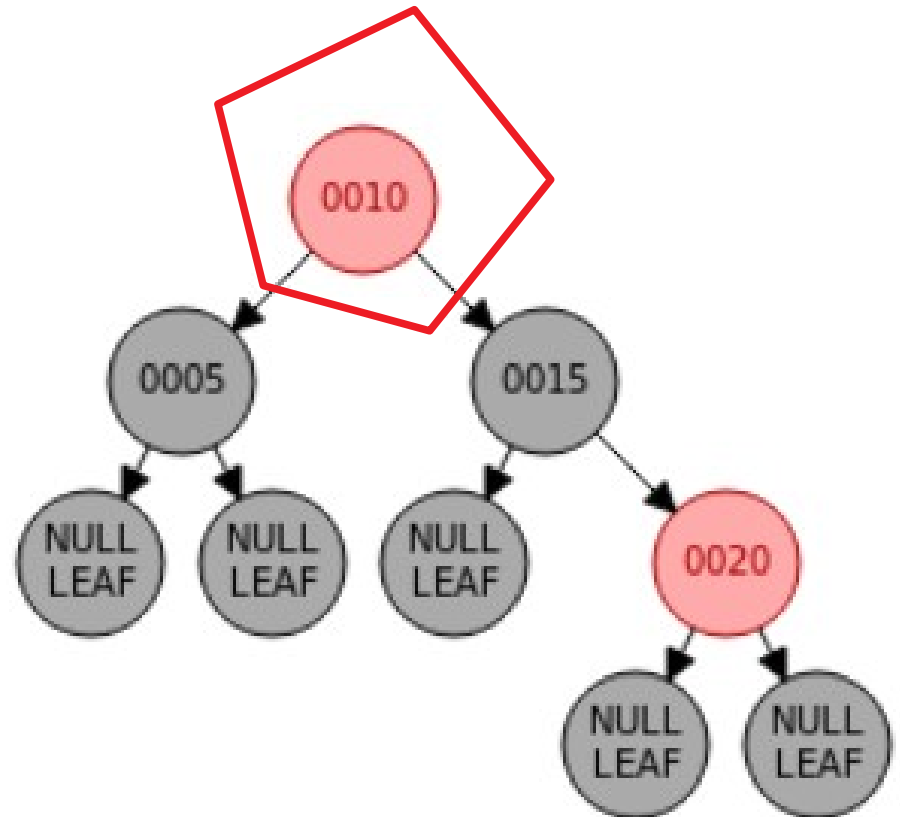
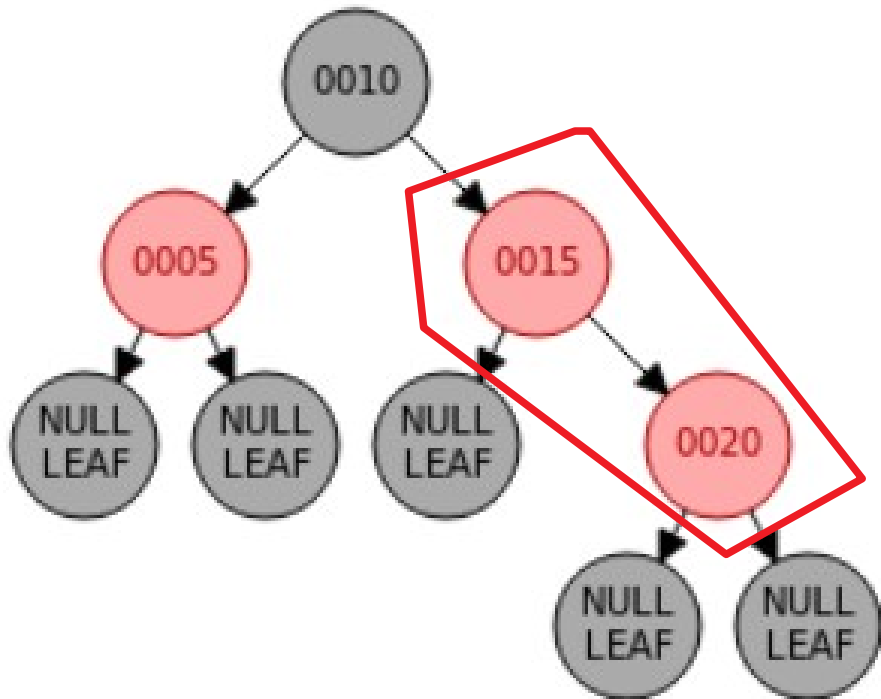
- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)
mudar as cores do pai, tio e avô



Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)

mudar as cores do pai, tio e avô



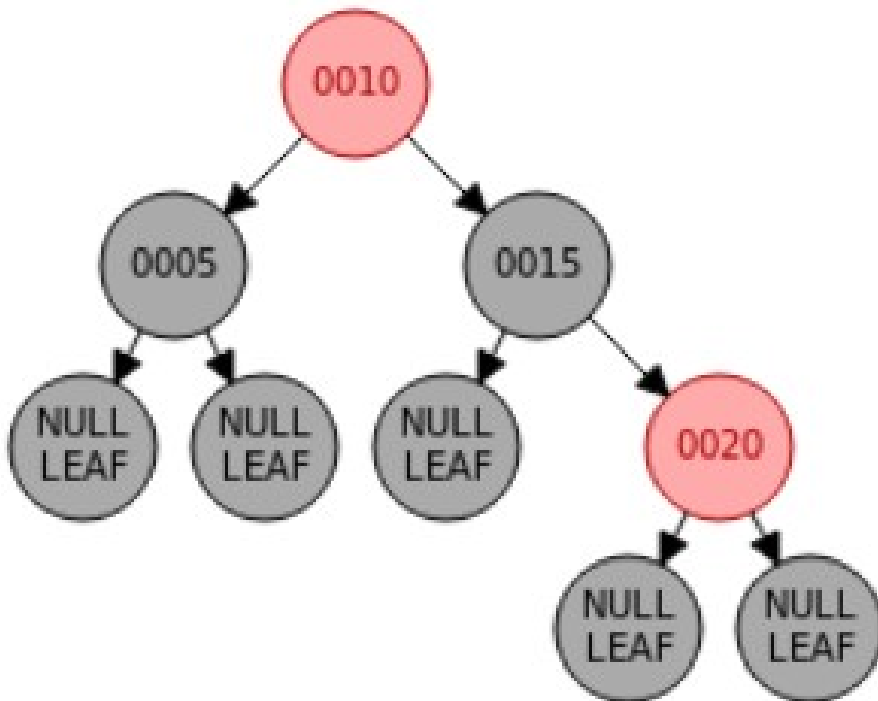
Inserção

Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)

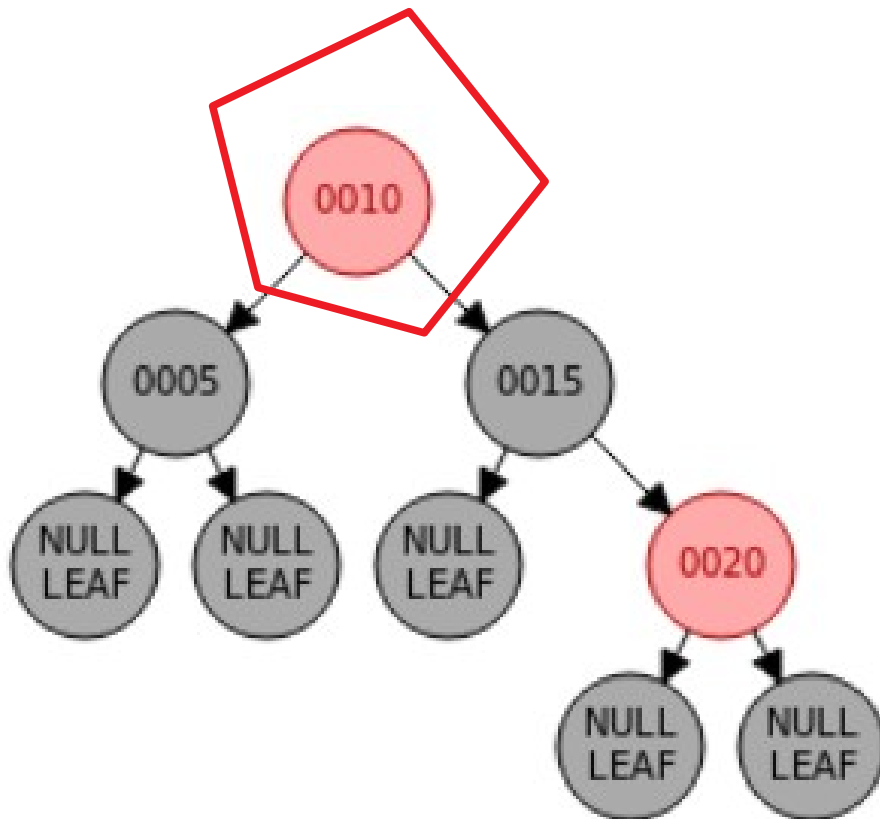
Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)



Inserção

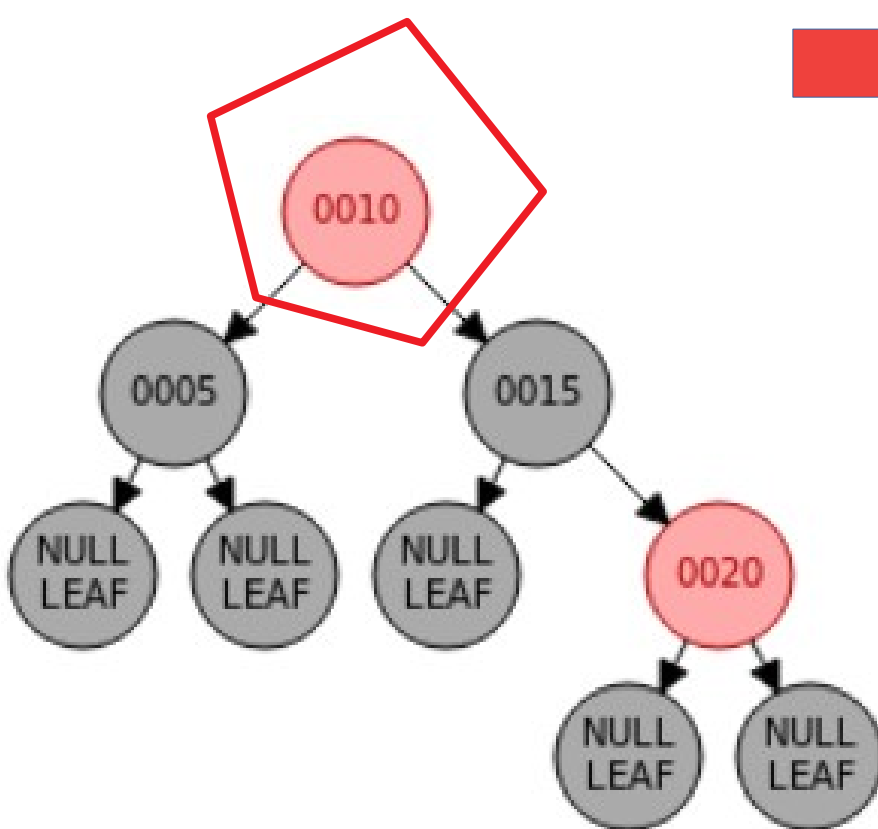
- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)



Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)

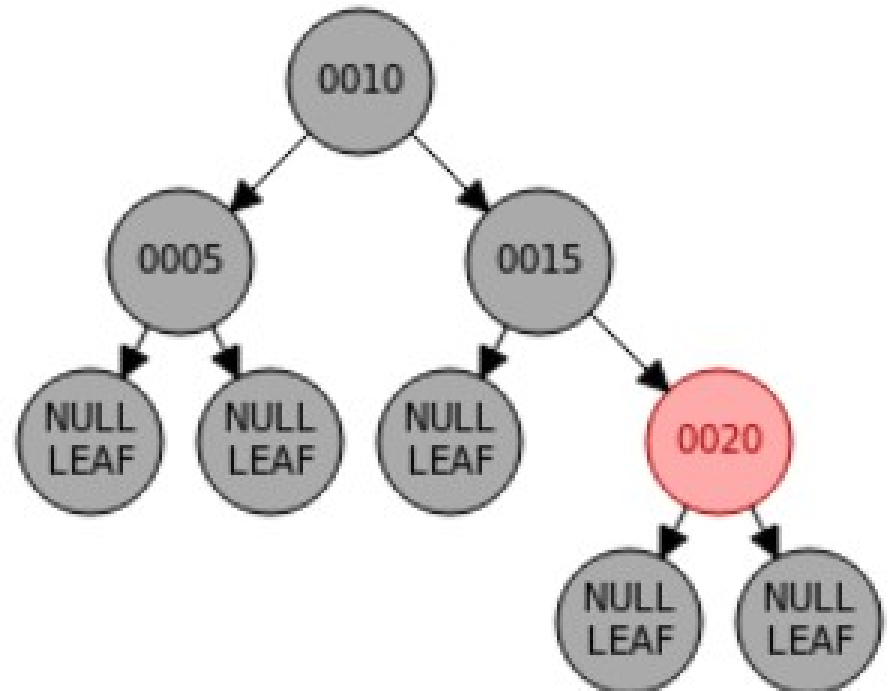
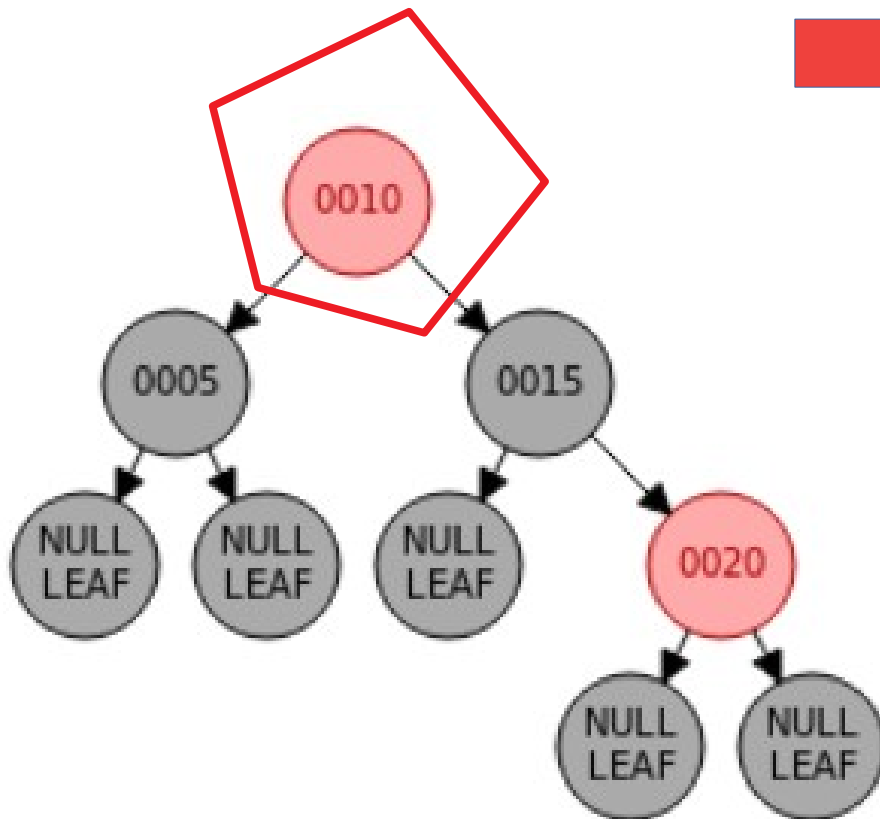
mudar a cor da raiz



Inserção

- Caso 1: o tio do elemento inserido é rubro (nó 5)

mudar a cor da raiz



Inserção

Inserção

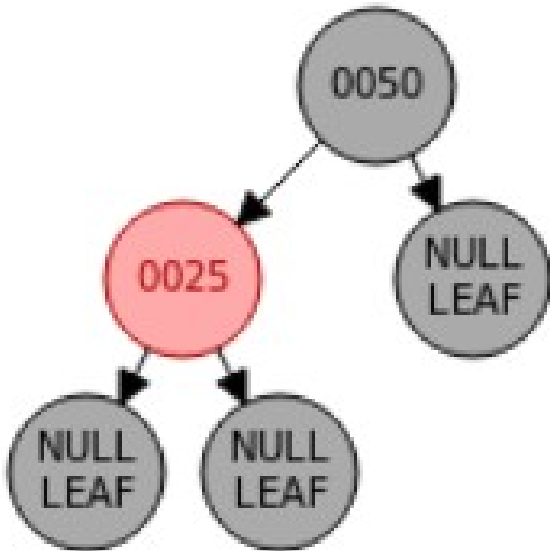
- Caso 2: o elemento inserido é vermelho, seu pai é vermelho e seu irmão é negro.

Inserção

- Caso 2: o elemento inserido é vermelho, seu pai é vermelho e seu irmão é negro.
- Existem 4 subcasos (rotações).

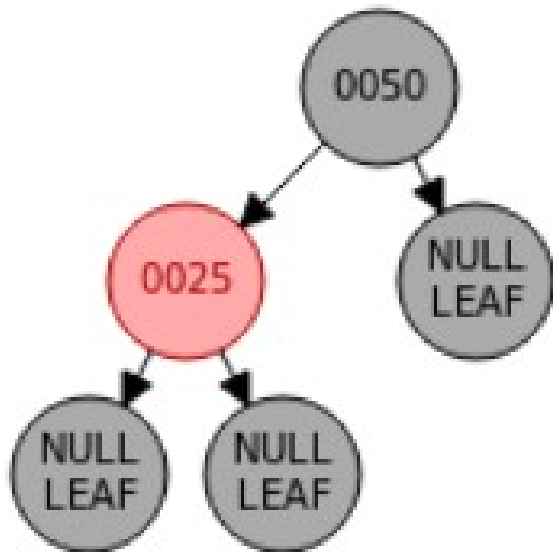
Inserção

- Caso 2: o elemento inserido é vermelho, seu pai é vermelho e seu irmão é negro.
- Existem 4 subcasos (rotações).

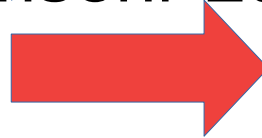


Inserção

- Caso 2: o elemento inserido é vermelho, seu pai é vermelho e seu irmão é negro.
- Existem 4 subcasos (rotações).

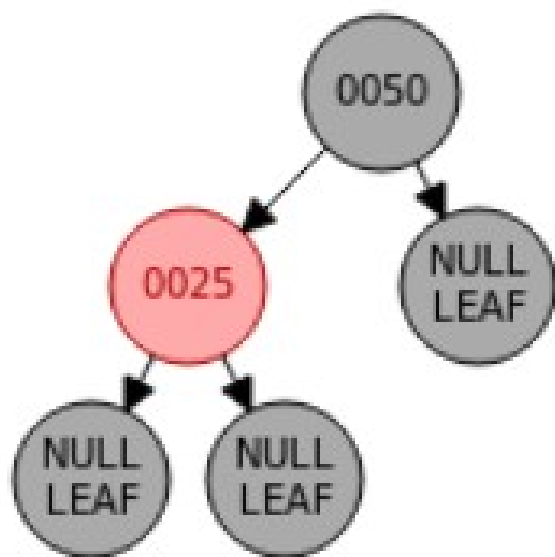


inserir **10**

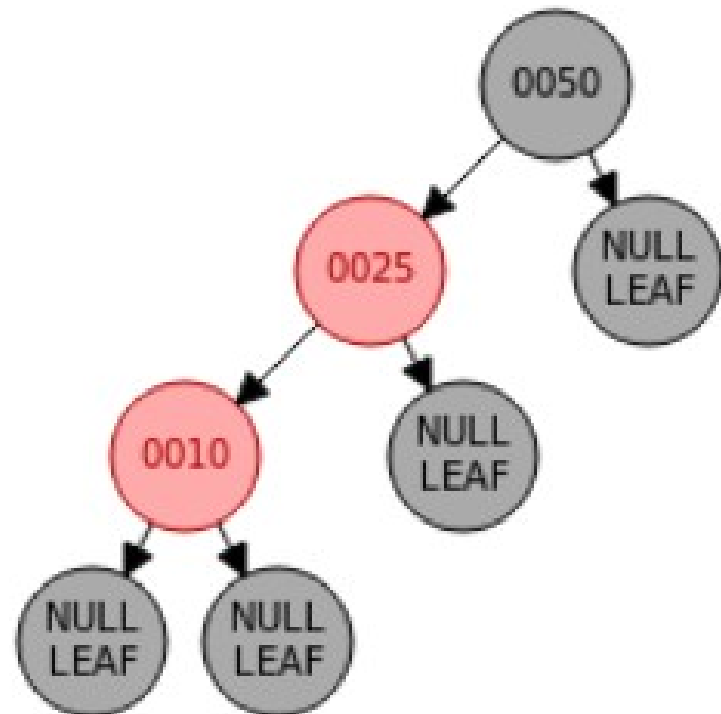


Inserção

- Caso 2: o elemento inserido é vermelho, seu pai é vermelho e seu irmão é negro.
- Existem 4 subcasos (rotações).



inserir **10**



Inserção

Inserção

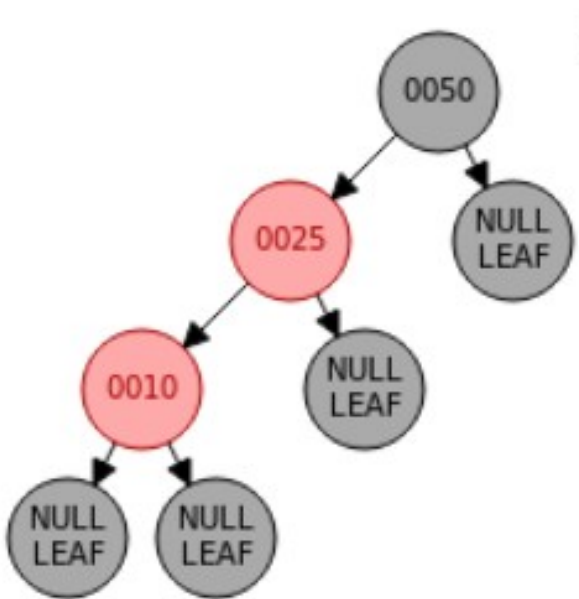
- Caso 2 (rotação 1)

Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
 - Rotação direita simples.

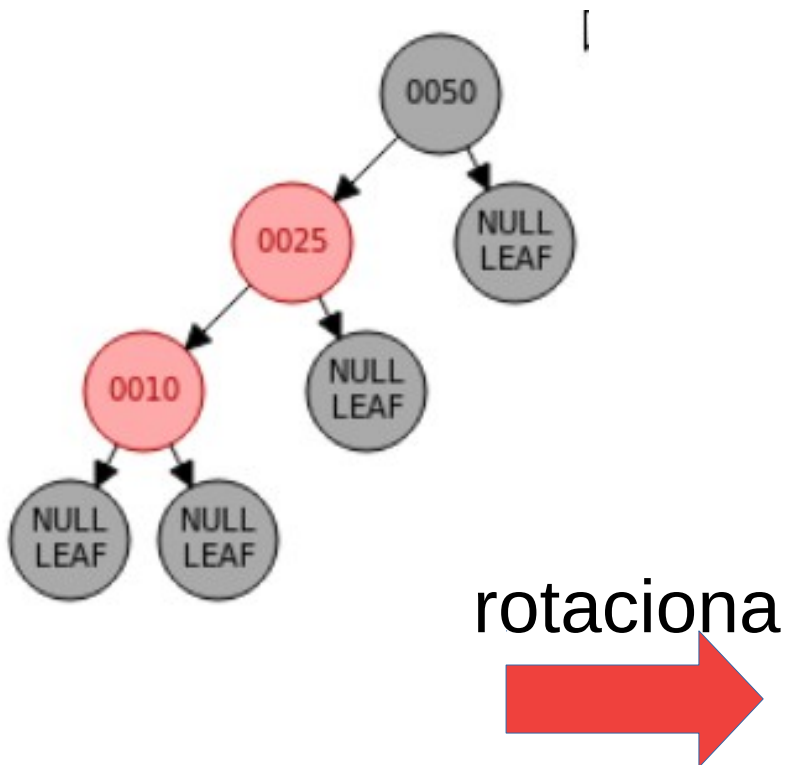
Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
 - Rotação direita simples.



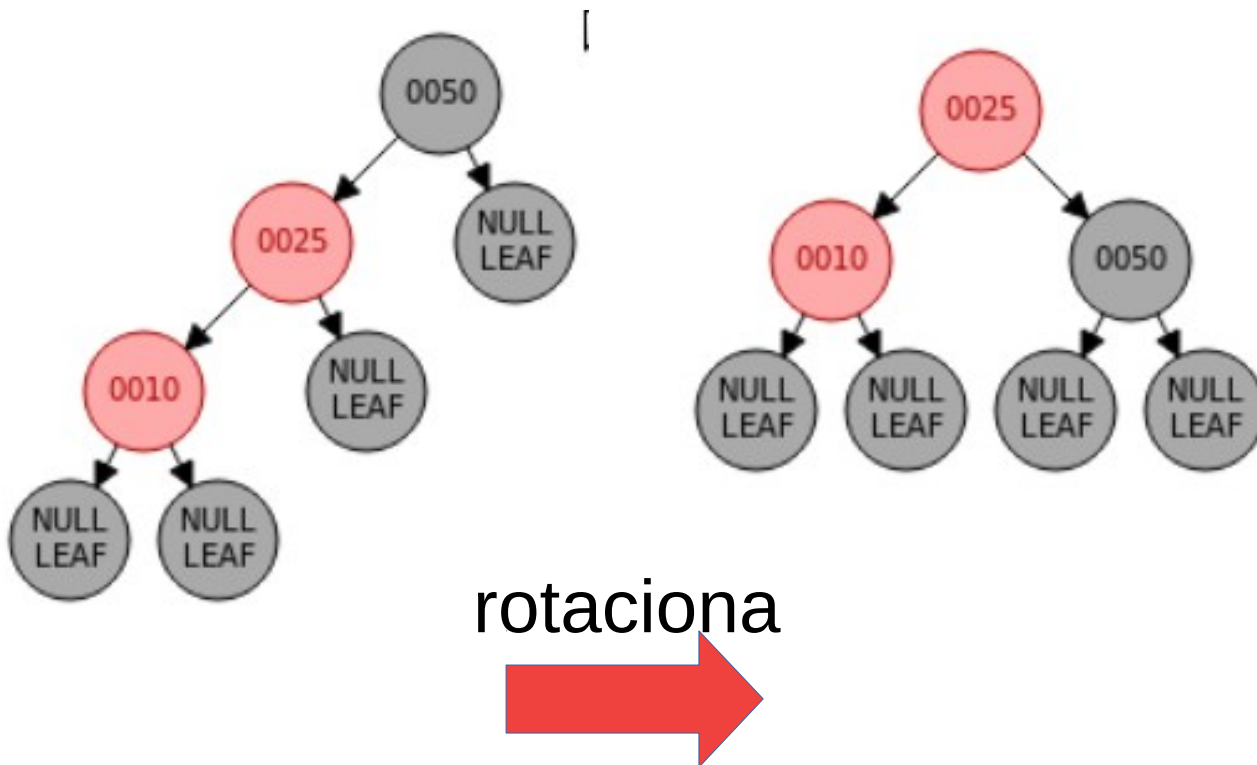
Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
 - Rotação direita simples.



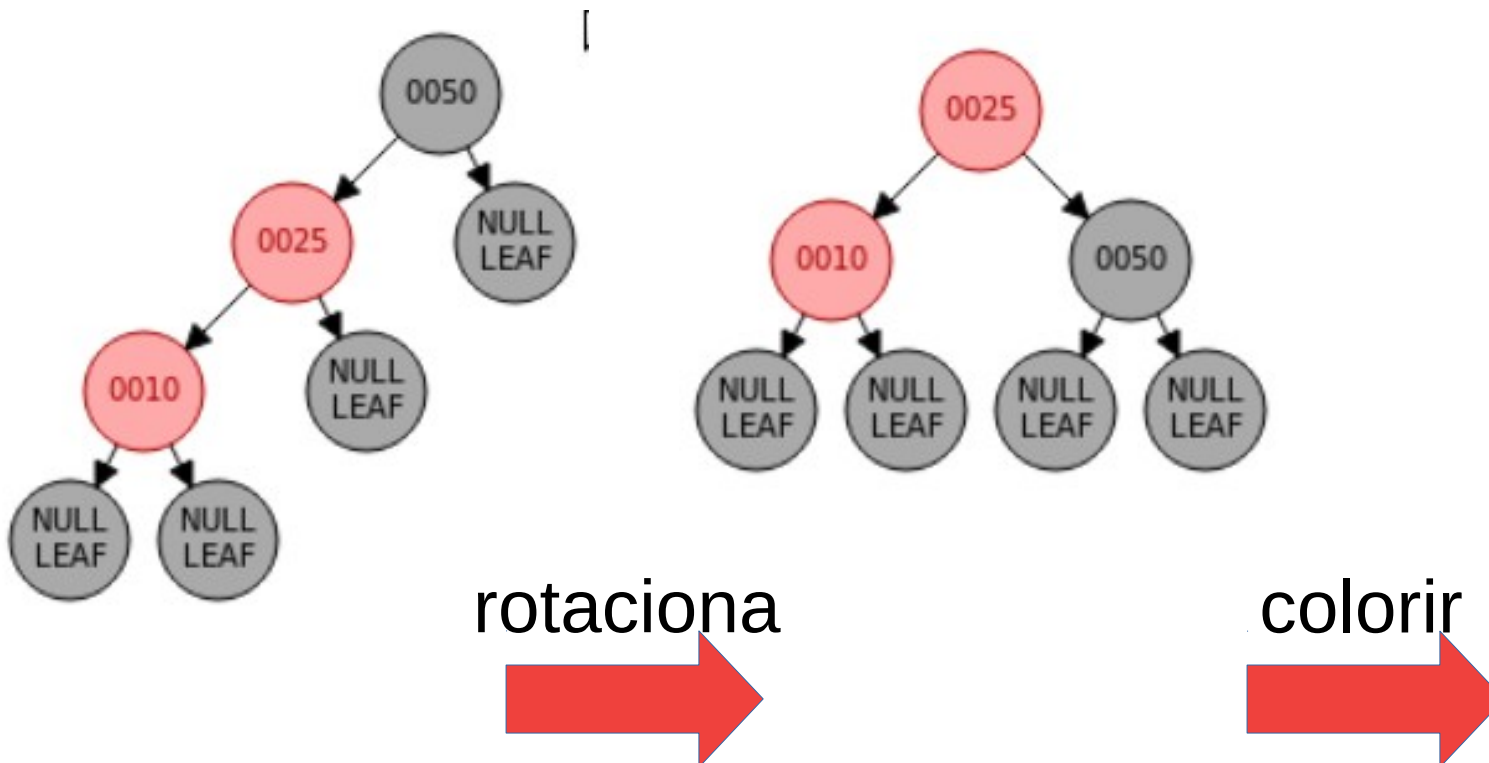
Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
 - Rotação direita simples.



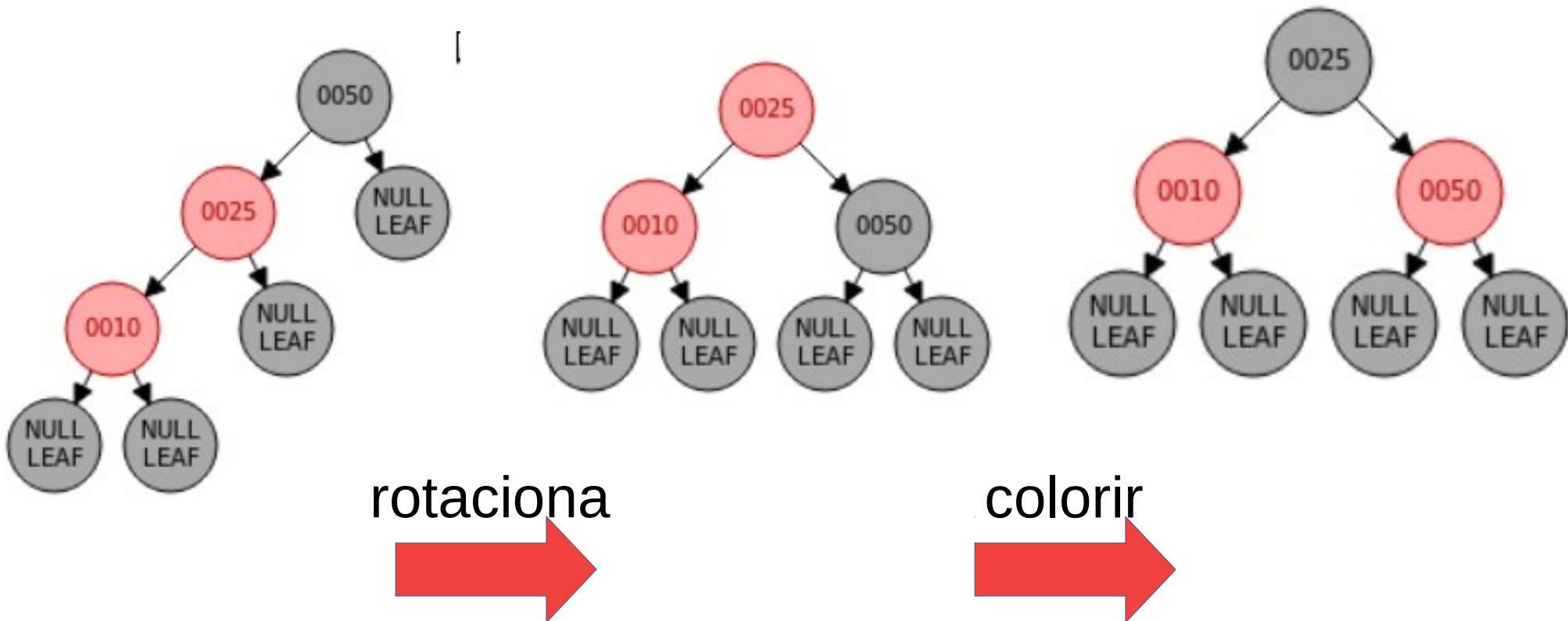
Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
 - Rotação direita simples.



Inserção

- Caso 2 (rotação 1)
 - Rotação direita simples.



Inserção

Inserção

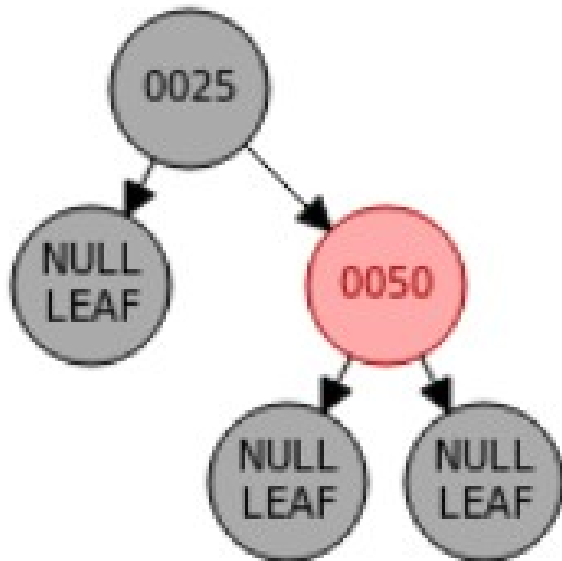
- Caso 2 (rotação 2)

Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.

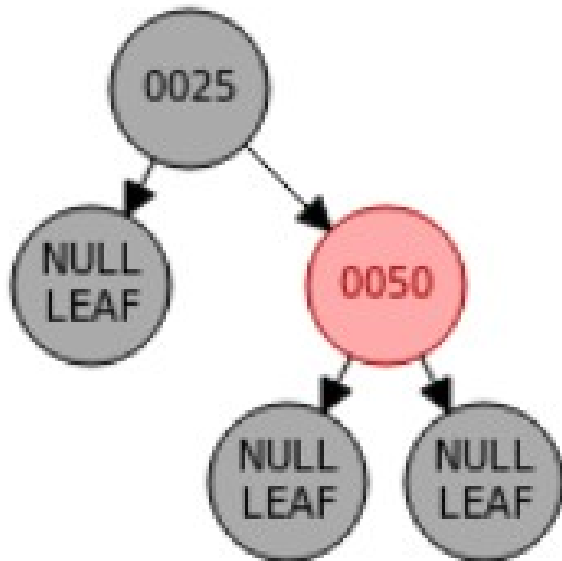
Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.



Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.

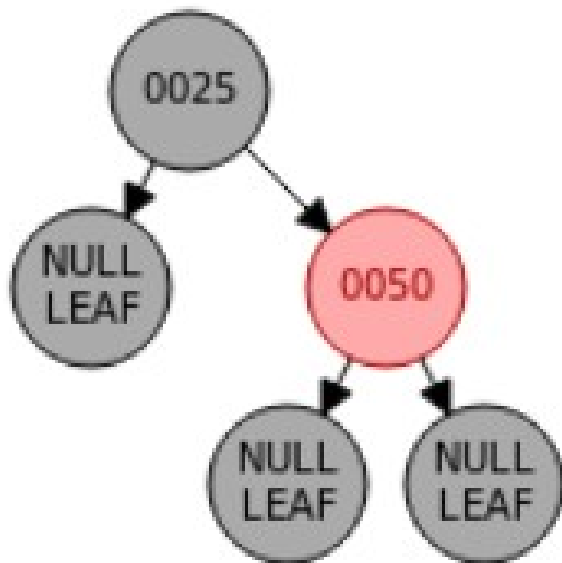


inserir **70**

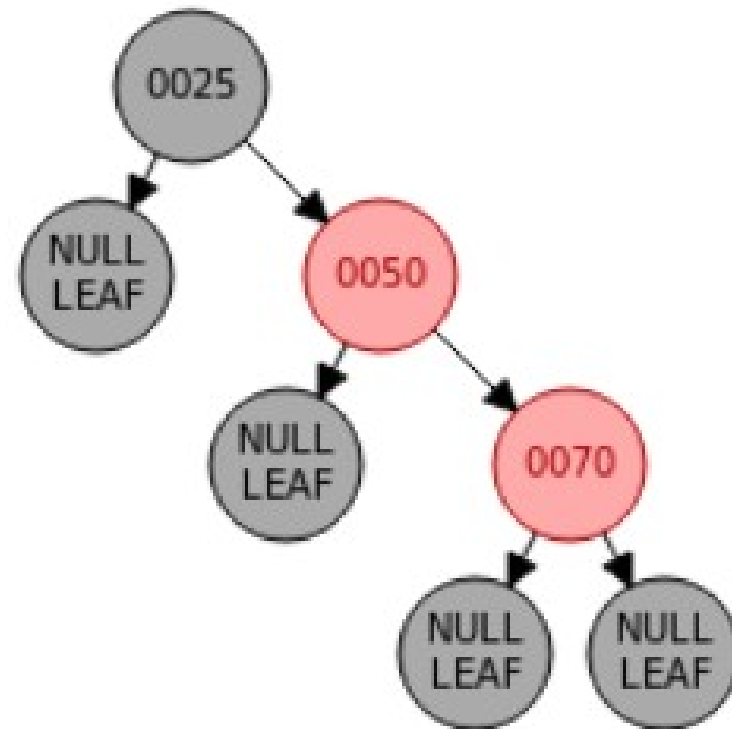


Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.



inserir 70

Inserção

Inserção

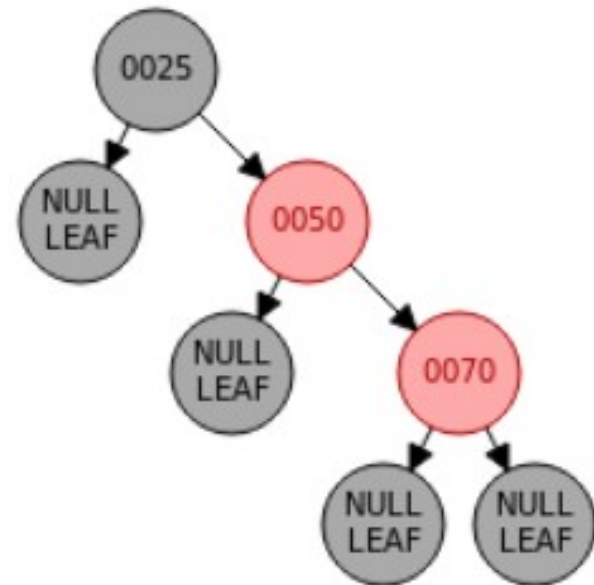
- Caso 2 (rotação 2)

Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.

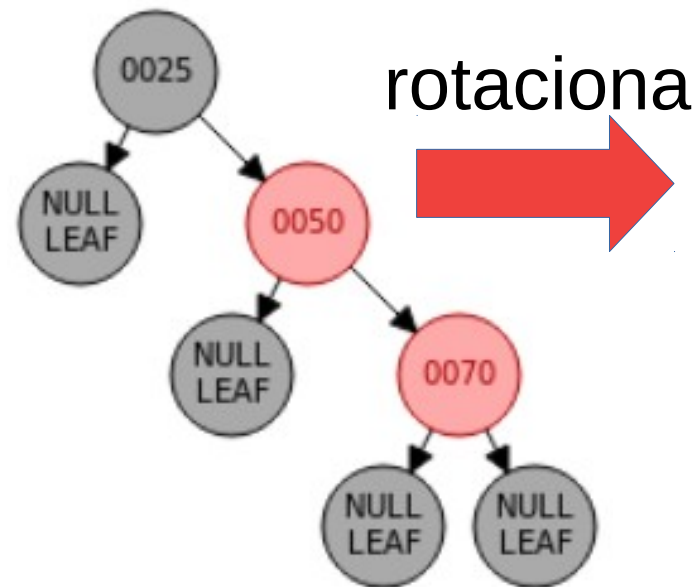
Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.



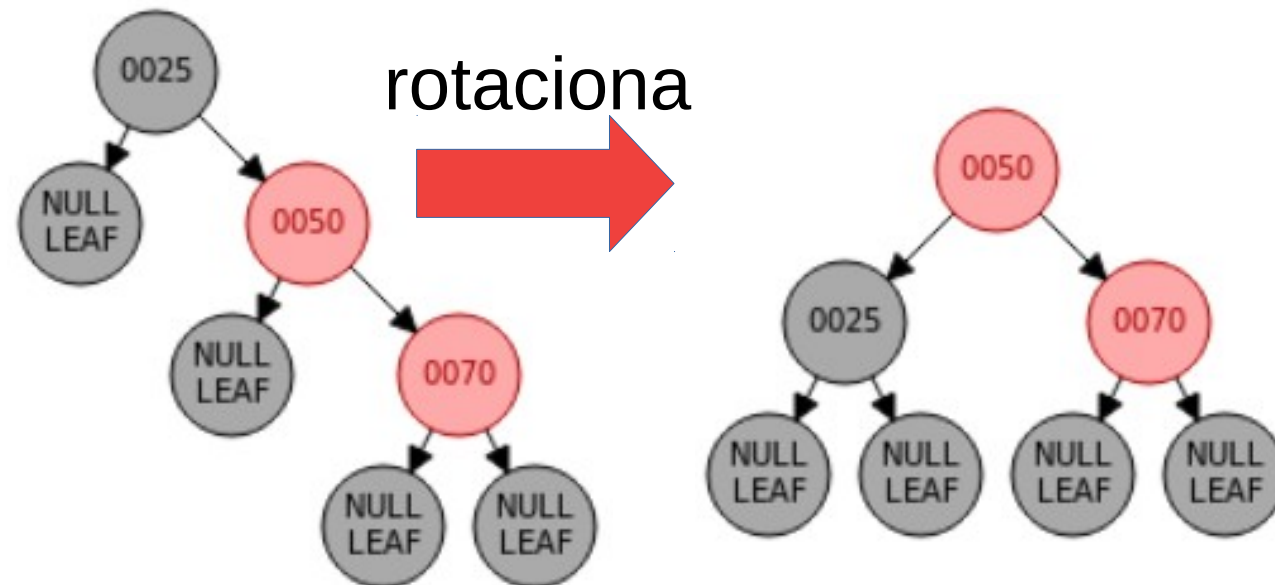
Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.



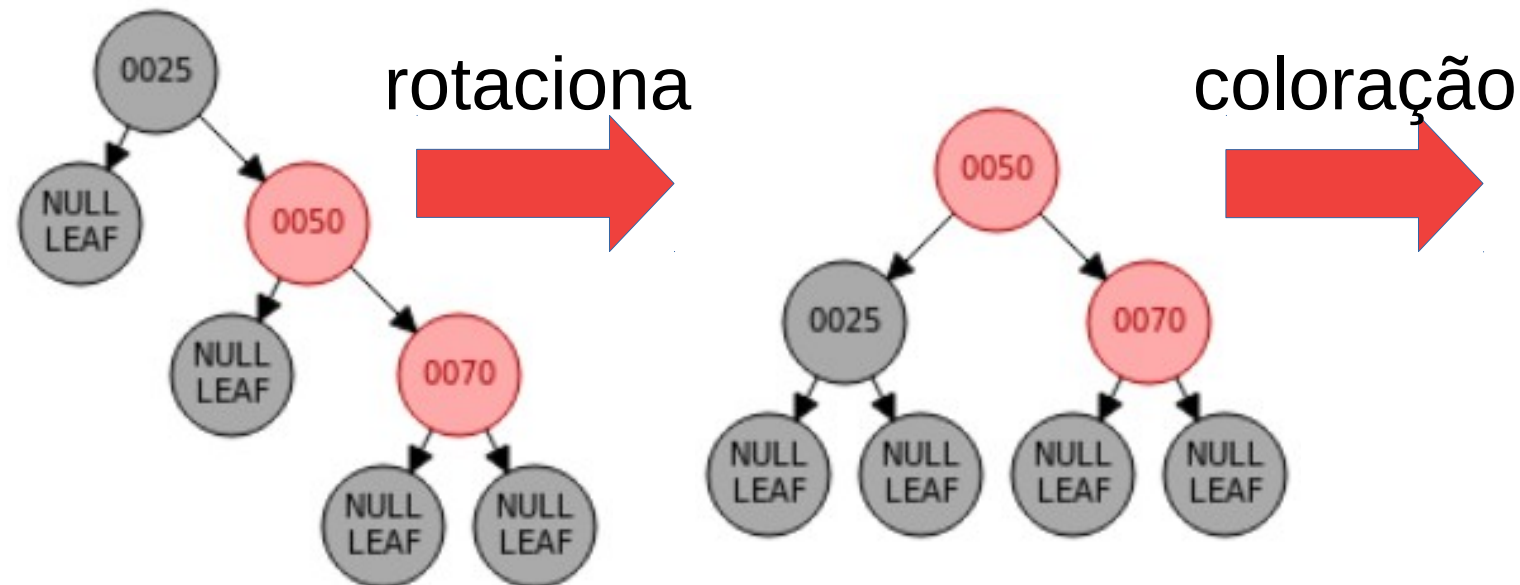
Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.



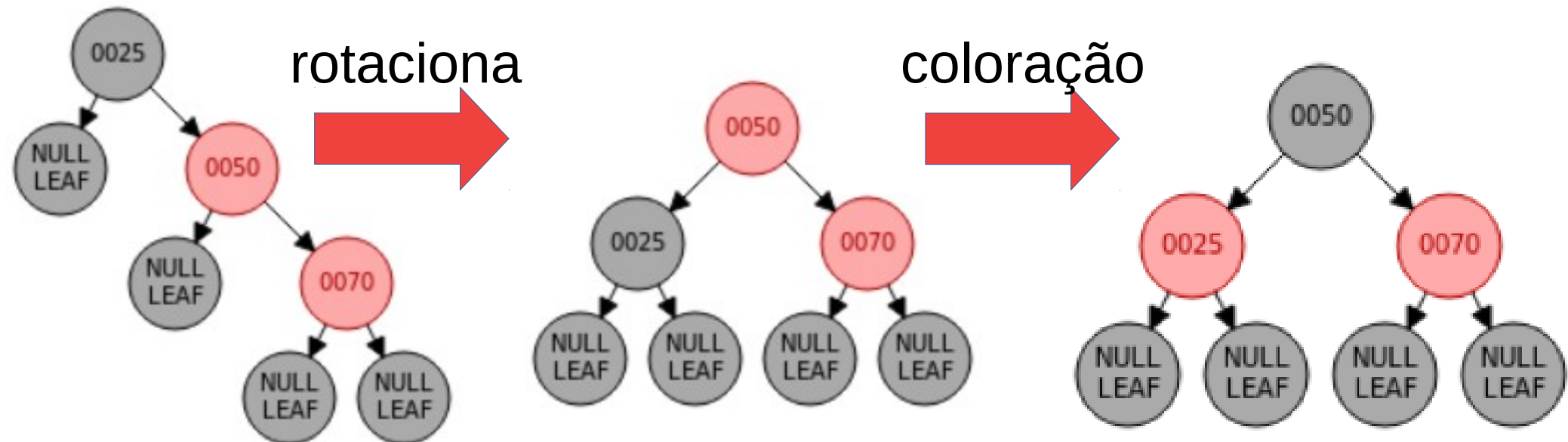
Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.



Inserção

- Caso 2 (rotação 2)
 - Rotação esquerda simples.



Inserção

Inserção

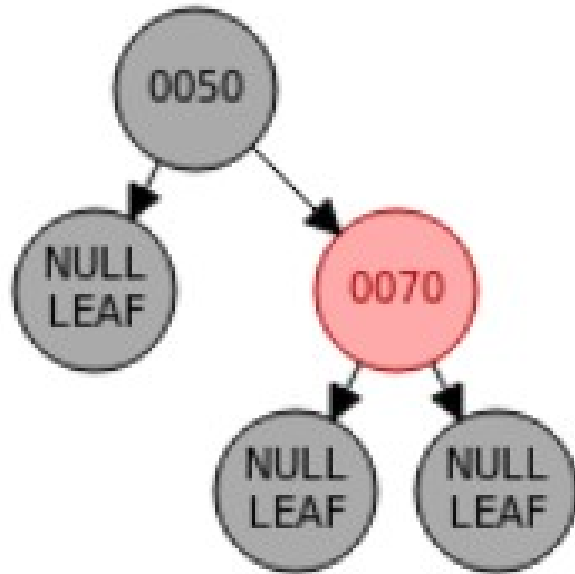
- Caso 2 (rotação 3)

Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla

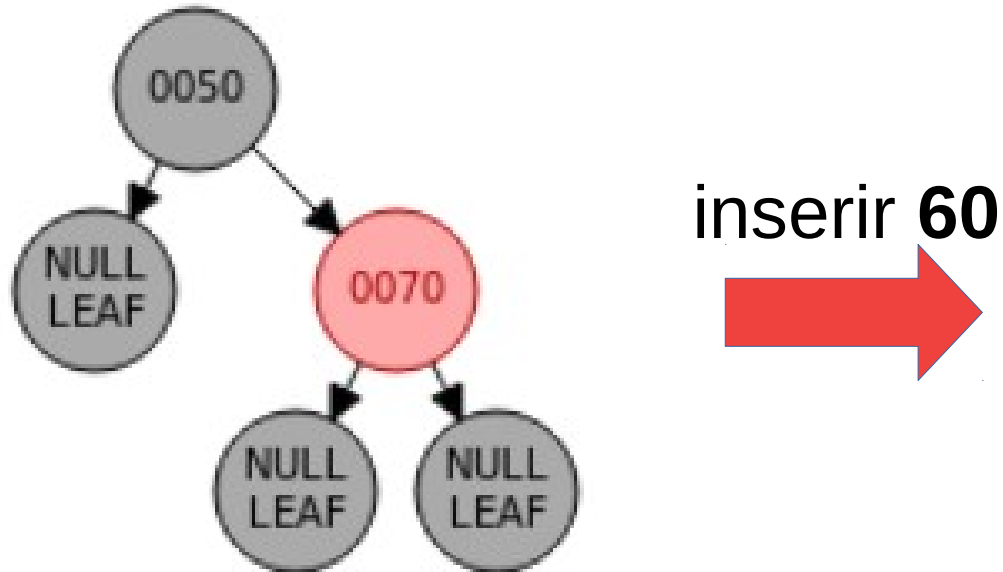
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



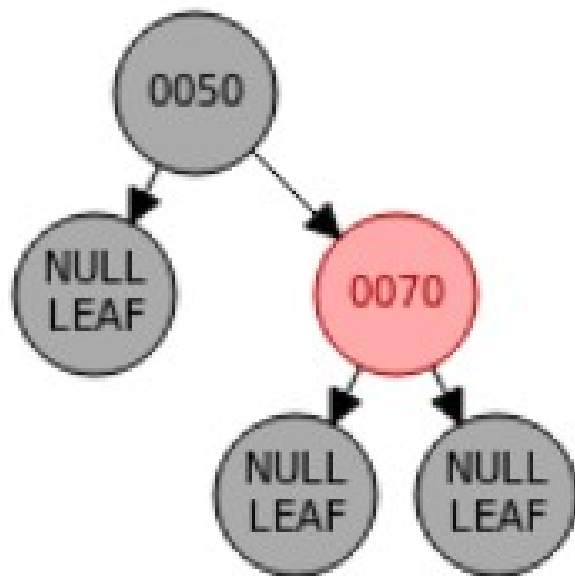
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla

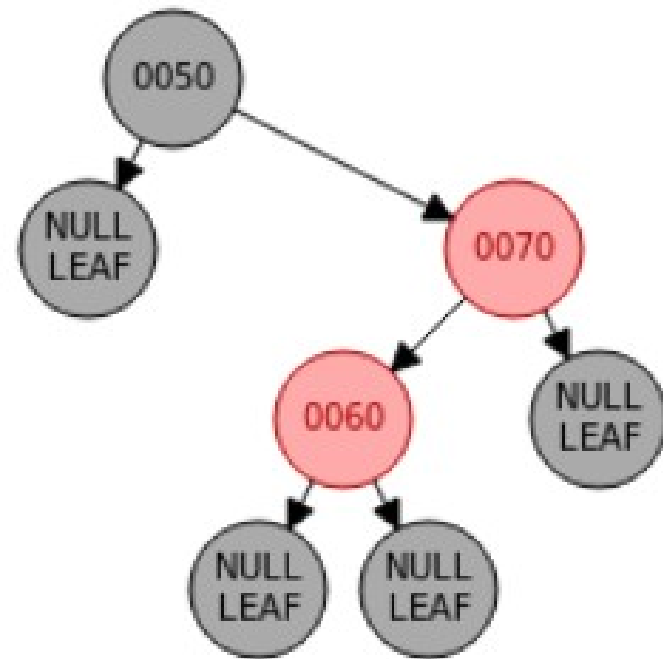


Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



inserir 60



Inserção

Inserção

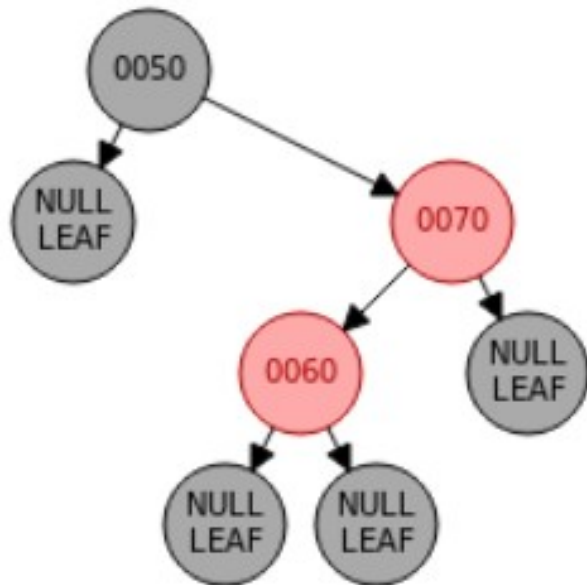
- Caso 2 (rotação 3)

Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla

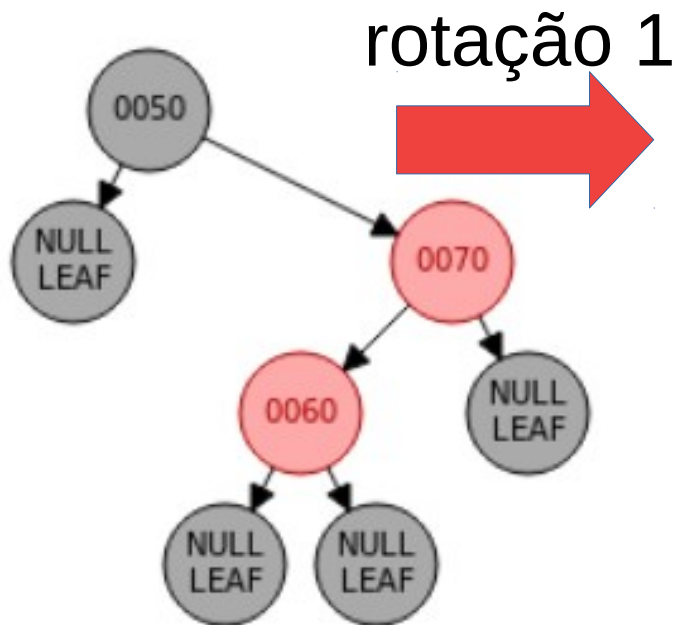
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



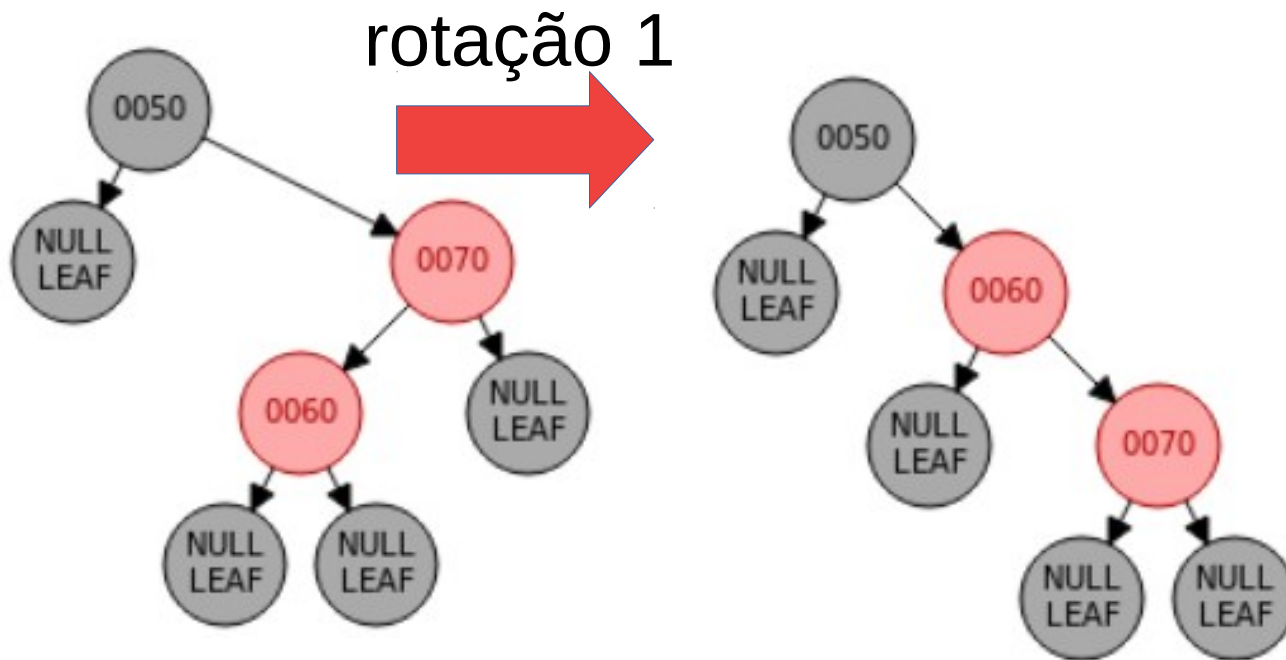
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



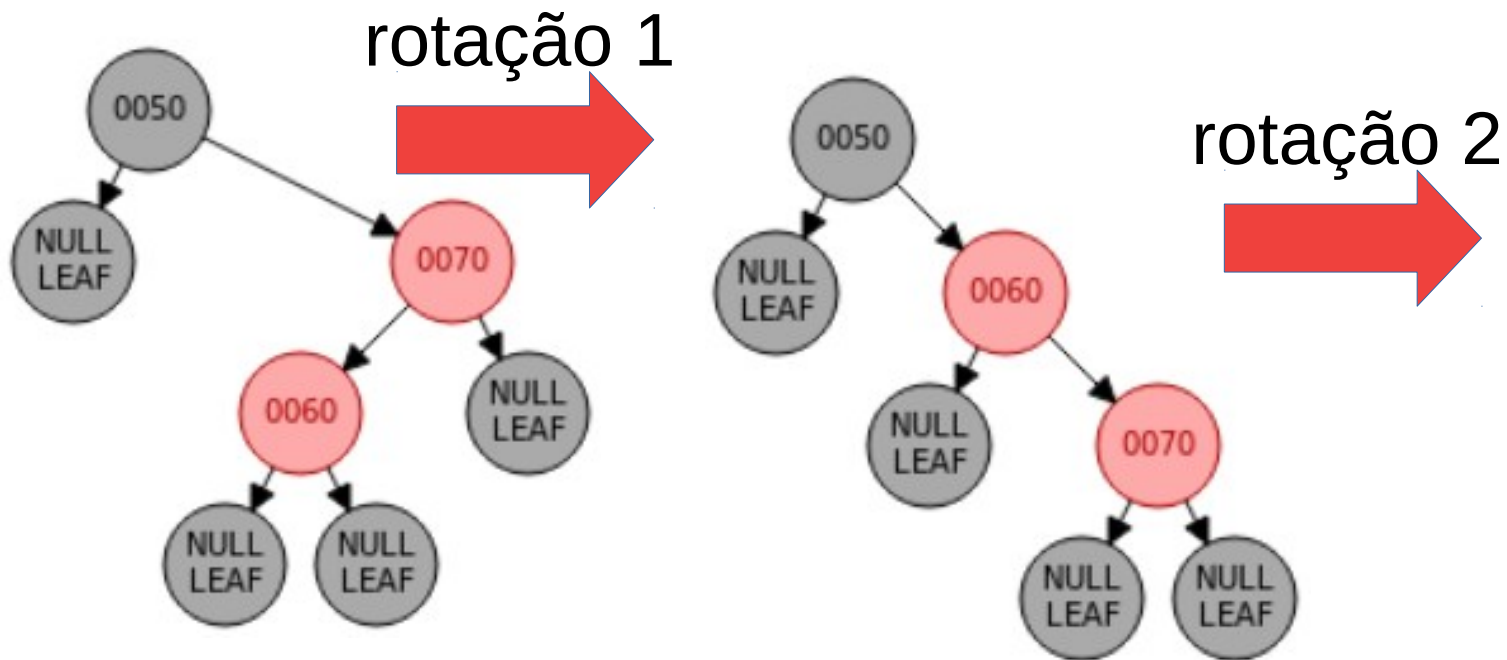
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



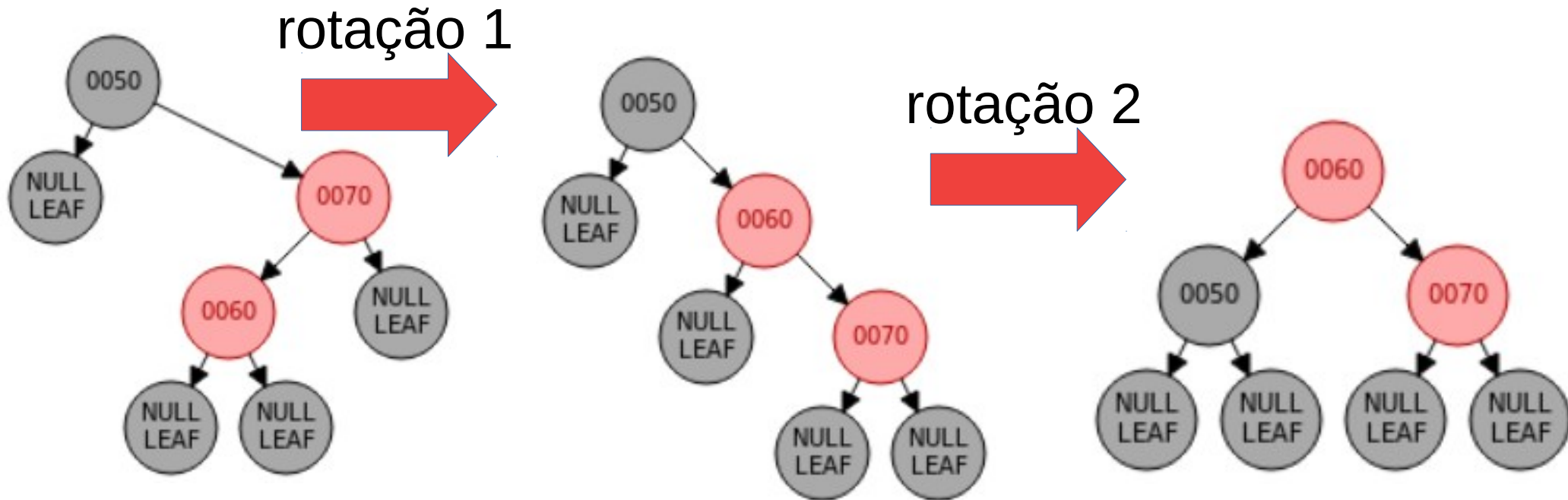
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



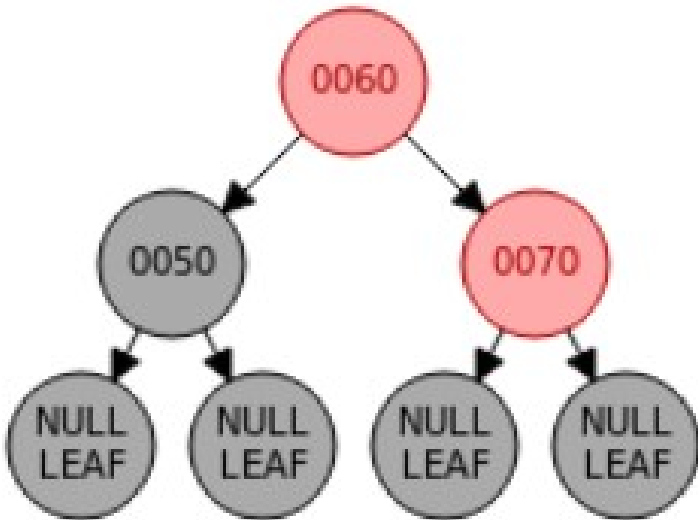
Inserção

Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla

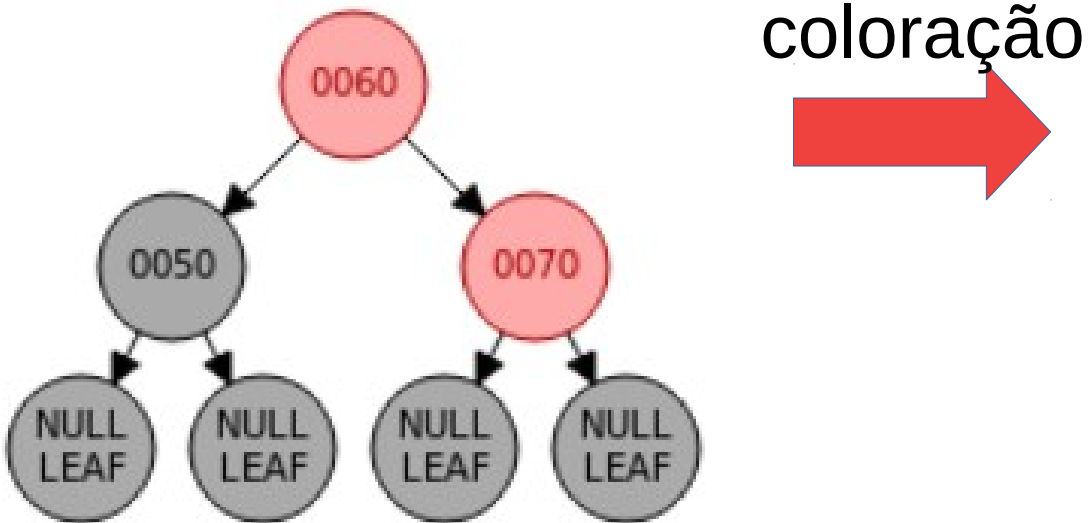
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



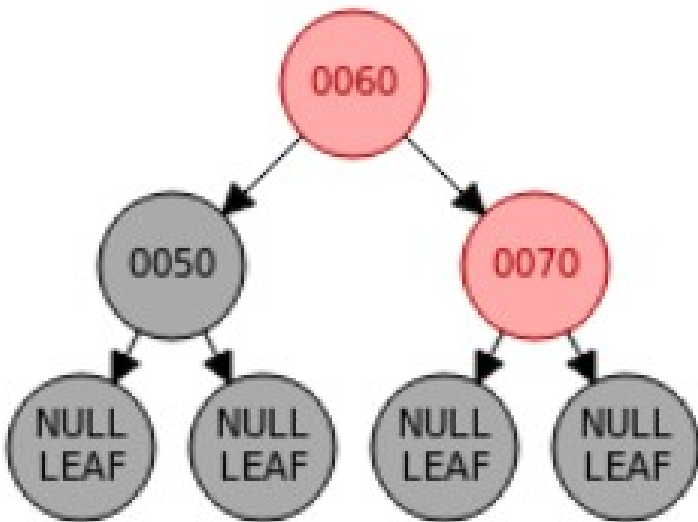
Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla

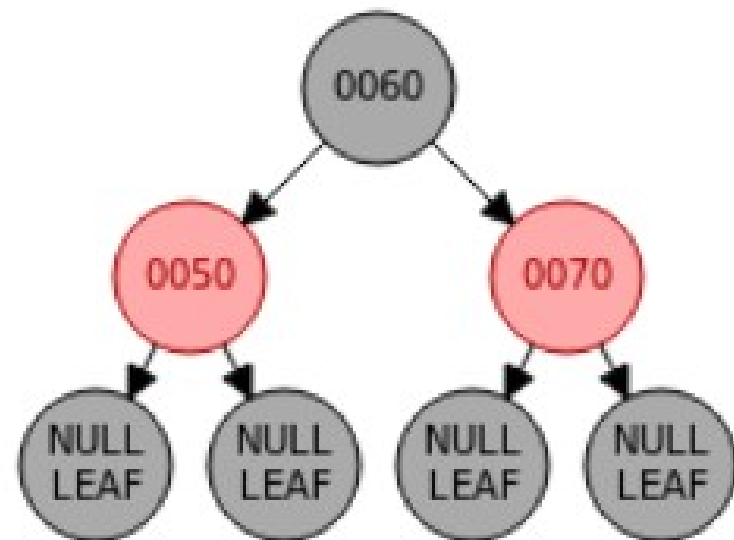


Inserção

- Caso 2 (rotação 3)
 - Rotação esquerda dupla



coloração
→



Inserção

Inserção

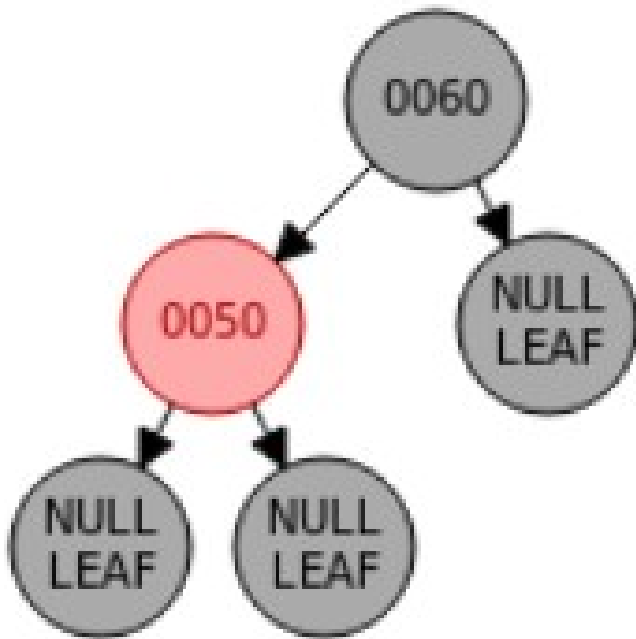
- Caso 2 (rotação 4)

Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla

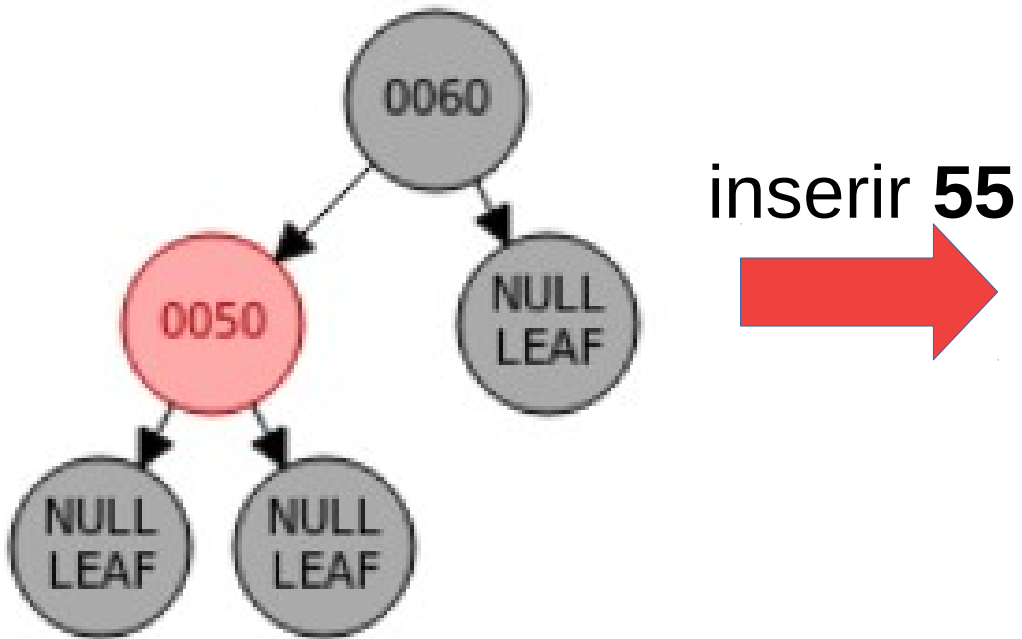
Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



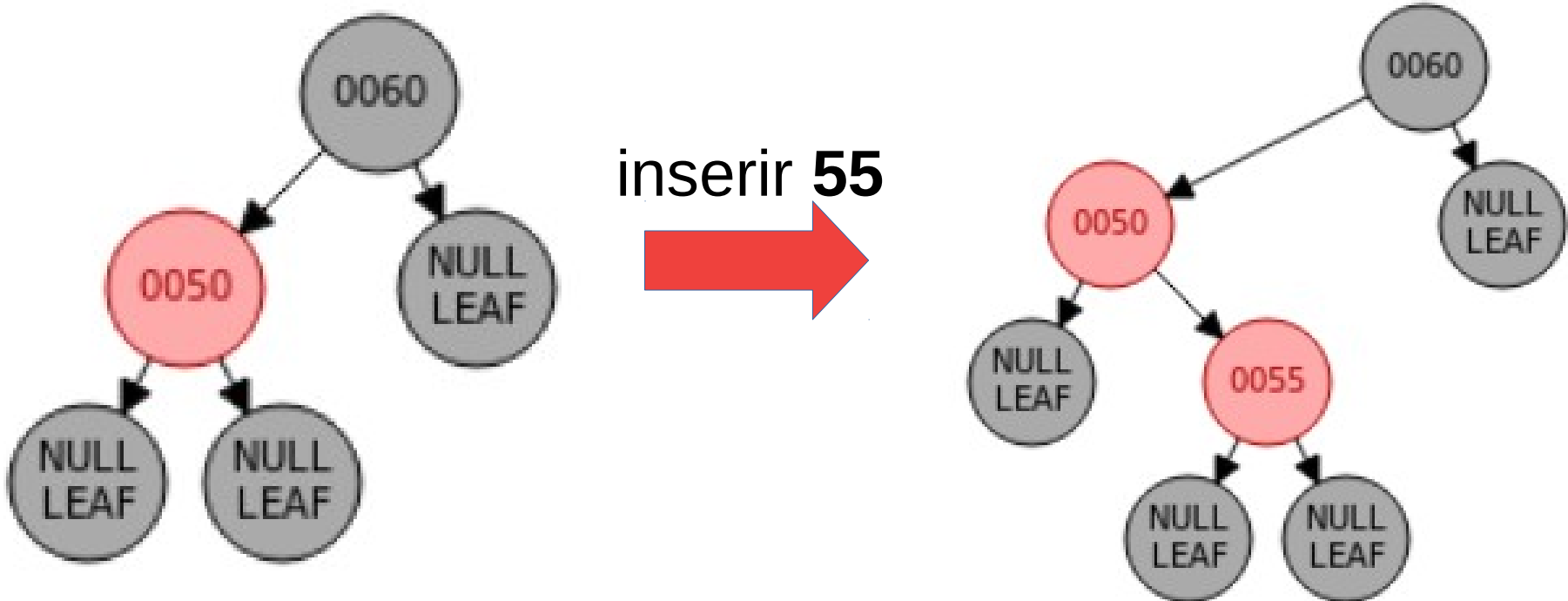
Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



Inserção

Inserção

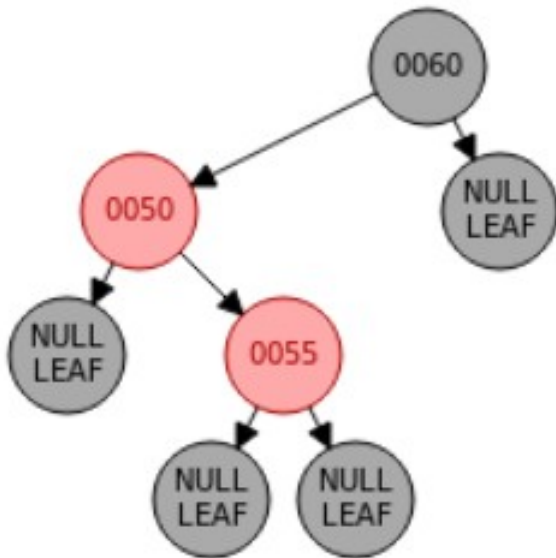
- Caso 2 (rotação 4)

Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla

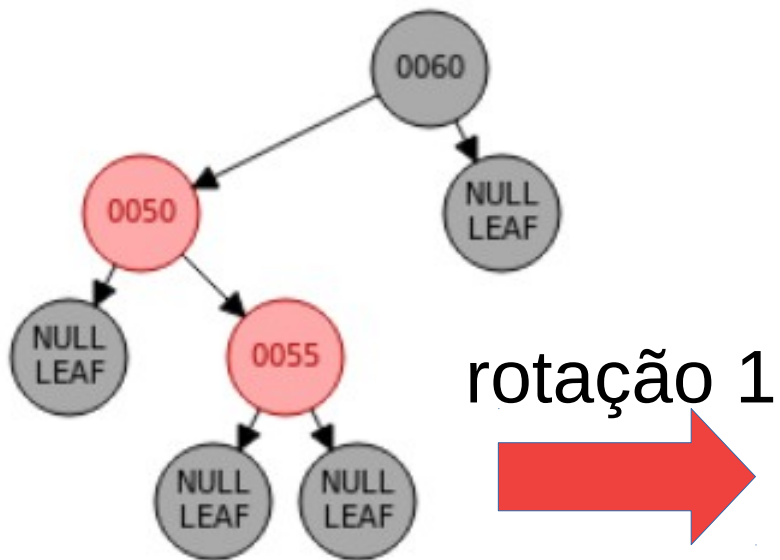
Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



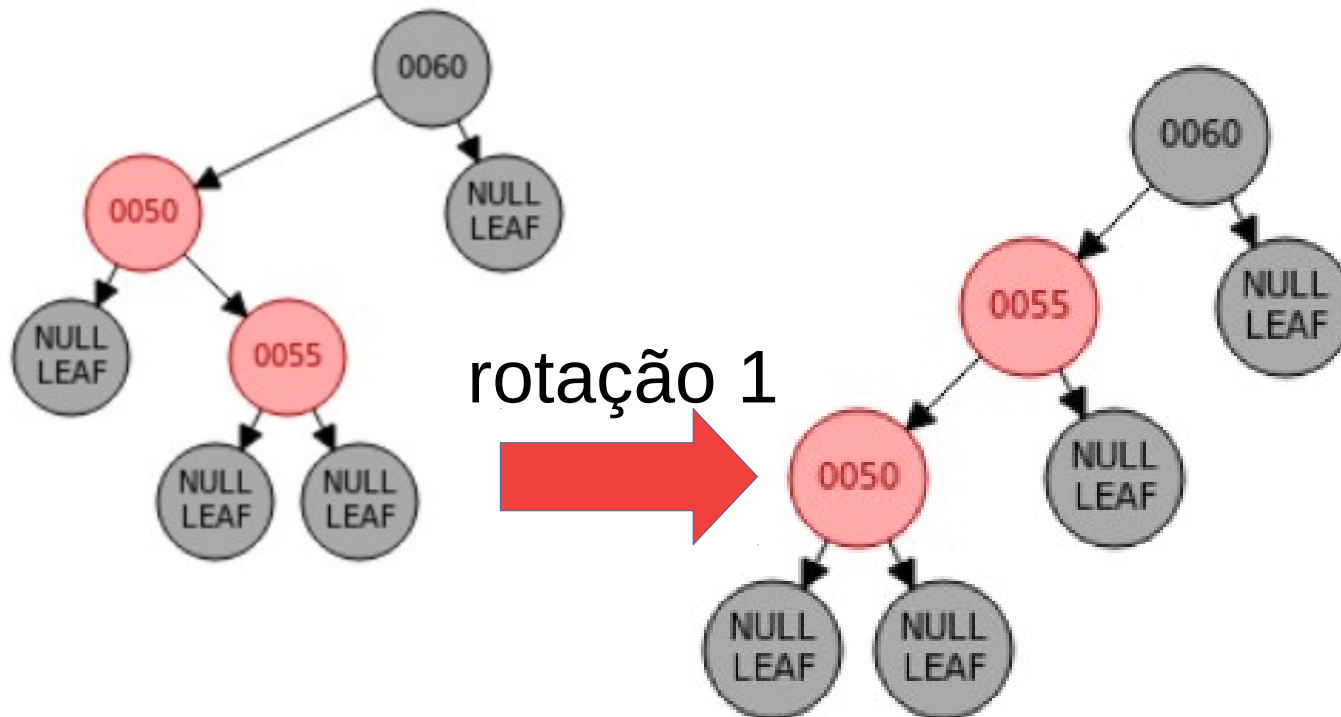
Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



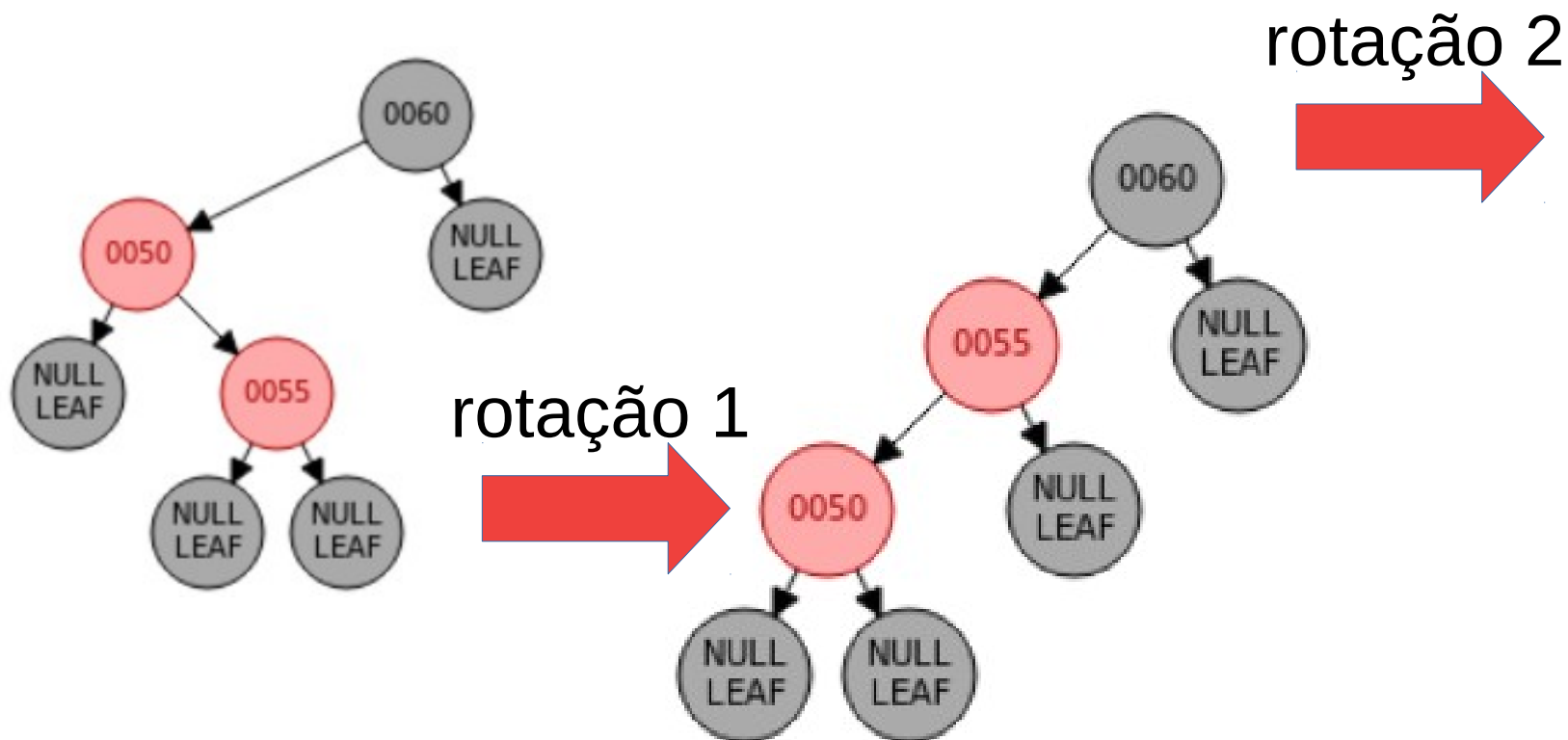
Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



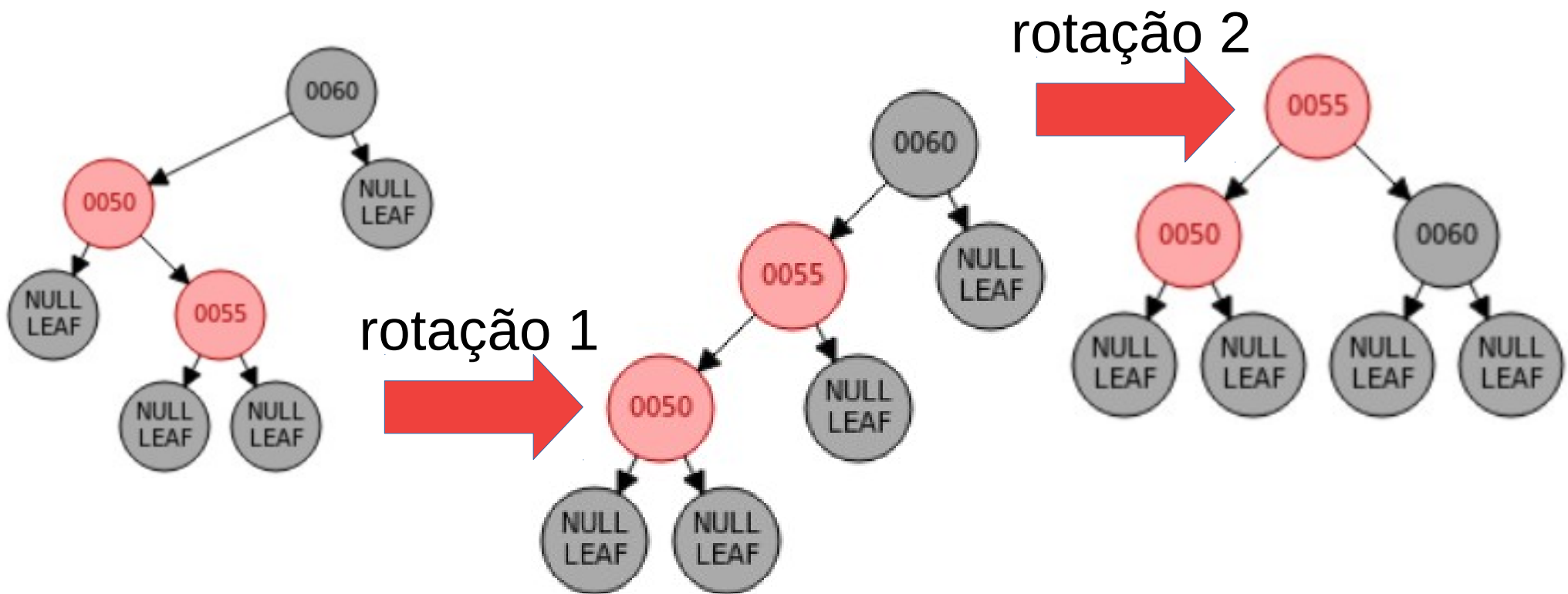
Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



Inserção

Inserção

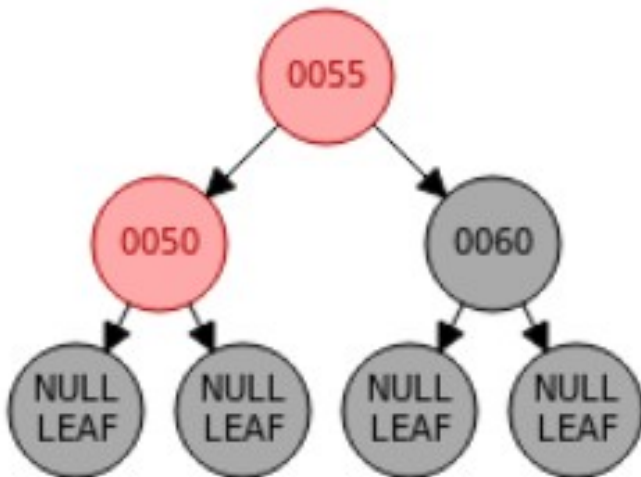
- Caso 2 (rotação 4)

Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla

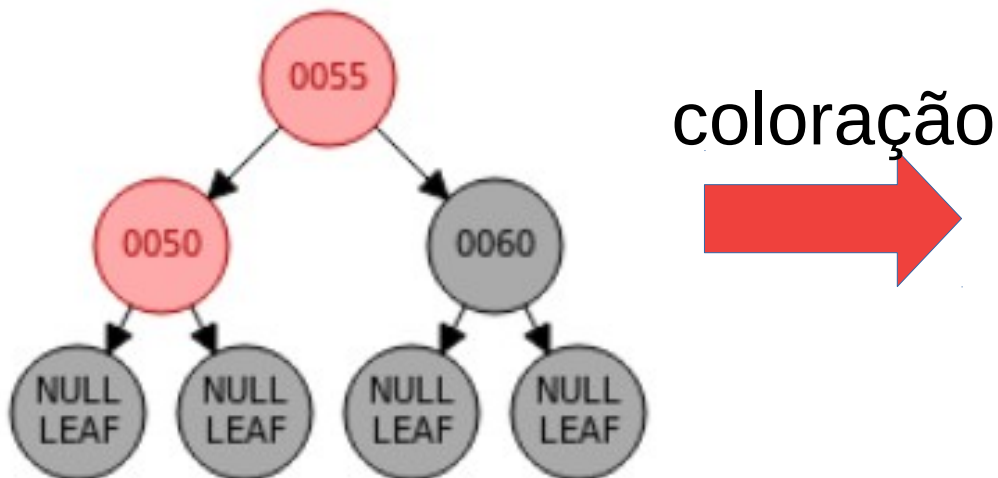
Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



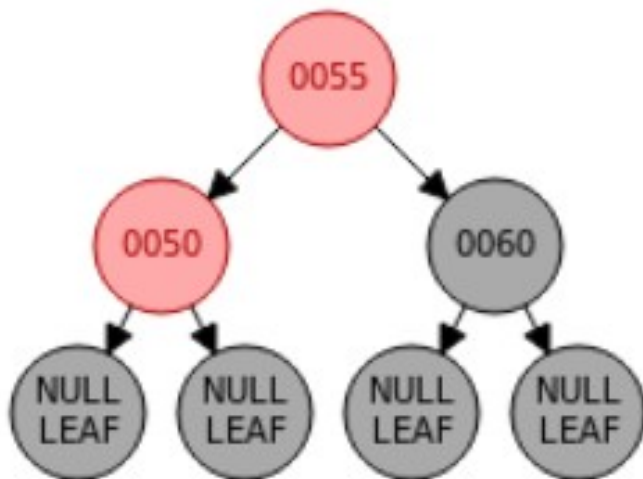
Inserção


- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla

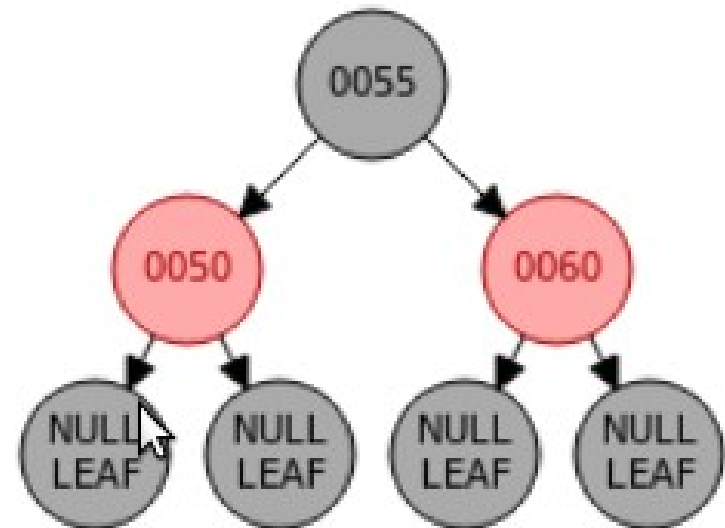


Inserção

- Caso 2 (rotação 4)
 - Rotação direita dupla



coloração




Remoção

Remoção

- É um pouco mais complexa do que a inserção.

Remoção

- É um pouco mais complexa do que a inserção.
- Passos:

Remoção

- É um pouco mais complexa do que a inserção.
- Passos:
 - Encontre o nó V que será removido.

Remoção

- É um pouco mais complexa do que a inserção.
- Passos:
 - Encontre o nó V que será removido.
 - Remova o nó V da mesma maneira que uma ABB.

Remoção

- É um pouco mais complexa do que a inserção.
- Passos:
 - Encontre o nó V que será removido.
 - Remova o nó V da mesma maneira que uma ABB.
 - Ajuste os critérios da ARN.

Remoção

Remoção

- Remoção nó vermelho

Remoção

- Remoção nó vermelho
 - A altura preta não muda.

Remoção

- Remoção nó vermelho
 - A altura preta não muda.
 - O nó vermelho não pode ser raiz e, portanto, a raiz continuará preta.

Remoção

- Remoção nó vermelho
 - A altura preta não muda.
 - O nó vermelho não pode ser raiz e, portanto, a raiz continuará preta.
- Remoção nó preto

Remoção

- Remoção nó vermelho
 - A altura preta não muda.
 - O nó vermelho não pode ser raiz e, portanto, a raiz continuará preta.
- Remoção nó preto
 - Pode causar problema nas propriedades.

Remoção Nó Vermelho

Remoção Nó Vermelho

- Situação 1

Remoção Nó Vermelho

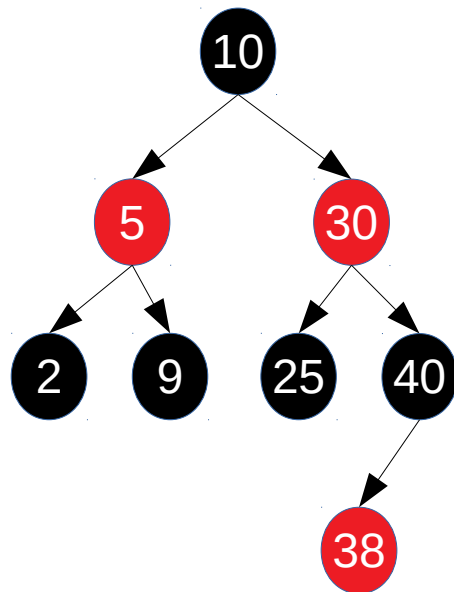
- Situação 1
 - O nó removido é rubro e é folha.

Remoção Nó Vermelho

- Situação 1
 - O nó removido é rubro e é folha.
 - O nó deve ser removido e nada mais precisa ser feito.

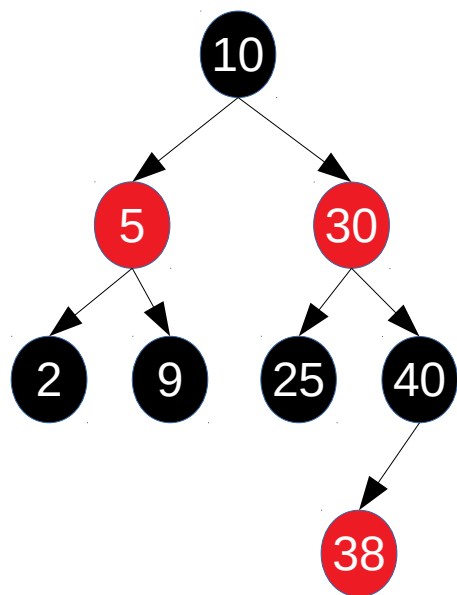
Remoção Nó Vermelho

- Situação 1
 - O nó removido é rubro e é folha.
 - O nó deve ser removido e nada mais precisa ser feito.



Remoção Nó Vermelho

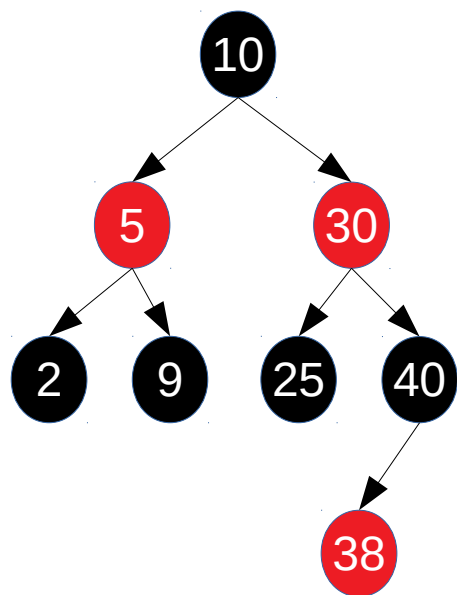
- Situação 1
 - O nó removido é rubro e é folha.
 - O nó deve ser removido e nada mais precisa ser feito.



os nós folhas nil
podem ser ocultados

Remoção Nó Vermelho

- Situação 1
 - O nó removido é rubro e é folha.
 - O nó deve ser removido e nada mais precisa ser feito.
 - Por exemplo, remover o nó 38:

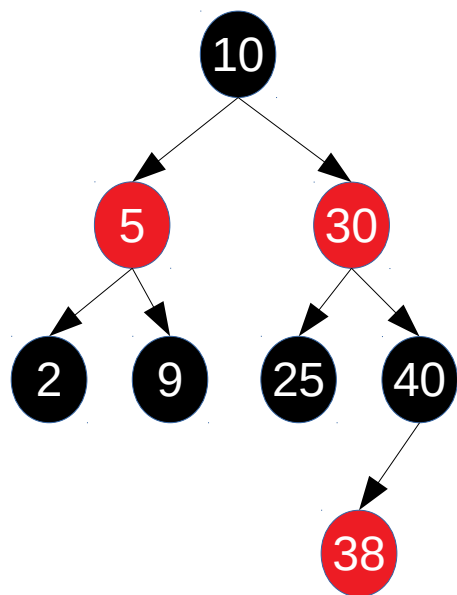


os nós folhas nil
podem ser ocultados



Remoção Nó Vermelho

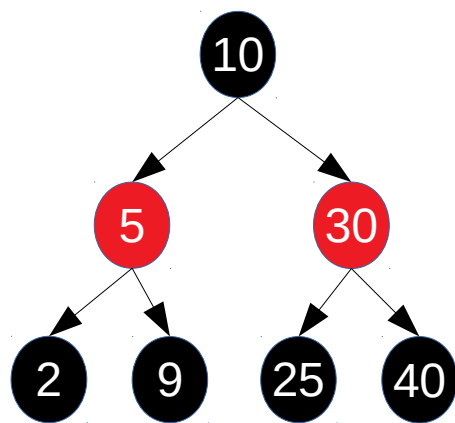
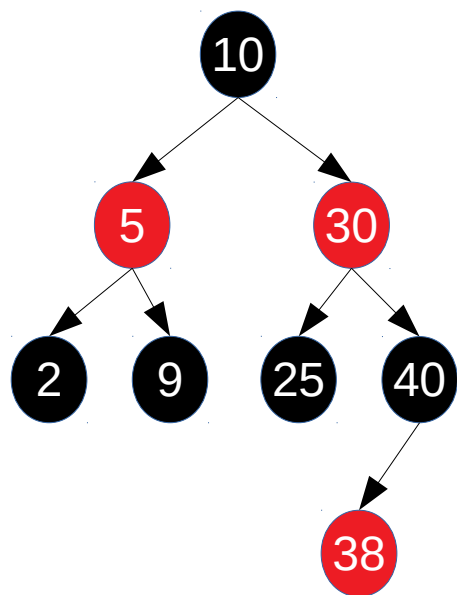
- Situação 1
 - O nó removido é rubro e é folha.
 - O nó deve ser removido e nada mais precisa ser feito.
 - Por exemplo, remover o nó 38:



os nós folhas nil
podem ser ocultados

Remoção Nó Vermelho

- Situação 1
 - O nó removido é rubro e é folha.
 - O nó deve ser removido e nada mais precisa ser feito.
 - Por exemplo, remover o nó 38:



os nós folhas nil
podem ser ocultados

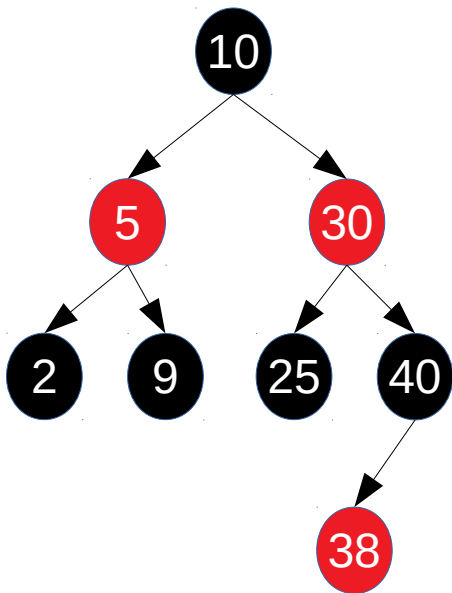
Remoção Nó Vermelho

Remoção Nó Vermelho

- Situação 2

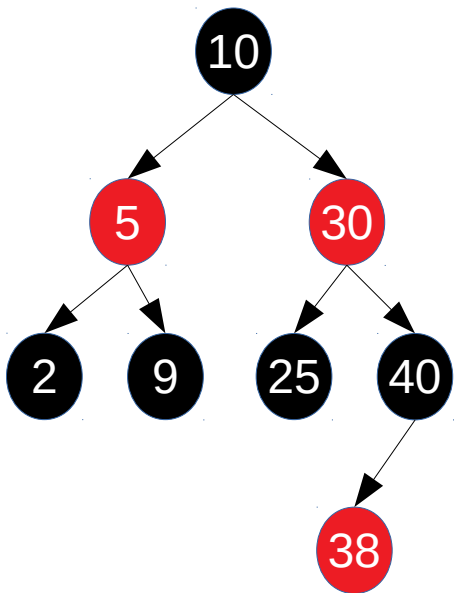
Remoção Nó Vermelho

- Situação 2



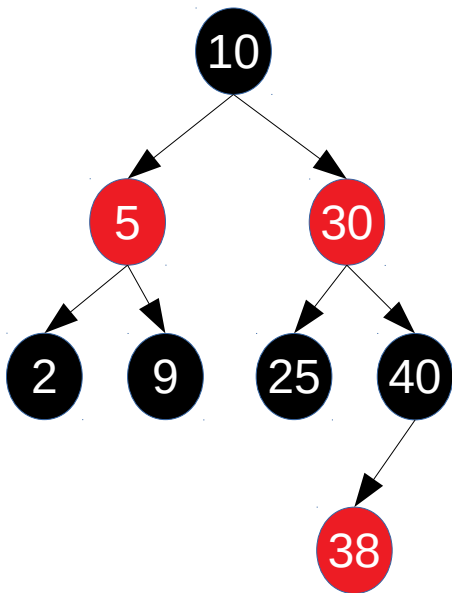
Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
 - Por exemplo, remover o nó **30**:



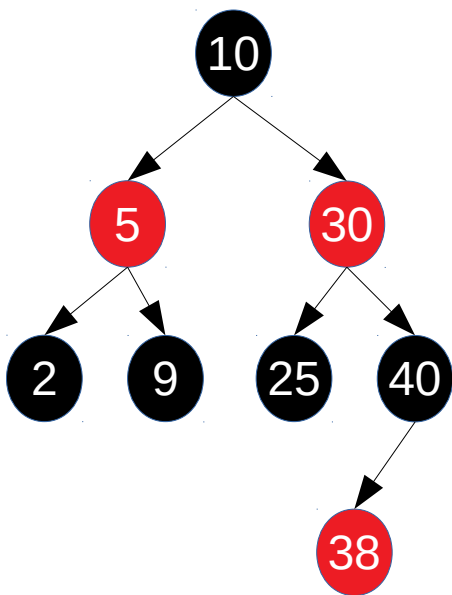
Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
 - Por exemplo, remover o nó **30**:
 - Localizar o elemento.



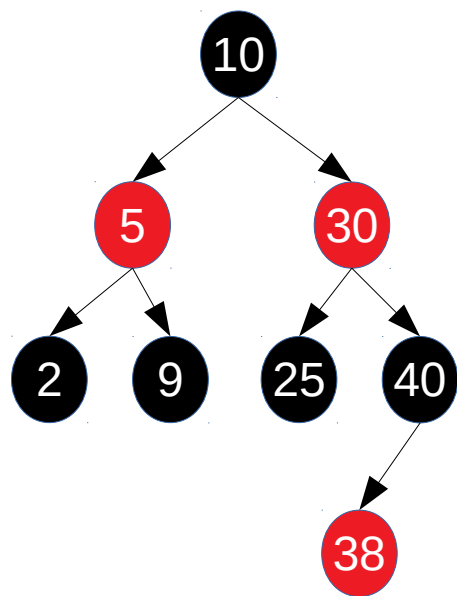
Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
 - Por exemplo, remover o nó **30**:
 - Localizar o elemento.
 - Achar o sucessor lógico.



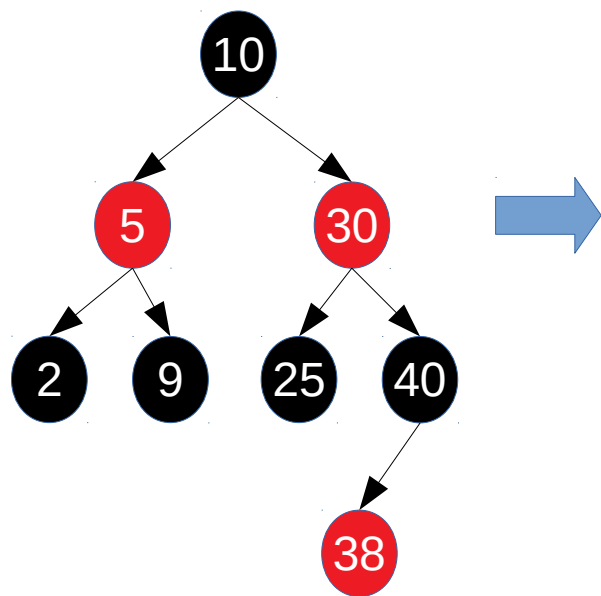
Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
 - Por exemplo, remover o nó **30**:
 - Localizar o elemento.
 - Achar o sucessor lógico.
 - Copiar 30 pelo sucessor (38).



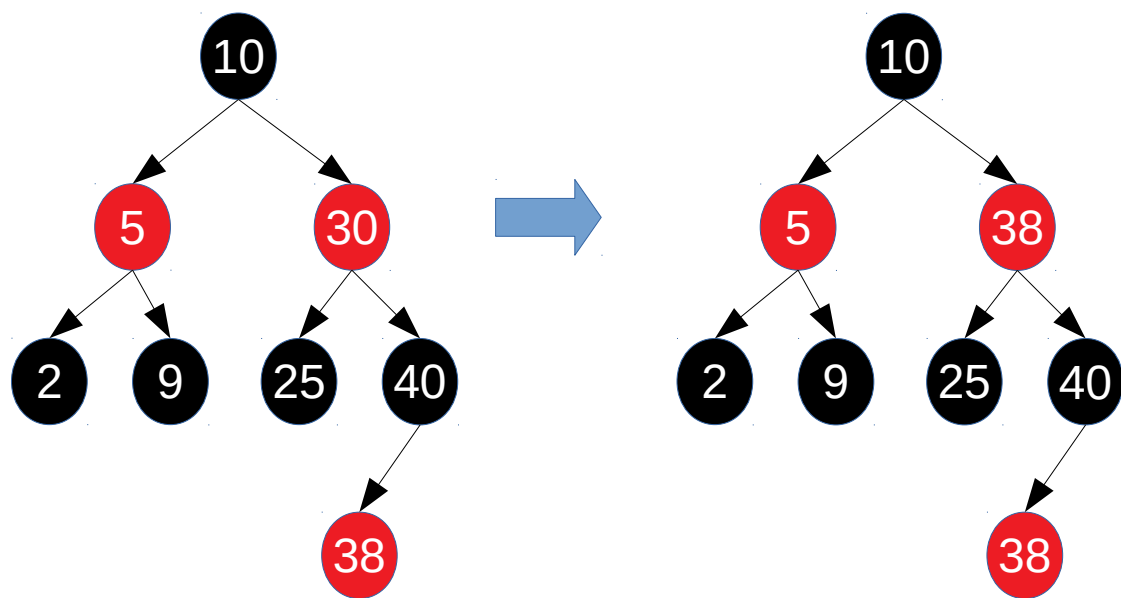
Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
 - Por exemplo, remover o nó **30**:
 - Localizar o elemento.
 - Achar o sucessor lógico.
 - Copiar 30 pelo sucessor (38).



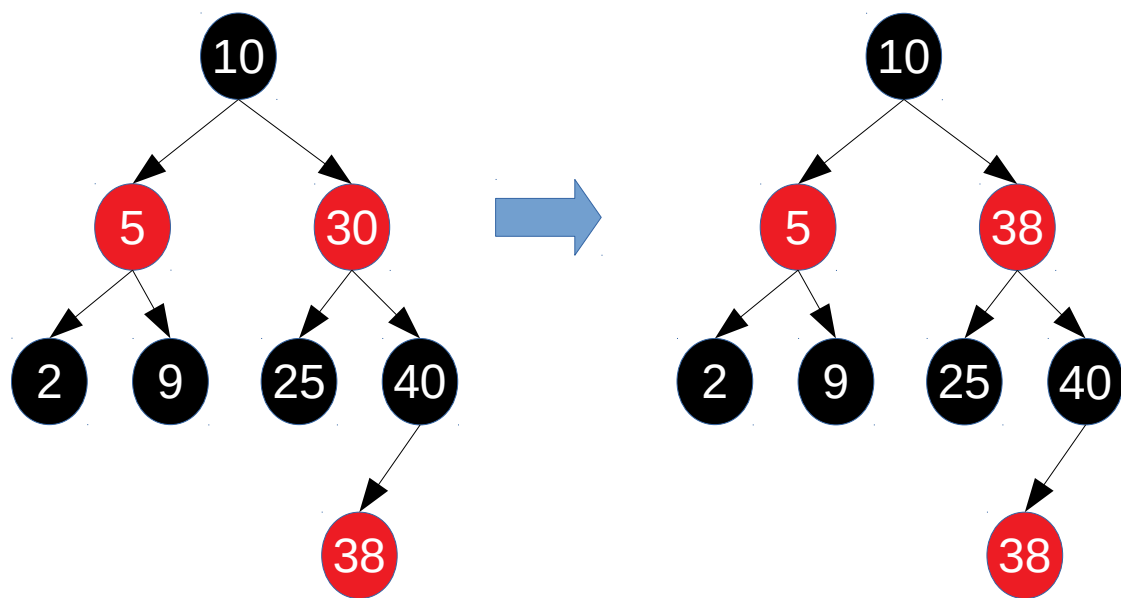
Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
 - Por exemplo, remover o nó **30**:
 - Localizar o elemento.
 - Achar o sucessor lógico.
 - Copiar 30 pelo sucessor (38).



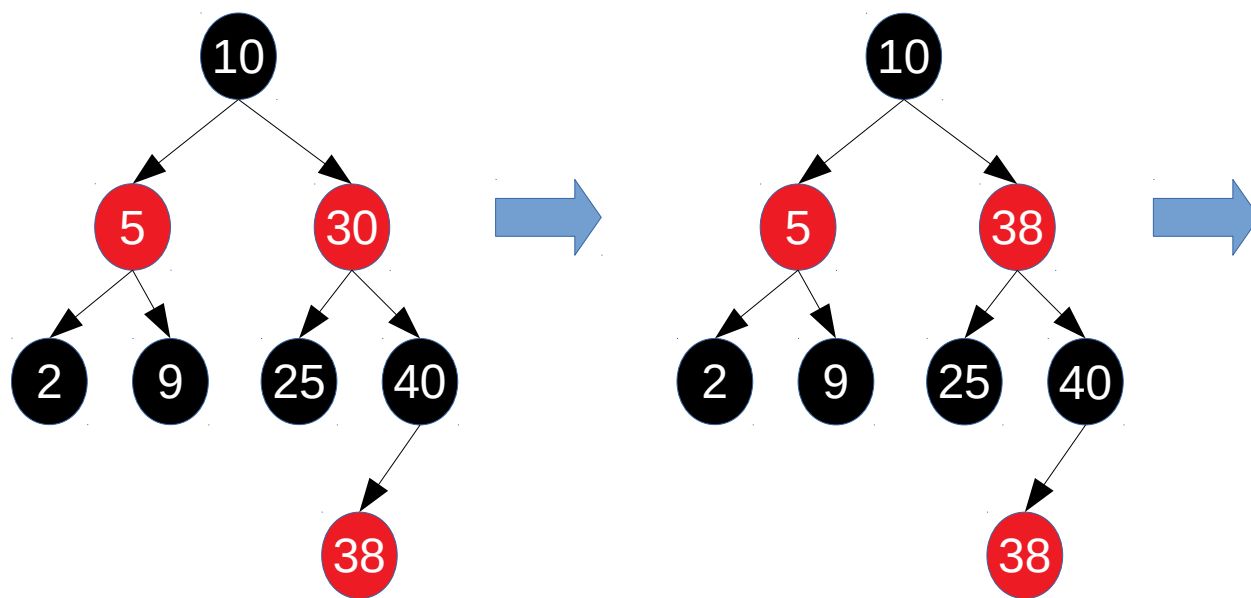
Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
 - Por exemplo, remover o nó **30**:
 - Localizar o elemento.
 - Achar o sucessor lógico.
 - Copiar 30 pelo sucessor (38).
 - Remover sucessor (38).



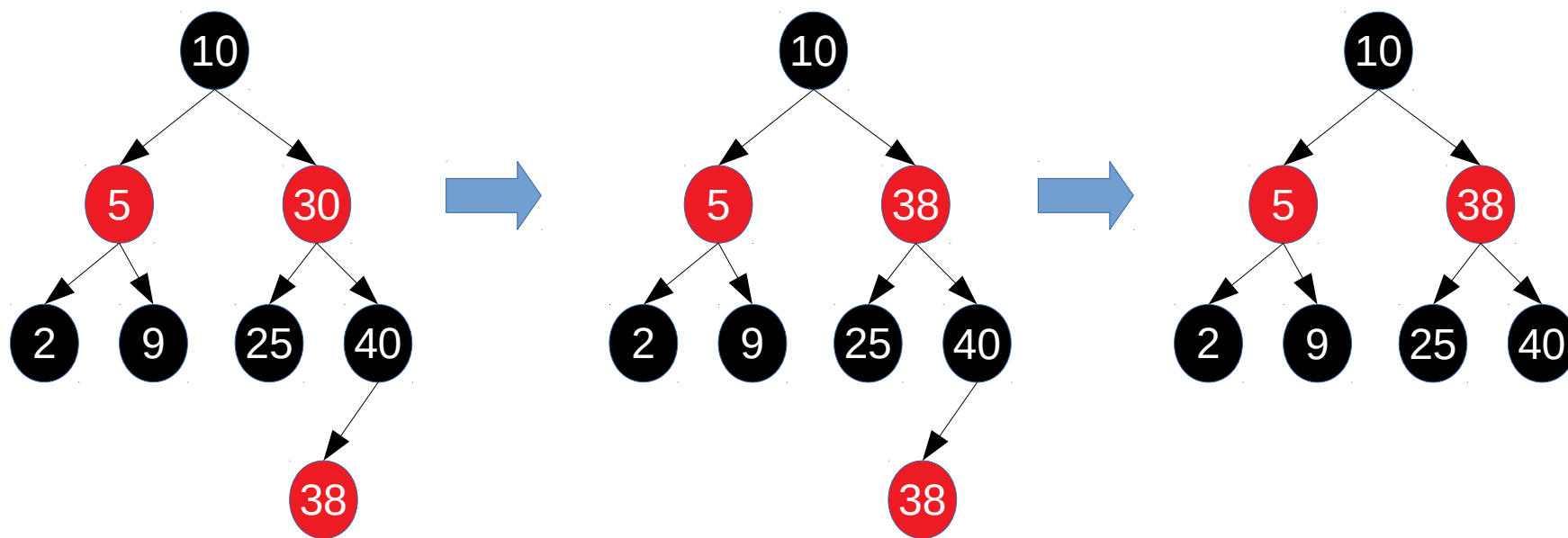
Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
 - Por exemplo, remover o nó **30**:
 - Localizar o elemento.
 - Achar o sucessor lógico.
 - Copiar 30 pelo sucessor (38).
 - Remover sucessor (38).



Remoção Nó Vermelho

- Situação 2
 - Por exemplo, remover o nó **30**:
 - Localizar o elemento.
 - Achar o sucessor lógico.
 - Copiar 30 pelo sucessor (38).
 - Remover sucessor (38).



Remoção Nó Preto

Remoção Nó Preto

- Situação 3

Remoção Nó Preto

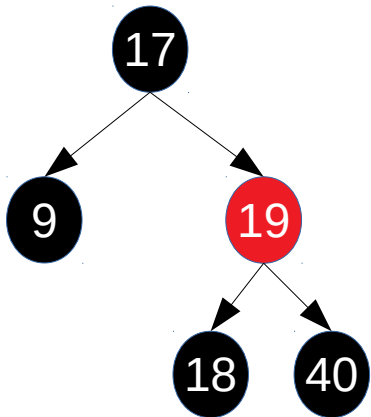
- Situação 3
 - Remover nó preto com irmão vermelho.

Remoção Nó Preto

- Situação 3
 - Remover nó preto com irmão vermelho.
- Exemplo

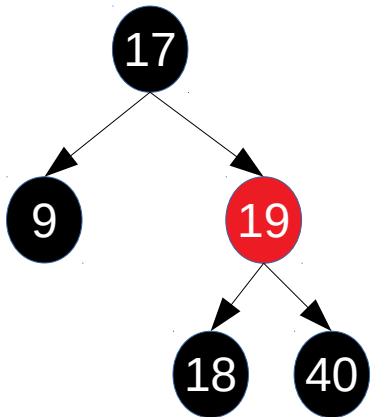
Remoção Nó Preto

- Situação 3
 - Remover nó preto com irmão vermelho.
- Exemplo



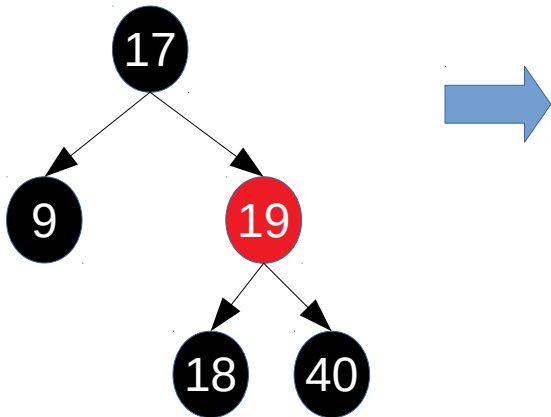
Remoção Nó Preto

- Situação 3
 - Remover nó preto com irmão vermelho.
- Exemplo
 - Remover o **9**.



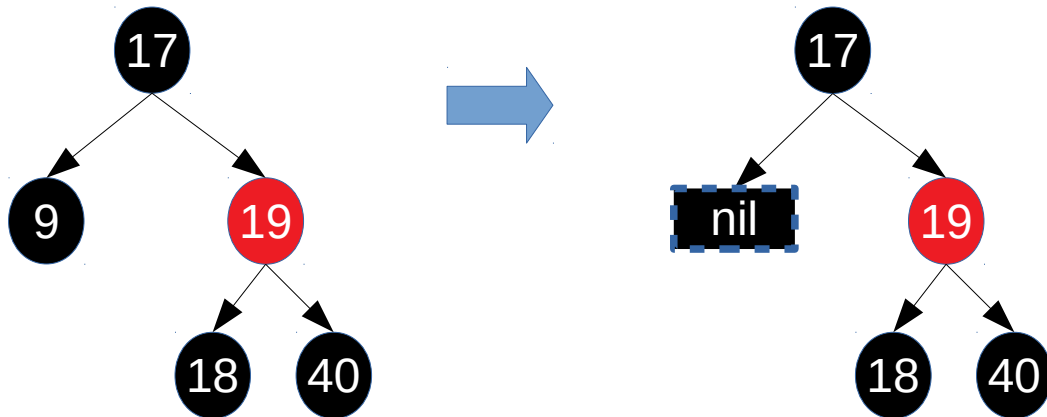
Remoção Nó Preto

- Situação 3
 - Remover nó preto com irmão vermelho.
- Exemplo
 - Remover o **9**.



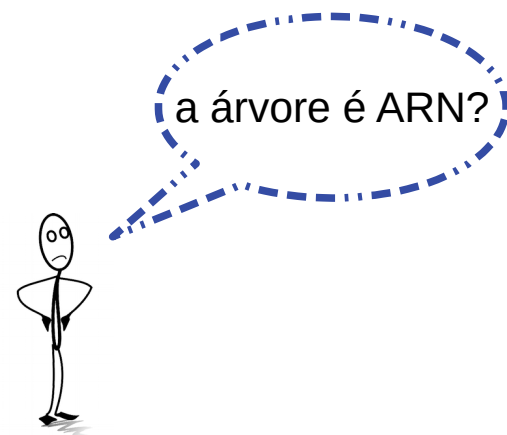
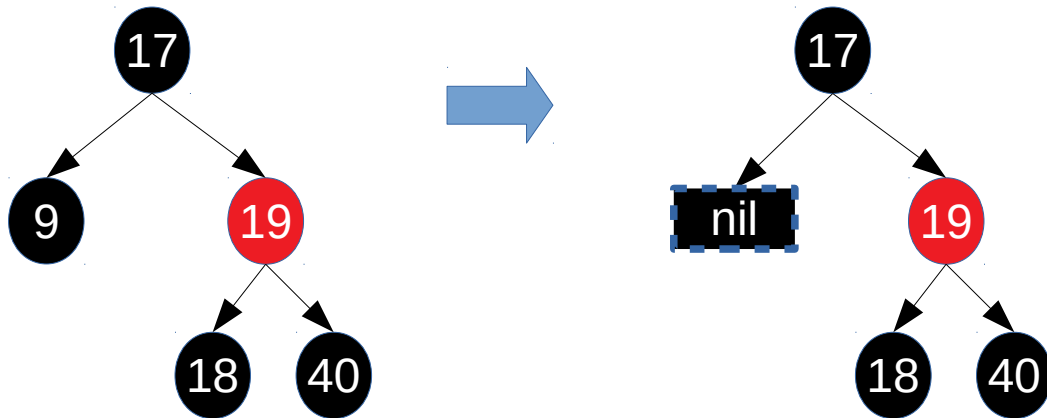
Remoção Nó Preto

- Situação 3
 - Remover nó preto com irmão vermelho.
- Exemplo
 - Remover o 9.



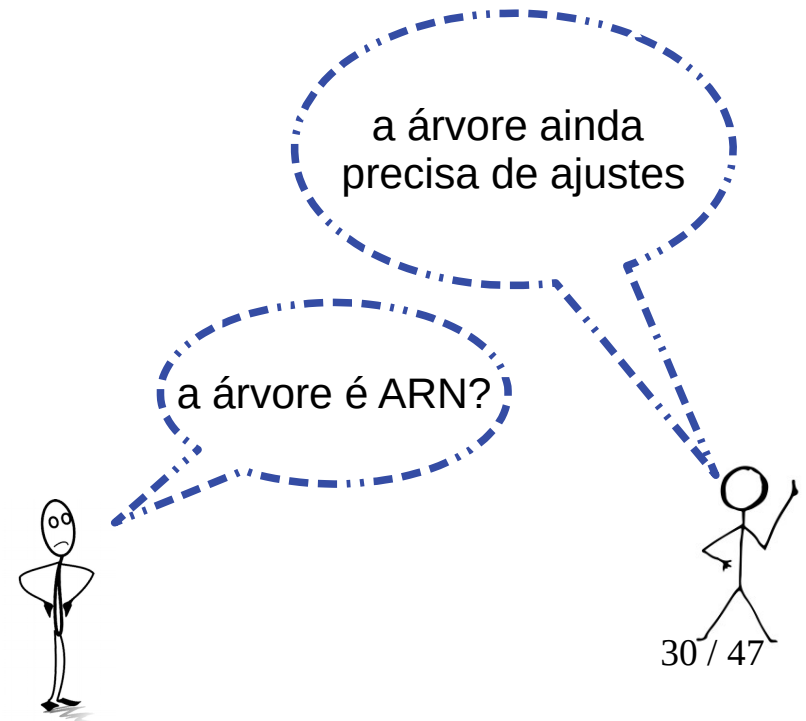
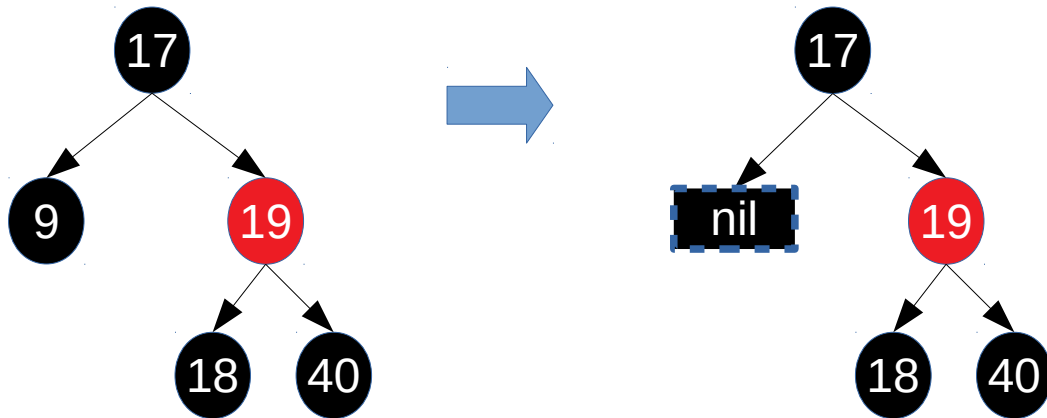
Remoção Nó Preto

- Situação 3
 - Remover nó preto com irmão vermelho.
- Exemplo
 - Remover o 9.



Remoção Nó Preto

- Situação 3
 - Remover nó preto com irmão vermelho.
- Exemplo
 - Remover o 9.



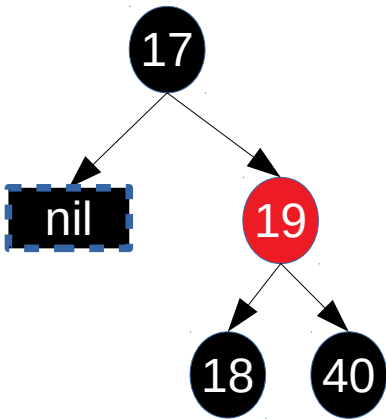
Remoção Nó Preto

Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)

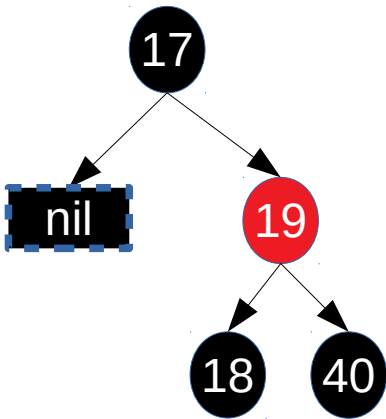
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)



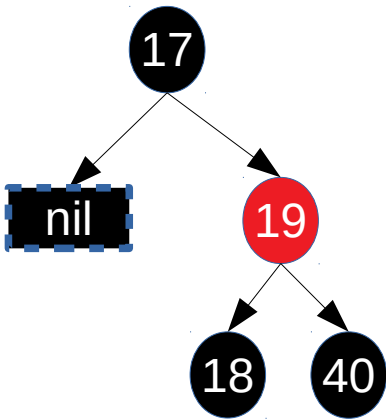
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
 - Mudamos as cores do pai e irmão.



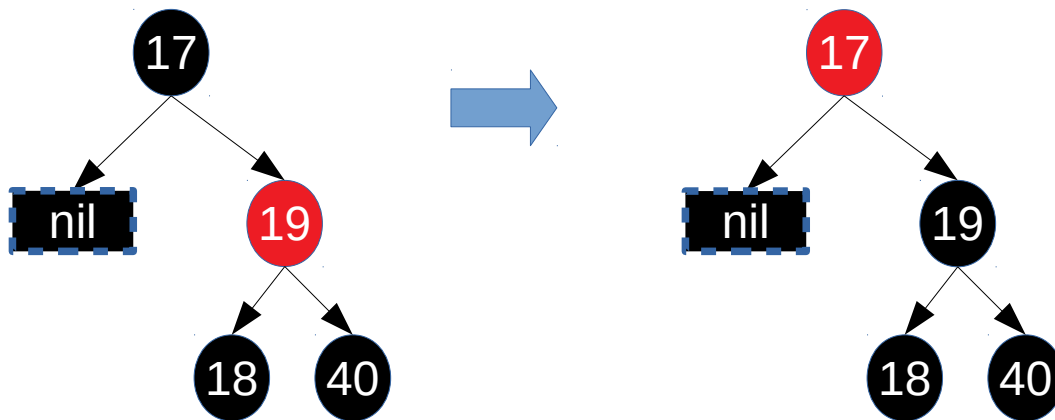
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
 - Mudamos as cores do pai e irmão.



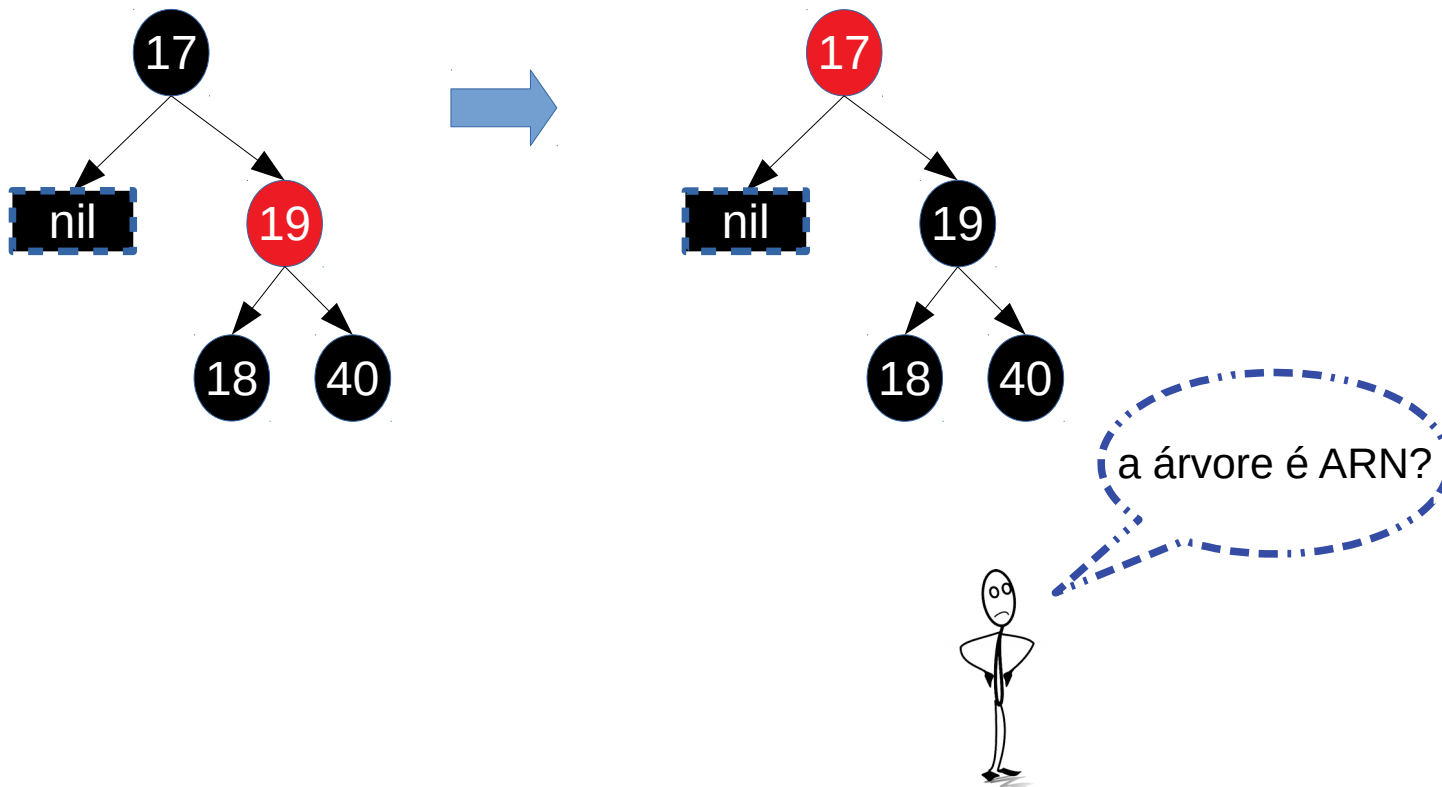
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
 - Mudamos as cores do pai e irmão.



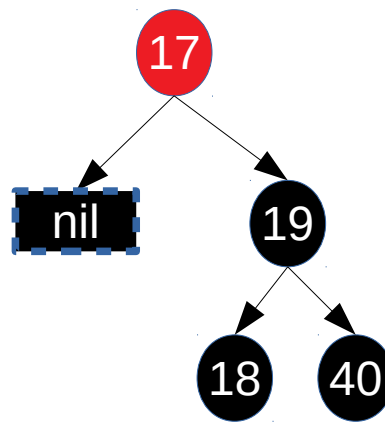
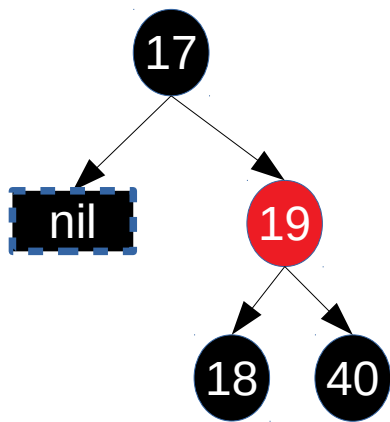
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
 - Mudamos as cores do pai e irmão.



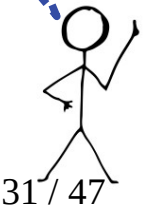
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
 - Mudamos as cores do pai e irmão.



a árvore ainda precisa de ajustes

a árvore é ARN?



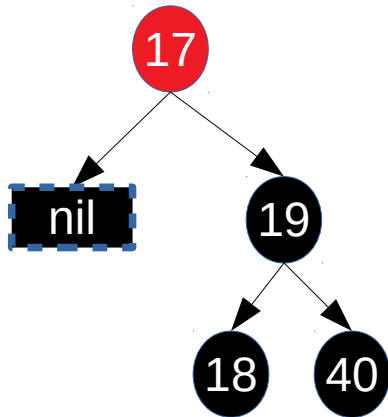
Remoção Nó Preto

Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)

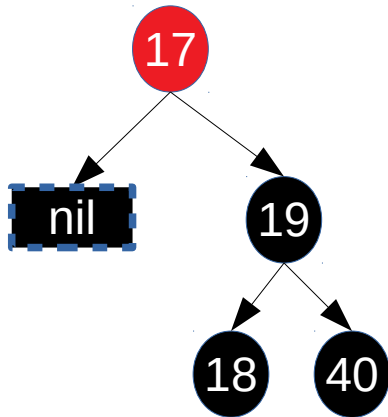
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)



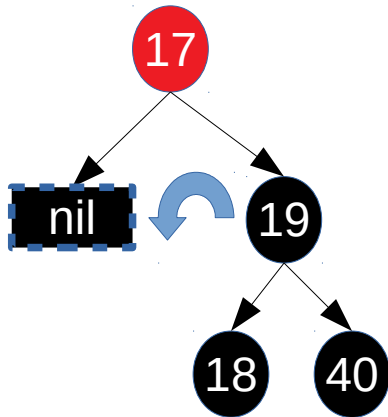
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
 - Rotacionamos em direção ao nó removido.



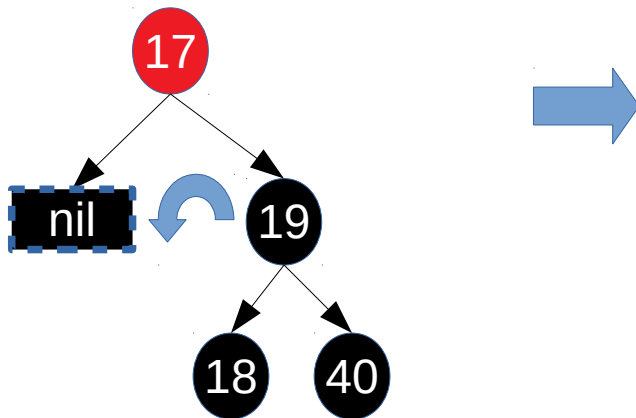
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
 - Rotacionamos em direção ao nó removido.



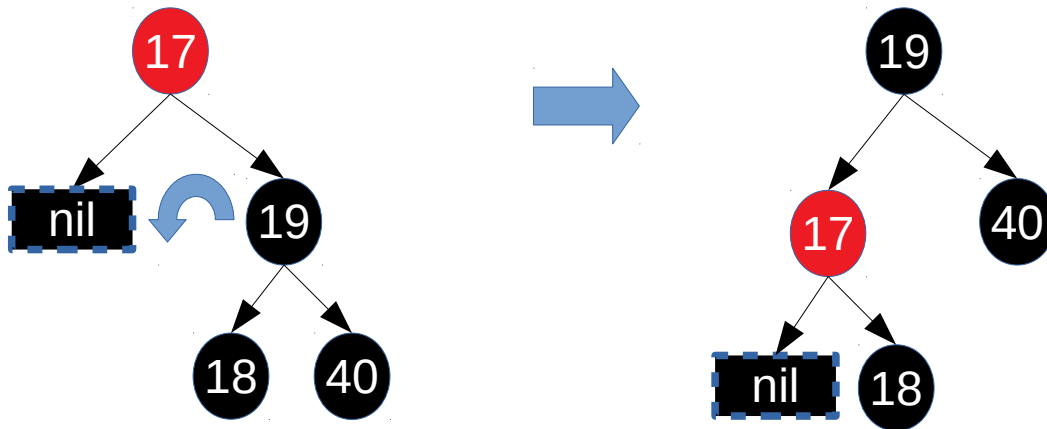
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
 - Rotacionamos em direção ao nó removido.



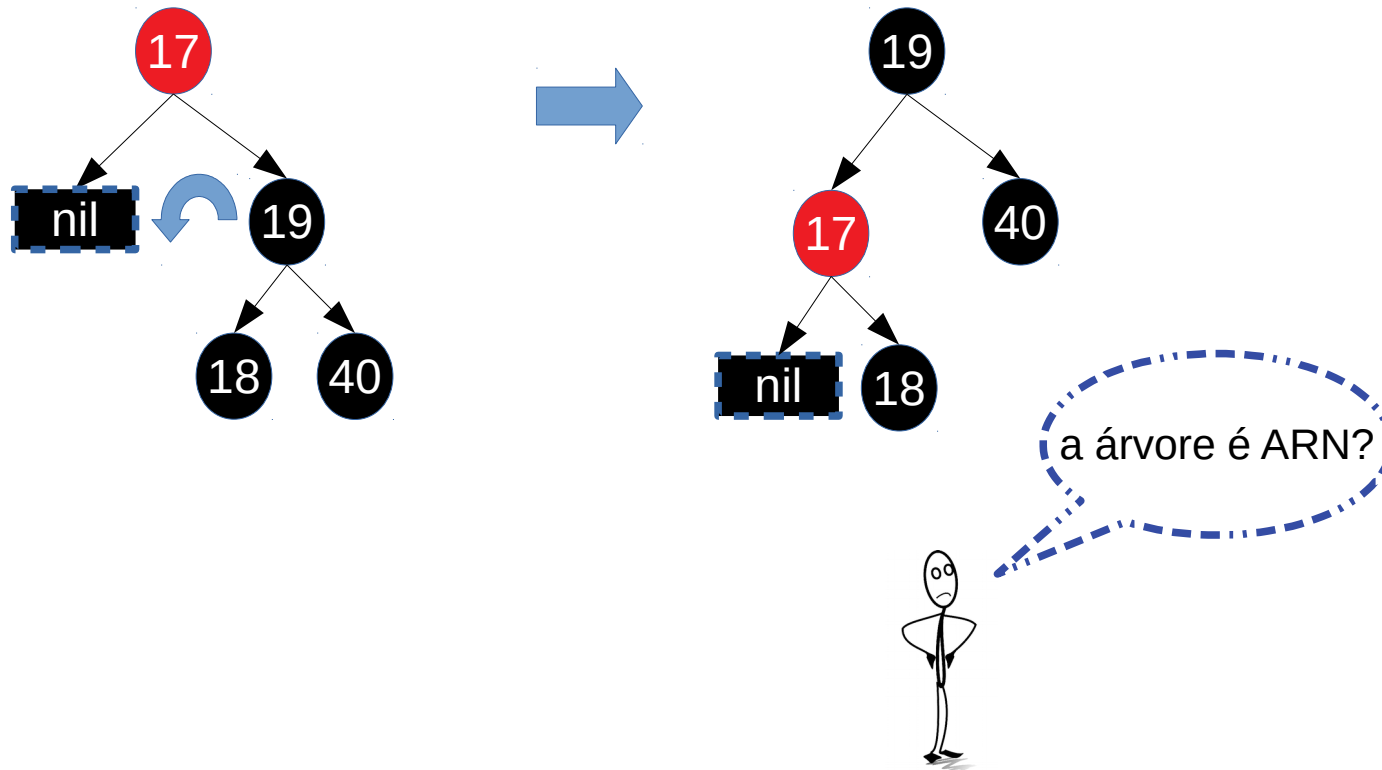
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
 - Rotacionamos em direção ao nó removido.



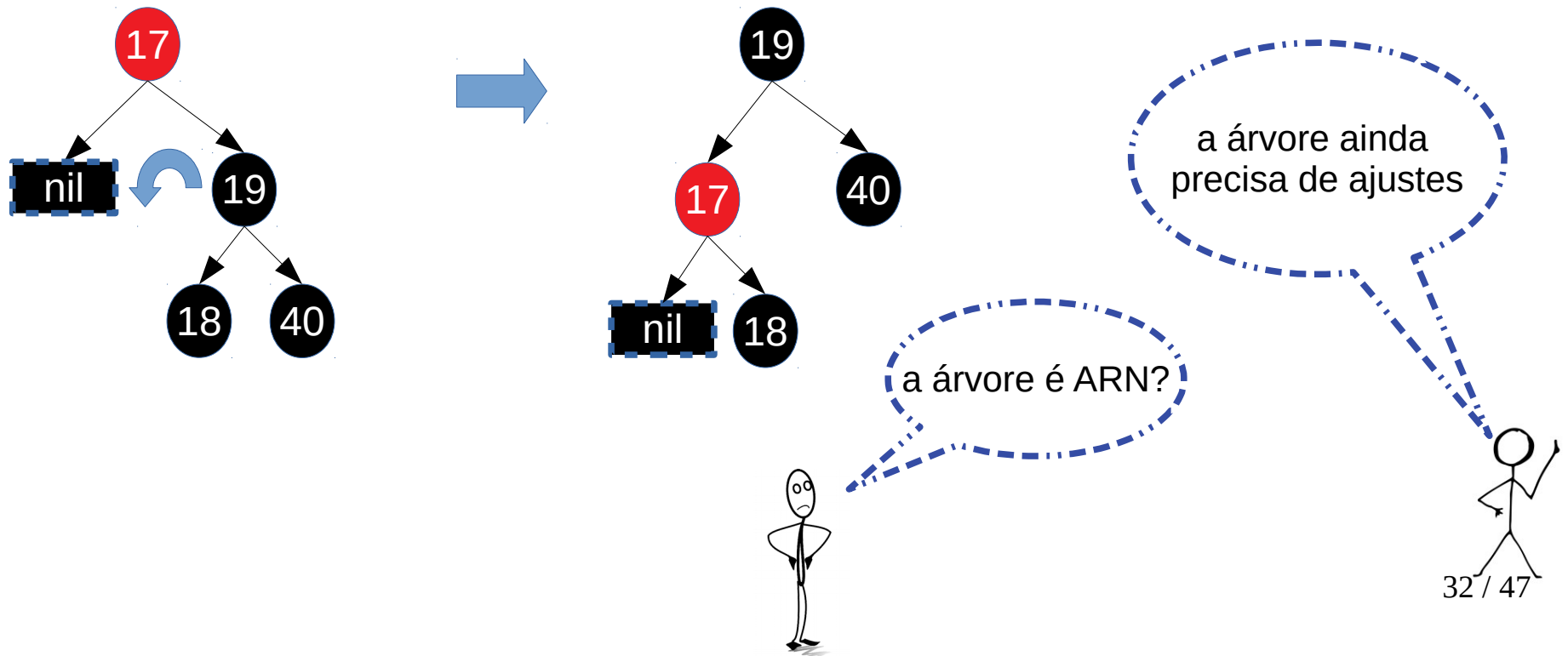
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
 - Rotacionamos em direção ao nó removido.



Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
 - Rotacionamos em direção ao nó removido.



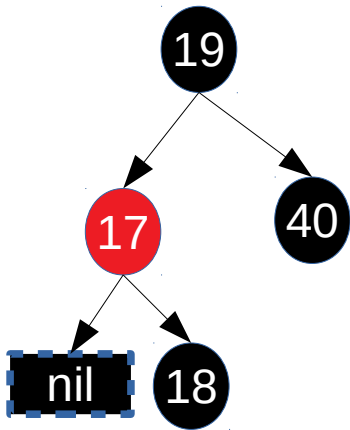
Remoção Nó Preto

Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)

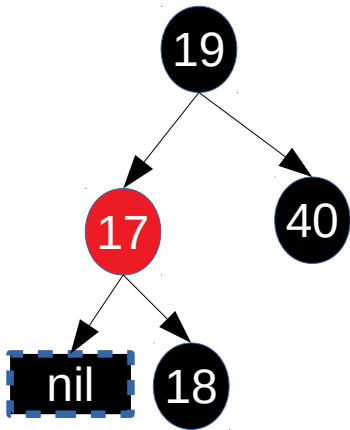
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)



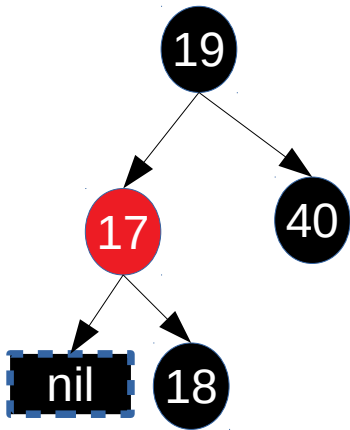
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
 - Trocamos as cores do pai (17) e do irmão (18)



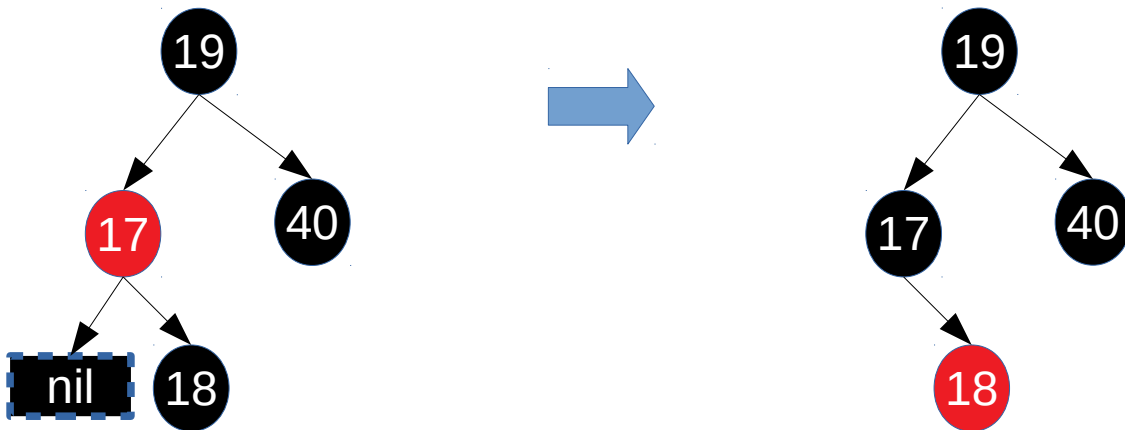
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
 - Trocamos as cores do pai (17) e do irmão (18)



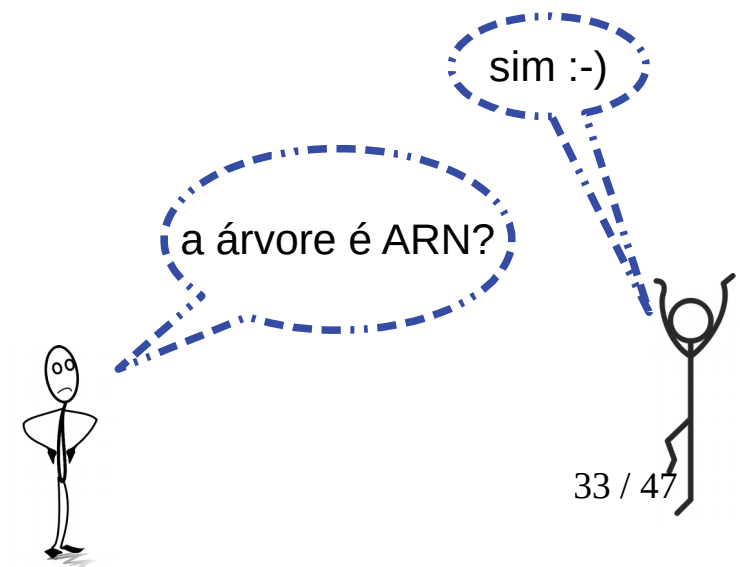
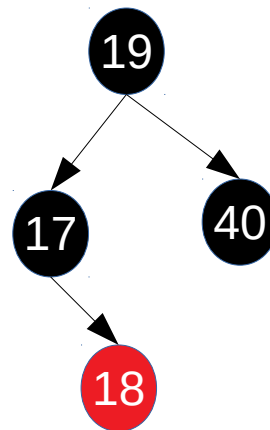
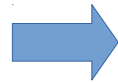
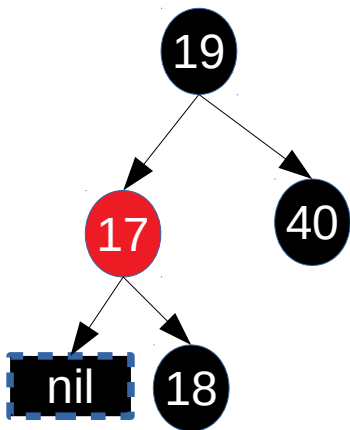
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
 - Trocamos as cores do pai (17) e do irmão (18)



Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **9** (continuação)
 - Trocamos as cores do pai (17) e do irmão (18)



Remoção Nó Preto

Remoção Nó Preto

- Situação 4

Remoção Nó Preto

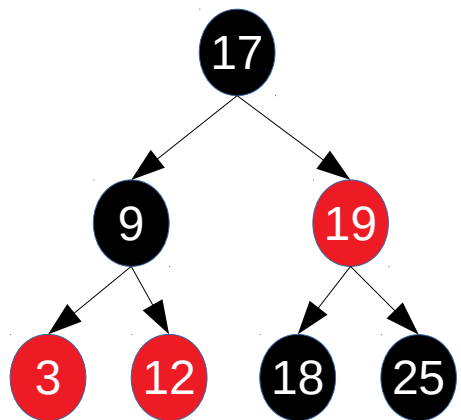
- Situação 4
 - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.

Remoção Nó Preto

- Situação 4
 - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo

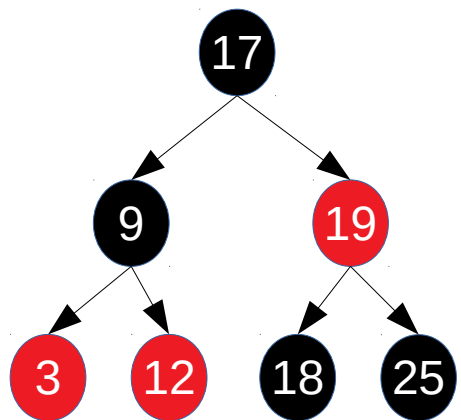
Remoção Nó Preto

- Situação 4
 - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo



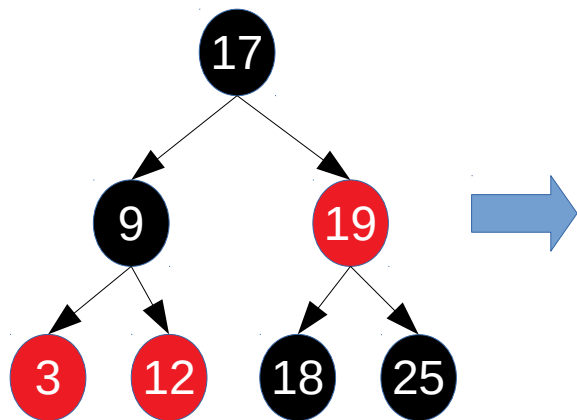
Remoção Nó Preto

- Situação 4
 - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo
 - Remover o **25**.



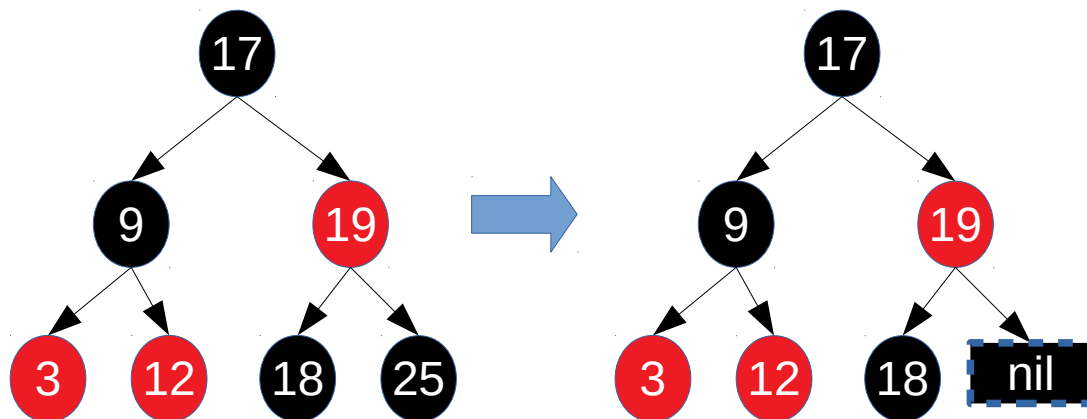
Remoção Nó Preto

- Situação 4
 - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo
 - Remover o **25**.



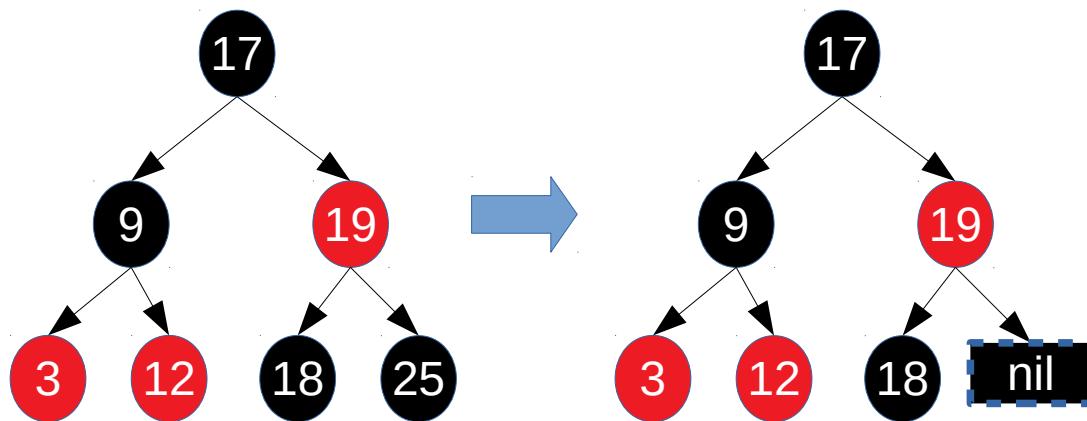
Remoção Nó Preto

- Situação 4
 - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo
 - Remover o **25**.



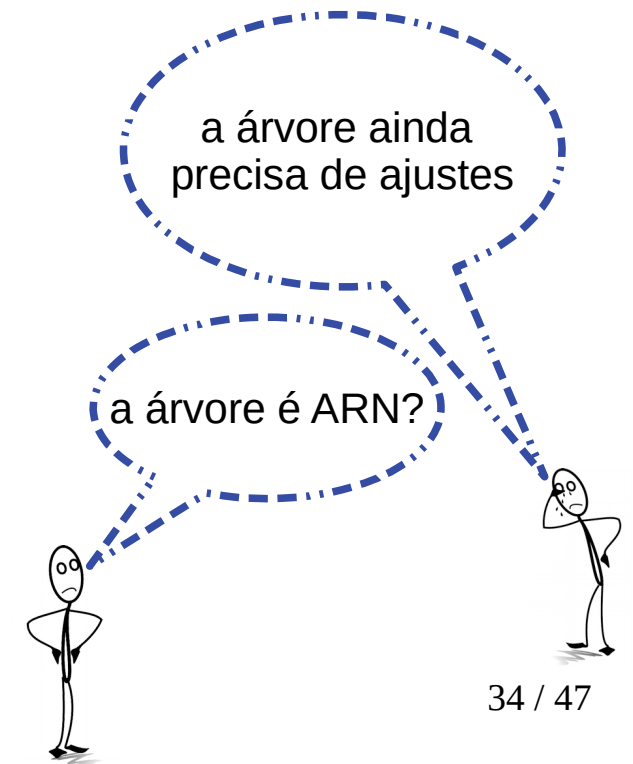
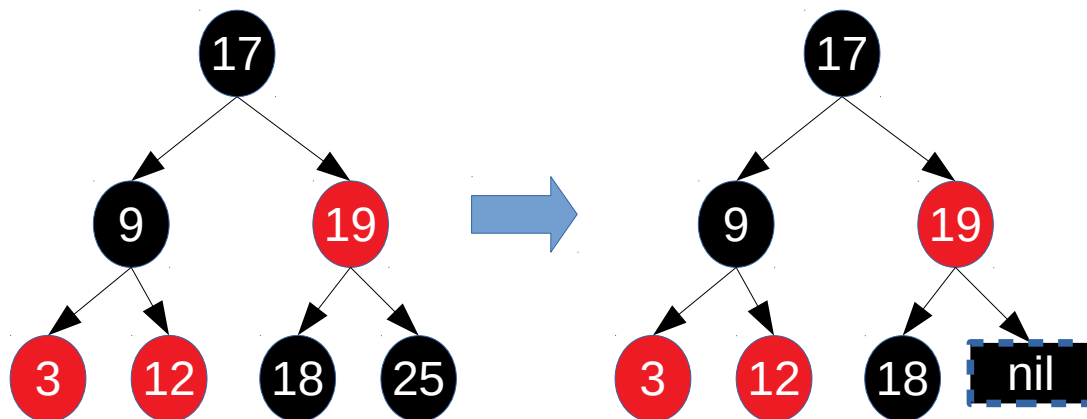
Remoção Nó Preto

- Situação 4
 - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo
 - Remover o **25**.



Remoção Nó Preto

- Situação 4
 - Remover nó preto com pai rubro, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo
 - Remover o **25**.



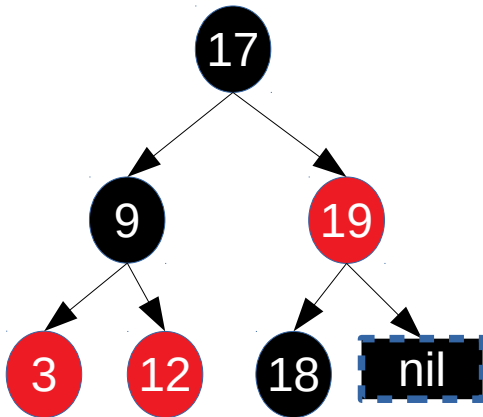
Remoção Nó Preto

Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **25** (continuação)

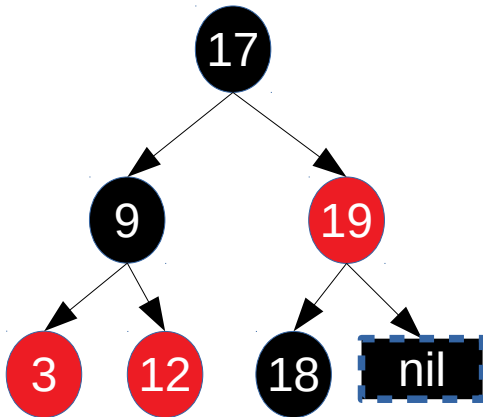
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **25** (continuação)



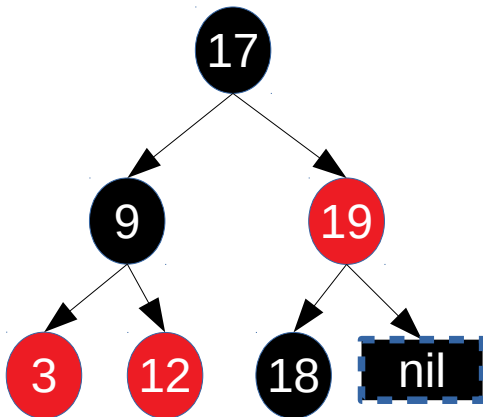
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **25** (continuação)
 - Recolorimos o pai (19) e o irmão (18).



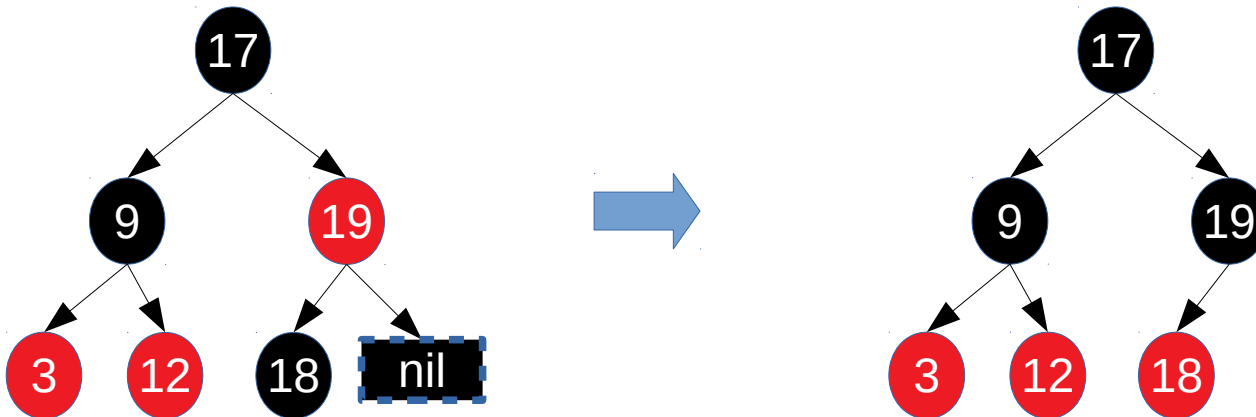
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **25** (continuação)
 - Recolorimos o pai (19) e o irmão (18).



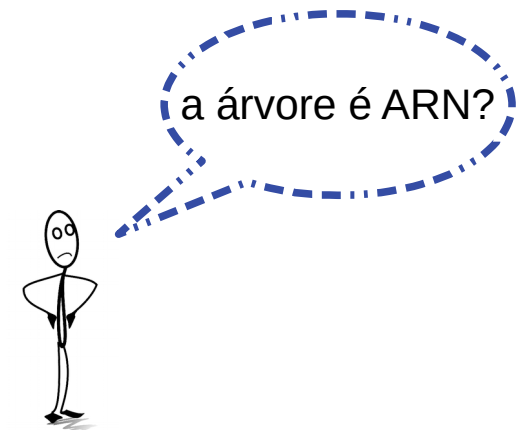
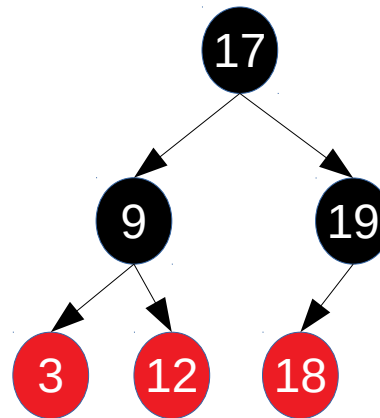
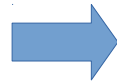
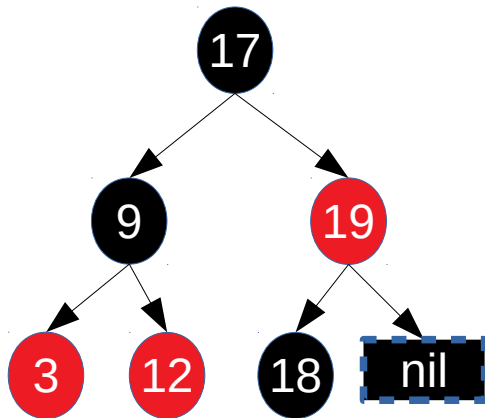
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **25** (continuação)
 - Recolorimos o pai (19) e o irmão (18).



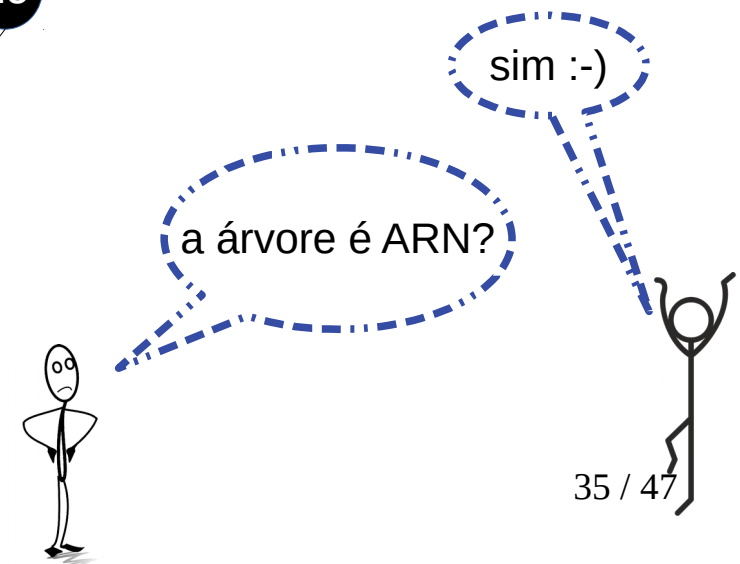
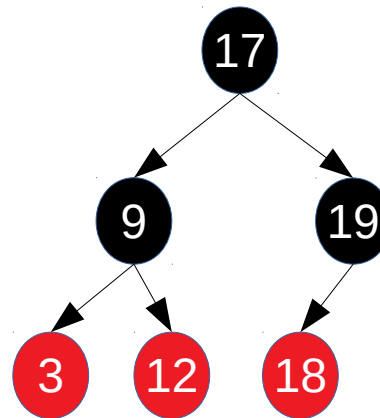
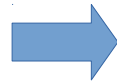
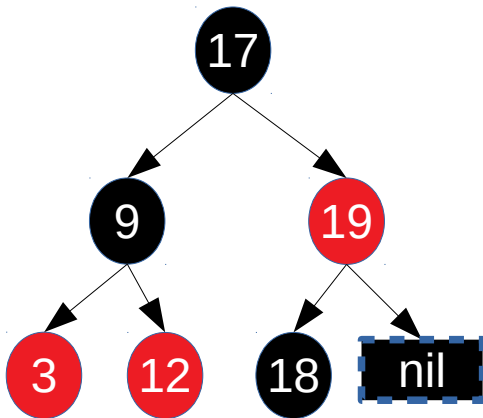
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **25** (continuação)
 - Recolorimos o pai (19) e o irmão (18).



Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **25** (continuação)
 - Recolorimos o pai (19) e o irmão (18).



Remoção Nó Preto

Remoção Nó Preto

- Situação 5

Remoção Nó Preto

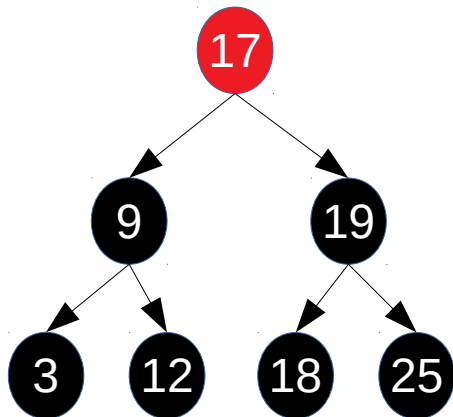
- Situação 5
 - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.

Remoção Nó Preto

- Situação 5
 - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:

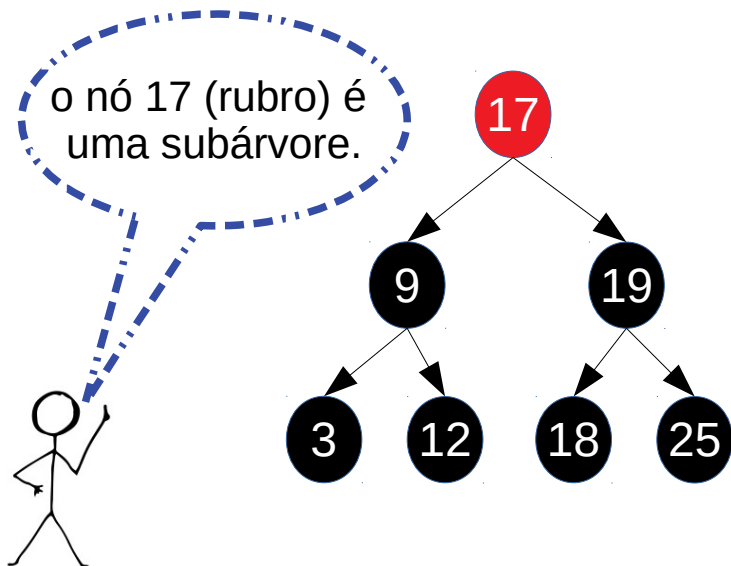
Remoção Nó Preto

- Situação 5
 - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:



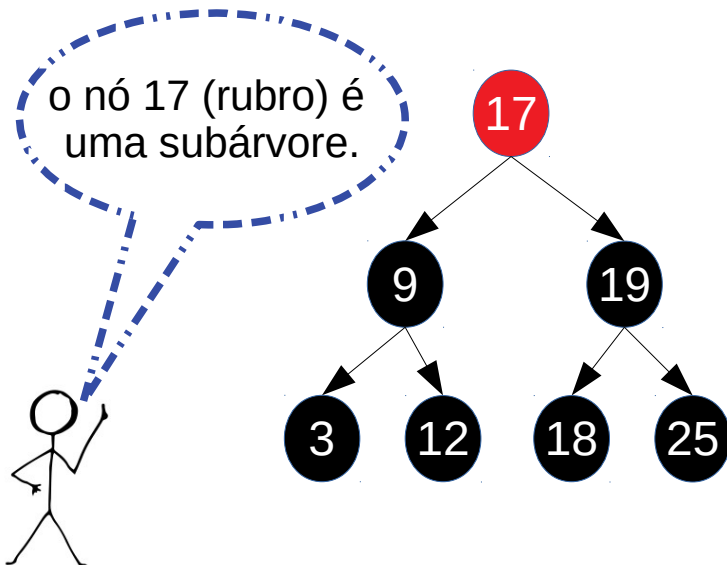
Remoção Nó Preto

- Situação 5
 - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:



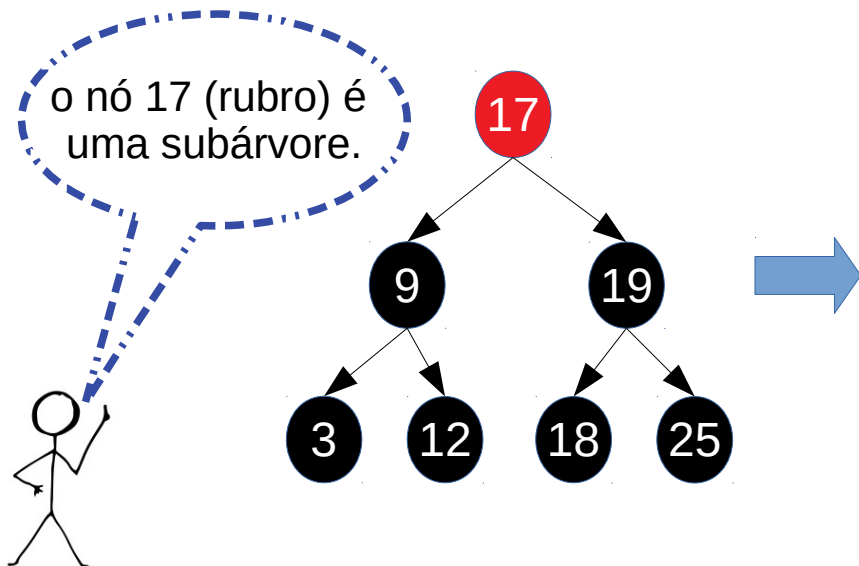
Remoção Nó Preto

- Situação 5
 - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:
 - Remover o nó **18**.



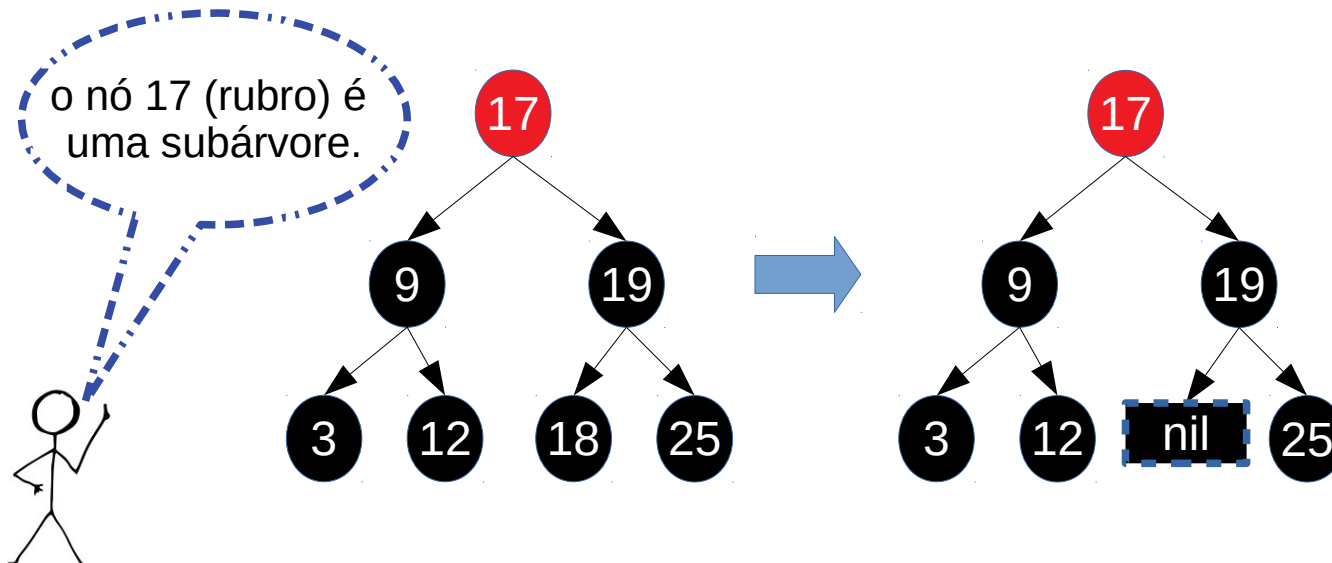
Remoção Nó Preto

- Situação 5
 - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:
 - Remover o nó **18**.



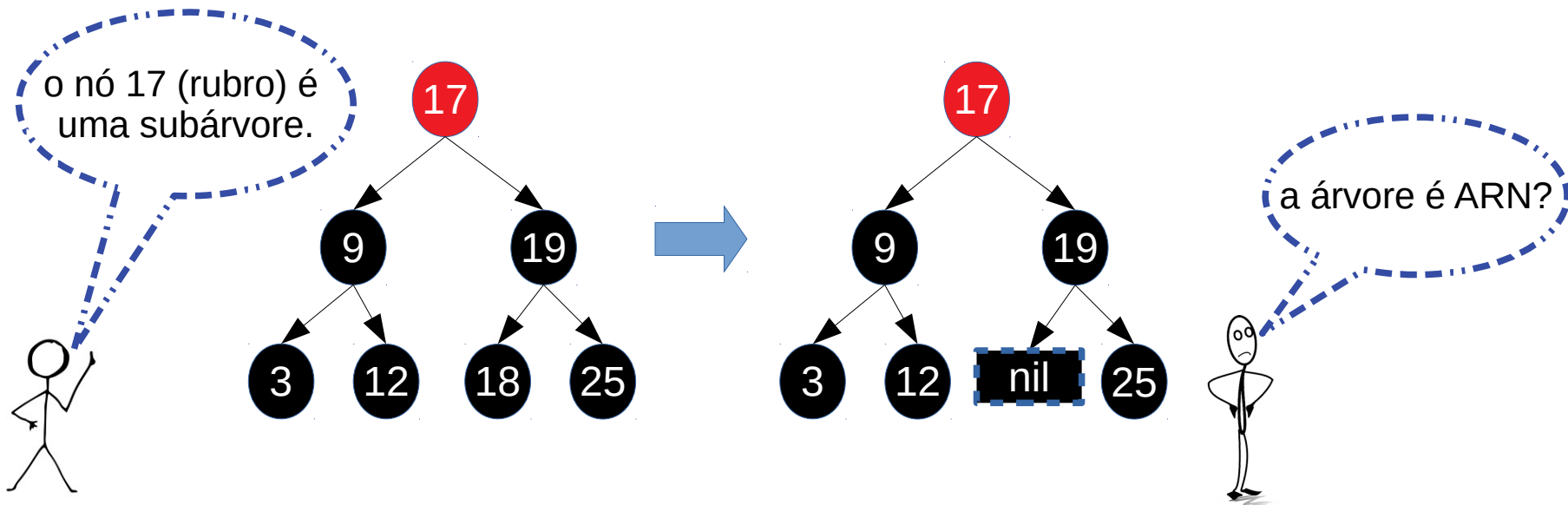
Remoção Nó Preto

- Situação 5
 - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:
 - Remover o nó **18**.



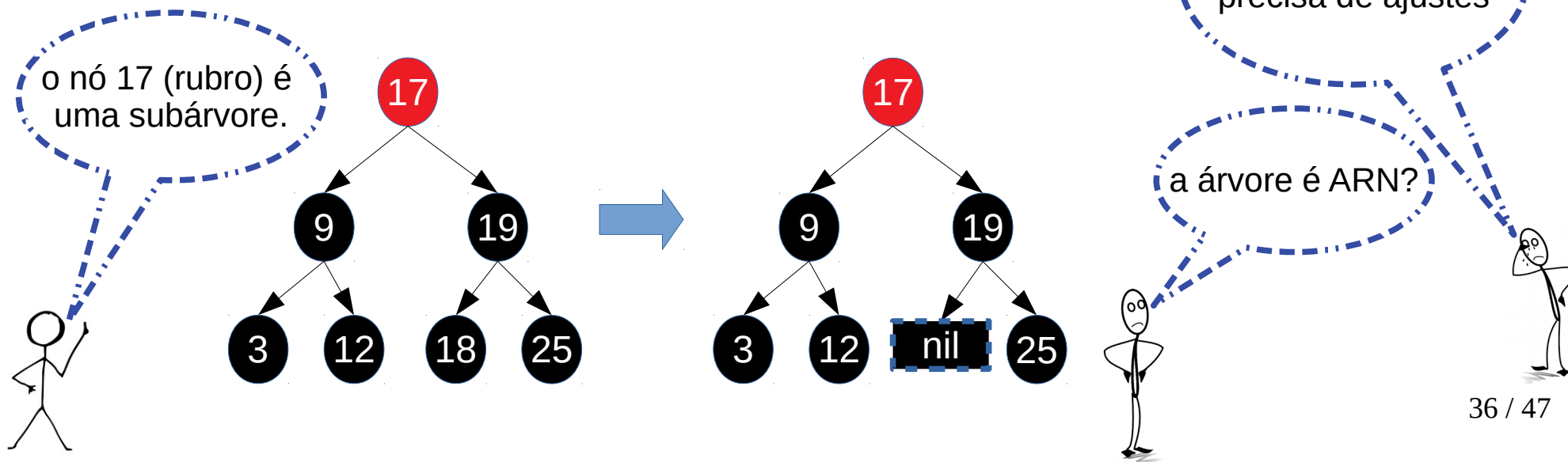
Remoção Nó Preto

- Situação 5
 - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:
 - Remover o nó **18**.



Remoção Nó Preto

- Situação 5
 - Remover nó preto com pai preto, irmão preto e dois filhos pretos.
- Exemplo:
 - Remover o nó **18**.



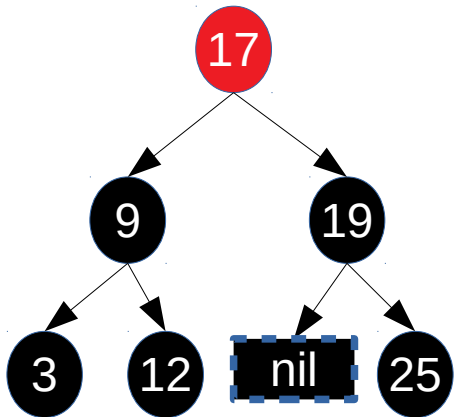
Remoção Nó Preto

Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).

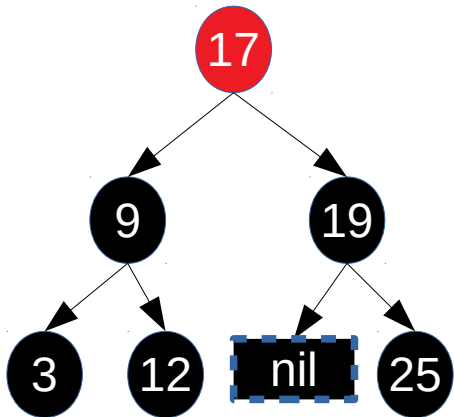
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).



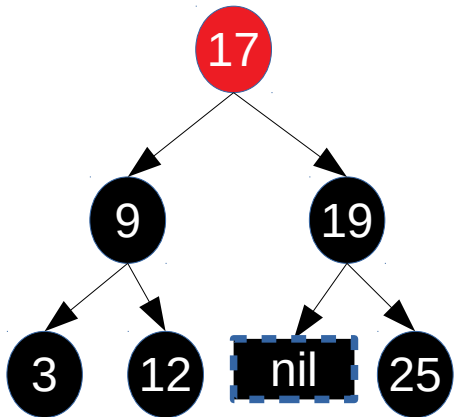
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Colorimos o irmão (25) de vermelho, o tio de vermelho (9) e o avô (17) de preto.



Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Colorimos o irmão (25) de vermelho, o tio de vermelho (9) e o avô (17) de preto.



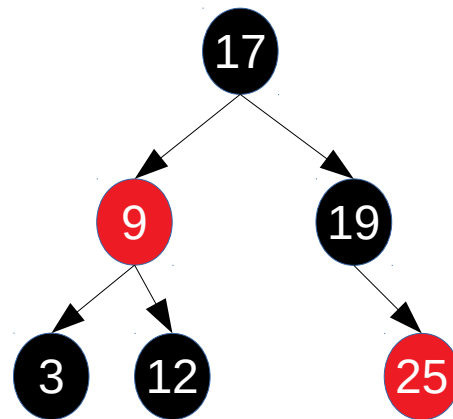
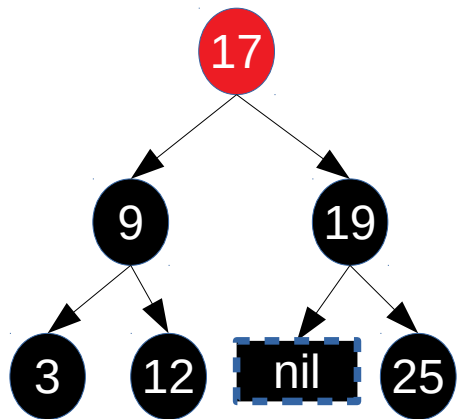
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Colorimos o irmão (25) de vermelho, o tio de vermelho (9) e o avô (17) de preto.



Remoção Nó Preto

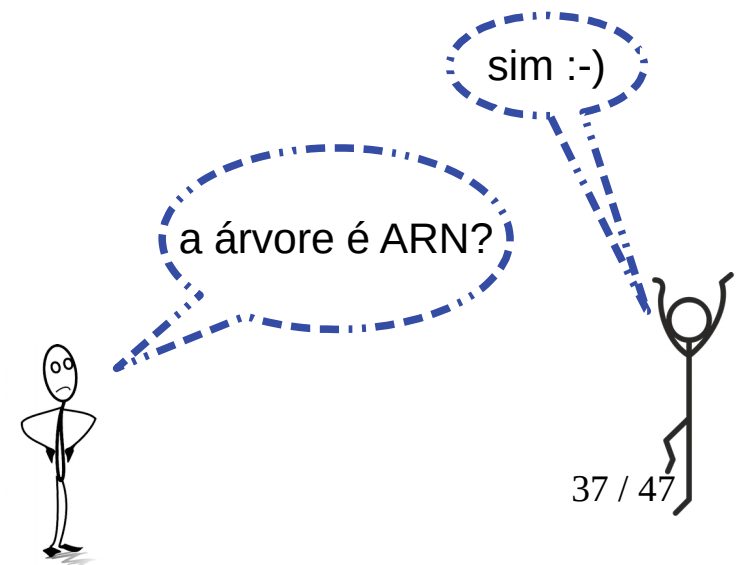
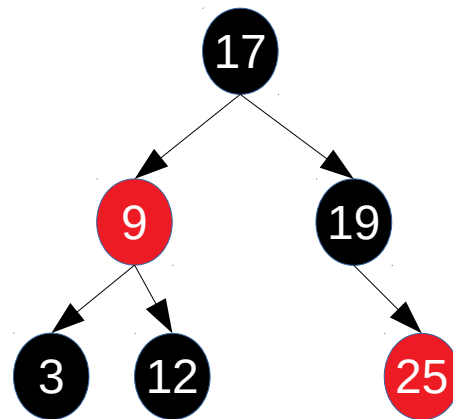
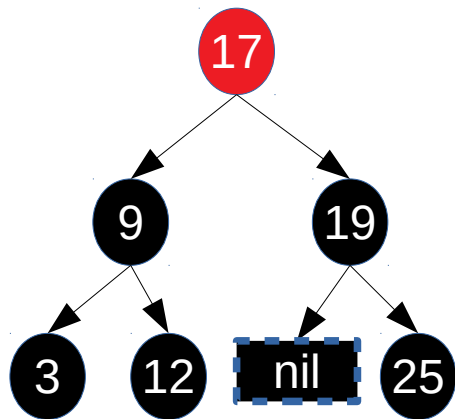
- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Colorimos o irmão (25) de vermelho, o tio de vermelho (9) e o avô (17) de preto.



a árvore é ARN?

Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Colorimos o irmão (25) de vermelho, o tio de vermelho (9) e o avô (17) de preto.



Remoção Nó Preto

Remoção Nó Preto

- Situação 6

Remoção Nó Preto

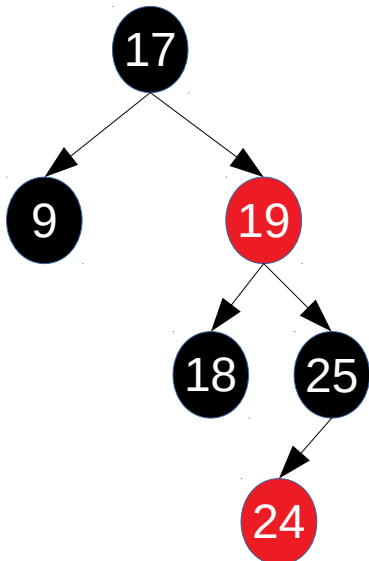
- Situação 6
 - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.

Remoção Nó Preto

- Situação 6
 - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.
- Exemplo:

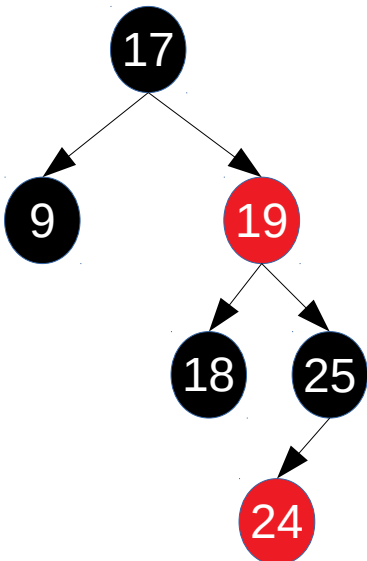
Remoção Nó Preto

- Situação 6
 - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.
- Exemplo:



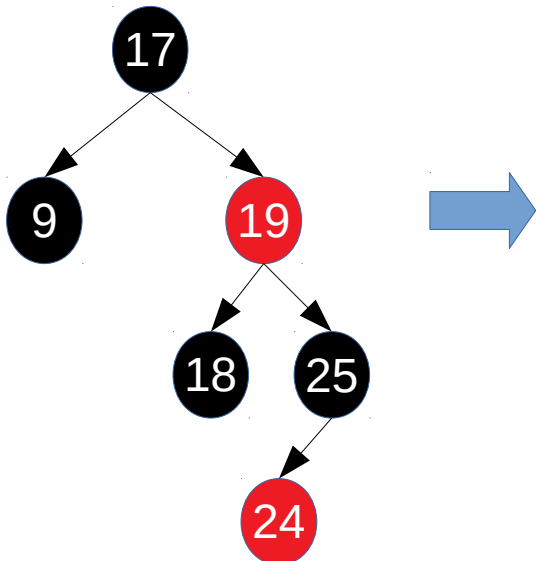
Remoção Nó Preto

- Situação 6
 - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.
- Exemplo:
 - Remover o nó **18**.



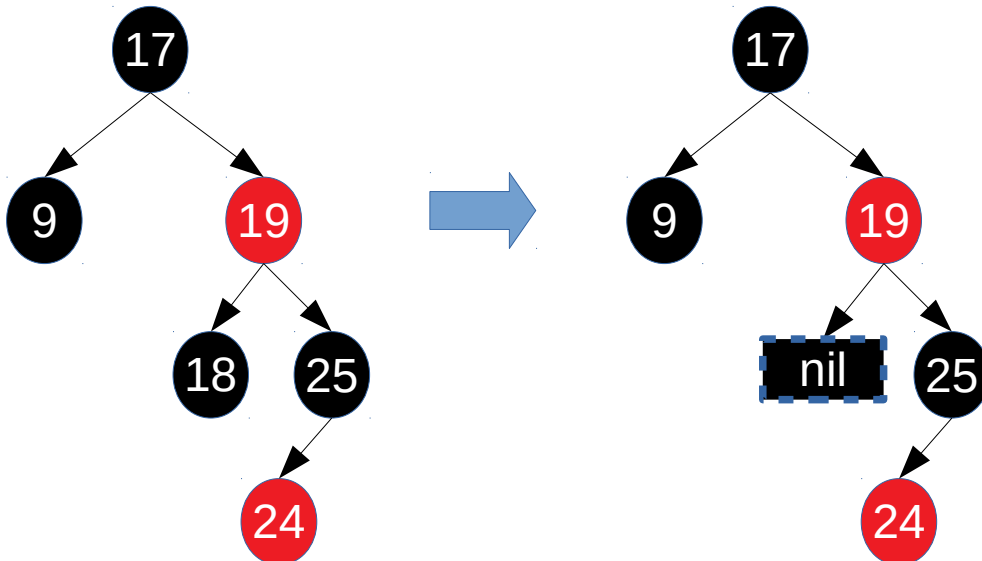
Remoção Nó Preto

- Situação 6
 - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.
- Exemplo:
 - Remover o nó **18**.



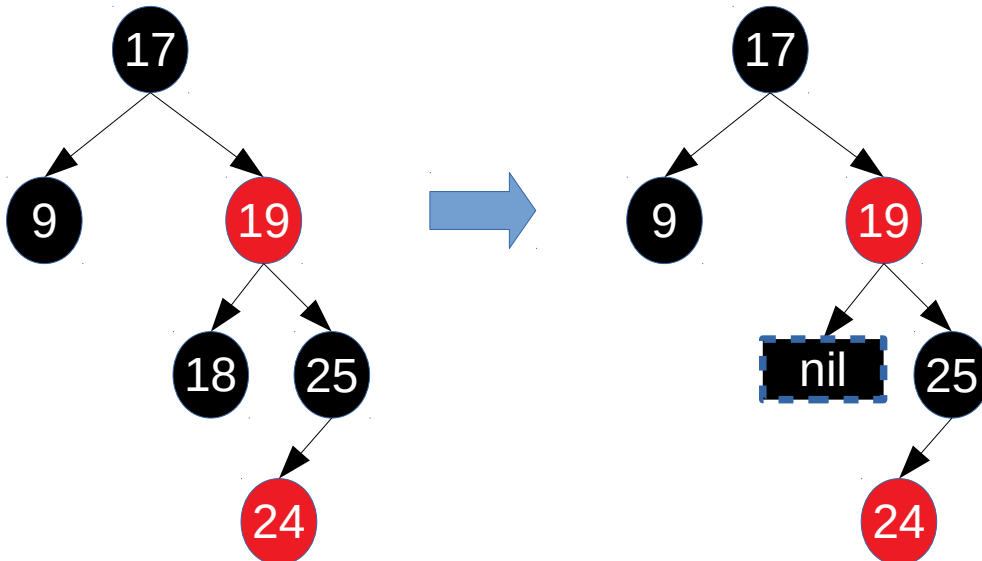
Remoção Nó Preto

- Situação 6
 - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.
- Exemplo:
 - Remover o nó **18**.



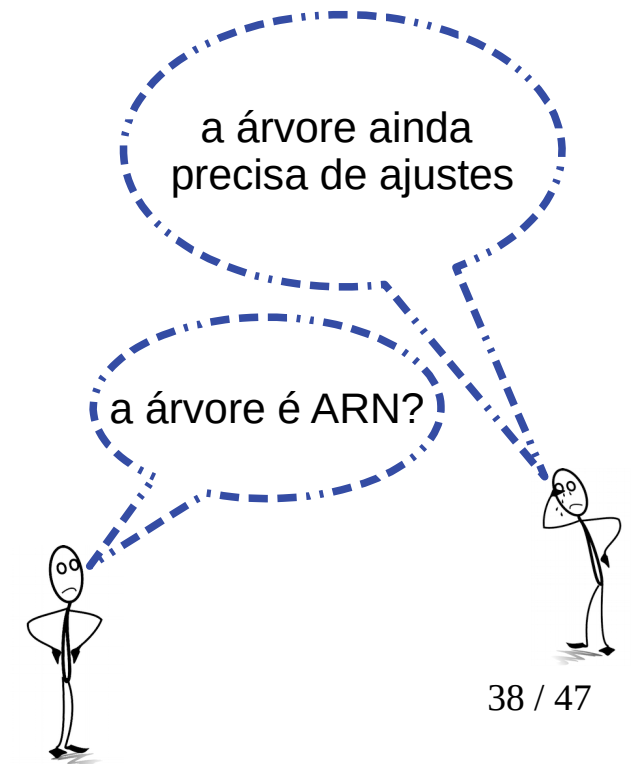
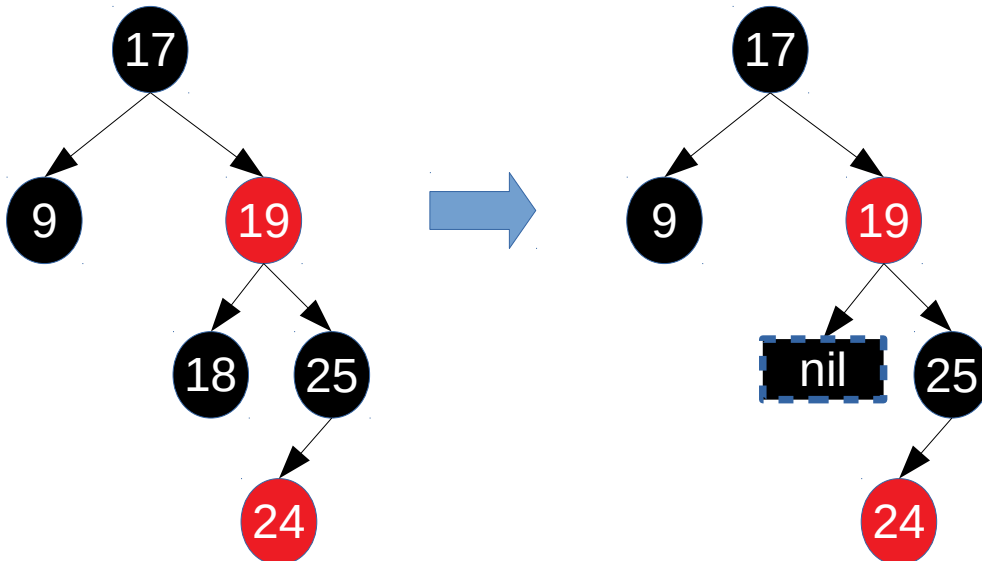
Remoção Nó Preto

- Situação 6
 - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.
- Exemplo:
 - Remover o nó **18**.



Remoção Nó Preto

- Situação 6
 - Remover nó preto com pai rubro, sobrinho vermelho e dois filhos pretos.
- Exemplo:
 - Remover o nó **18**.



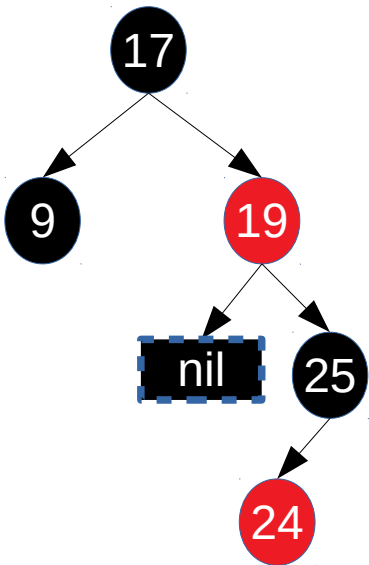
Remoção Nó Preto

Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).

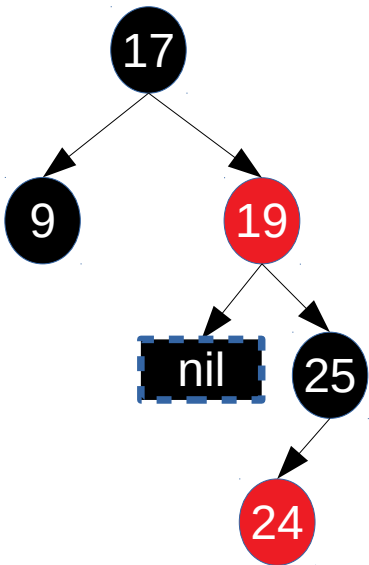
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).



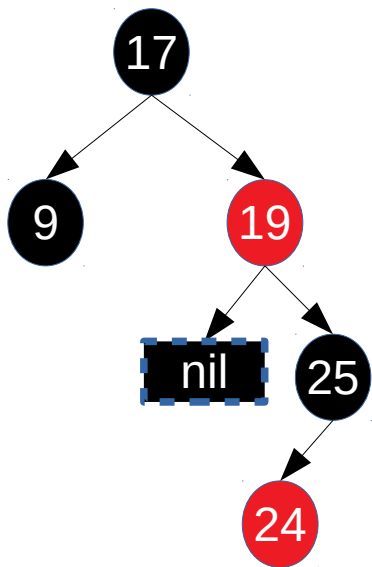
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Colorimos o irmão (25) de vermelho e o sobrinho (24) de preto.



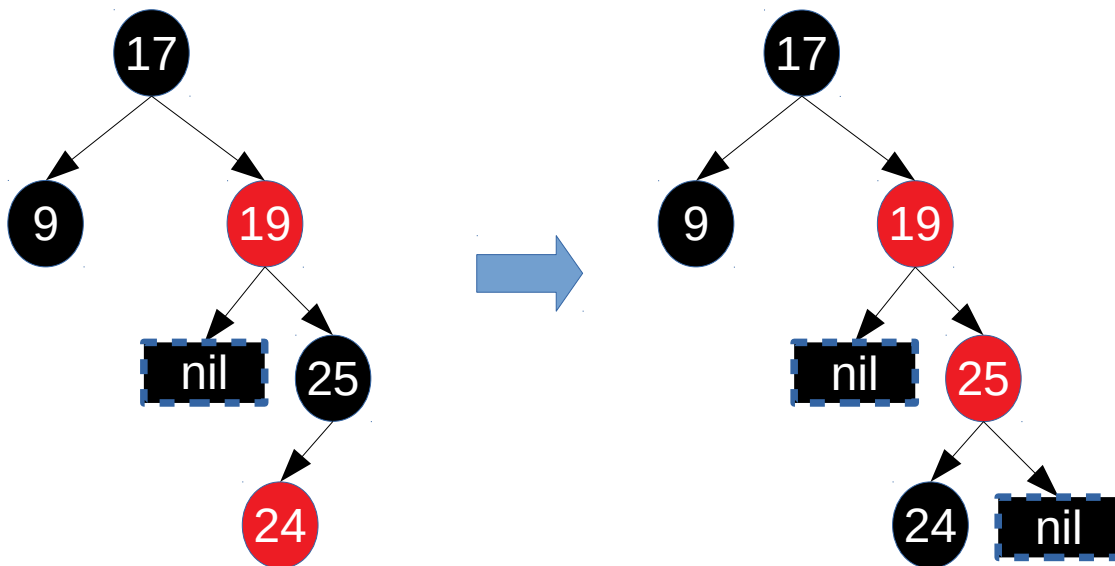
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Colorimos o irmão (25) de vermelho e o sobrinho (24) de preto.



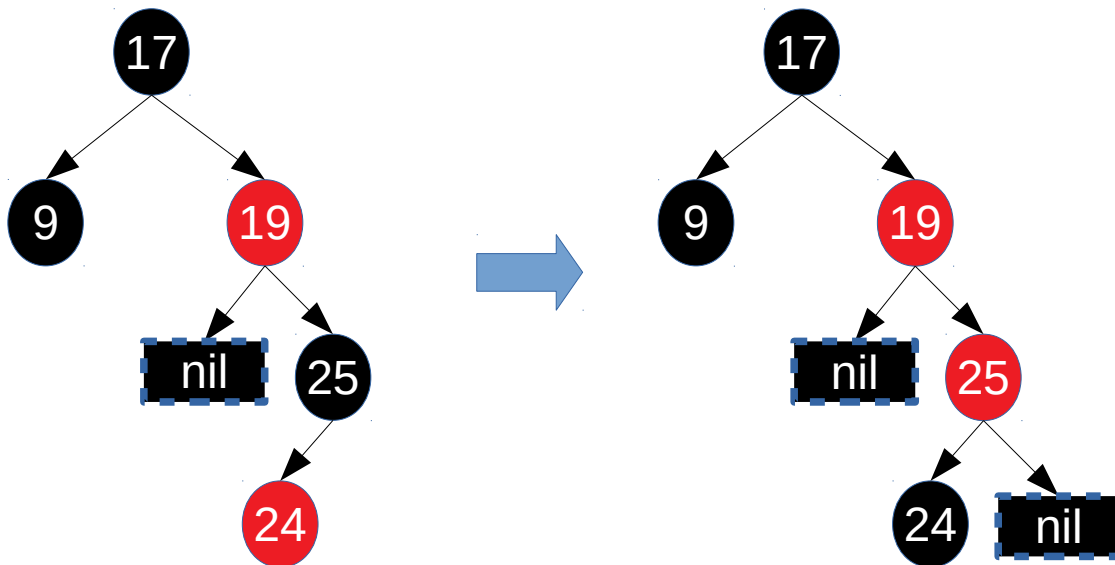
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Colorimos o irmão (25) de vermelho e o sobrinho (24) de preto.



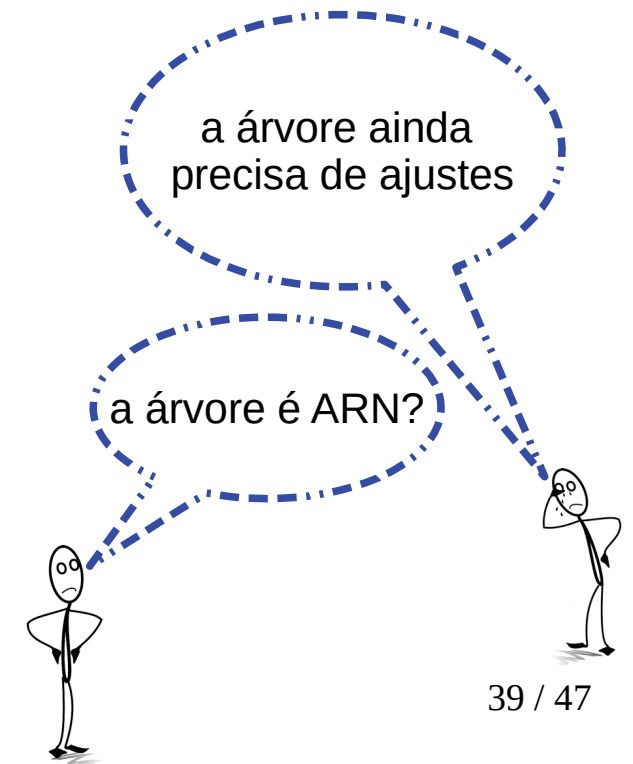
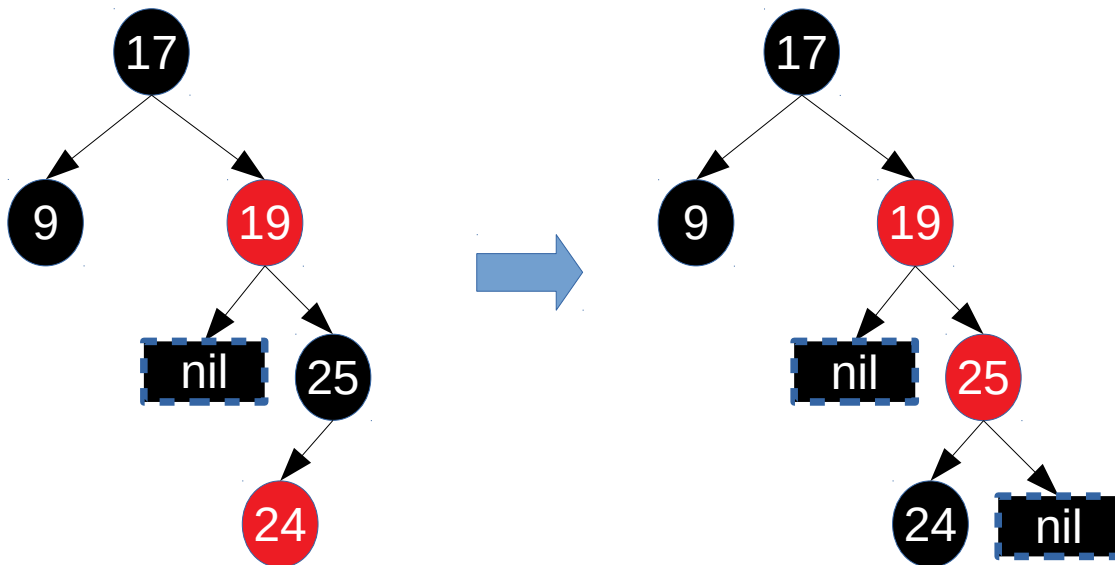
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Colorimos o irmão (25) de vermelho e o sobrinho (24) de preto.



Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Colorimos o irmão (25) de vermelho e o sobrinho (24) de preto.



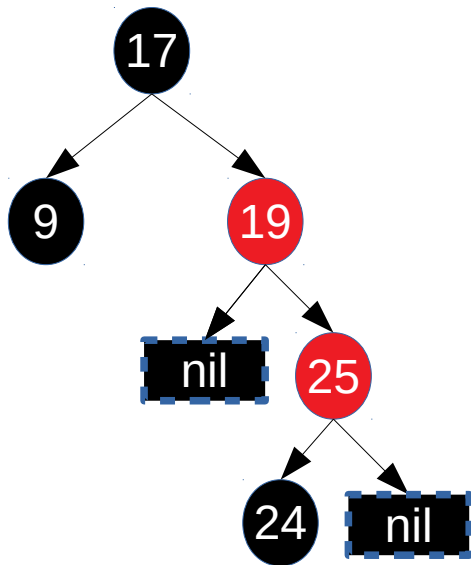
Remoção Nó Preto

Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).

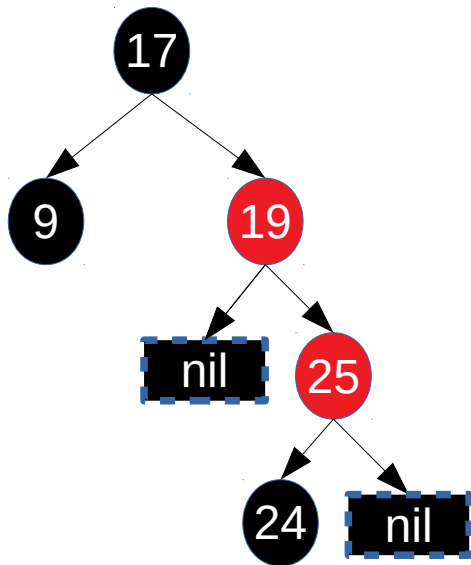
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).



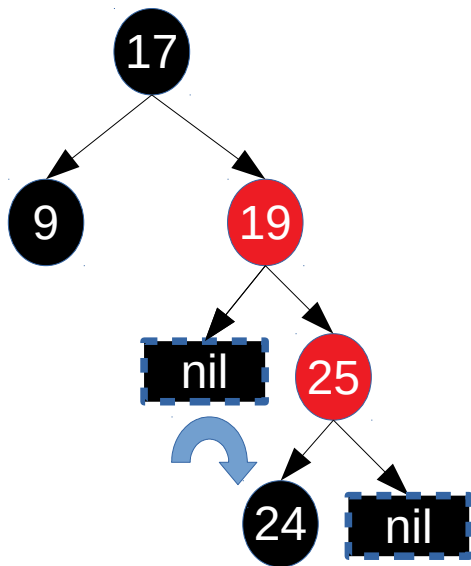
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Rotacionamento em torno do irmão (25).



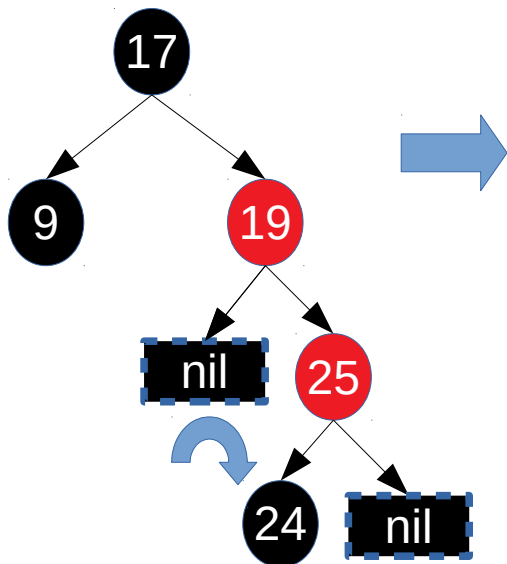
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Rotacionamento em torno do irmão (25).



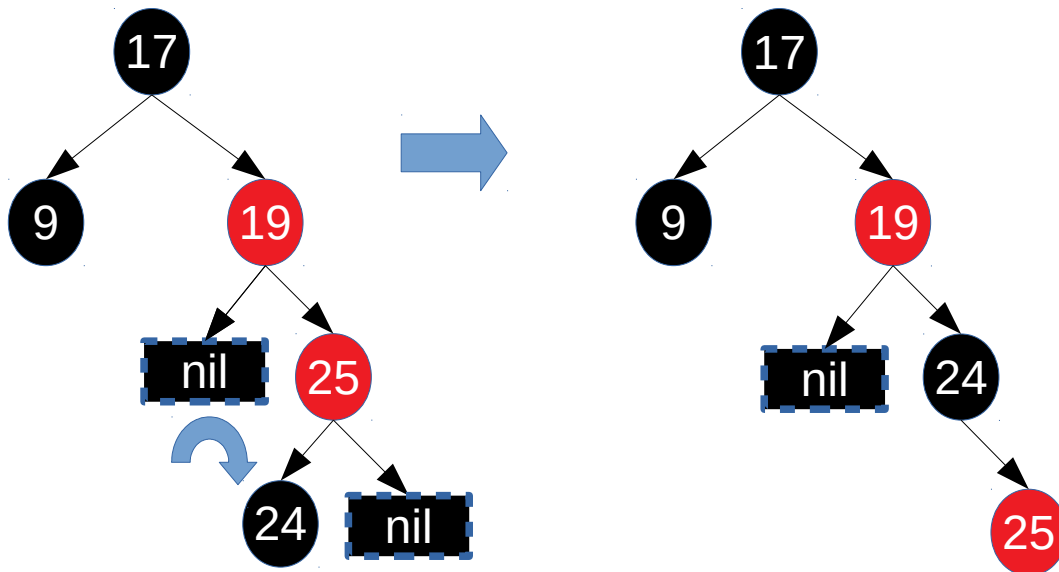
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Rotacionamento em torno do irmão (25).



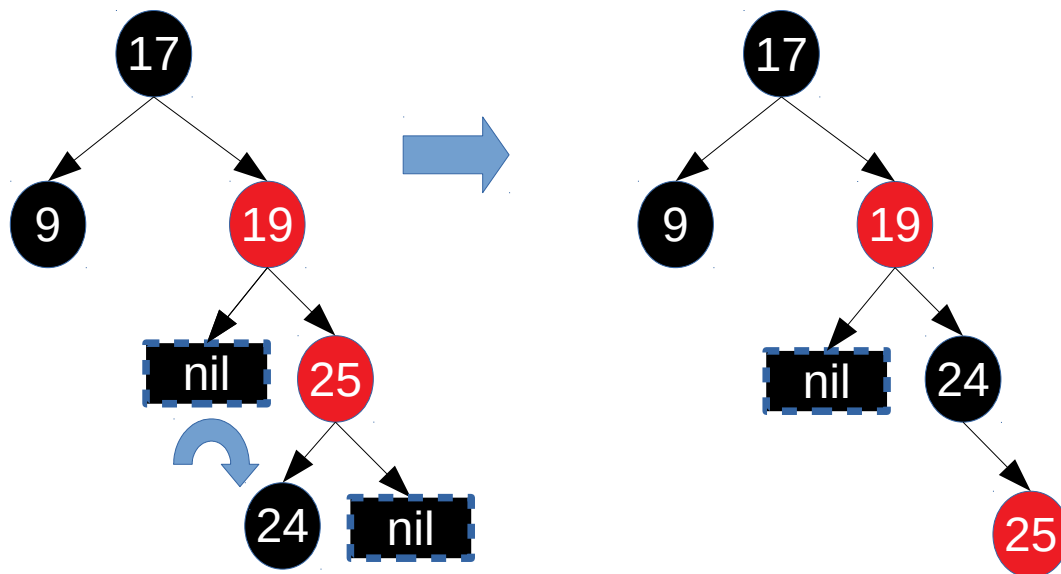
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Rotacionamento em torno do irmão (25).



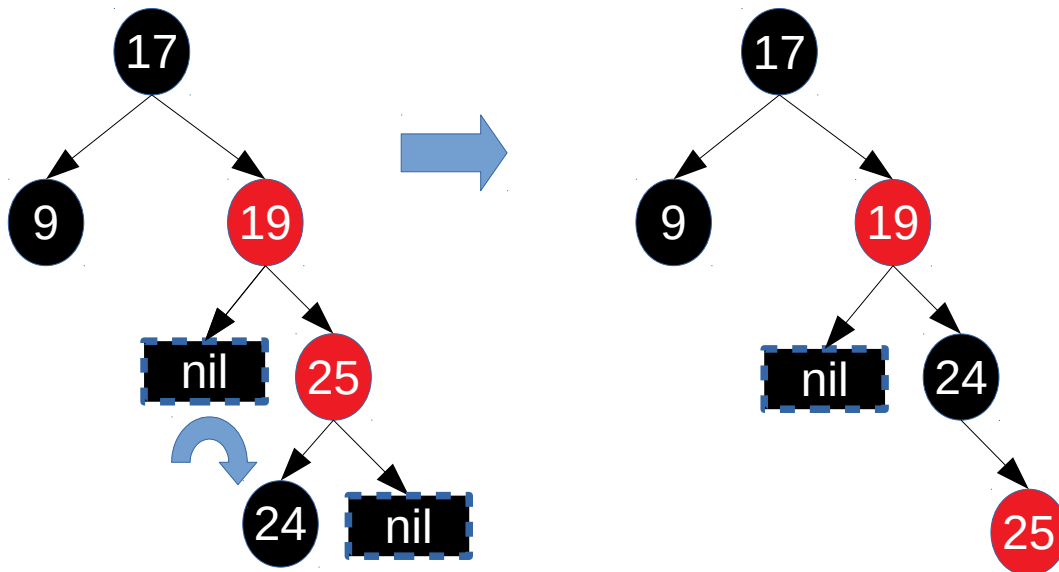
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Rotacionamento em torno do irmão (25).



Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Rotacionamento em torno do irmão (25).



a árvore ainda precisa de ajustes

a árvore é ARN?



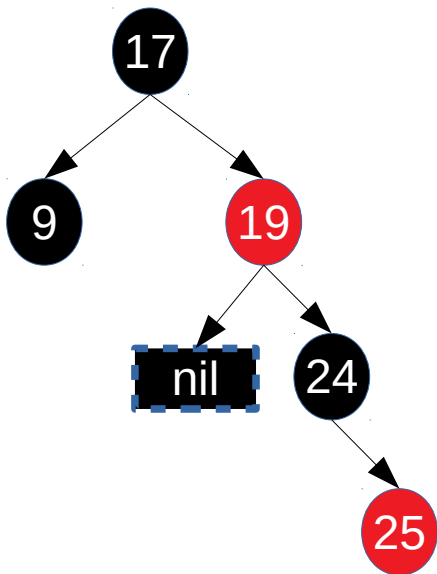
Remoção Nó Preto

Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).

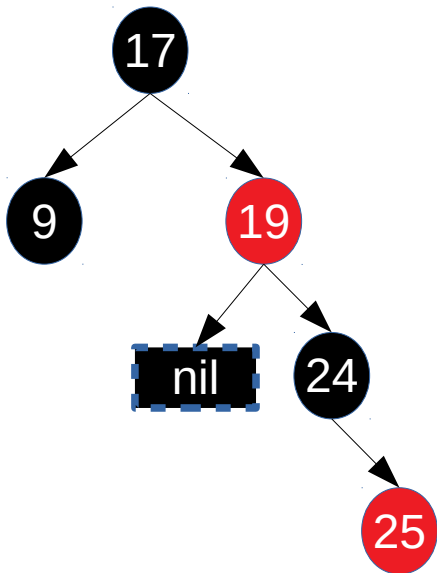
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).



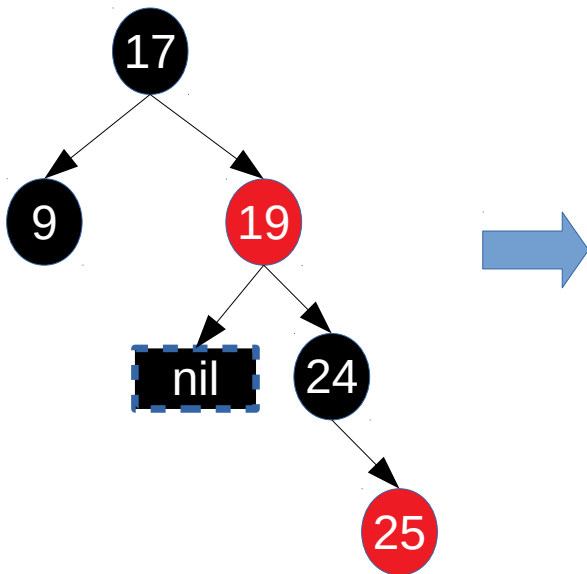
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Coloração pai (19), irmão (24) e sobrinho (25).



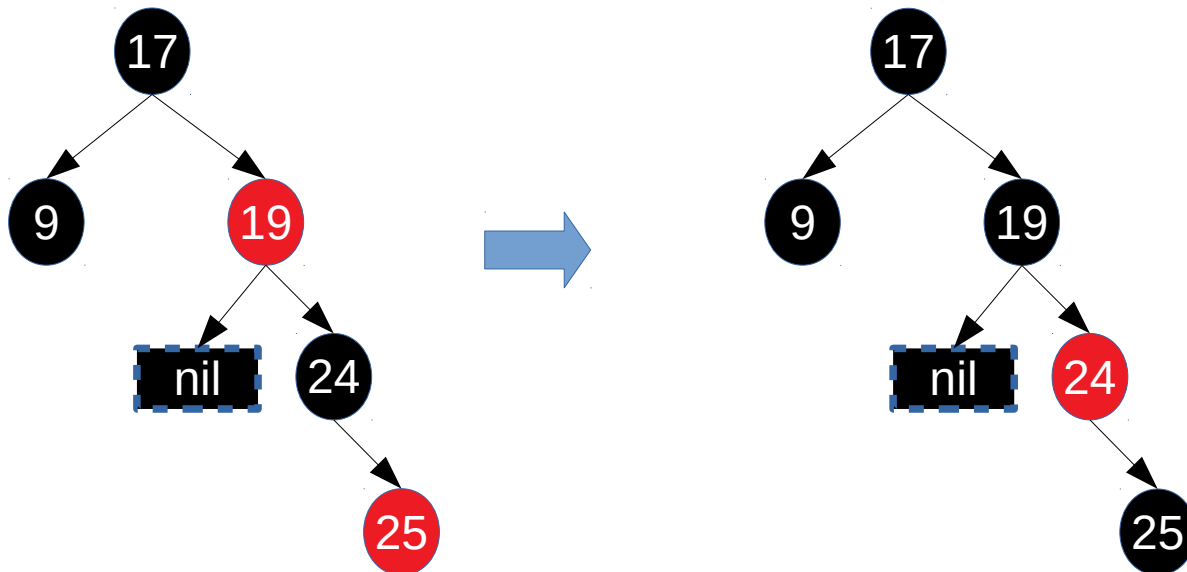
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Coloração pai (19), irmão (24) e sobrinho (25).



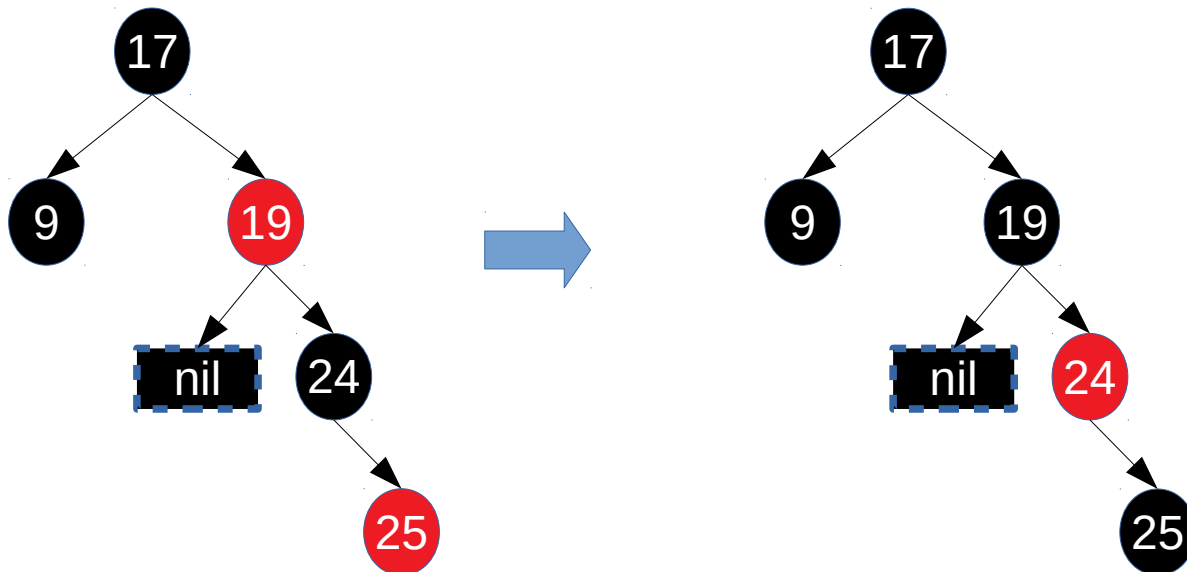
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Coloração pai (19), irmão (24) e sobrinho (25).



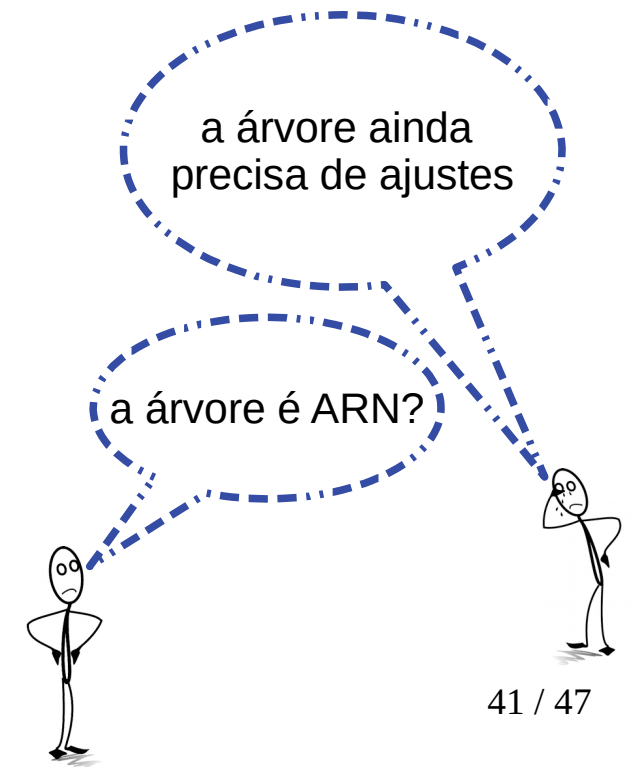
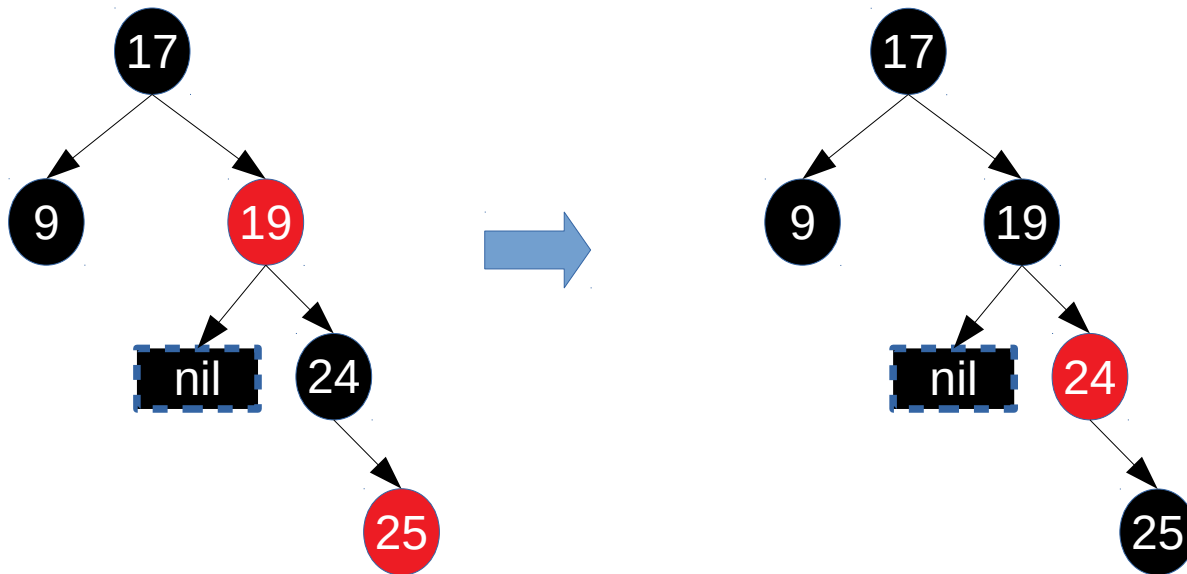
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Coloração pai (19), irmão (24) e sobrinho (25).



Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Coloração pai (19), irmão (24) e sobrinho (25).



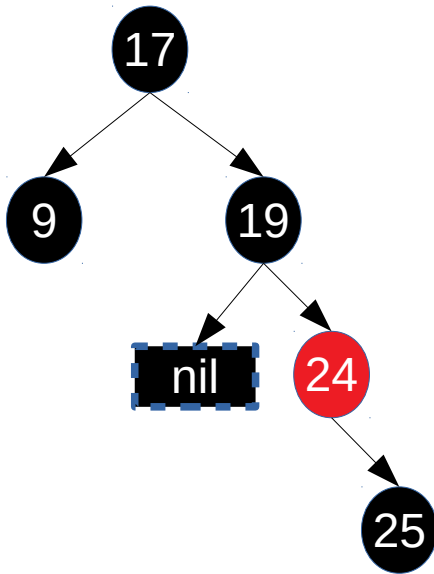
Remoção Nó Preto

Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).

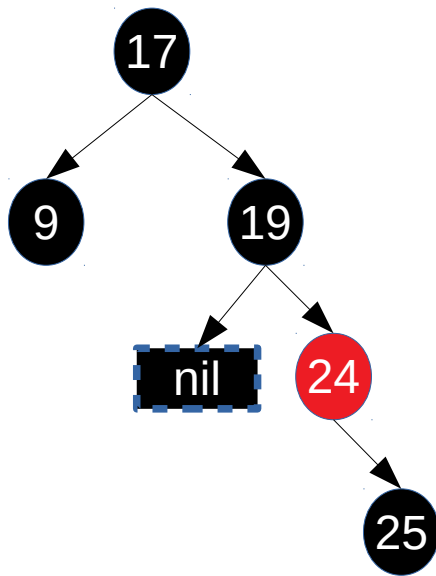
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).



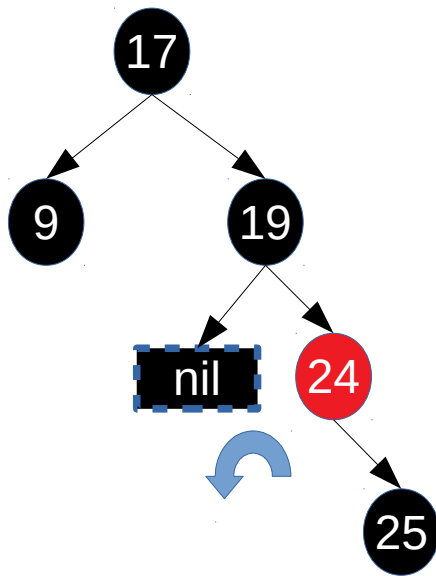
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Rotação do irmão (24).



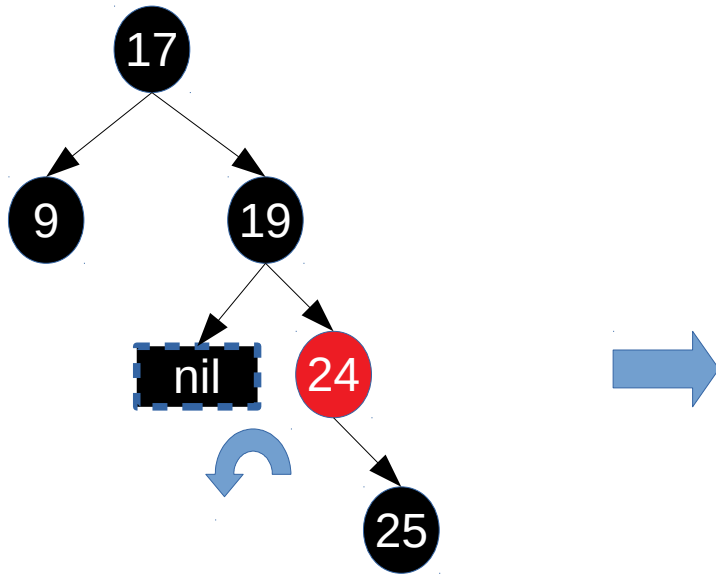
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Rotação do irmão (24).



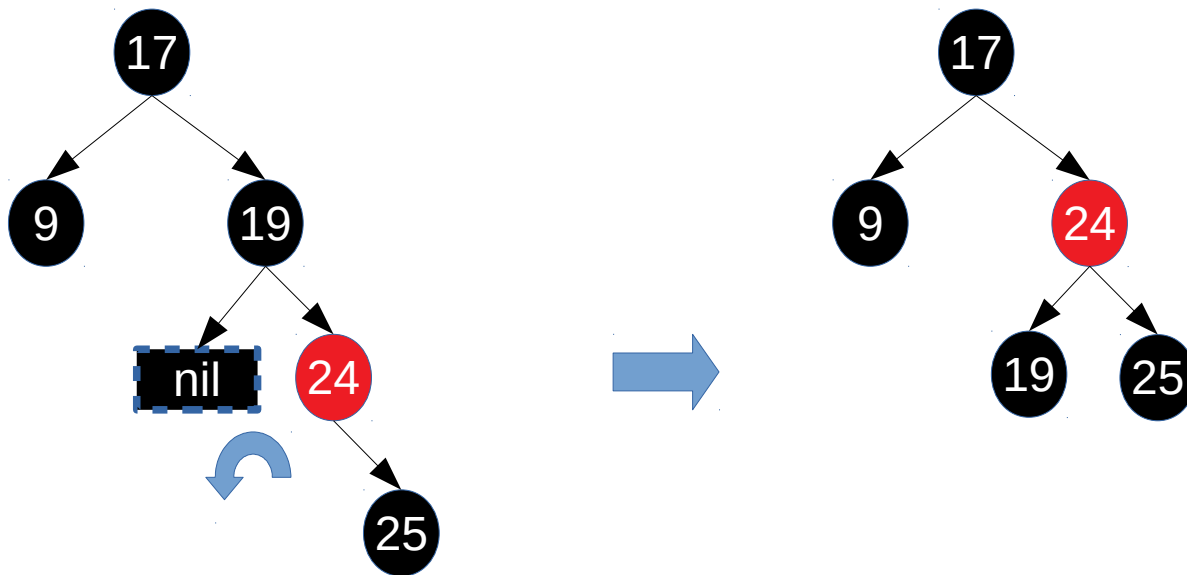
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Rotação do irmão (24).



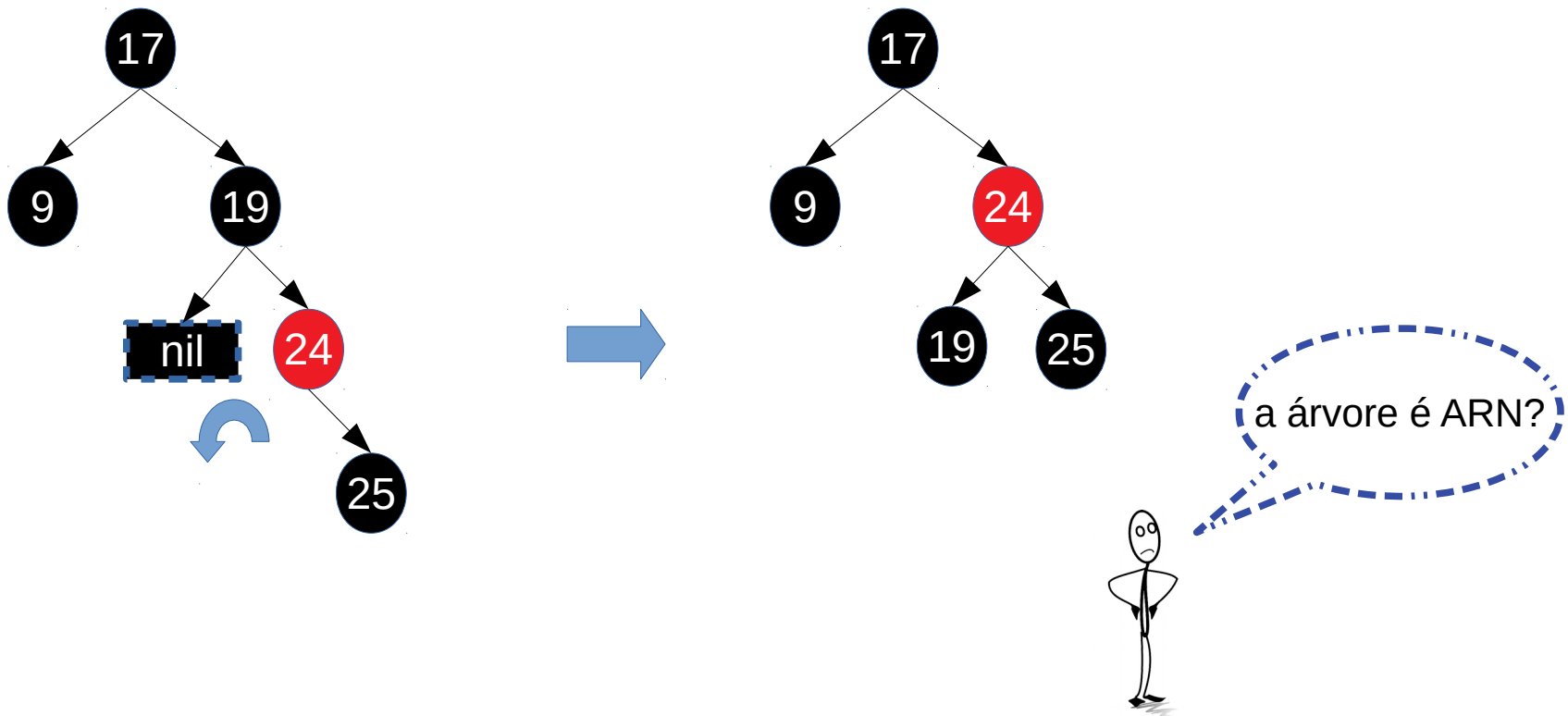
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Rotação do irmão (24).



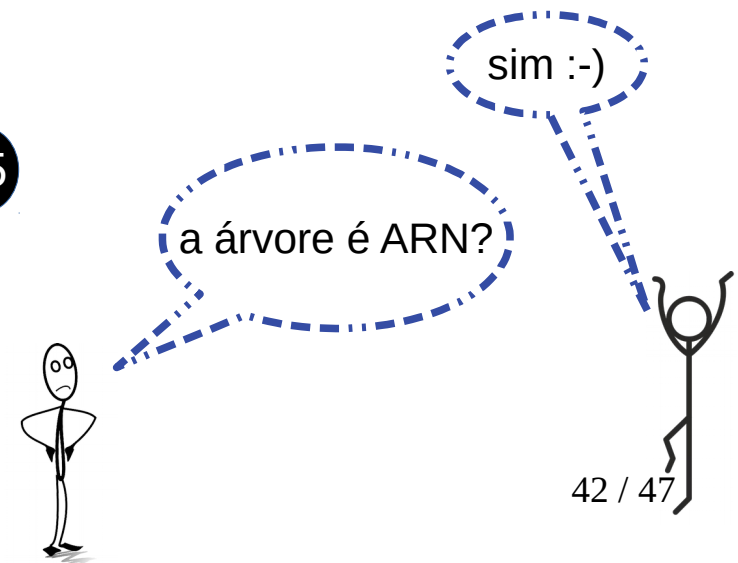
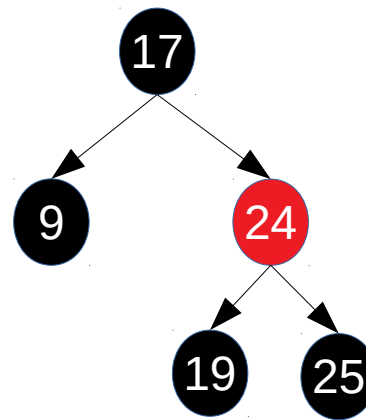
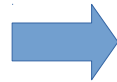
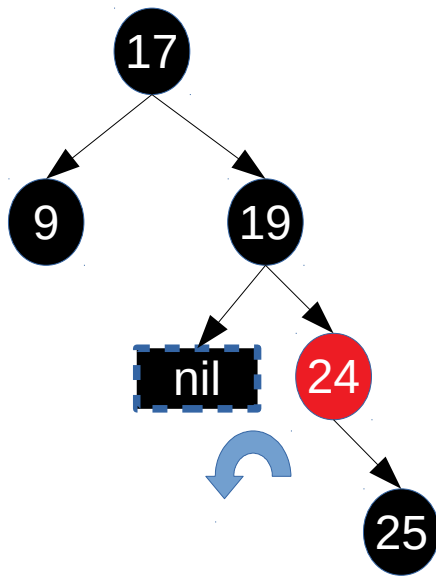
Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Rotação do irmão (24).



Remoção Nó Preto

- Exemplo: remover **18** (continuação).
 - Rotação do irmão (24).

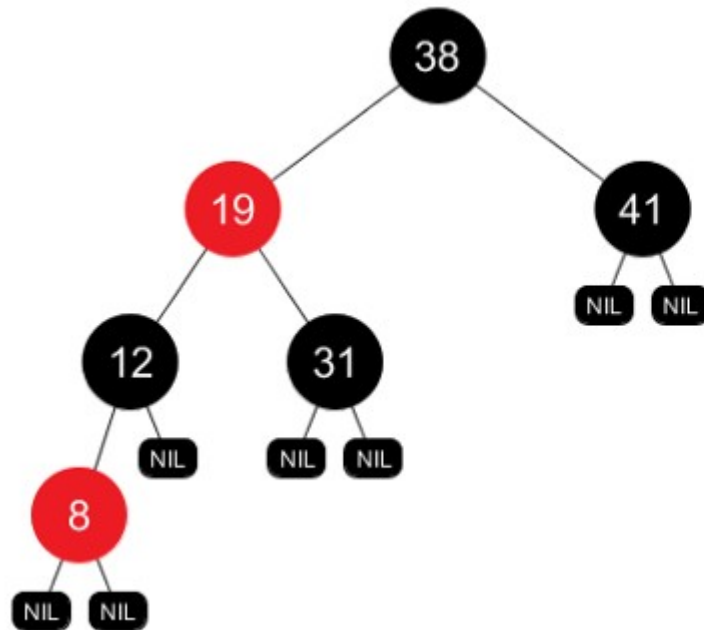


Exercícios

- Mostre as árvores rubro-negras resultantes da inserção das seguintes chaves: 41, 38, 31, 12, 18 e 8 em uma árvore inicialmente vazia. Em seguida, mostre as árvores rubro-negras que resultam da eliminação sucessiva das chaves 8, 12, 18, 31, 38 e 41.
- Qual é a altura mínima de uma árvore rubro-negra que contém N nós?

Exercícios

- Considere a árvore rubro-negra abaixo e faça o que se pede:
 - Como ficaria a árvore após a remoção do elemento 8?
 - Como ficaria a árvore após a remoção do elemento 12?



Exercícios

- Faça uma comparação em termos de ordem de complexidade entre as árvores AVL e ARN. Se possível apresente exemplos para cada afirmação.
- É possível afirmar que as árvores AVL tendem a ser mais balanceadas que as árvores rubro-negras? Justifique a sua resposta.

Exercícios

- Quando um novo elemento é inserido em uma ARN, este elemento é colocado conforme o procedimento de uma ABB. Qual é a cor inicial desse elemento, caso ele não seja a raiz? Justifique a sua resposta.

Exercícios

- Considere a árvore rubro-negra mostrada na figura abaixo e responda ao que se pede:
 - a) Mostre o resultado da árvore após a remoção do elemento 40.
 - b) Em seguida, insira o elemento 40 de volta na árvore.

